وزارت تعلیم و تربیه
ریاست تألیف و ترجمه

الجبر

برای صنف هشتم

مولفان: نظام الدین، عبدالبصیر (بینا احمدزی) و پوهنمل محمد امان (نادری)

کابل - ۱۳۶۴

شاگردان عزیز !

انقلاب دوران ساز ثور که تحت رهبری حزب دموکراتیک خلق افغانستان پیروز گردید برضد زیربنای فرتوت و پوسیدهٔ نظام فیودالی وساختمانهای ناقص روبنای آن ازجمله روابط طبقاتی تعلیم وتربیه به مبارزه آغاز نمود. و برای ایجاد یک سیستم مترقی همگانی و انقلابی تعلیم و تربیه پیکار بی امان خواهد نمود.

رژیم انقلابی و دموکراتیک درهمه ساحه های زندگی جامعهٔ ماتحولات عمیق و بنیادی را بمیان خواهد آورد که در بخش تعلیم وتربیه برای نوسازی وشگوفانی فرهنگ و تربیت انسان نوین تحول بزرگ آموزشی وپرورشی را پیریزی نموده که از سرچشمه زلال انقلاب شکوهمند ثور آبیاری میشود.

شاگردان عزیز !

شما از سیستم تعلیمی جدید که براساس حاکمیت ملی جبهه وسیع پدروطن وبراساس ضرورتهای مادی ومعنوی مردم زحمتکش کشور طرح شده ودر کشور انقلابی وقهرمان خود استفاده میکنید.

وظیفهٔ شما نسل جوان فراگرفتن تعلیم انقلابی ودانش نوین است که بشریت مترقی آنرا بوسیله کار وپیکار تدوین وتکامل بخشیده است . تنها انسان مجهز باکسب دانش مترقی میتواند بوطن . خلق انقلاب وجریان پیشروندهٔ تاریخ مفید وواقع گردد . هیچ سعادت وافتخار بالاتر ازخدمت بخلق وتربیهٔ انسان اندیشمندوجود ندارد .

وزارت تعلیم وتربیهٔ جمهوری دموکراتیک افغانستان افتخار دارد که همگام با این تحول عظیم کتاب موجود را بدسترس شما قرار میدهد . امید است ازین کتاب هرچه بیشتر استفاده اعظمی بعمل آید. یقین است . علم ودانش راکه شما کسب مینمایید دراعمار جامعهٔ نوین عاری از استثمار فرد ازفرد نقش پرثمری را ایفا نماید .

(e) $(x-2)(x+5)$; (f) $(y+8)(y-7)$;
(g) $(p+1)(p+1)$ (h) $(9-q)(9-q)$

2 . افاده های زیر را به شکل پولینومهای معیاری تبدیل کنید:

(a) $(y-5b)(y+5b)$; (b) $(2a+3)(3-2a)$
(c) $(p^2-1)(1-p^2)$; (d) $(x+7)^2$
(e) $(a-2x)^2$; (f) $(-3p-q)^2$

3 . معادله های ذیلرا حل کنید:

(a) $-5x=16$; (b) $2x=-\frac{1}{5}$; (c) $\frac{1}{3}x=4$
(d) $0{,}01y=-1$; (e) $2(x-5)-3(8-x)=1$
(f) $18-15(y-3)=5(9-y)$

4 . افاده های زیر را به شکل حاصل ضرب دوقوس بنویسید .

(a) $ax+ay$; (b) $5b-5c$; (c) $6m-18$
(d) $15ax-5ay$; (e) x^2-xy; (f) $xy-y^2$
(g) $3xy^3+6xy^2-18xy$; (h) $15a^3b+10a^2b-20a^2b^2$

5 . به عوامل ضربی تجزیه کنید .

(a) $5.(y-3)-x(y-3)$; (b) $my-mx+ny-nx$
(c) $6m-12-2n+mn$; (d) $a^2+ab+ax+bx$
(e) $x^2-xy-5x+5y$; (f) $a+b-a^2-ab$

6 . پولینومهای زیررا به شکل ضرب دوقوس ارائه نمایید .

(a) a^2-9; (b) x^2-4y^2 (c) $25a^2-b^2$
(d) $49p^3-p$; (e) a^2-6a+9; (f) $16x^2+8x+1$

7 . معادله های زیر را حل کنید:

(a) $(x-2)(x+5)=0$; (b) $x^2-12x=0$
(c) $y^2-64=0$; (d) $x^2+9=0$
(e) $25x^2-4=0$;

8 . گراف تابعهای زیر را رسم کنید :

(a) $y=\frac{1}{2}x$; (b) $y=2x-3$

(c) $y=-\frac{1}{4}x+2$; (d) $y=0\cdot x+4$

9 . آیا گراف تابع $y=5x^2$ از نقاط $A(2;20)$ ، $B(-2;20)$ ، $C(2;-20)$ ، $D(\frac{1}{2};1,25)$ و $E(-\frac{1}{2};1,25)$ میگذرد ؟

10 . طول یک مستطیل سه چند عرض آن است هرگاه طول و عرض این مستطیل به اندازه 5cm زیاد شود مساحت آن به اندازهٔ $140cm^2$ زیاد میگردد اندازه طول و عرض مستطیل را دریافت کنید .

11 . طول یک مستطیل نظر به عرضش 10cm زیادتر است هرگاه طول مستطیل به اندازه 15cm کم و عرضش به اندازه 5cm زیاد شود در اینصورت مساحت مستطیل به اندازه $105cm^2$ کم میگردد مساحت مستطیل را دریافت کنید .

12 . فاصله بین دو شهر 180km است. دو نفر در عین وقت که یکی توسط موترسیکل و دیگری توسط بایسکیل مقابل هم در حرکت شدند و بعد از 2 ساعت باهم ملاقات کردند اگر سرعت موترسیکل سوار نظر به سرعت بایسکیل 60 کیلو متر فی ساعت زیادتر باشد سرعت بایسکیل سوار را معلوم کنید .

13 . سه عدد طبیعی پی در پی را به‌دست آرید طوری که حاصل ضرب اعداد دومی و سومی نظر به حاصل ضرب اعداد اولی و دومی به اندازه 80

زیادتر باشد عدد متوسط کدام است ؟

2 . کسر، ساحه‌های معین کسر

هر افاده که به شکل $\frac{a}{b}$ باشد در حالیکه a و b اعداد یا متحولها را ارائه میکنند بنام کسر (اعداد نسبتی) یاد میگردند . a را بنام صورت کسر b را به نام مخرج یاد میکنند . مثلاً کسرهای $\frac{\frac{4}{7}-\frac{2}{3}}{22}$ ، $\frac{16+3,7}{0,02}$ و $\frac{3}{5}$ عبارت از افاده‌های عددی اند .

و کسرهای $\frac{x^2-5x+7}{y-2}$ ، $\frac{8}{a}$ و $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{10}$ افاده‌های اند که متحول را در بردارد .

برای دریافت قیمت عددی هر افاده یی که به شکل کسر است معمولاً صورت آنرا تقسیم مخرج آن مینمایند .

هرگاه مخرج یک کسر مساوی به صفر باشد در اینصورت این نوع کسر مفهوم ندارد زیرا تقسیم کردن به صفر ناممکن است .

قیمت کسرهای متحول دار مربوط به قیمتهای متحول آن کسر است.

مثلاً : کسر $\frac{a+3}{a-5}$ به قیمت a=8 به کسر $3\frac{2}{3}$ تبدیل میشود به همین قسم به قیمت a = 4 قیمت کسر مذکور مساوی به 7- است و به قیمت a=5 کسر $\frac{a+3}{a-5}$ معنی ندارد، پس 5 تنها عددی است که به قیمت متحول a مساوی به 5 کسر مذکور معنی ندارد دیگر برای تمام قیمتهای a کسر

مذکور دارای معنی بوده و قیمت آن معین است . دراینصورت گفته میشود که ساحه تعریف کسر $\frac{a+3}{a-5}$ عبارت ازست تمام اعداد حقیقی به استثناء عدد 5 میباشد .

تعریف : ساحه تعریف یک افاده متحولدار عبارت ازست تمام آن قیمتهای متحول است که بنابر آن قیمتها افاده مذکور دارای مفهوم باشد .

هر افاده تام برای تمام قیمتهای متحول دارای معنی است مثلاً :
پولینوم y^3-8y^2+3y+7 برای تمام قیمتهای عددی دلخواه y دارای قیمتهای معین عددی است .

برای یافتن قیمتهای این پلینوم اجرای بعضی از عملیه ها بالای اعداد که عبارت ازرفع طاقتها، جمع، ضرب و تفریق اند لازم است.

بنابراین ساحه تعریف، ساحه تعریف این افاده و دیگر افاده‌های تام عبارت ازست تمام اعداد حقیقی میباشد .

برای تعین ساحه تعریف افاده‌های نسبتی متحولدار که صورت ومخرج آن افاده‌های تام باشند نخست آن قیمتهای راتعین میکنیم که بنابرآنها قیمت افاده مخرج صفر میشود .

وسپس این قیمتهارا ازست اعداد حقیقی حذف مینمایم که ست باقیمانده اعداد حقیقی ساحه تعریف افاده مذکور را تشکیل میدهد .

مثال 1 : میخواهیم ساحه تعریف کسر $\frac{x-4}{2x+6}$ را دریافت نمائیم .

دیده میشود که صورت ومخرج آن به هر قیمت x دارای معنی است . اکنون همان قیمت x راکه افاده مخرج را صفر میسازد دریافت مینمائیم .

$$2x+6=0$$
$$2x=-6$$
$$x=-3$$

حالا گفته میتوانیم که کسر $\frac{x-4}{2x+6}$ برای تمام قیمتهای x به استثنای $x=-3$ دارای معنی است یعنی ساحه تعریف کسر فوق عبارت ازست تمام اعداد حقیقی به استثناء 3- میباشد، وآنرا چنین مینویسیم :

$X =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; \infty[$

مثال 2 : ساحه تعریف کسر $\frac{a}{a^2+1}$ رابدست می آوریم.

ـ مخرج کسر (a^2+1) به هر قیمت a خلاف صفراست یعنی a^2+1 جذر حقیقی ندارد ازین سبب ساحهٔ تعریف این کسر عبارت ازست تمام اعداد حقیقی است . یعنی : $X=]-\infty ; +\infty[$

سوالات :

14 . هریك ازافاده های نسبتی زیررا تشکیل دهید :

(a) صورت کسر حاصلضرب متحولهای x و y ومخرج آن عبارت ازحاصل جمع آنها باشد .

(b) صورت کسر حاصل تفریق a و b ومخرج آن عبارت از حاصل جمع آنها باشد .

(c) صورت کسر عبارت از حاصل تفریق مربعات متحولهای x و y و مخرج آن حاصل جمع مربعات این متحولها باشد.

(d) صورت کسر دو چند حاصلضرب a و b و مخرجش حاصل جمع مکعبهای این متحولها باشد.

15 - قیمت کسرهای زیررا دریافت کنید:

(a) $\frac{0,75\cdot 0,4-5,7}{1,86\div 0,31}$; (b) $\frac{1,95\div 1,3+2,5}{3,4\cdot 0,8+3,28}$

(c) $\frac{129^2-17^2}{58}$; (d) $\frac{253^2-47^2}{300}$

16 . قیمت کسر $\frac{y-1}{y}$ را برای قیمتهای $y=3;1;-5;\frac{1}{2};-1,6$ حساب کنید.

17 . قیمت کسر $\frac{(a+b)^2-1}{a^2+b^2}$ را حساب کنید درصورتی که:

(a) اگر $a=-3$; $b=-1$ باشد،

(b) اگر $a=1\frac{1}{2}$; $b=-0,5$ باشد.

18 . اگر $x\in\left\{7;\ 1;\ 0;\ -5;\ 5\frac{2}{3}\right\}$ باشد ست قیمتهای کسر $\frac{x+5}{x-3}$ را تعین کنید.

19 . بکدام قیمت متحولهای x

(a) قیمت کسر $\frac{x-3}{5}$ مساوی به 1 میشود

(b) قیمت کسر $\frac{8}{y+6}$ مساوی به -1 میشود؟

20 . ساحهٔ تعریف کسر های ذیلرا پیدا کنید:

(a) $\frac{5}{x-2}$; (b) $\frac{x^2+4}{1-2x}$; (c) $\frac{2y^2-9}{3(4y-1)}$

(d) $\frac{x-5}{10}$; (e) x^2-8x+4 ; (f) $\frac{16}{(x-1)(x+4)}$

(g) $\frac{9}{2x^2-8x}$; (h) $\frac{1}{y^2+1}$; (i) $\frac{\frac{3}{y}+5}{\frac{8}{y}-4}$.

21 - تابع f توسط فورمولهای زیر داده شده ساحه تعریف هر کدام از آنهارا تعین دارید:

(a) $y=\frac{1}{x}$; (b) $y=\frac{12}{x-3}$; (c) $y=\frac{9}{x^2+5x}$; (d) $y=\frac{6}{x^2+4}$

22 - کسرها یی را بنویسید که به‌قیمتهای داده‌شده‌زیر متحولها، بی معنی باشند.

(a) $x=7$; (b) $a=-9$; (c) $y=6$ ویا $y=13$

(d) $b=0$ ویا $b=-2$

خواص کسر

3. شرایط صفر شدن یك کسر:

یك کسر وقتی مساوی به صفر میشود که صورت آن مساوی به صفر بوده ومخرج آن خلاف صفر باشد (درصورت صفر بودن مخرج کسر معنی ندارد).

مثلاً کسر های $\frac{0}{5}$; $\frac{0}{-0,7}$; $\frac{0}{2\frac{3}{11}}$ مساوی به‌صفر اند .

ولی کسر $\frac{0}{0}$ معنی ندارد چرا ؟

حالا کسر $\frac{a}{b}$ را در نظرمیگیریم که در اینجا a و b اعداد نسبتی اند این کسر وقتی مساوی به‌صفر است که $a=0$ و $b \neq 0$ باشد .

یعنی: $(\frac{a}{b}=0) <=> (a=0 ; b \neq 0)$

ازاین شرط صفرشدن یك کسردرحل معادله ها نیز استفاده مینمایيم برای حل این مطلب مثالهای ذیل را درنظر میگیریم:

1 . معادله $\frac{2x-5}{3+x}$ را حل مینمائیم :

کسر $\frac{2x-5}{3+x}$ فقط‌بنا بر شرایط $2x-5=0 ; 3+x \neq 0$ مساوی به‌صفر میشود .

یعنی آن قیمت های x که سیستم معادله های داده شده

I .... $\begin{cases}2x-5=0\\3+x \neq 0\end{cases}$ را صدق نماید جواب مطلوب است . دیده میشود که $2x-5=0$ دارای جذر 2,5 بوده که به همین قیمت x افاده الجبری $3+x \neq 0$ به‌افاده‌عددی $3+2,5 \neq 0$ تبدیل میشود که این نیزدارای حقیقت است .

پس عدد 2,5 حل سیستم‌معادلات (I) است .

بنا بر این عدد 2,5 جذر معادله $\frac{3x-5}{3+x}=0$ میباشد .

مثال 2 . معادله کسری $\frac{3x}{120+x-x^3} + \frac{x^2-2x}{x^3-x-120}$ را در نظرمیگیریم : طرف چپ معادله کسری راجمع نموده معادله کسری

$$\frac{x^2-5x}{x^3-x-120}=0$$

را حاصل میکنیم. سپس معادله کسری آخر را به شکل سیستم ذیل ترتیب میدهیم :

$$\begin{cases}x^2-5x=0\\x^3-x-120 \neq 0\end{cases}$$

حالا معادله $x^2-5x=0$ را حل مینمایم .

$x(x-5)=0$ ازاینجا $x=0 ; x=5$ حاصل میشود .

اکنون این جذرحاصل شده‌را درغیر معادله $x^3-x-120 \neq 0$ امتحان میکنیم و دیده میشود که :

(یك افاده‌حقیقی‌است) $0^3-0-120 \neq 0$

(یك بیانیه غلط است) $5^3-5-120 \neq 0$

درحقیقت معادله‌داده شده‌دارای یك حله که آن‌صفراست میباشد.

یعنی‌ست حله‌آن $\{0\}$ است .

سوالات

23 - هرگاه صورت یك کسر مساوی به صفر گردد آیا ضرور است که نتیجهٔ کسر مذکور مساوی به صفر باشد ؟

24 - اگر قیمت یك کسر مساوی به صفر باشد آیا گفته میتوانیم که

صورت آن مساوی به صفراست؟

25 - آیا قیمت هر یك از کسرهای ذیل مساوی به صفرشده میتواند؟

(a) $\frac{3,6\div1,2-3}{5,6\cdot2,1-11,76}$; (b) $\frac{-8\div0,4+0,02\cdot1000}{1,753\cdot0,8+1,2}$

(c) $\frac{\left(1\frac{2}{9}\div7\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot0,23}{2\frac{1}{8}+1,2}$; (d) $\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot8-\frac{2}{3}}{1,85-1,65}$?

26 . به کدام قیمتهای y قیمت هر یك از کسر های ذیل مساوی به صفراست :

(a) $\frac{y}{5}$; (b) $\frac{y-1}{3}$; (c) $\frac{y-12}{y^2+1}$; (f) $\frac{(y-7)\ (y+2)}{y}$?

27 - کسرها یی را به متحول y بنویسید که برای قیمتهای ذیل y مساوی به صفرشوند :

(a) $y=8$; (b) $y=-1$; (c) $y=8$ یا $y=-1$

28 - آیا درهر یك از کسرهای ذیل قیمتی برای متحول x وجود دارد که بنابر آن قیمت کسر داده شده مساوی به صفرشود .

(a) $\frac{x-2}{7}$; (b) $\frac{7}{x-2}$; (c) $\frac{x}{10}$;

(e) $\frac{x^2+1}{x+5}$; (f) $\frac{x+5}{x^2+1}$?

29 - هریك ازمعادله های زیررا حل کنید .

(a) $\frac{x-3}{x}=0$; (b) $\frac{2x+7}{x-2}=0$

(c) $\frac{(2x-1)\ (x+4)}{x+3}=0$; (d) $\frac{x^2-16}{2x}=0$; (f) $\frac{x^2+16}{x}=0$.

30 - نقاط تقاطع هر یك از تابعهای زیررا با محورات کمیات وضعیه تعیین کنید .

(a) $y=\frac{x-4}{8}$; (b) $y=\frac{x}{12}$; (c) $y=\frac{(x+5)\ (x-7)}{10}$; (d) $y=\frac{4}{x+9}$.

31 - آیاهرجوره ازمعادله های ذیل باهم معادل اند .

(a) $2x-7=0$ و $\frac{2x-7}{x+5}=0$ ،

(b) $x^2-16=0$ و $\frac{x^2-16}{x-11}=0$ ،

(c) $\frac{x-3}{x^2-9}=0$ و $x-3=0$ ؟

32 . هریك ازمعادله های کسری زیرراحل کنید :

(a) $\frac{y^2}{y^2+5}-\frac{5y}{y^2+5}=0$

(b) $\frac{y^2}{y^3+64}-\frac{16}{64+y^3}=0$

33 - تابع $y=\frac{(x+3)\ (x-6)}{x-2}$ داده شده است .

(a) $f(0)$; $f(3):f(-3)$ و $f(2)$ را دریافت کنید .

(b) ساحه تعریف تابع را پیدا کنید .

(c) آن ست قیمتهای متحول را که بنابر آن قیمتهای تابع $f(x)=0$ گردد تعین کنید .

(d) مختصات نقطه تقاطع تابع بامحور y پیدا کنید و بگوئید که

آیا گراف تابع مذکور از نقاط A (7 ; 2) و B(—6;9) عبور مینماید یا خیر ؟

4. اختصار و خاصیتهای اساسی کسرها

اگر قیمت کسرهای $\frac{3x^2}{8x}$ و $\frac{3x}{8}$ را به قیمت $x=0$ مقایسه نمائیم دیده میشود که کسر $\frac{3x^2}{8x}$ دارای مفهوم نیست (معنی ندارد). از این جهت افاده‌های $\frac{3x^2}{8}$ و $\frac{3x}{8}$ را به قیمت $x=0$ به حیث افاده‌های معادل یا مطابق باهم پذیرفته نمیتوانیم. به جز از صفر دیگر برای تمام قیمتهای x مطابقت بین افاده ها موجود شده میتواند و به قیمت $x=2$ قیمت این کسرها باهم مساوی است؛ زیرا:

$$\frac{3x^2}{8x} = \frac{3\cdot 2^2}{8\cdot 2} = \frac{3}{4} \; ; \; \frac{3x}{8} = \frac{3\cdot 2}{8} = \frac{3}{4}$$

به جز از صفر دیگر به هر قیمت x کسرهای داده شده باهم مساوی است.

این نتیجهٔ یکی از خاصیت اساسی کسرها است که چنین بیان میشود.

هرگاه صورت و مخرج یك کسر به یك عدد (غیر از صفر) ضرب و یا تقسیم شود در قیمت کسر تغیر نمی آید کسرهای که به هر قیمت متحول دارای عین قیمت مساوی گردند، بنام کسرهای معادل یاد میشوند. کسرهای معادل یك مطابقت یا عینیت ریاضی را ایجاد میکنند.

پس به این اساس مساوات: $\frac{3x^2}{8x} = \frac{3x}{8}$ یك عینیت (مطابقت) است.

اکنون کسرهای $\frac{ac}{bc}$ و $\frac{a}{b}$ را در نظر میگیریم. نظر به خاصیت اساسی کسرها به قیمتهای $b\neq 0$ و $c \neq 0$ دیگر به همه قیمتهای متحول این کسرها با هم یك مطابقت را به وجود می آورند.

ولی به قیمت $b=0$ یا $c=0$ این کسرها بی معنی اند.

پس مساوات: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ ....(I) یك عینیت است.

اجرای این عملیه از اثر تقسیم کردن صورت و مخرج کسر به عامل مشترك ضربی آنها یعنی (c) صورت میگیرد که $\frac{ac}{bc}$ را به یك کسر ساده تر معادل آن که $\frac{a}{b}$ است تبدیل میگردد. در اینجا گفته میتوانیم که کسر $\frac{ac}{bc}$ به کسر عینیت $\frac{a}{b}$ تبدیل شده میتواند.

عملیه تبدیل کردن یك کسر را به کسر ساده تر و معادل آن بنام اختصار کسر یاد میکنند.

مثال 1 : کسر $\frac{2x(x-2)}{5(x-2)}$ را در نظر میگیریم.

غرض اختصار کردن کسر مذکور صورت و مخرج کسر را به ضریب مشترك آنها یعنی $x-2$ اختصار نموده و عینیت ذیل را حاصل مینمایم:

$$\frac{2x(x-2)}{5(x-2)} = \frac{2x}{5}$$

باید یاد آور شد که ساحه تعریف کسرهای $\frac{2x(x-2)}{5(x-2)}$ و $\frac{2x}{5}$ مختلف اند.

زیرا درساحه تعریف کسراولی عدد 2 شامل نمیباشد درحالی که ساحه تعریف کسر دومی ست تمام اعداد حقیقی است. بعد از اختصار کسر ها نتیجه میشود که ساحه تعریف کسراولی ست فرعی ست ساحه کسر دومیست .

مثال 2 : برای اختصار کردن کسر $\frac{a^2-9}{ab+3b}$ نخست صورت و مخرج را به اجزای ضربی آن تجزیه نموده وسپس آنرا اختصار مینمائیم.

$$\frac{a^2-9}{ab+3b}=\frac{(a-3)(a+3)}{b(a+3)}=\frac{a-3}{b}$$

مثال 3 : میخواهیم که کسر $\frac{(-a^2b)^3}{a^5b^4}$ را اختصار نمائیم .

از کسر فوق حاصل میشود که :

$$\frac{(-a^2b)^3}{a^5b^4}=\frac{-a^6b^3}{a^5b^4}=\frac{-a}{b}$$

افاده $\frac{-a}{b}$ وافاده $-\frac{a}{b}$ مطابقت اند زیرا برای تمام قیمتهای a و b ($b \neq 0$ است) قیمت هر یکی ازاین افاده ها عبارت ازعددی است که متضاد کسر $\frac{a}{b}$ میباشد .

لذا مساوات $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$ .... (2) یك مطابقت است .

هر گاه صورت ومخرج کسر $\frac{-a}{b}$ ضرب (1-) گردد دراینصورت کسری را حاصل مینمائیم که باکسراولی مساوی است .

یعنی: $\frac{-a}{b}=\frac{-a(-1)}{b(-1)}=\frac{a}{-b}$

پس مساوات $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$ . . . (3) نیز عبارت ازیك عینیت است .

عینیتهای 2 و 3 حاصل شده عینیتهای اند که کسراولی را در بر دارند درحالت خاص بعد ازاختصار هر کسری که شکل $\frac{-a}{b}$ یا $\frac{a}{-b}$ باشد آنرا به شکل $-\frac{a}{b}$ ارایه میدارند. در نتیجه کسری که از کسر $\frac{(-a^2b)^3}{a^5b^4}$ به وجود میآید نیز به شکل $-\frac{a}{b}$ نوشته میشود .

سوالها

34 . کدام یکی ازجورههای افادههای زیر مساوی ، متضاد ، یا معکوس یکدیگررا تشکیل میدهند :

(a) x و $\frac{1}{x}$; (b) $\frac{y}{5}$ و $\frac{-y}{5}$; (c) $\frac{-y}{5}$ و $\frac{y}{-5}$;

(d) $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ (e) $\frac{y}{5}$ و $-\frac{y}{5}$ (f) $\frac{y}{5}$ و $\frac{-y}{-5}$ ؟

35 . قیمت کسرهای $\frac{a+c}{b+c}$ و $\frac{a}{b}$ را با هم مقایسه نمائید:

(a) درصورتی که a=3 ; b=5 و c=7 باشد ;

(b) درصورتی که $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{3}$ و $c=\frac{-1}{6}$ باشد .

36 ـ قیمت کسرهای $\frac{ac}{bc}$ و $\frac{a}{b}$ را مقایسه کنید :

(a) وقتی که a=3 ; b=5 و c=7 باشد ;

(b) وقتی که $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{3}$ و $c=-\frac{1}{6}$ باشد .

37 - ضریب مشترك صورت ومخرج کسرهای ذیل را دریافت نموده وآنرا اختصار نمائید :

$$(a)\ \frac{2x}{3x}\ ;\ (b)\ \frac{6y}{24y}\ ;\ (c)\ \frac{5a}{a^2}$$

$$(d)\ \frac{b^3}{7b^3}\ ;\ (e)\ \frac{-2p}{10p^2}\ ;\ (f)\ \frac{-51m}{-17m^3}\ .$$

38 . کسرهای ذیلرا اختصار کنید .

$$(a)\ \frac{10x}{15y}\ ;\ (b)\ \frac{6a}{9b}\ ;\ (c)\ \frac{2a}{-4y}\ ;\ (d)\ \frac{ab}{-ac}\ ;\ (e)\ \frac{mn}{n^2c}$$

$$(f)\ \frac{4a^2}{6ac}\ ;\ (g)\ \frac{12cy}{48xy^2}\ ;\ (h)\ \frac{a^5b^3}{a^3b^5}\ ;\ (i)\ \frac{x^6y^4}{x^4y^6}$$

39 - افاده‌های زیررا ساده بسازید :

$$(a)\ \frac{-2a^2b}{3a^3}\ ;\ (b)\ \frac{5xy^4}{-20x^2}\ ;\ (c)\ \frac{(-3x^3)^3}{15x^6y^2}$$

40 - کسرهای زیررا اختصار کنید .

$$(a)\ \frac{a(b-2)}{5(b-2)}\ ;\ (b)\ \frac{3(x+4)}{c(x+4)}\ ;\ (c)\ \frac{15a^2(a-b)}{20b(a-b)}\ ;$$

41 - نخست صورت یامخرج کسرهای زیررا به اجزای ضربی آنها تجزیه‌نموده وسپس آنها را اختصار کنید:

$$(a)\ \frac{3a+12b}{6ab}\ ;\ (b)\ \frac{15b-20c}{10b}\ ;\ (c)\ \frac{3x}{9x-6y}\ ;$$

$$(d)\ \frac{a^2-6a}{3a^2}\ ;\ (e)\ \frac{5x(y+3)}{6y+18}\ ;\ (f)\ \frac{a-3b}{a^2-3ab}\ .$$

42 - تضاد هریک از افادهای زیررا بنویسید:

$$(a)\ x\ ;\ (b)\ -2p\ ;\ (c)\ a-b\ ;\ (d)\ -\frac{x}{5}\ ;\ (e)\ \frac{a-b}{3}\ .$$

43 - آیا افاده‌های ذیل مطابقت اند :

$$(a)\ \frac{a-b}{b-a}=-1\ ;\ (b)\ \frac{y-x}{x+y}=-\frac{x-y}{x+y}$$

44 - افاده‌های ذیل‌راساده بسازید :

$$(a)\ \frac{5(a-b)}{8(b-a)}\ ;\ (b)\ \frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}\ ;\ (c)\ \frac{5x(x-y)}{x^3(y-x)}\ ;$$

$$(d)\ \frac{22(a-3c)}{33a(3c-a)}\ ;\ (e)\ \frac{-45b(2b-7)}{18b^2(7-2b)}\ ;\ (f)\ \frac{8(a-12)}{12b-ab}\ ;$$

$$(g)\ \frac{xy-3y}{a(3-x)}\ ;\ (h)\ \frac{-6pq+20p}{3q-10}\ ;$$

$$(i)\ \frac{2a-8b}{12b-3a}\ ,\ (j)\ \frac{5cd-15d}{30-10c}$$

45 - افادهای زیررا ساده نموده واختصار کنید .

$$(a)\ \frac{a-1}{(1-a)^2}\ ;\ (b)\ \frac{(b-2)^3}{2-b}\ ;\ (c)\ \frac{(2x-2y)^2}{4x^2-4y^2}\ ;$$

46 - نخست ساحه تعریف هریک از کسرهای زیررا دریافت‌نموده وسپس آن‌را اختصار کنید:

$$(a)\ \frac{y^2-16}{3y+12}\ ;\ (b)\ \frac{15z^2-9z}{25z^2-9}\ ;$$

$$(c)\ \frac{a^2+10a+25}{a^2-25}\quad (d)\ \frac{y^2-9}{y^2-6y+9}$$

47 - کسرهای زیررا به افادهای تام تبدیل کنید :

$$(a)\ \frac{25-a^2}{a-5}\ ;\ (b)\ \frac{x^2-2x+1}{1-x}\ ;\ (c)\ \frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}\ ;\ (d)\ \frac{c^6-c^4}{c^3+c^2}$$

48 - افاده های‌زیررا ساده‌بسازید :

$$(a)\ \frac{ax+bx-ay-by}{7x-7y}\ ;\ (b)\ \frac{xy-x+y-y^2}{x^2-y^2}$$

(c) $\dfrac{a^2+2ac+c^2}{a^2+ac-ax-cx}$; (d) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$;

(e) $\dfrac{y^2+2y+4}{y^3-8}$; (f) $\dfrac{1+x^6}{1+x^2}$

49 - قیمت افاده‌های زیر را حساب کنید.

(a) قیمت افاده $\dfrac{15a^2-10ab}{3ab-2b^2}$ وقتی که $a=-2$ و $b=-0,1$ باشد ;

(b) قیمت افاده $\dfrac{9c^2-4d^2}{18c^2d-12cd}$ وقتی که $c=\dfrac{1}{3}$ و $d=\dfrac{1}{2}$ باشد .

50 - نشان دهید که ست حله افاده های ذیل یک عنصره است .

(a) $\dfrac{cp^2-2p^2}{2pc-4p}$; (b) $\dfrac{cx-2x+cy-2y}{cx-cy-2x+2y}$.

51- معادله های زیر را حل کنید:

(a) $\dfrac{2x-x^2}{x^2-4}=o$; (b) $\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x}=o$;

(c) $\dfrac{2y-14}{y^2-7y}=o$; (d) $\dfrac{9y^3-y}{15y+5}=o$.

عینیتهای متحول دار کسری

حاصلضرب و حاصل تقسیم دو کسر

5- حاصلضرب کسرها:

افاده‌های $a+\dfrac{1}{b}$; $\dfrac{x-y}{x+y}$; $2\div p$ و $a\left(1+\dfrac{b}{c}\right)$ را در نظر میگریم، شکل هر یك از این افاده‌های نسبتی متحولد ار را که تحت عملیه تقسیم قرار دارند، به نام کسر یاد میکنند .

یکی از مسایل اساسی مطابقت تبدیلی کسرها میباشد اکنون افاده‌ها را

به شکل کسر نوشته میکنیم که صورت و مخرج آن افاده های تام باشد.
درآینده دیده خواهد شد که این نوع تبدیلی همیشه امکان پذیر است.

در این مبحث تبدیلی حاصل ضرب و حاصل تقسیم کسرها یی را که دارای طاقت نمای اعداد طبیعی باشند مطالعه میکنیم.

حاصل ضرب دو کسر $\dfrac{a}{b}$ و $\dfrac{c}{d}$ را مطالعه مینماییم .

هر گاه متحولهای $a; b; c$ و d قیمتهای عددی طبیعی را بگیرند در اینصورت به اساس تعریف ضرب کسرها مساوات زیر صدق مینمایند.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{bd} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

مثلاً اگر $a=3; b=7; c=15; d=13$ باشند در اینصورت

$\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{15}{13}=\dfrac{3.15}{7.13}$ میشود.

مساوات فوق برای تمام قیمتهای $a; b; c$ و d در حالی که $b\neq o$ و $d\neq o$ باشند حقیقت دارد.

طور مثال اگر $a=\dfrac{3}{2}$ ، $b=\dfrac{7}{8}$; $c=5,1$ و $d=1,2$ باشند در اینصورت داریم.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{8}}\cdot\frac{5,1}{1,2}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\cdot 8}{\frac{7}{8}\cdot 8}\cdot\frac{5,1\cdot 10}{1,2\cdot 10}$$

$$=\frac{12}{7}\cdot\frac{51}{12}=\frac{51}{7}=7\frac{2}{7}$$

$$\frac{a\cdot c}{bd} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 5,1}{\frac{7}{8}\cdot 1,2} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 5,1\cdot 8\cdot 10}{\frac{7}{8}\cdot 1,2\cdot 8\cdot 10} = \frac{12\cdot 51}{7\cdot 12} = \frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}$$ یا

چون ماقیمتی رابرای متحولها (به جزاینکه b یا d صفر باشد) پیدا کرده نمیتوانیم که مساوی (I) فوق امکان پذیرنباشد بنابر این $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$ و $\frac{ac}{bd}$ یک عینیت را به وجود میآورد .

درنتیجهٔ گفته‌میتوانیم : حاصل‌ضرب دو کسر عبارت‌از کسریست که صورت‌آن عبارت ازحاصل‌ضرب صورتها ومخرج آن‌عبارت ازحاصل‌ضرب‌مخرجهای کسرهای داده شده میباشد . اینک به حل چند مثال‌حاصل‌ضرب کسرها طبق ذیل میپردازیم :

(1) $$\frac{6a^2}{5y^3}\cdot\frac{10y^3}{21ab} = \frac{6a^2\cdot 10y^3}{5y^3\cdot 21ab} = \frac{4a}{7b}$$

(2) $$\frac{x^2-2xy}{3}\cdot\frac{y}{x^2-4y^2} = \frac{x\cdot(x-2y)\cdot y}{3\cdot(x-2y)(x+2y)} = \frac{x\cdot y}{3x+6y}$$

سوالات

52 - افاده‌های زیررا باهم‌ضرب ودر صورت امکان اختصار کنید:

(a) $\frac{3}{3}\cdot\frac{x}{2}$; (b) $\frac{3a}{4}\cdot\frac{8}{9}$; (c) $\frac{b}{10}\cdot\frac{5}{b}$; (d) $\frac{2}{a}\cdot\frac{b}{7}$;

(e) $\frac{m}{2n}\cdot\frac{3n}{m}$; (f) $\frac{ax}{3}\cdot\frac{x}{a}$; (g) $\frac{b}{y}\cdot\frac{b^2}{y^2}$; $\frac{p^2}{q^3}\cdot\frac{q^2}{p^3}$;

(f) $\frac{3a^2}{x^2}\cdot\frac{a^3}{16x^3}$; (m) $\frac{5m^3}{n^3}\cdot\frac{2n^2}{25m^2}$.

53 - درافاده‌های مانندذیل‌یک جزضرب بی‌یک‌حده را به‌شکل کسری که‌مخرج آن‌یک‌باشد ارائه‌نموده‌و بعداً باهم ضرب‌واختصار کنید :

(a) $x\cdot\frac{a}{b}$; (b) $\frac{2a}{5}\cdot y$; (c) $-b\cdot\frac{5}{2b}$;

(d) $\frac{-x}{y}(-b)$ (e) $\frac{2a^6}{-b^9}\cdot(-3ab)^{10}$

54 - افاده‌های زیررا ساده‌بسازید :

(a) $-\frac{15p^4}{8q^6}\cdot\frac{16q^5}{25p^3}$; (b) $\frac{45a^3}{14x^2}\cdot\left(-\frac{49x^4}{18a^2}\right)$;

(c) $7p^2q^4\cdot\left(\frac{m^3}{p^4q^4}\right)$; (d) $5x^8y^9\cdot\left(-\frac{a^4}{10x^9y^8}\right)$

55 - افاده‌های زیررا اختصار نموده باهم ضرب کنید :

(a) $\frac{x^2-ax}{a^2}\cdot\frac{a}{x^2}$; (b) $\frac{pq+q^2}{27}\cdot\frac{qp}{q^2}$;

(c) $\frac{m^2-9n^2}{m^2n^2}\cdot\frac{2nm}{m+3n}$; (d) $\frac{x^2-4y^2}{35+y}\cdot\frac{28x^2}{x^2-4xy+y^2}$

(e) $\frac{a^3-8}{5a+15}\cdot\frac{7a+21}{a^2+2a+4}$; (f) $\frac{x^3+27}{8x+6}\cdot\frac{12x+9}{x^3-3x+9}$

56 - افاده های زیررا ساده بسازید:

(a) $\frac{ax+ay+2x+2y}{2a+4}\cdot\frac{8a-16}{ax+ay-2x-2y}$

(b) $\frac{ab-5bx+3a-15x}{4b^3-a^2b}\cdot\frac{a-2b}{a-5x}$

57 - معادلات ذیلرا حل کنید .

(a) $\frac{4x^2-25}{8x+24}\cdot\frac{4}{2x+5}=0$; (b) $\frac{x^2-2x}{30}\cdot\frac{6x+18}{x}=0$

(c) $(x-5)\cdot\frac{2x+1}{x^2-25}=0$; (d) $(x+3)\cdot\frac{x^2-49}{9-x^2}=0$

6 - حاصل تقسیم دو کسر.

ما میدانیم که در وقت تقسیم یك عدد کسری بالای عدد کسری دیگر، کسر مقسوم را به معکوس کسر مقسوم علیه ضرب مینمایم. یعنی اولاً کسر مقسوم علیه را معکوس نموده و کسر مقسوم را به آن ضرب مینمایم.

شما میداند که کسرهای $\frac{c}{d}$ و $\frac{d}{c}$ معکوس یکدیگر اند پس حاصل تقسیم $\frac{a}{b}$ بر $\frac{c}{d}$ یعنی $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ مساوی به حاصل ضرب $\frac{d}{c}$ در $\frac{a}{b}$ یعنی $\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ میشود. از اینجا ما داریم:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\quad\text{.........I}$$

مساوات فوق برای قیمتهای $a;b;c$ و d در حالی که $b\neq 0; c\neq 0$ و $d\neq 0$ باشند حقیقت دارد.

از این عینیت (1) بالا نتیجه میشود که حاصل تقسیم دو کسر از حاصل ضرب کسر مقسوم و معکوس کسر مقسوم علیه حاصل میشود.

غرض فهمیدن این مطلب حل مثالهای زیر را از نظر میگذارنیم.

(1) $\frac{5x^3}{6a}\div\frac{15x}{2a^2}=\frac{5x^3}{6a}\cdot\frac{2a^2}{15x}=\frac{5x^3\cdot 2a^2}{6a\cdot 15x}=\frac{ax^2}{9}$

(2) $\frac{a+2b}{a^2-9b^2}\div\frac{a^2+2ab}{a-3b}=\frac{a+2b}{a^2-9b^2}\cdot\frac{a-3b}{a^2+2ab}$

$=\frac{(a+2b)(a-3b)}{(a+3b)(a-3b)\cdot a\cdot(a+2b)}=\frac{1}{a\cdot(a+3b)}=\frac{1}{a^2+3ab}$

سوالات:

58. عملیه های تقسیم را انجام داده و به شکل کسر بنویسید:

(a) $\frac{x}{y}\div\frac{2}{3}$; (b) $\frac{p}{q}\div\frac{q}{3}$; (c) $\frac{a^2}{b^2}\div\frac{a^3}{b^3}$

(d) $\frac{x^4}{y^5}\div\frac{x^5}{y^6}$; (e) $\frac{3a^2}{b^4}\div\frac{6a^4}{b^2}$

59 - افاده های زیر را ساده بسازید:

(a) $b\div\frac{1}{a}$; (b) $\frac{1}{x}\div y$; (c) $3a\div\frac{12a}{b}$;

(d) $15a^3b^4\div\frac{35a^4b^2}{2}$; (e) $\frac{81y^2}{7p^3}\div\left(-\frac{18y^4}{35p^2}\right)$

60 - حاصل تقسیم افاده های زیر را پیدا کنید:

(a) $\frac{x-2}{3y^2}\div\frac{3x-6}{y^3}$; (b) $\frac{10a^4}{a^2-3ab}\div\frac{15a^3b}{a-3b}$;

(c) $\frac{m^2-4n^2}{3mn}\div\frac{(m+2n)^2}{9m^2}$; (d) $\frac{1-4a+4a^2}{15a^2}\div\frac{4a^2-1}{5a^3}$;

(e) $\frac{5x^2-bx}{30by}\div\frac{b^2-bx}{60xy}$; (f) $\frac{21b-7a}{b-a}\div(a-3b)$

61 - قیمت افاده های زیر را دریافت کنید:

(a) $\left(\frac{2x^2+2x+2}{5x^2}\right)\div\frac{x^2+1}{2x^3}$ وقتی که $x=-0,25$ باشد:

(b) $\left(\frac{a+3}{9a^3+72}\right)\div\frac{a^2-9}{a^2-2a+4}$ وقتی که $a=\frac{2}{3}$ باشد.

7. طاقت نما کسر

کسر طاقتدار $\left(\frac{a}{b}\right)^5$ را به شکل کسر $\frac{a^5}{b^5}$ نوشته کرده میتوانیم.

زیرا $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}$

به اساس خاصیت ضرب کسرها ما داریم:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b}$$

نظر به تعریف طاقت نما اعداد طبیعی

$$\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b}=\frac{a^5}{b^5}$$

بنابر آن: $=\left(\frac{a}{b}\right)^5=\frac{a^5}{b^5}$

به‌صورت‌عمومی برای‌هر عدد طبیعی n بزرگتر از یك و $b \neq 0$ داریم:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\cdots\frac{a}{b}}_{n\text{دفعه}}=$$

$$=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot aa\cdots\cdots a}^{n\text{دفعه}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot bb\cdots\cdots b}_{n\text{دفعه}}}=\frac{a^n}{b^n}$$

در نتیجه $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$

یك کسر طاقت نمادار در نتیجهٔ مساویست به‌خارج قسمت صورت درهمان نما برمخرج درهمان نما.

به‌حل مثال‌زیر توجه کنید:

$$\left(\frac{2a^2b}{3xy}\right)^4=\frac{(2a^2b)^4}{(3xy)^4}$$

$$\frac{2^4\cdot(a^2)^4\cdot b^4}{3^4\cdot x^4\cdot y^4}=\frac{16a^8b^4}{81x^4y^4}$$

سوالات

62. صورت‌ومخرج کسرهای‌زیر را به‌شکل طاقت ارائه نمایید:

(a) $\left(\frac{x}{2y}\right)^3$; (b) $\left(\frac{5a}{b}\right)^2$; (c) $\left(\frac{-m}{7n}\right)^2$;

(d) $\left(\frac{x^3}{y^2z^2}\right)^4$; (e) $\left(-\frac{a^8b^6}{c^4d^3}\right)^7$; (f) $\left(\frac{a^2-1}{ab+b}\right)^4$

63- کسرهای زیر را به‌شکل افاده طاقتدار $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ ارائه کنید.

(a) $\frac{4a^2b^6}{x^{10}}$; (b) $\frac{64a^6}{b^{12}c^{24}}$; (c) $\frac{-8a^6}{(a-b)^3}$.

64- افادهای‌زیر را ساده بسازید:

(a) $\left(\frac{2a^8}{c^7}\right)^5\cdot\left(\frac{c^9}{4a^{10}}\right)^4$; (b) $\left(-\frac{3x^7}{a^{12}}\right)^4\div\left(\frac{9x^5}{a^8}\right)^3$

(c) $\left(\frac{b^2}{x+5}\right)^3\cdot\frac{x^2+10x+25}{b^4}$; (d) $\left(\frac{a^2+ab}{ab^2-b^3}\right)^4\cdot\left(\frac{b-a}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$

65- رابطه زیر را ثبوت کنید.

$$\frac{(x^2-10x+25)^3(x+5)^3}{(5-x)^3\cdot(25-x^2)^3}=1$$

66- معادله زیر را حل کنید:

(a) $\frac{x-5}{x^2}=0$; (b) $\frac{x^2-7x}{x+2}=0$

عینتهای کسری جمع و تفریق دو کسر

8- جمع و تفریق کسرهای که مخرج آنها باهم مساوی باشد

افادهٔ $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ مجموع دو کسری است که مخرجهای شان باهم

مساوی اند این مجموع را به شکل کسر $\frac{a+b}{c}$ ارائه کرده میتوانیم .

زیرا اگر متحولهای a، b و c قیمتهای طبیعی عددی را بگیرد:

مثلاً : اگر $a=2$، $b=3$ و $c=7$ باشند، پس :

$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$ میشود .

پس درینصورت مساوات ذیل‌را نوشته کرده میتوانیم.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \mathrm{I}$$

در اینصورت به اساس قاعدهٔ جمع کسرهای عددی که‌مخرجهای

شان باهم‌مساوی باشد، افادهٔ : $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$ حقیقت دارد .

مساوات(1) نه‌تنها درقیمتهای طبیعی بلکه برای قیمتهای حقیقی

دلخواه a، b و c درصورتیکه $c \neq 0$ باشدواقعیت‌دارد. چنانچه، اگر:

$a=1,5$، $b=-5$ و $c=\frac{2}{3}$ باشد .

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{1,5}{\frac{2}{3}}+\frac{-5}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}+\frac{-5}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{4}-\frac{15}{2}=-\frac{21}{4}=-5\frac{1}{4}$$

ازاینکه برای تمام قیمتهای متحولها($c \neq 0$) افاده‌های $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

و $\frac{a+b}{c}$ باهم‌مساوی‌اند، بناءً مساوات(1) یك عینیت است .

حالاتفریق کسرهای که مخرجهای آن‌مساوی اند مطالعه مینمائیم .

ازینکه فرق‌دو کسر را به‌شکل‌مجموع دو کسرنیز نوشته کرده میتوانیم،

پس دراین صورت میتوانیم بنویسیم :

(d) $\frac{3p}{p-q}-\frac{2p}{q-p}$; (e) $\frac{a+1}{2a-1}+\frac{a-2}{1-2a}$; (f) $\frac{y-3}{y-7}+\frac{3+y}{7-y}$

71 - افاده‌های‌زیر را ساده بسازید :

(a) $\frac{p}{p-2}-\frac{5}{2-p}+\frac{2p}{p-\text{[illegible]}}$;

(b) $\frac{2a}{\text{[illegible]}}+\frac{a}{b-a}-\frac{b}{a-b}$;

(c) $\frac{a+2}{a-3}-\frac{2a-1}{3-a}+\frac{4a-1}{a-3}$.

72 - نشان دهید که برای تمام‌قیمتهای a و b (بجز از صفر) قیمت

افادهٔ $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{(a+b)^2}{ab}$ مساوی‌به 4 وقیمت‌افادهٔ $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$

مساوی به 2 میشود .

73 - قیمت افاده ذیلرا پیدا کنید .

$$\frac{p^2q-q^3}{p-2q}-\frac{2pq^2-q^3}{p-2q}$$

اگر $q=-0,25$ و $p=-8$ باشد.

74 - گراف تابع زیررا رسم کنید :

$$y=\frac{x^2+1}{x-1}-\frac{2}{x-1}$$

75 - معادلات ذیل‌را حل کنید :

(a) $\frac{3x-12}{17}+\frac{8-x}{17}=0$; (b) $\frac{11y+29}{41}-\frac{8y-24}{41}=0$

9. جمع و تفریق کسرهای که مخرجهای مختلف دارند

میخواهیم که کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را باهم جمع کنیم. بااستفاده‌از

خاصیت اساسی کسرها صورت و مخرج کسر اولی را ضرب d صورت و مخرج کسر دومی را ضرب b می نمایم. یعنی:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}$$

کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ به ترتیب معادل کسرهای $\frac{a\cdot d}{b\cdot d}$ و $\frac{b\cdot c}{b\cdot d}$. که مخرجهای آنها باهم مساوی است میباشند در اینجا میگویسم که کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دارای مخرج مشترک b.d است.

اکنون کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را چنین جمع کرده میتوانیم.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad+bc}{b\cdot d}$$

در جمع و تفریق کسرها طریق دیگری را برای یافتن مخرج مشترک آنها نیز به کار میبرند و آن عبارت از ضرب کردن مخرجهای آن کسرها میباشد که از آن مخرج مشترک کسر به دست میآید. غرض توضیح این مطلب مثالهای زیر را از نظر میگذرانیم:

$$\frac{a+1}{4}+\frac{a-1}{6}=\frac{3(a+1)+2(a-1)}{12}=\frac{3a+3+2a-2}{12}=\frac{5a+1}{12} \quad (1)$$

$$\frac{a+3}{a^2+ab}-\frac{b-3}{ab+b^2}=\frac{a+3}{a(a+b)}-\frac{b-3}{b(a+b)}=\frac{b(a+3)-a(b-3)}{ab(a+b)} \quad (2)$$

$$=\frac{ab+3b-ab+3a}{ab(a+b)}=\frac{3(a+b)}{ab(a+b)}=\frac{3}{a.b}$$

سوالات

76 - جمع و تفریق کسرهای زیر را به شکل یك کسر ارائه نمایید:

(a) $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$; (b) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}$; (c) $\frac{p}{12}+\frac{q}{18}$;

(d) $\frac{c}{21}-\frac{d}{6}$; (e) $\frac{3}{a}+\frac{5}{b}$; (f) $\frac{8}{x}-\frac{7}{y}$;

(g) $\frac{2}{3a}+\frac{3}{2a}$.

77 - حاصل جمع و حاصل تفریق کسرهای زیر را دریافت کنید:

(a) $\frac{3}{7m}-\frac{5}{28mn}$; (b) $\frac{a}{b^2}-\frac{3}{2b}$;

(c) $\frac{n}{4p^3}+\frac{m}{3p}$; (d) $\frac{5y-3}{3}+\frac{3y-2}{5}$;

(e) $\frac{2x-5}{6}-\frac{x-4}{5}$; (f) $\frac{4a^2+3b^2}{10}-\frac{2a^2-b^3}{15}$.

78 - بعد از یافتن مخرج مشترك کسرها عملیه های مورد نظر را اجرا کنید.

(a) $\frac{a+b}{a^2}+\frac{a-b}{ab}$; (b) $\frac{4p^2-5q^2}{pq}+\frac{2p-3q}{p}$;

(c) $\frac{2a-3b}{a^2b}+\frac{4a-5b}{ab^2}$; (d) $\frac{x-2y}{xy^2}-\frac{2x-y}{x^2y}$;

(e) $\frac{b^2-b+1}{b^3x}-\frac{x^2-1}{bx^3}$.

79 - حاصل جمع و حاصل تفریق کسرهای زیر را پیدا کنید.

(a) $\frac{x-2}{2}-\frac{2x+3}{4}-\frac{5x-3}{6}$; (b) $\frac{2a-b}{6}-\frac{a-4b}{2}+\frac{2a-15b}{b}$;

(c) $\frac{x^2-2}{3x}-\frac{3x^2-7}{5x}+\frac{x^2+1}{10x}$; (d) $\frac{5a-2ab+4b^2}{2ab}+\frac{a+2b}{a}-\frac{a-5b}{b}$.

80 - هر يك از افادهٔ هاى جمع و تفريق كسرهاى زير را به‌شكل يك كسر تبديل كنيد :

(a) $\frac{a-b}{a+b}+\frac{a}{b}$; (b) $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x}{y}$;

(c) $\frac{3}{2a}-\frac{a-3}{a+3}$; (d) $\frac{3c}{5}-\frac{c+1}{c-1}$.

81 - افاده‌تام $x-5y$ را به‌شكل كسرهاى ارايه كنيدكه مخرجهاى آنها به ترتيب مساوى به 1، 2، a، و $x+5y$ باشند .

82 - افاده هاى ذيل‌را به شكل نسبت دو پولينوم ارايه نماييد:

(a) $x+\frac{1}{a}$; (b) $b-\frac{a}{c}$; (c) $\frac{a+2b}{b}-3$;

(d) $\frac{(x+2y)^2}{4x}-2y$; (e) $\frac{(a-b)^3}{3ab}+a-b$; (f) $\frac{(x+y)^3}{3xy}-x-y$.

83 - معادله هاى‌ذيل‌را حل كنيد :

(a) $\frac{5x-3}{5}-\frac{x+6}{4}=0$; (b) $\frac{5x-6}{3}-\frac{5x+6}{12}=0$.

(c) $\frac{30-y}{9}-9=0$; (d) $x-\frac{x-12}{5}=0$.

84 - حاصل جمع و حاصل‌تفريق كسرهاى ذيل‌را پيدا كنيد :

(a) $\frac{1}{1+x}+\frac{3}{1-x}$; (b) $\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a+1}$;

(c) $\frac{3x+2}{2-3x}-\frac{2-3x}{3x+2}$; (d) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y-x}$;

(e) $a+\frac{b^2}{a-b}+b$; (f) $x-\frac{x^2+4y^2}{x+2y}+2y$.

85 - افاده هاى ذيل‌را ده بسازيد.

(a) $\frac{8}{b(b+1)}-\frac{2}{b(b-1)}$; (b) $\frac{5}{x(x-2)}-\frac{3}{x(x+2)}$;

(c) $\frac{x}{x+1}-\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{x-1}$; (d) $\frac{m-3}{m+3}+\frac{m+3}{m-3}-\frac{2m}{(m+3)(m-3)}$.

86 - معادله هاى ذيل را حل نماييد .

(a) $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}=0$; (b) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}=0$

(c) $\frac{x-9}{x-4}+\frac{x+9}{x+4}=0$; (d) $\frac{2x-5}{x+5}+\frac{3x+4}{x+2}-1=0$

87 - مخرج هريك از كسرهاى ذيل‌را به‌اجزاى‌ضربى آن تجزيه نموده سپس‌هريك‌از افاده‌هاى‌حاصل‌شده را به شكل‌يك كسربياوريد:

(a) $\frac{3}{2x-2y}+\frac{5}{3x-3y}$; (b) $\frac{1}{4a+4b}+\frac{1}{6a+6b}$;

(c) $\frac{a-1}{a^2+2a}-\frac{5}{6a+12}$; (d) $\frac{1-3x}{x^2-3x}+\frac{8}{3x-9}$;

(e) $\frac{m}{1-m^2}+\frac{1}{1+m}$; (f) $\frac{3}{a^2+ab}-\frac{3}{ab-b^2}$.

88 - هريك از افاده هاى زير راساده نموده و بعداً قيمتهاى آن‌را پيداكنيد :

(a) $\frac{a+1}{a^2-1}-\frac{a+2}{a^2-1}$ وقتى كه $a=-2$ باشد .

(b) $\frac{y+2}{y^2+3y}+\frac{5-y}{y^2-9}$ وقتى كه $y=1,5$ باشد .

89 - نشان دهید که افاده های ذیل برای تمام قیمتهای مثبت a معین ، یعنی دارای معنی است :

(a) $\frac{a^2+5}{3}$; (b) $\frac{1}{a^4+a^2+1}$;

(c) $\frac{a^2+a+1}{a^3+a} - \frac{1}{a}$; (d) $\frac{a^3}{a-3} - \frac{3a^2+81}{a^2-9}$.

90 - حاصل جمع و حاصل تفریق هر یك از کسرهای زیررا دریافت کنید :

(a) $\frac{x+2}{x^2+2x+1} - \frac{x-2}{x^2-1}$; (b) $\frac{a+3b}{a^2-2ab+b^2} + \frac{a-3b}{a^2-b^2}$;

(c) $\frac{1}{(a-3)^2} - \frac{2}{a^2-9} + \frac{1}{(a+3)^2}$;

(d) $\frac{x-y}{x^2+2xy+y^2} - \frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$;

(e) $\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{3}{a-1}$.

91 - دوبندر A و B برلب دریا به اندازه a کیلومتر ازهم فاصله دارند یك کشتی بین این دو بندر به سرعت v Km/h رفت و آمد مینماید. چقدر وقت لازم است که کشتی از بندر A تا B وبرعکس آن رفت و آمد نماید درصورتی که سرعت جریان آب دریا 5Km/h باشد؟

افاده را ترتیب داده و قیمت آن را به قیمتهای ذیل دریافت نمایید: درصورتی که (a) a=50Km و V=25Km/h باشد

(b) اگر a= 105Km و u=40Km/h باشد .

10 - تبدیل نمودن افاده های نسبتی به افاده های عینیتی آنها .

مابیشتر حاصل ضرب، حاصل تقسیم، وحاصل جمع وحاصل تفریق کسرها را به شکل افاده های کسری که صورت و مخرج آنها تام بودند تشریح و ارائه کردیم .

پس هریك از افاده های کسری به شکل یك کسر ارائه شده میتواند. ولی اگر در افاده های کسری چندین عملیه ها موجود باشند در این صورت لازم است که ترتیب عملیه ها در نظر گرفته شوند .

مثلاً میخواهیم که افاده $\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{3x} + 2x$ را به شکل یک کسر ارآیه کنیم .

حل : دیده میشود که افاده مذکور از ضرب کسرهای $\frac{1}{x+2}$ و $\frac{x^2-4}{3x}$ وجمع افاده تام 2x تشکیل گردیده است . در این صورت لازم است که در مرحله اول عملیه ضرب را انجام داده وبعداً این حاصل ضرب را با افادهٔ تام 2x طبق زیر جمع مینماییم .

مرحله اول :

$$1) \quad \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{3x} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2).3x} = \frac{x-2}{3x}$$

در مرحله دوم :

$$2) \quad \frac{x-2}{3x}+2x=\frac{x-2}{3x}+\frac{2x\cdot 3x}{3x}=\frac{x-2+6x^2}{3x}=\frac{6x^2+x-2}{3x}$$

پس افادهٔ : $\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{3x} + 2x$ و افاده $\frac{6x^2+x-2}{3x}$ به تمام قیمتهای متحول بجز از صفر یك عینیت ریاضی را به وجود میآورد .

سوالات

92- با درنظر گرفتن ترتیب اجرای عملیه ها افاده های زیررا ساده کنید :

(a) $(\frac{x}{x+1}+1)\cdot\frac{1-x^2}{4x^2-1}$; (b) $(\frac{1}{1-y}-y)\div(-\frac{y^2-y+1}{y^2-2y+1})$;

(c) $(p-q+\frac{4q^2-p^2}{p+q})\div(\frac{p}{p^2-q^2}+\frac{2}{q-p}+\frac{1}{p+q})$;

(d) $\frac{ab+b^2}{3}\cdot\frac{3a}{b^3}+\frac{a+b}{b}$;

(e) $\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-y}-\frac{3y}{y^2-4x^2})\cdot(\frac{y^2}{8x^2}-\frac{1}{2})$;

(f) $\frac{9a^2-16b^2}{7a}\cdot(\frac{3b-4a}{4b^2-3ab}-\frac{3b+4a}{4b^2+3ab})$;

(g) $\frac{4xy}{y^2-x^2}\div\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2})$;

(h) $\frac{a-2}{a^2+2a}\div(\frac{a}{a^2-2a}-\frac{a^2+4}{a^3-4a}-\frac{1}{a^2+2a})$.

93- قمیت هریك افاده های زیررا دریافت دارید .

(a) $(\frac{x^2-2xy+y^2}{x+y}\div\frac{2xy}{y^2-x^2}+\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x})$ وقتی که $x=8,4$ و $y=-\frac{3}{5}$ باشد .

(b) $(\frac{x-5}{5x})(\frac{x+5}{2x-10}-\frac{x-5}{2x+10}-\frac{50}{25-x^2})$ وقتی که $x=-\frac{1}{4}$ باشد

94- باستفاده از خاصیتهای اساسی کسر افاده های زیرراساده نمایید :

(a) $\frac{2-\frac{a}{x}}{2+\frac{x}{a}}$; (b) $\frac{\frac{a-b}{c}+3}{\frac{a+b}{c}-1}$

(c) $\frac{\frac{2x-5}{y}-1}{\frac{2x+5}{y}+1}$; (d) $\frac{\frac{a^2+1}{a^2}+\frac{1}{a}}{a-\frac{1}{a^2}}$

معادلات کسری (معادلاتی که در مخرج شان دارای متحول اند)

11. معادلات معادل .

ماميدانيم که رابطه مساوی بین اعداد خواص ذیل را دارد :

1 . هر عدد a به خودش مساوی است. (خاصیت انعکاسی)

2 . اگر a=b باشد، پس b=a است.(خاصیت تناظری)

3 . اگر a=b و b=c باشد پس a=c است (خاصیت انتقالی)

به همین ترتیب دو خاصیت دیگری رابطه مساوی را نیزچنین یاد آورمیشویم:

هرگاه a=b باشد برای هرعدد دلخواه c, a+c=b+c حقیقت دارد واین خاصیت را چنین بیان میکنند :

4 . اگر به هردو طرف یك مساوات یك عدد حقیقی جمع شود مساوات تغییر نمیکند .

5 . اگر a=b باشد برای هرعددی دلخواه c رابطهٔ: a.c=b.c نیز حقیقت است واین خاصیت چنین بیان میشود: اگرهر دو طرف مساوات دریك عدد حقیقی ضرب گردد مساوات دیگری حاصل میشود که معادل مساوات اولیست .

اکنون نشان میدهم که برای ساده ساختن معادلات از این خاصیت اساسی چطور استفاده کرده میشود. غرض توضیح این مطلب روش حل معادله زیر را از نظر میگذرانیم:

$$\frac{3x+2}{7}=5 \quad .... (1)$$

$$3x+2=35 \quad .... (2)$$

$$3x=35-2 \quad .... (3)$$

$$3x=33 \quad .... (4)$$

$$x=11 \quad .... (5)$$

دیده میشود که معادله (5) از معادله‌های (1) و (2) حاصل شده است.
هرگاه اطراف معادله 1 به عدد 7 ضرب شود معادله (2) حاصل میشود. برعکس اگر معادله (2) به عددی $\frac{1}{7}$ ضرب شود معادله (1) حاصل میشود.

چون معادله‌های (1) و (2) دارای عین خاصیت اند، پس میگویم معادله های 1 و 2 معادلات معادل اند. به همین قسم گفته میشود که معادله (4) با معادلات 2 و 3 معادل میباشد.

پس به اساس این خاصیت انتقالی معادله (1) با معادله 5 معادل است چون معادله های معادل دارای عین جذر ها است در نتیجهٔ گفته میتوانیم {11} ست جذر معادله (1) میباشد.

در وقت حل کردن بعضی از معادله‌ها لازم می افتد تا معادله داده شده را به دو یا چند جمله یی که ترکیب آنها معادل معادله اولی باشد تجزیه

کنیم و سپس از ین جمله ها دو یا چند معادله جداگانه ترتیب دهیم برای واضح ساختن این مطلب مثالهای زیر را از نظر میگذرانیم.

مثال 1: معادله $(x-2y-15)^2+(2x+y)^2=o$ را که دارای دو مجهول x و y است درنظر میگیریم.

این معادله از دو جز که مربعهای تام اند تشکیل شده است. این معادله هنگامی موجود شده میتواند که هر دو جز آن صفر باشد. در غیر آن طرف چپ این معادله همیشه مثبت بوده وز یادتر از صفر میشود پس این معادله را به معادلات «$x-2y-15=0$ و $2x+y=0$» (1) تجزیه میکنیم.

حال این سیستم معادله ها را به کمک قوسها چنین مینویسیم.
«$x-2y-15=o$ و $2x+y=o$» و آنرا طبق ذیل حل مینمایم.

$$x-2y-15=o$$
$$2x+y=o$$

اینک حل همزمان سیستم معادله‌ها حل معادله اولی را تشکیل میدهد.

مثال 2: معادله $(x+2)(x-3)=o$ باجمله‌های «$x+2=o$ یا $x-3=o$» معادل است. این حاصل ضرب وقتی مساوی به صفر است که اقلاً یکی از عاملهای ضربی آن مساوی به صفر باشد. ست حله «$x+2=o$ یا $x-3=o$» یعنی ست اتحاد ستهای حله این معادله‌ها ست حله معادله اولی را تشکیل میدهد.

سوالات

95. به اساس کدام خاصیت اساسی مساوات، معادل بودن معادله های ذیل صورت گرفته است؟

(1) هر جمله مرکب که از دو یا چند معادله ها به واسطه حرف ربط «و» ترتیب داده شده باشد.

(a) $2x-5=3$ و $2x=8$

(b) $10x=24$ و $x=2,4$

(c) $\frac{x-2}{5}=1$ و $x-2=5$

(d) $\frac{x}{3}+2=\frac{x}{5}$ و $5x+30=3x$

96. معادله هایی را بنویسید که با معادله‌های داده شده زیر معادل باشد :

(a) $7x-3=11$; (b) $\frac{x-3}{4}=5$.

97- نشان دهید که معادله های زیر باهم معادل اند.

$x+y=3$ و $2x+2y=6$

98. معادله زیر را به جمله های مرکب آن تبدیل نموده ست حله های شان را پیدا کنید.

(a) $(7x+1)(x+6)=0$; (b) $10(11+9x)(3x-4)=0$

99. هریك ازمعادله های دومتحوله زیر را به سیستم معادله های آن تبدیل کرده و ست حله آن را پیدا کنید.

(a) $(x+y)^2+(y-5)^2=0$; (b) $(2x-y)^2+(x+y+2y)^2=0$.

100. گراف تابع $f(x)=2x^2$ و $g(x)=3x^2$ را در یك سیستم مختصات رسم کنید به کمك این گرافها $f(-2)$ و $g(-2)$ را مقایسه نمایید.

12. حل معادله های کسری

میخواهیم معادله (I) .... $\frac{6x}{3x+4}=\frac{2x-1}{x}$ را حل نمایم.

برای حل کردن این معادله از حالت مساوی به صفر شدن معادله استفاده میکنیم.

حال معادله (I) را به شکل $\frac{6x}{3x+4}-\frac{2x-1}{x}=0$ مینویسیم

فرق این دو کسر را به یك کسر تبدیل میکنیم :

$$\frac{6x^2-(2x-1)(3x+4)}{x(3x+4)}=0$$

معادله بالا معادل سیستم زیر میباشد

$$\begin{cases} 6x^2-(2x-1)(3x+4)=0 \\ x(3x+4) \neq 0 \end{cases}$$

برای حل سیستم مذکور نخست ست حله معادله $6x^2-(2x-1)(3x+4)=0$ را حاصل میکنیم سپس آن حله هایی را که به غیر معادله $x(3x+4)\neq 0$ صدق میکند انتخاب میکنیم اینك به حل سیستم درزیر میپردازیم :

$$6x^2-(2x-1)(3x+4)=0$$
$$6x^2-6x^2+3x-8x+4=0$$
$$-5x+4=0$$
$$-5x=-4$$
$$\boxed{x=0,8}$$

دیده میشود که به قیمت $x=0,8$ بیانیه $0,8.(3.0,8+4)\neq 0$ حقیقت دارد. با استفاده از معادله (I) کسر هایی را که دارای مخرجهای مساوی باشند نیز حل کرده میتوانیم. مثلاً: کسرهای $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ طوری که c,b,a اعداد نسبتی باشند و قتی باهم مساوی اند که صورتهای آنها باهم مساوی بوده و مخرج مشترك شان خلاف صفر باشد.

$$\left(\frac{a}{c}=\frac{b}{c}\right) <=> (a=b\ ;\ c \neq 0)$$

در اینجا a، b و c اعداد نسبتی اند .

حالامیخواهیم که مخرج مشترك کسرهای $\frac{6x}{3x+4}$ و $\frac{2x-1}{x}$ را پیدا کنیم در اینصورت صورت ومخرج کسر اولی راضرب x ،صورت ومخرج کسر دومین را ضرب $(3x+4)$ مینمایم .

$$\frac{6x^2}{x(3x+4)} = \frac{(2x-1)(3x+4)}{x(3x+4)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

در رابطه (2) دیده میشود که مخرجها با هم مساوی اند .این دو کسر فقط درصورتی باهم مساوی میشوند که صورتهای شان با هم مساوی باشند ومخرج مشترك شان خلاف صفر باشد .

متکی به این توضیحات صورتهای کسرهای مذکور را به حیث معادله پذیرفته ومخرج مشترك آنها را غیر معادله قرارداده وسیستم زیر را تشکیل میدهیم :

$$\begin{cases} 6x^2=(2x-1)(3x+4) \\ x(3x+4) \neq 0 \end{cases}$$

اکنون این سیستم معادله راحل کرده ست جذرهای معادله را پیدا میکنیم .

$$6x^2=6x^2-3x+8x-4$$
$$6x^2-6x^2+3x-8x=-4$$
$$-5x=-4$$

$$\boxed{x=0,8}$$

قیمت غیر معادله $x(3x+4) \neq 0$ مساوی به 5,12 میشود . یعنی این قیمت حاصل شده غیر معادله مذکور را نیز تحقیق میکند، پس 0,8 جذر سیستم میباشد .

غرض فهمیدن حقانیت به قیمت $x=0,8$ نتیجهٔ قیمتهای کسرهای $\frac{6x}{3x+4}$ و $\frac{2x-1}{x}$ را باهم مقایسه میکنیم . بعد از قیمت گذاری دیده میشود که قیمت این دو کسر بنا بر قیمت $x=0,8$ باهم مساوی میباشد.

3 .مثال دیگری را درنظر میگیریم .

بااستفاده از مساوی بودن دو کسر معادله ذیل را حل میکنیم.

$$\frac{y+1}{y-2} - \frac{5}{y+2} = \frac{12}{y^2-4}+1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

برای حل این معادله افاده های : $\frac{y+1}{y-2}$ و $\frac{5}{y+2}$ و $\frac{12}{y^2-4}$ را به کسرهای معادل آنها که دارای کوچکترین مخرج مشترك باشد تبدیل میکنیم ، یعنی اطراف چپ وراست معادله را به شکل کسرهای ذیل مینویسیم :

$$\frac{(y+1)(y+2)-5(y-2)}{(y-2)(y+2)} = \frac{12+(y^2-4)}{(y-2)(y+2)}$$

معادله حاصل شده که بامعادله (3) معادل است وآن را به شکل سیستم ذیل مینویسیم :

$$\begin{cases} (y+1)(y+2)-5(y-2)=12+(y^2-4) \\ (y-2)(y+2) \neq 0 \end{cases}$$

از اینجا :

$$y^2+y+2y+2-5y+10=12+y^2-4$$
$$y^2+3y-5y-y^2=12-12-4$$
$$-2y=-4$$

$$\boxed{y=2}$$

چون به قیمت $y=2$ ، $(2-2)(2+2) \neq 0$ یك بیانیه غلط است ، پس سیستم مذکور حل ندارد. از اینکه معادله دارای حل نمیباشد در این صورت میگوئیم که ست حله آن خالی است .

101- ست حله معادله های زیر را پیدا کنید:

(a) $\frac{2x-5}{x+5}-4=0$; b) $2-\frac{x^2+3}{x^2+1}=0$;

(c) $\frac{3}{2x-1}-\frac{4}{x+1}=0$; (d) $\frac{x-9}{x-4}+\frac{x+9}{x+4}=0$;

(e) $-\frac{2x^2}{3x-5}=x$; f) $\frac{1+x-6x^2}{3x+1}=x$.

102 - به کدام قیمتهای y قیمت کسرهای زیر باهم مساوی اند.

(a) $\frac{1}{10y-1}$ و $\frac{1}{2-5y}$; (b) $\frac{3}{8-5y}$ و $\frac{5}{7y-2}$ ؟

103 - تابع $y=\frac{3x-1}{x+3}$ داده شده است به کدام قیمتهای x قیمت

تابع: (a) به 0، (b) به 5 و (c) به 3 مساوی میشود؟

104 - ست جذرهای هریك از معادله های زیر را پیدا کنید.

(a) $\frac{4}{x}+1=\frac{x-1}{x+1}$; (b) $\frac{1}{u-2}+3=\frac{u-3}{2-u}$;

(c) $\frac{1}{5-y}-6=\frac{1-6y}{y}$; (d) $\frac{9}{v}+\frac{2v-3}{v+1}=2$.

105 - معادله های زیررا حل کنید:

(a) $\frac{5}{y-2}-\frac{4}{y-3}=\frac{1}{y}$; (b) $\frac{3}{y-2}+\frac{7}{y+2}=\frac{10}{y}$

(c) $\frac{3}{2y-1}+\frac{7}{2y+1}=\frac{4-20y^2}{1-4y^2}$; (d) $\frac{y+5}{y^2-5y}-\frac{y-5}{2y^2-10y}=\frac{y+25}{2y^2-50}$

106 - آن ست قیمتهای متحول‌را دریافت کنید که در آنها

(a) قیمت‌افاده $\frac{3}{a-3}-\frac{a}{a+3}$ مساوی به 1 باشد،

(b) قیمت افاده $\frac{y}{y^2-4}+\frac{6}{y-2}$ مساوی به -3 باشد.

107 - (a) صورت یك کسر نظر به مخرج آن 2 واحد زیادتر است. هرگاه صورت این کسررا به‌اندازه یك واحد کم و مخرجش‌را به اندازه 3 واحد زیاد کنیم قیمت کسر مذکور مساوی به 0,25 میشود. کسررا پیدا کنید.

(b) مخرج یك کسر نظر به صورت آن 5 واحد بیشتر است. هرگاه مخرج کسر را تغیر نداده و صورت آن‌را به‌اندازه یک‌واحد زیاد کنیم کسر مذکور مساوی به $\frac{1}{3}$ میشود. کسررا پیدا کنید.

108 — بایسکیل سواری از محل A به طرف محل B که‌فاصله بین آنها 24 کیلومتر است حرکت کرد، ولی هنگام بازگشت از راه دیگری که‌از این راه فاصله B تا به A، 21 کیلومتر میباشد به طرف B عودت کرده واگر هنگام بازگشت سرعت بایسکیل‌سوار 1,2 چندسرعت آن از A به طرف B بوده و 6 دقیقه کمتر وقت‌را دربر گیرد سرعت‌رفتار بایسکیل سوار را حین حرکت‌از A به طرف B حساب کنید.

109 — یك سپورتمین به‌سمت‌جریان آب توسط زورق سپورتی فاصله 24 کیلومتر را طی نموده‌ولی درهنگام برگشت همین فاصله را در ظرف 7 ساعت پیموده است اگر سرعت زورق در آب استاده 7 کیلومتر فی ساعت باشد جریان آبرا حساب کنید.

110 ــ در سوالات زیر عوض ستاره گکها یکی از علامات <، >، یا = را طوری بگذارید که جمله های حاصل شده برای قیمتهای دلخواه متحول به یک بیانیه حقیقی ریاضی تبدیل گردد:

(a) $x*x+12$; (b) $2x+1*2x-3$

(c) x^2+4*4; (d) $-(1+x)^2*o$.

111. گرافهای توابع زیر را رسم کنید:

(a) $y=\frac{4}{x}$; (b) $y=-\frac{10}{x}$,

112. درسیستم مختصات ناحیه‌های گراف تابع $y=\frac{k}{x}$ را برای قیمتهای $k>o$ وهمچنان برای قیمتهای $k<o$ تعیین کنید.

113. آیا کدام یکی از نقاط زیر مربوط گراف تابع $y=\frac{x^2-1}{2x-5}$ میباشد:

(a) A $(0;-1)$; (b) B $(3;8)$; (c) C $(-2;-0,3)$]?

114. کدام یکی از نقاط زیر به گراف تابع $y=-\frac{1}{3}x^2$ درصورتی که تابع از $x\to y$ میباشد تعلق دارند وسه نقطه همین گراف را که‌داری مختصات تام باشد نشان دهید:

(a) A $(-3;3)$; (b) B $(6;-12)$; (c) C $(-6;12)$];

(d) D $(9;27)$ (e) E $(3o;100)$

طاقت نماهای تام

13. مفهوم طاقت نما تام منفی.

از معلومات ومطالعه های قبلی میدانیم که کتله آفتاب مساوی به

$1,985.10^{33}$ گرام و کتلهٔ اتومی هایدروجن مساوی به $1,674\cdot10^{-24}$ گرام است ما میدانیم که در ارایه عدد $1,985.10^{33}$ حصه عدد 10^{33} آن چنین معنی میدهد که 10، 33 دفعه درحالت ضرب قرار دارد، ولی درارایه عدد $1,674\cdot10^{-24}$ حصه عدد 10^{-24} چی مفهوم را افاده میکند ؟

برای فهمیدن این مطلب طاقت نما های پی درپی عدد طبیعی 10 را چنین می نویسیم :

10^1 ; 10^2 ; 10^3 .... (1)

هرکدام از اعداد ذکرشده فوق را به شکل زیر نیز نوشته کرده میتوانیم :

10 ; 100 ; 1000 .... (2)

اگر ترادف (2) را به طرف چپ دوام بدهیم دیده میشود که هریک از عدد این ترادف مرتب از عدد بعدی خود 10 مرتبه کمتر است. بنابر این قبل از عدد 10 عدد 1 و قبل از عدد 1 عدد $\frac{1}{10}$، وقبل از عدد $\frac{1}{10}$ عدد $\frac{1}{100}$ .... وغیره واقع میشوند.

یعنی (3) .... $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10}$; 1; 10 ; 100; 1000 ....

حاصل میشود. در رابطه (1) نشان داده شده که طاقت نمای هریک از عدد از طاقت نمای عدد پیشترخود به اندازهٔ (1) واحد کمتراست.

مطابق این قانون از ادامه ترادف (1) به طرف چپ نتیجهٔ زیر حاصل میشود قبل از عدد 10^1 عدد 10^0 و قبل از عدد 10^0 عدد 10^{-1} و-

همچنان قبل از عدد 10^{-1} عدد 10^{-2} .... وغیره واقع میباشند. یعنی :

$$\dots\dots 10^{-3} ; 10^{-2} ; 10^{-1} ; 10^{0} ; 10^{1} ; 10^{2} ; 10^{3} \dots\dots \quad (4)$$

حالا از مقایسه ترادفهای (3) و (4) حاصل میشود کــه 10^{-1} مساوی به $\frac{1}{10}$ و 10^{-2} مساوی به $\frac{1}{100}$ میباشند. در ریاضی ایـن حقیقت نه تنها برای طاقت نمای عدد 10 بلکه برای طاقت نماعددهای دلخواه نامساواتها وصفر هم قبول شده است .

تعریف : برای هر عدد a و n درصورتی که $a \neq 0$ بـوده $n \in z$ و $n<0$ باشد ، $a^{n} = \frac{1}{a^{-n}}$ میشود .

مثلاً : $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}}$; $3^{-8} = \frac{1}{3^{8}}$; $a^{-4} = \frac{1}{a^{4}}$

افادهٔ مانند 0^{-3} (صفر به طاقت نمای منفی معنی ندارد :

پس عدد $1{,}674.10^{-24}$ که کتلهٔ اتوم هایدروجن را به گرام افاده میکند چنین نیزنشان داده شده میتواند :

$$1{,}674\cdot10^{-24} = \underbrace{0{,}000\dots\dots\dots\dots1674}_{27\ \text{خانه اعشاری}}$$

سوالات

115 - هر یك از افاده های زیر را که به طاقت نمای منفی داده شده است به شکل کسر بنویسید :

(a) 10^{-3} ; (b) 5^{-2} ; (c) a^{-1} ; (d) x^{-20}

116 هر یك از کسر های زیر را به شکل کسری که طاقت نمای آن منفی باشد بنویسید :

(a) $\frac{1}{10^{2}}$; (b) $\frac{1}{5^{6}}$; (c) $\frac{1}{x^{7}}$; (d) $\frac{1}{1000}$; (e) $\frac{1}{81}$

117 - افاده های زیر را بشکل کسر بنویسید :

(a) $3x^{-5}$; (b) $x^{-4}y$; (c) $5ab^{-7}$; (d) $x^{-1}c^{-3}$; (e) $z(x+y)^{-4}$

118 - با استفاده از طاقت نمای منفی ، کسرهای زیر را بشکل حاصل ضرب بنویسید :

(a) $\frac{3}{b^{2}}$; (b) $\frac{2a^{8}}{c^{6}}$; (c) $\frac{2a}{(a-2)^{3}}$; (d) $\frac{x-3}{x+3}$

119.(a) هر یك از اعداد $16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8}$ را بـه شکل عدد طاقتداری که قاعده آن 2 باشد بنویسید .

(b) هر یك از اعداد $\frac{1}{125} ; \frac{1}{25} ; \frac{1}{5} ; 1 ; 5 ; 25 ; 125$ را به شکل عدد طاقتدار که قاعده آن 5 باشد بنویسید .

(c) هر یك از اعـداد $10 ; 0{,}1 ; 0{,}001 ; 0{,}0001$ و $0{,}0000001$ را به شکل عددی طاقتداری که قاعدهٔ آن 10 باشد بنویسید .

120 - قیمت افاده های زیر را پیدا کنید :

(a) $8\cdot4^{-3}$; (b) $18\cdot(-9)^{-1}$; (c) $3^{-2}+4^{-1}$; (d) $(0{,}3)^{0}+(0{,}1)^{-1}$

121 - نشان دهید که : (a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$; (b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$;

(c) $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$; (d) $\left(\frac{p}{q}\right)^{n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{-n}$

که در اینجا $n \in z$ و $n < 0$ است .

122 - با استفاده از نتایج سوال (121) قیمت افاده‌های زیر را حساب کنید:

$$(a)\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-3};\ (b)\ \left(\frac{3}{4}\right)^{-1};\ (c)\ (-0{,}01)^{-2};\ (d)\ -25\cdot\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

123 - قیمت افاده x^n را حساب کنید.

(a) در صورتی که $x=0{,}125$ و $n=-2$ باشد ،

(b) درصورتی که $x=1{,}5$ و $n=-4$ باشد ،

(c) درصورتی که $x=-1{,}62$ و $n=-1$ باشد .

124 - افاده های زیر را با صفر مقایسه کنید.

$$(a)\ (-0{,}17)^{4};\ (b)\ \left(-\frac{1}{26}\right)^{5};\ (c)\ (-3)^{-6};\ (d)\ (-2)^{-3}$$

125 - قیمت افاده های زیر را باهم مقایسه کنید .

(a) 2^{-5} و 3^{-5} را (b) $(0{,}2)^{-3}$ و $(0{,}5)^{-3}$ را. (c) $(-2)^{3}$ و 2^{-3} را

126 - افاده های زیر را به‌شکل کسر بنویسید .

$$(a)\ a^{-2}+b^{-2};\quad (b)\ xy^{-1}+xy^{-2}$$

$$(c)\ (x-2y^{-1})(x^{-1}+2y);\ (c)\ (a-b)^{-2}\cdot(a^{-2}-b^{-2})$$

127 - گراف تابع های زیر را رسم کنید:

$$(a)\ y=x^{-1};\ (b)\ y=2x^{-1};\ (c)\ y=x^{0}$$

14. خاصیتهای اعداد طاقتدار (طاقتها)

ما میدانیم که خاصیتهای زیر اعداد طاقتدار به طاقت نمای اعداد طبیعی حقیقت دارد .

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$ درحالی که $m>n$

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

در تمام قیمتهای بالا m و n اعداد طبیعی بوده و $a \neq 0$ وهمچنان $b \neq 0$ میباشند.

اکنون به کمک مثالها نشان میدهیم که فارمولهای ذکرشده نه تنها به طاقت نمای طبیعی، بلکه برای تمام اعداد تام دلخواه طوری که قاعده‌ها خلاف صفر باشند. نیز صدق میکنند .

مثال (1) نشان میدهیم که: $5^{-3}\cdot 5^{5} = 5^{-3+5}$ میشود .

حل :

در اینجا از تعریف طاقت نمای تام منفی وخاصیت حاصل تقسیم طاقت نمای اعداد طبیعی استفاده کرده چنین مینویسیم:

$$5^{-3}\cdot 5^{5} = \frac{1}{5^3}\cdot 5^{5} = 5^{5-3} = 5^{-3+5}$$

مثال (2) $3^0 \div 3^2 = 3^{0-2}$ میشود .

حل : $3^0 \div 3^2 = \frac{3^0}{3^2} = 3^0\cdot\frac{1}{3^2} = 3^0\cdot 3^{-2} = 3^{0-2}$

مثال (3) نشان میدهیم که : $(a^5)^{-6} = a^{5\cdot(-6)}$

درحالی که $a \neq 0$ است.

$$(a^5)^{-6} = \frac{1}{(a^5)^6} = \frac{1}{a^{30}} = a^{-30} = a^{5(-6)}$$

128 . قیمت افادههای ذیلرا به دوطریق دریافت نمائید(با استفاده ازتعریف طاقتها به طاقت نما منفی ثانیاً با استفاده ازخاصیت طاقت نما تام) .

(a) $8^0\cdot 8^2$; (b) $2^3 \div 2^5$; (c) $(2^{-3})^2$; (d) $(3^{-1})^{-2}$; (e) $(3.4)^{-2}$

(f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

129 - قیمت افادههای ذیلرا پیدا کنید .

(a) $3^{-4}\cdot 3^6$; (b) $16\cdot 2^{-3}$; (c) $5^{-3}\div 5^{-5}$

(d) $(2^{-4})^{-1}$; (e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot\frac{4}{9}$; (f) $\frac{21^{-21}}{4^{-5}\cdot 4^{-6}}$

g) $\frac{4^{-2}\cdot 8^{-5}}{2^{-22}}$; (h) $\frac{3^{-10}\cdot 9^6}{(-3)^2}$; (i) $\frac{(-5^{-5}\cdot 25^6}{125^8}$

130 - هریك از حاصلضرب ذیلرا بهشکل کسری ارایه کنید که طاقت نمای منفیآن مثبت گردد .

(a) $3x^{-5}$; (b) $2y^{-3}$; (c) $a^0\cdot b^{-2}$, (d) $5a^{-3}b^3$

(e) $(a+b)^{-1}$; (f) $2x(x-3y)^{-2}$

131 - هریك از افادههای طاقت دارذیلرا بهشکل ضرب ارائه کنید:

(a) $(a^{-1}b^{-1})^{-2}$; (b) $(x^3y^{-1})^2$ (c) $(0,5a^{-3}b^5)^{-2}$

(d) $(-2m^5n^{-3})^2$

132 - قیمت افادههای زیررا دریافت کنید :

(a) $0,2a^{-2}b^4.5a^3b^3$ درحالی که $a=-0,125$ و $b=8$ باشند.

(b) $\frac{-x^{-2}y}{-2x^{-5}\cdot y^{-2}}$ درحالی که $x=\frac{1}{4}$ و $y=-8$ باشند

133 - قیمت افادههای زیررا به شکل کسرارایه نمایید.

(a) $a^{-2}+b^{-2}$; (b) $2x^{-1}-xy^{-2}$; (c) $a^3x^{-5}+a^{-2}x^3-2a^{-4}x^{-3}$

(d) $5b^{-6}c^4-3bc^{-3}-2bc^2$

134 - جدول زیررا تکمیل کنید .

n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2^n																						

15-ارایه اعدادبهشکل معیاری.

درموضوعات علمی ، فنی وتخنیکی مابه عددهای بسیار کلان وبسیارخورد مثبت سروکار پیدا میکنیم .مثلاً : قطر آفتاب مساوی به 1390600000 مترو قطر مالیکول آب 0,0000003 سانتیمتر میباشد .

ما میتوانیم که عدد های بسیار کلان را به شکل معیاری یعنی $a.10^n$ طوریکه $1\leq a<10$ است بنویسیم .

مثلاً : $1390600000m=1,3906\cdot 10^9m$

با استفاده از طاقت‌نمای تام منفی عدد های بسیار خورد را نیز به شکل معیاری افاده کرده میتوانیم. مثلاً : قطر مالیکول آب را به شکل معیاری $3.10^{-8}cm$ نوشته میتوانیم .

به صورت عمومی هرعدد دلخواه را به شکل معیاری یعنی به شکل $a\cdot 10^n$ طوریکه $1\leq a<10$ و $n\in z$ باشد افاده کرده میتوانیم در اینجا طاقت نمایعنی n را ترتیب اعداد مینامند .

هر گاه a عدد کسری باشد در این حالت آن را به شکل کسر اعشاری افاده مینمایم. اکنون چند مثال ضرب و تقسیم اعداد زیر را به شکل معیاری آورده وچنین مینویسیم :

(1) $(3,1\cdot 10^3)\cdot(2,3\cdot 10^4)=(3,1\cdot 2,3)\cdot 10^7=7,13\cdot 10^7$

(2) $(8\cdot 10^{-3})\cdot(4,5\cdot 10^5)=(8\cdot 4,5)\cdot 10^2=36\cdot 10^2$

(3) $(4,8\cdot 10^2)\div(1,5\cdot 10^8)=(4,8\div 1,5)\cdot 10^{-6}=3,2\cdot 10^{-6}$

(4) $(8,9\cdot 10^7)\div(3,4\cdot 10^3)=(8,9\div 3,4)\cdot 10^4\simeq 2,6\cdot 10^4$

135 - کدام یک از عددهای زیر به شکل معیاری نوشته شده است اگر نوشته نشده باشد آن را به شکل معیاری نوشته و به ترتیب نشان دهید

(a) $3,4\cdot 10^8$; (b) $7,51\cdot 10^5$; (c) $10,6\cdot 10^9$;

(d) $5,2\cdot 10^{-4}$; (e) $19\cdot 10^{-6}$; (f) $0,4\cdot 10^{-8}$.

طالع زنگی

136 - اعداد زیر را به شکل معیاری نوشته و ترتیب آن را نشان دهید:

(a) 700000000 ; (b) 2586000000 ; (c) 30792000000;

(d) 0,02 ; (e) 0,0013 ; (f) 0,000057 .

(g) $\frac{1}{40}\cdot 10^{-5}$; (h) $\frac{1}{6}\cdot 10^{-7}$; (i) $\frac{1}{700000}$.

137 - عدد مربوط هر یک از جمله های زیر را به شکل معیاری بنویسید .

(a) مساحت سطح زمین را $510083000km^2$ تشکیل میدهد .

(b) کتله زمین مساوی به 6000000000000000000000 تن است .

(c) یک آدم زیادتر از 100000000000000 حجره دارد .

(d) کتله اتومی هایدروجن مساوی به 0,0000000000000000000000017 گرام است .

(e) نور در خلاء مسافه 1 کیلومتر را در ظرف $\frac{1}{300000}$ حصه ثانیه طی میکند

138- کتله های زیر را به گرام افاده کرده عددهای مربوط حاصل شده را بشکل معیاری بنویسید :

(a) 969,5kg ; (b) 43,2 T ; (c) 78 mg.

139 - افاده کنید .

(a) مساحت 378 متر مربع را به کیلو متر مربع .

(b) مساحت 25 ملی متر مربع را به متر مربع :

جوابهای حاصل شده را به شکل معیاری ارایه کنید .

140 - در قیمت عددی هر یک از افاده های زیر بعد از علامه اعشاری چند خانه اعشاری وجود دارد :

(a) $3\cdot 10^{-2}$; (b) $2,8\cdot 10^{-2}$ (c) $13,1\cdot 10^{-6}$; (d) $5,679\cdot 10^{-1}$

141 - عملیه های زیر را انجام دهید:

(a) $(1,25\cdot 10^6)\cdot(4\cdot 10^{12})$; (b) $(4,2\cdot 10^{-3})\cdot(5,5\cdot 10^8)$

(c) $10^5 \div (8\cdot10^{-2})$; (d) $6,1\cdot10^{10}) \div (2,7\cdot10^{12})$
(e) $(3\cdot10)^{-15} \div (7\cdot10^{-5})$

142 - بدون حساب کردن ترتیب حاصل ضرب a.b رامعین کنید.

(a) اگر $a=2\cdot10^{-6}$ و $b=3\ 10^{-5}$ باشد ،

(b) اگر $a=3,1\cdot10^{8}$ و $b=1,5\cdot10^{-3}$ باشد .

143 - درهریك از افاده‌های زیر عددمثبت‌مربوط b ، 7 است‌ترتیب عدد های زیررا پیدا کنید :

(a) $100\ b$; (b) $o,01b$; (c) $b.10^6$; (d) $b\cdot10^{-8}$

144 - سرعت‌نور در خلامساوی به $3\cdot10^8$m/see است . مسافه‌طی‌شده وقتهای داده شده ذیلرا به متر حساب کنید.

(a) در 1000 ثانیه؛ (b) در 0,01 ثانیه‌و (c) در اساعت .

145 - درجدول زیر کتله‌های تقریبی سیارات نظام‌شمسی داده‌شده‌است:

سیارات	عطارد	زهره	زمین	مریخ	مشتری	زهل	اورانوس	نپتون	پلوتون
کتله به کیلوگرام	$3,17\cdot10^{23}$	$4,87\cdot10^{24}$	$5,89\cdot10^{24}$	$6,40\cdot10^{25}$	$1,90\cdot10^{27}$	$5,69\cdot10^{25}$	$7,80\cdot10^{25}$	$1,03\cdot10^{26}$	$5,40\cdot10^{24}$

(a) سیارهها را به ترتیب از دیاد کتله آنها بنویسید.

(b) کتله مشتری چند ، چند کتله زمین است ؟

146 - هریك ازمعادله های زیررا به‌طریق گرافها حل کنید:

(a) $6x^{-1}=x-1$; (b) $6x^{-1}=x+3$.

147 - هریك ازافاده‌های ذیلر اساده کنید:

(a) $\left(\frac{8a^{-2}3}{b^{-3}}\right)\cdot\left(\frac{b^{-2}}{16a^{-3}}\right)^2$; (b) $\left(\frac{9x^4}{2y3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{4y^4}{27x^5}\right)^{-2}$

فصل دوم

غیرمساویها وخصوصیات آنها

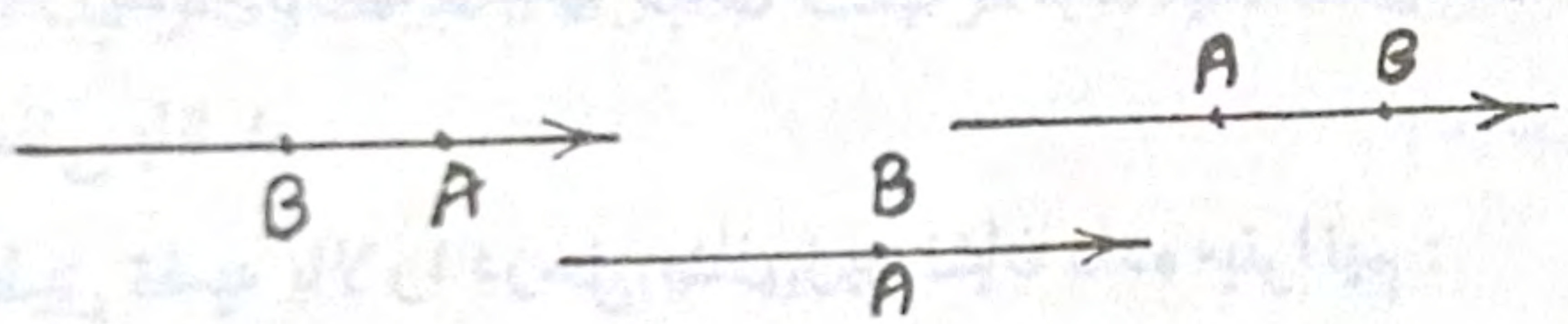
16 . مفهوم بزرگترو کوچکتر(زیادترو کمتر)

شما میدانید که دو نقطA و B بالای یك خط مستقیم بین خود یکی ازسه رابطه زیررا دارا میباشد :

1) یانقطA به طرف راست نقطه B قراردارد .

2) یا نقطه A با نقطه B منطبق میباشد.

3) یانقطه A به‌طرف چپ نقطه B قرارمیگرد .



شکل (1)

همچنان برای دوعدد مختلف a و b نیزیکی ازامکانات زیر موجوداست :

1) یا$a>b$

2) یا $a=b$

3) یا $a<b$

در بعضی اوقات تعین یك نقطه بالای خط مستقیم مشکلات را بار می آورد. مثلاً: تعین نقط A و B را در نظر بگیرید طوری که $|OA| = \frac{1}{3}$ و $|OB| = 0,33$ باشد.

همچنان به سوال اینکه از جمله اعداد $\frac{5}{6}$ و $\frac{6}{7}$ کدام یك زیادتر است پاسخ دادن با فهم فوری کار آسان نیست، غرض حل این مشکل قضیه ذیل به ما کمك میکند:

1) رابط $b<a$ تنها و تنها وقتی حقیقت دارد که حاصل تفریق $a-b$ مثبت باشد.

2) رابطه $a=b$ تنها و تنها وقتی صحیح است که حاصل تفریق $a-b$ صفر باشد.

3) رابط $b>a$ تنها و تنها وقتی حقیقت دارد که حاصل تفریق $a-b$ منفی باشد.

تطبیق قضیه بالا را درحل مثال زیر نشان داده میتوانیم:

1) میخواهیم که اعداد $\frac{1}{3}$ و $0,33$ را مقایسه نمایم.

حل: میدانیم که برای مقایسه کسرها طریقه های مختلف موجود است. اکنون یك نوع آن را مطالعه مینمایم.

$$\frac{1}{3} - 0,33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{100-99}{300} = \frac{1}{300}$$

دیده میشود که حاصل تفریق اعداد $\frac{1}{3}$ و $0,33$ مثبت است

بنابر آن عدد $\frac{1}{3}$ زیادتر از عدد $0,33$ میباشد. یعنی:
غیر مساوی $0,33 < \frac{1}{3}$ صحیح است.

2) به اثبات میرسانیم که به تمام قیمتهای کیفی متحول a غیر مساوی زیر صدق مینماید:

$$a^2+7a-34 < a(a+7)$$

حاصل تفریق طرف راست و چپ غیر مساویهای بالا را طبق زیر حاصل میکنیم:

$$a^2+7a-34-a(a+7) = a^2+7a-34-a^2-7a=-34$$

دیده میشود که قیمت این حاصل تفریق منفی است، در نتیجهٔ بنابر رابطهٔ (3) گفته میتوانیم که برای تمام قیمتهای دلخواه a غیر مساوی $a^2+7a-34 < a(a+7)$ صدق مینماید:

3) نشان دهید که به هر قیمت اختیاری b غیر مساوی زیر صدق مینماید:

$$b(b-1) > b-1$$

مانند مثال بیشتر حاصل تفریق اعضای طرف چپ و راست غیر مساوی فوق را در زیر دریافت میداریم:

$$b(b-1)-(b-1) = (b-1).(b-1) = (b-1)^2$$

حاصل تفریق حاصل شده مانند مثال دوم تنها عدد نبوده بلکه متحول b را نیز در بر دارد. این افاده حاصل شده عبارت از یك مربع تام است که به هیچ یك قیمت دلخواه b منفی شده نمیتواند ولی محض

به قیمت $b=1$ مساوی به صفر شده و به هر قیمت دیگر b مثبت است.

از اینجا بنا بر رابطه (I) نتیجه میشود که به تمام قیمتهای اختیاری b غیر مساوی صدق مینماید.

اگر $b=1$ باشد $b(b-1)=b-1$ و اگر $b \neq 1$ باشد در این صورت $b(b-1) > b-1$ است.

سوالها:

148 - آیا حقانیت هریك از غیرمساویهای زیر واقعیت دارد:

(a) $-5<0$; (b) $\frac{5}{12} < \frac{1}{2}$; (c) $-7 \geqslant -11$; (d) $15<15$?

149 - درخالیگاههای سوالهای ذیل علایم >، < و = را طوری بگذارید که یك بیانیه درست ریاضی را افاده کند:

(a) $\frac{7}{8}$ ...... $\frac{5}{16}$; (b) $-3\frac{3}{7}$ ... $-\frac{24}{7}$; (c) 0,04... $\frac{1}{53}$;

(d) 3,001...3,001 ; (e) −0,0018...−0,0016 ; (f) $\frac{6}{625}$ ...−0,025 .

150 - در هر یك از سوالها رابطه بین اعداد a و b را طوری تعیین نمائید که حاصل تفریق یعنی $a-b$ مساوی به یکی از اعداد زیر گردد:

(a) −2,7 ; (b) 8 ; (c) 0; d$(-1)^{17}$; (e) 5^{-2}

151 - هرگاه b,a و c عددها باشند عددهای a و b را مقایسه کنید طوری که حاصل تفریق $a-b$ مساوی باشد به:

(a) $|c|$; (b) $-c^2$; (c) $(-c)^2$; (d) $4+|c|$;
(e) c^2+1 ; (f) $-5-c^2$.

152 - اگر $a<b$ باشد حاصل تفریقشان یعنی $a-b$ را توسط کدام عددهای زیر ارایه کرده میتوانیم؟

$3,7; (-015)^5; 2^{-7}; -|-3|$

153 - اگر $a-b$ معلوم باشد تصویر نقاط مربوط اعداد a و b را روی محور اعداد طوری ارایه کنید که با افاده های زیر وفق کند:

(a) $a-b=-7$; (b) $a-b=30,6$; (c) $b-a=-1,3$; (d) $b-a=0$.

154 - واضح سازید که چرا غیر مساویهای ذیل به تمام قیمتهای متحول صدق میکنند:

(a) $x^2+5>0$; (b) $1+a^2>0$; (c) $(a-3)^2>0$?

155 - به کدام قیمتهای x هر یك از غیرمساویهای زیر صدق مینماید:

(a) $2x^2+7>0$; (b) $x^2>0$; (c) $3x+1<x+1$; (d) $(x-4)^2>0$;

156 - نشان دهید که به تمام قیمتهای دلخواه a غیرمساویهای زیر صدق میکند:

(a) $3(a+1)+a-4(2+a)<0$; (b) $(a-2)^2-a(a-4)>0$.

157 - نشان دهید که هریك از غیرمساویهای زیر به هر قیمت دلخواه m صدق مینماید:

(a) $m^2+15m+56>m(m+15)$;
(b) $(7m-1)(7m+1)<49m^2$;
(c) $(2m+3)(2m+1)>4m(m+2)$;
(d) $3m(m+6)<(3m+6)(m+4)$;

158 - نشان دهید که غیر مساویهای زیر برای تمام قیمتهای

متحو لها حقیقت دارد :

(a) $a(a+b) \geq ab$; (b) $m^2 - mn + n^2 > m \cdot n$;
(c) $2bc \leq b^2 + c^2$; (d) $a(a-b) \geq b(a-b)$;

160 - ثبوت نما ئید که غیر مساوی زیر به همه قیمتهای دلخواه a صدق میکند :

$$\frac{(1+a)^2}{2} \geq 2a$$

161 - حاصل جمع مربع دوعدد مختلف a و b را بادوچند حاصل ضرب آنها مقایسه کنید .

1o2 - نخست باهریکی از اعداد 0;1;2;3;4 عدد K را عــلاوه نموده وسپس حاصل ضرب عددهای یك وچارم را با حاصل‌ضرب عدد های دوم وسوم مقایسه کنید .

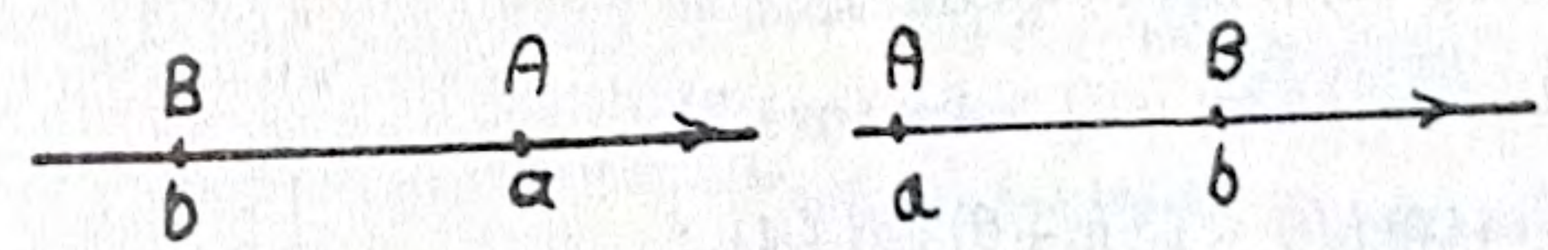
17 . خاصیت غیر مساویها .

در اینجا بعضی خواص غیر مساویهارا مطالعه مینمایم :

1) اگر a>b باشد، پس b<a میباشد .

برعکس اگر a<b باشد، پس b>a میباشد .

در شکل هندسی آشکار است که اگر نقطه A به‌طرف راست و نقطه B به‌طرف چپ آن روی محور اعداد قرار داشته باشد در این صورت مختصات A یعنی a زیادتر از مختصات نقطه B یعنی b میباشد .



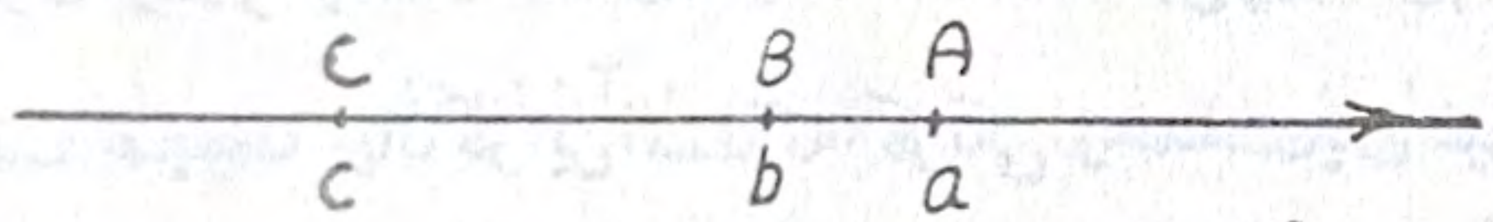
شکل (2)

وقتی که A به‌طرف راست نقطه B واقع باشد پس نقطه B به‌طرف چپ نقطه A واقع میگردد، که‌در این صورت مختصات نقطه B یعنی b کمتر از مختصات نقطه A یعنی a میگردد . بهمین ترتیب عکس مساله استدلال شده میتواند .

2) اگر a>b و b>c باشد در این صورت a>c میباشد .

درواقعیت مختصات نقطه A به‌طرف راست مختصات نقطه B واقعست. از اینکه b>c است، پس مختصات نقطه B به‌طرف راست مختصات نقطه C قرار دارد، که‌در نتیجهٔ مختصات نقطه A به‌طرف راست مختصات نقطه C قرار میگیرند. ازین نتیجه میشود که مختصات نقطه A یا a زیادتر است از مختصات نقطه C . یعنی c: در نتیجهٔ a>c میشود.

این خاصیت غیر مساویها را به نام خاصیت انتقالی یاد مینمایند .

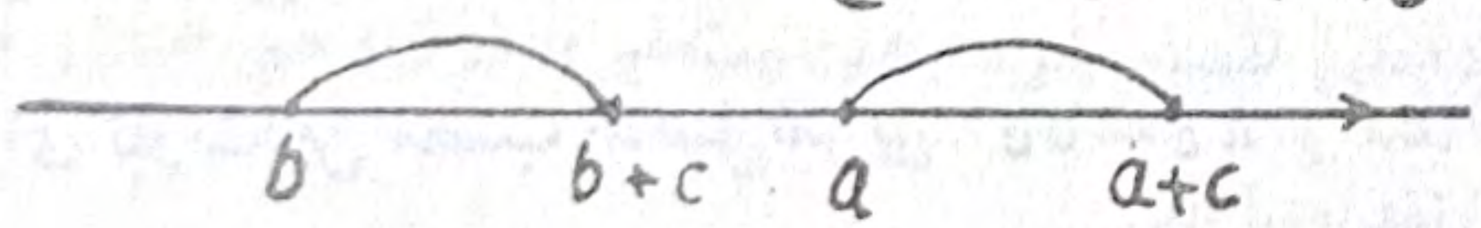


شکل (3)

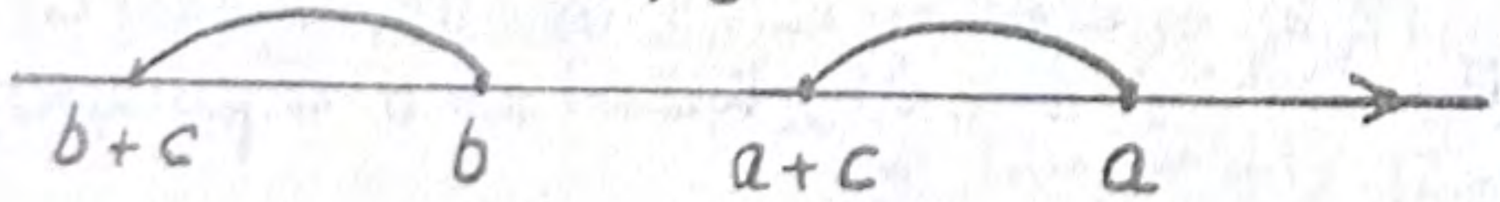
3. اگر a>b باشد برای هر عدد c، a+c>d+c میباشد .

ارایه حل این غیر مساوی به‌روی خط اعداد خوبتر دیده میشود .

اگر c مثبت باشد، این غیر مساوی به کمك شکل (4) واگر c منفی باشد به کمك شکل (5) در ذیل توضیح شده است .



شکل (4)



شکل (5)

غرض ثبوت به خط مستقیم
خاصیت بالا را چنین ثبوت مینمایم :
را مطالعه مینمایم .
اعداد مراجعه کرده و حاصل تفریق
چون $(a+c)-(b+c)=a-b$ است و از طرف دیگر ما میدانیم که
از اینجا گفته میشود که
$a>b$ است ، بنا بر آن $a-b$ مثبت است
در اینصورت $a+c>b+c$ میشود .
$(a+b)-(b+c,$ نیز مثبت است.
که اگر به هر دو طرف یك غیر مساوی
از رابطهٔ آخیر گفته میتوانیم
تغیر نمیخورد .
عین عدد را علاوه کنیم جهت غیر مساوی
با استفاده از خاصیت فوق نتیجه میشود که اگر $a+b>c$ با شد به افزایش
$-b$ به هر دو طرف غیر مساوی میتوانیم ما بنویسیم :
در نتیجهٔ $a>c-b$ حاصل میشود.
$a+b+(-b)>c+(-b)$ است.
چون هر دو رابطه $a+b>c$ و $a>c-b$ عین چیز است ، پس این
حقیقت عینیت بیان گر این است که اگر یکی از حدهای یك غیر مساوی
از یک طرف غیر مساوی به طرف دیگر آن انتقال داده شود ، علامهٔ آن
حد به علامه مخالف آن تغیر خورده وجهت غیر مساوی تغیر نمیخورد.
4) اگر $a>b$ باشد برای هر عدد مثبت c , $ac>bc$ است و بر عکس
برای هر عدد منفی c , $ac<bc$ است .
برای ثبوت این مطلب حاصل تفریق $ac-bc$ را مطالعه مینمایم:

$$ac-bc=c(a-b)$$

چون میدانیم که $a>b$ است بنا بر آن $a-b$ مثبت است. و قتی که این

فرق در یك عدد مثبت c ضرب میشود پس این حاصل ضرب نیز مثبت شده
یعنی: $c(a-b)>o$ یا در نتیجه $ac>bc$ میشود. در صورتی که $a-b$ مثبت
باشد و در یك عدد منفی c ضرب شود حاصل ضرب منفی شده نتیجهٔ حاصل
تفریق $ac-bc$ منفی میشود و از اینجا $ac<bc$ حاصل میشود .

پس میگویم یك غیر مساوی را در یك عدد c طوری که $c\neq o$ و
$c>o$ باشد ضرب گردد جهت علامه غیر مساوی تغیر نخورده و عین
علامه را حفظ مینماید و اگر $c<o$ باشد در اینصورت جهت
غیر مساوی به جهت مخالف تغیر مینماید .

به طور مثال اگر $a>b$ باشد و بخواهیم که اطراف آنرا به c ضرب
کنیم به قیمت $c=-1$ غیر مساوات $a(-1)<b(-1)$ یا $-a<-b$ حاصل میشود.
از مقایسه این غیر مساوی با غیر مساوی اولی نتیجه میشود که با تغیر دادن
علایم هر دو طرف یك غیر مساوی. جهت آن نیز تغیر می یابد.

مثلاً : از غیر مساوی $37<93$ غیر مساوی $-37>-93$ نتیجه میشود.

بهمین ترتیب اجرای عملیه تقسیم را نیز مانند ضرب چنین توضیح
کرده میتوانیم که اگر هر دو طرف غیر مساوی به عین عدد مثبت تقسیم
شود جهت و علایم غیر مساوی تغیر نمیکند و اگر هر دو طرف غیر مساوی
به یك عدد منفی تقسیم شود، هم جهت غیر مساوی و هم علایم نتیجه
اطراف آن تغیر میابند.

مثلاً : اگر هر دو طرف غیر مساوی $80<120$ تقسیم 10 نمایم غیر
مساوی $8<12$ را حاصل میداریم.

واگر هردو طرف غیرمساوی $80<120$ را تقسیم -40 نمایم علامهٔ غیر مساوی به‌جهت مخالف آن تغیر یافته وهمچنان علایم نتیجه آن تغیر میابد و در نتیجه غیرمساوی $-2>-3$ به‌دست آید.

سوالات:

163. غیرمساوی $-7<18$ راداریم. غیر مساویهای را بنویسید که اطراف هریك از آنها از حاصل جمع اطراف غیر مساوی با اعداد زیر حاصل شود:

(a) -5; (b) $2{,}7$; (c) -18 (d) 7

164. غیرمساوی $-9<21$ داده شده‌است غیرمساویهای را بنویسید که اطراف هر یك از آنها از حاصل ضرب اطراف غیرمساوی داده شده دراعداد زیر حاصل گردد:

(a) 2; (b) -1; (c) $(-3)^{-2}$

165. غیرمساویهایی رابنویسید که اطراف هریك از آنها ازحاصل تقسیم اطراف غیرمساوی $-15<-3$ به اعداد ذیل تشکیل گردد.

(a) 3; (b) -3; (c) -1; (d) $-\frac{1}{7}$

166. اگر $a<b$ باشد پس $-a>-b$ است. این حقیقت را بروی مستقیم اعداد (محور اعداد) درحالتهای مختلف زیر مطالعه و ارائه نمایید:

(a) هرگاه a و b هردومثبت باشند؛ (b) اگر a و b هردومنفی باشند؛ (c) اگر b مثبت و a منفی باشد؛ (d) اگر $a=0$ و b مثبت باشند؛

(e) اگر a منفی و $b=0$ باشد.

167. حقیقت غیرمساویهای زیر را بنابر قیمتهای مختلفه مثبت صفر ومنفی a بررسی نمایید:

(a) $5a<2a$; (b) $7a>3a$; (c) $-3a<8a$;

(d) $7a=2a$; (e) $-a>3$; (f) $-12a>-2a$.

168. در صورتی که $a>b$ باشد شرح دهید که بنابر کدام خاصیت غیرمساویها، هریك از غیر مساویهای ذیل حقیقت دارد:

(a) $-7a<-7b$; (b) $\frac{a}{3}>\frac{b}{3}$; (c) $2a+11>2a+11$

(d) $0{,}01a-0{,}7>0{,}01b-0{,}7$; (e) $1-a<1-b$;

169. به قیمتهای اختیاری متحول x کدام یک از غیرمساویهای زیر درست است؟

(a) $x(x+5)>5x-3$; (b) $x(x-2)>-2x-4$

(c) $3x(x+1)>3x^2$; (d) $(1+x)^2\geq 4x$

170 - به قیمتهای $a<b$ نصف حاصل جمع a و b را با عددهای a و b مقایسه کنید.

171 - (a) اگر درصورت ومخرج کسر $\frac{3}{7}$ عین عدد مثبت علاوه گردد در قیمت کسر مذکور چی تغییری به‌وجود میآید؟

(b) هرگاه درصورت ومخرج $\frac{13}{4}$ عین عدد مثبت علاوه گردد درقیمت کسر مذکورچی تغییری به وجود میاید؟

172 نشان دهید که غیر مساوی زیر حقیقت دارد: $25a+\frac{1}{a}<10$، وقتی که $a<0$ باشد

18. حل غیر مساویهای (غیر معادله) خطی یك مجهوله

میخواهیم که غیر معادله (1) .... $12-3x>0$ را حل کنیم.

برای حل غیر معادله (1) لازم است که عدد 12 با علامهٔ متضاد به آن طرف راست غیر مساوی انتقال داده شود:

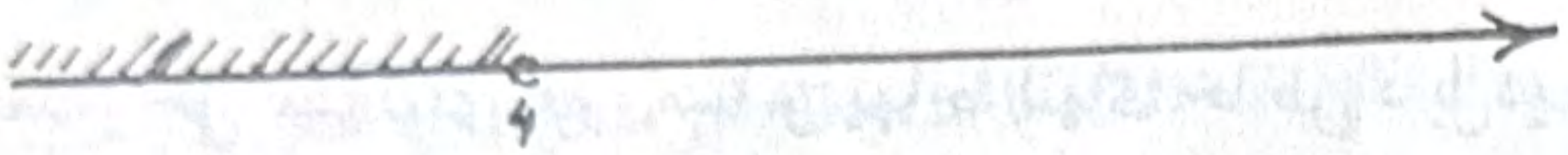
$$-3x>-12 \ldots (2)$$

در درس‌های گذشته تذکر داده شده بود، اگر یك حد از یك طرف یك غیر مساوی به طرف دیگر آن انتقال داده شود علامهٔ آن حد تغییر میخورد. لذا غیر مساوی (2) نتیجه غیر مساوی (1) و بر عکس غیر مساوی (1) نتیجهٔ غیر مساوی (2) است.

اکنون هر دو طرف غیر مساوی (2) را به عدد (3 −) تقسیم نموده، و علامه غیر مساوی مذکور به علامه مخالف آن تبدیل میشود در نتیجه غیر مساوی زیر به‌دست میاید:

$$x<4 \ldots\ldots (3)$$

از قضیه یی که اطراف غیر مساوی به یك عدد (بجز از صفر) ضرب و یا تقسیم شود غیر مساوی معادل آن حاصل میشود. و هم از نتیجه مبحث گذشته گفته میتوانیم که غیر مساوی (3) نتیجه غیر مساوی (2) و غیر مساوی (2) نتیجهٔ غیر مساوی (3) میباشد. پس به همین اساس غیر مساوی (1) و (3) معادل اند. لذا فاصله عددی $]-\infty;4[$ ست حله غیر مساوی $x<4$ و غیر مساوی $12-3x>0$ که با هم معادل اند میباشد. مانند (شکل 6)



شکل (6)

1) حل مثال زیر را از نظر میگذرانیم.

هرگاه غیر مساوی $\frac{15(1-2x)}{4} > 3(2-3x)$ داده شده باشد،

برای حل غیر مساوی هر دو طرف غیر مساوی را ضرب 4 مینمائیم. در نتیجه غیر مساوی زیر حاصل میشود:

$$15-30x>12(2-3x)$$

یا

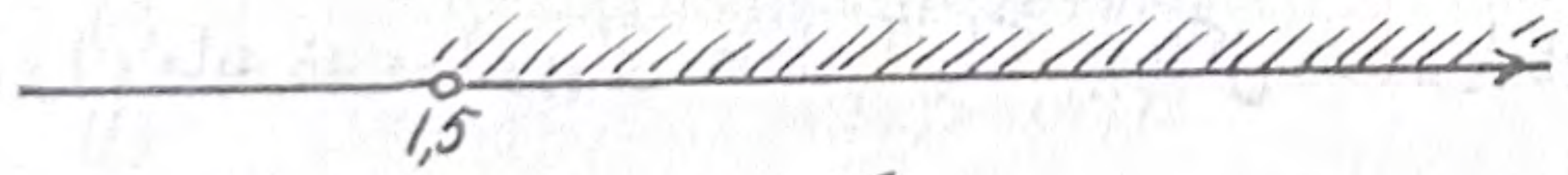
$$15-30x>24-36x$$

اکنون حد $36x$ را به طرف چپ و 15 را به طرف راست غیر مساوی به تغییر علایم انتقال داده و در نتیجهٔ غیر مساوی ذیل حاصل میگردد:

$$-30x+36x>24-15$$

$$6x>9$$

هر دو طرف این غیر مساوی را به 6 تقسیم نموده و در نتیجهٔ غیر مساوی $x>1{,}5$ به‌دست میاید. نظر به خاصیت رابطهٔ کمتر و زیادتر (ترتیب). ثبوت شده میتواند که غیر مساوی داده شده با غیر مساوی $x>1{,}5$ معادل است. بنابراین مسافه عددی $]1{,}5;+\infty[$ که در شکل 7 ارایه شده است ست حله آن میباشد.



شکل (7)

بعداز حل مثالهای غیر مساویها حالتهای خاص ذیل دیده شده میتوانند: که یاست حله یك غیرمساوی معین و مشخص است، یاست حله یك غیرمساوی هرعدد دلخواه یعنی ست تمام اعداد حقیقی است، یا یک غیرمساوی حل نداشته که دراین صورت میگوییم ست حله غیر مساوی مذکور ست خالی میباشد .

مثال 2 :حل غیرمساوی $2(x+8)-5x<4-3x$ را از نظر میگذرانیم:

$$2x+16-5x<4-3x$$

$$2x-5x+3x<4-16$$

$$0\cdot x<-12$$

وجود نامساوی فوق ناممکن بوده وحل ندارد، زیرا به هیچ یك قیمت حقیقی x این نامساوی حقیقت ندارد . پس غیر مساوی $2(x+8)-5x<4-3x$ نیز حل ندارد یعنی ست حله آن ست خالی است .

مثال 3) حل غیرمساوی: $5(x-12)<12(x-1)-7x$ را مطالعه میکنیم .

$$5x-60<12x-12-7x$$

$$5x-12x+7x<-12+60$$

$$0\cdot x<48$$

دیده میشود که غیرتساوی $0\cdot x<48$ برای تمام قیمتهای حقیقی x حقیقت دارد، پس دراین صورت تمام اعداد حقیقی یعنی مسافه $]-\infty;+\infty[$ ست حله غیرمساوی داده شده میباشد. غرض حل و بررسی، هریك از مثالهای فوق را، مابه غیرمساویهای معادل آنها که به شکل $ax>b$ یا $ax<b$ آورده شده تبدیل نموده ایم .

غیرمساویهای که شکل $ax>b$ یا $ax<b$ را، در حالی که در اینجا a و b اعداد اند داشته باشد، به نام غیرمساویهای خطی یاد میشود .

درصورتی که $a\neq 0$ باشد ست حله مساوات خطی $ax>b$ یا $ax<b$ عبارت از شعاع بازعددی است و اگر $a=0$ باشد ست حله این نوع غیر مساوی ازست تمام اعداد حقیقی یا تنهاست خالی میباشد.

سوالها

173 ست حله غیرمساوی: $5x+1>11$ را پیدا کرده وهم چند قیمت x را بنویسید که به ست حله آن تعلق داشته باشد .

174 - غیرمساوی $3x-2<6$ را حل کنید .آیا اعداد داده شده $2\frac{4}{7}$; $2\frac{4}{5}$ و 4 به ست حله غیرمساوی مذکور تعلق دارند یا خیر ؟

175 - هریك از غیرمساوی زیررا حل کرده وست حله آن را بروی مختصات خط مستقیم نشان دهید :

(a) $12x>18$; (b) $-6x\leq 1,5$; (c) $-11x>-33$;

(d) $10<15x$; (e) $7x-2,4\leq 0,4$; (f) $1,2>1,8-5x$;

(g) $17-x>10-6x+7$; (h) $12x+0,5\leq 13x-1$.

176 - غیرمساوی های زیر را حل کنید :

(a) $5(x-1)+7\leq 1-3(x+2)$;

(b) $4(a+8)-7(a-1)<12$;

(c) $4(b-1,5)-1,2\geq 6b-1$;

(d) $1,7-3(1-m)<-(m-1,9)$;

(e) $(a-1)^2-(a-7)(a-3)<2a+0,8$;

(f) $(3x-1)^2-3x(1,2+3x)>8x+177$.

177 - غیر مساویهای زیر را حل نمایید:

(a) $\frac{5x-1}{4} > 2$; (b) $\frac{3-2x}{2} \leq 1$;

(c) $\frac{2+3x}{18} < 0$; (d) $\frac{12-7x}{42} > 0$.

178 - به کدام قیمتهای y :

(a) قیمت کسر $\frac{7-2y}{6}$ از قیمت کسر $\frac{3y-7}{12}$ زیادتر است،

(b) قیمت کسر $\frac{4,5-2y}{5}$ از قیمت کسر $\frac{2-3y}{10}$ کمتر است؟

179 - غیر مساواتهای زیر راحل کنید.

(a) $\frac{3+x}{4} + \frac{2-x}{3} < 0$; (b) $\frac{4-y}{5} - 5y > 0$

(c) $x - \frac{x-3}{5} + \frac{2x-1}{10} < 4$; (d) $\frac{(2a-1)^2}{4} - \frac{3(a-1)}{5} > a^2$.

180 - تابع $y=1,2x-6$ داده شده‌است. توسط گراف ست آن نقاطی را که به قیمتهای مثبت x متعلق باشند دریافت کنید.

181. گراف تابع $y=\frac{1}{3}x+2$ را رسم کنید. ست آن قیمتهای x را که در آنها باید قیمت تابع خوردتر از 4 باشد غیر مساوی را طوری تحلیلی حل کنید.

182 - تابع $y=-x+2$ داده‌شده است. توسط گراف ست آن نقاطی را که مربوط آن قیمتهای x بوده که بنا بر آنها قیمت تابع بزرگتر از -3 باشد دریافت کنید.

183 - تابع $y=0,5x-1$ را رسم کنید. به قیمت‌های $x \in \{4,5;6;-4;\}$ قیمت y را دریافت کنید.

184 - ست حله هر یك از غیر مساویهای زیر را دریافت کنید:

(a) $15(x+4)-5x<10x$; (b $31(2x+1)-12x>50x$;

(c) $3x+7>(x+2)+(2x+1)$; (d) $12x-1<3(4x-3)$.

185 - زیادترین قمیت تام y را دریافت کنید که غیرمساوی زیر را صدق کند:

$$1,6-(3,2-0,2y)<5,1$$

186 - کمترین قیمت تام y را پیدا کنید که غیر مساوی زیر را صدق کند:

$$8(0,6-y)<24,2-7y$$

187 - به کدام قیمتهای طبیعی n فرق افادهٔ: $(2-1,2n)-(0,5n-6,5)$ مثبت است؟

188 - به کدام قیمتهای طبعی n مجموع افادهٔ: $(-27,1+3n)+(7,1+5n)$ منفی است؟

189 - به کدام قیمتهای مثبت x غیر مساوی زیر حقیقت دارد: $0,75-x<1,5-0,5x$?

190 - ست قیمتهای منفی y را دریابید که غیر مساوی زیر را صدق کند $1,2(y-5)<0,5y+0,1$?

191 - طول یك ضلع یك مستطیل 6cm است. طول ضلع دیگرش چند خواهد بود که محیط این مستطیل از محیط مربع که یك ضلع آن 4cm طول دارد کمتر باشد؟

درشکل(8) گراف تابعهای $y=x+1$ و $y=-2x+8$ رسم شده اند.
حال میخواهم که به حل سیستم غیر مساویها که حل آنها به کمك گرافهای شان آسانتر است بپردازیم. به طور مثال .«آن ست قیمتهای متحول را دریابید که در آن قیمت هردو تابع مذکور همزمان مثبت گردد» خواهیم دید که مسافه عددی $]-1;4[$ ست مطلوب است .

حل : به گرافها مراجعه نکرده مثالها را حل میکنیم یعنی ست قیمتهای x را دریافت میکنیم که در آن غیر مساوات $x+1>0$ وهم غیر مساوات $-2x+8>0$ حقیقت داشته باشد .

یعنی ست حله سیستم غیر مساواتهای:

$$\left\{\begin{array}{l} x+1>0 \\ -2x+8>0 \end{array}\right. \text{را پیدا میکنیم.} \quad ...... (1)$$

ست تقاطع ست حله های سیستم غیرمساویها، ست حله این سیستم میباشد . هر کدام از غیرمساویها را به غیر مساوی معادل آن تبدیل مینمایم. درنتیجه از سیستم داده شده یك سیستم دیگر معادل به آن مانند ذیل حاصل مینمایم:

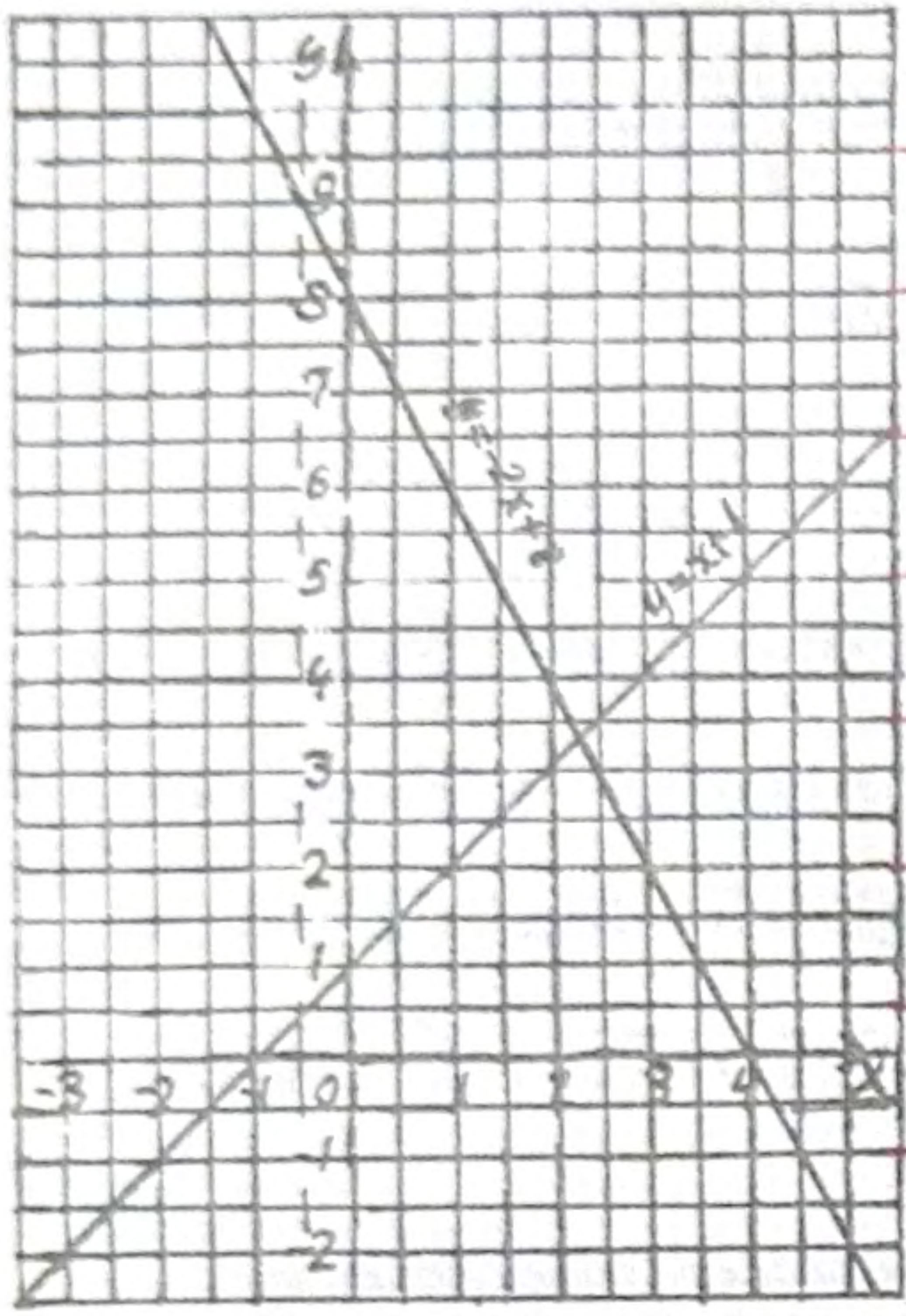
$$\left\{\begin{array}{l} x>-1 \\ x<4 \end{array}\right. \quad ...... (2)$$

دیده میشود که مسافه عددی $]-1;+\infty[$ ست حلهٔ غیر معادله $x>-1$ و مسافهٔ عددی $]-\infty;4[$ ست حلهٔ غیر معادله $x<4$ میباشد .

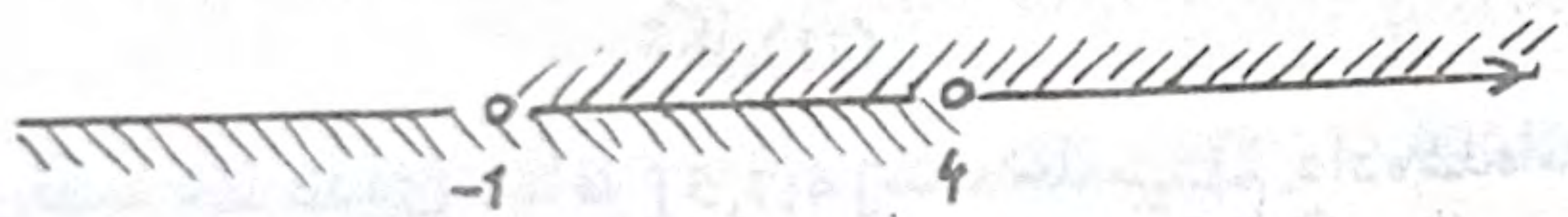
حال به کمك خط مستقیم عددی ست حلهٔ هر یك از غیر معادله ها را تعیین نموده وسپس ست تقاطع این ستها طوری که در شکل(9) نشان داده شده، است، پیدا میکنیم .

$$]-1;+\infty[\cap]-\infty;+4[=]-1;4[$$

مسافهٔ عددی $]-1;4[$ ست حلهٔ سیستم غیر مساویهای(1) میباشد .
مثالهای سیستم غیرمساویها را که حل میشود ساده ترین شکل $x>c$ یا $x<c$ را میگیرد . که در اینجا c یك عدد ثابت میباشد .



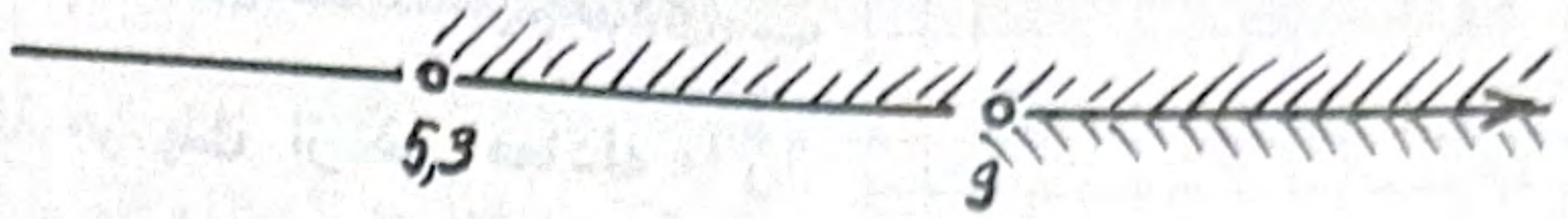
شکل (8)



شکل (9)

مثال 1 : سیستم غیر مساویهای $\left\{\begin{array}{l} x>9 \\ x>5,3 \end{array}\right.$ را حل کنید .

حل : بروی شعاع عددی مسافه $]9;+\infty[$ ست حله غیر مساوی اولی وهمچنان مسافه عددی $]5,3;+\infty[$ ست حلهٔ غیر مساوی دومی است. بااستفاده ازمختصات خط مستقیم داریم که:
$]9;+\infty[\cap]5,3;+\infty[=]9;+\infty[$ میباشد یعنی بروی شعاع عددی مسافه $]9;+\infty[$ ست حله سیستم داده شده جواب مطلوب میباشد .



شکل (10)

مثال (2) سیستم غیر مساویهای : $\begin{cases} x>4 \\ x<7,5 \end{cases}$ را حل کنید .

بروی شعاع عددی مسافه $]4;+\infty[$ ست حله غیر مساوی اولی همچنان مسافه عددی $]-\infty;7,5[$ ست حله غیر مساوی دومی میباشد. حال با کمک مختصات خط مستقیم مانند شکل(11) تقاطع این دو ست را چنین پیدا میکنیم : $]4;\infty[\cap]-\infty;7,5[=]4;7,5[$

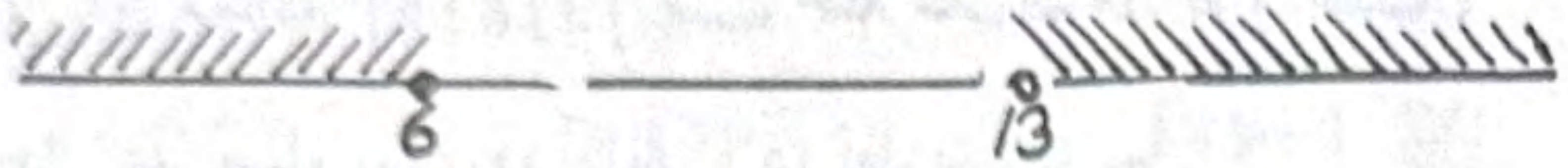
شکل(11)

بروی قطعه خط عددی مسافه $]4;7,5[$ ست حله سیستم داده شده است .

مثال 3 .سیستم غیر مساویهای: $\begin{cases} x>13 \\ x<6 \end{cases}$ را حل کنید .

حل : بالای شعاع عددی مسافه $]13;\infty[$ ست حله غیر مساوی اولی و مسافه عددی $]-\infty;6[$ ست حله غیر مساوی دومی است. حال آن که تقاطع این ستها ست خالی است .

یعنی : $]13;+\infty[\cap]-\infty;6[=\emptyset$ از اینجا گفته میشود که سیستم مذکور حل ندارد .



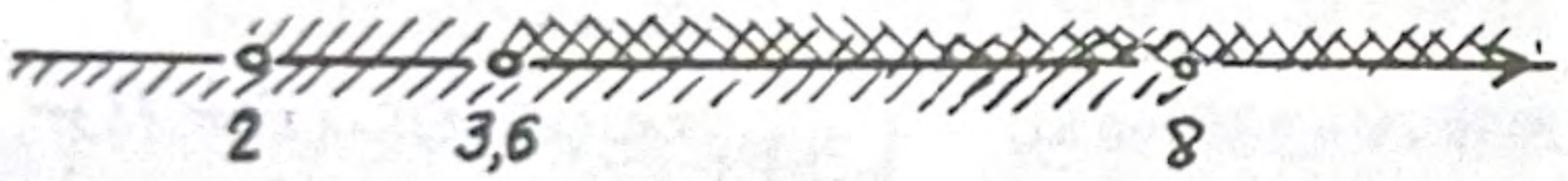
شکل (12)

مثال (4) سیستم غیر مساویهای : $\begin{cases} 3x>6 \\ -2x<-7,2 \\ 1.7x<13,6 \end{cases}$ را حل کنید .

حل : در مرحله اول هر یک از غیر مساویها را به غیر مساوی معادل آن تبدیل مینمایم. درنتیجهٔ یک سیستم که با سیستم اولی معادل بوده حاصل میشود :

$$\begin{cases} x>2 \\ x>3,6 \\ x<8 \end{cases}$$

سپس با استفاده از مختصات خط اعداد ست حله هر یک از غیر مساویها را طبق زیر دریافت میکنیم :



شکل (13)

چون ست حله غیر مساوی $2<x$ شامل ست حله غیر مساوی $x>3,6$ میباشد، بنا بر آن حل سیستم غیر مساویهای فوق و حل سیستم دو غیر مساوی: $\begin{cases} x>3,6 \\ x<8 \end{cases}$ عین ست است .

حال آنکه ست حله $\begin{cases} x>3,6 \\ x<8 \end{cases}$ مسافه عددی $]3,6;8[$ است .

بنا بر آن مسافه]3 ; 6 ; 8[ست حله سیستم مذکور است .

اکنون حل غیر مساویهای دوگانه‌را درنظرمیگیریم .

مثال (5) میخواهم غیرمساویهای‌دوگانه‌زیر را حل کنیم:

$$-1 < 3-2x < 3$$

حل : غیرمساویهای‌دوگانه بالارا بـه شکل سیستم‌معادل آن طبق زیر نیز افاده کرده میتوانیم :

$$\begin{cases} 3-2x > -1 \\ 3-2x < 3 \end{cases}$$

حال آنکه مسافه عددی]0 ; 2[ست‌حله‌این‌سیستم میباشد . به‌صورت عمومی حل‌غیرمساویهای‌دوگانه را چنین نشان میدهد:

$$-1<3-2x<3$$

$$-4<-2x<0$$

$$2> \quad x>0$$

درنتیجهٔ ست]0 ; 2[ست حله غیرمساوی دوگانه داده شده است .

سوالات:

192 - آیاعددی 3 شامل ست حله سیستم غیرمساویهای زیـر شده میتواند :

(a) $\begin{cases} 7\ x<5x+7 \\ 3x-1>5-x \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 0,6(x-1)<x \\ 2-x<3(2,5-x) \end{cases}$

193 - هریک ازسیستم غیرمساویهای زیررا حل کنید :

(a) $\begin{cases} x > 17 \\ x > 12 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x < 1 \\ x < 5 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x<-3,5 \\ x> \ 8 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} x>8 \\ x\leqslant 20 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} x\geqslant -1 \\ x\leqslant 3 \end{cases}$

194 - ستهای حله سیستمهای غیرمساویهای زیررا پیدا کنید:

(a) $\begin{cases} 2x-12>0 \\ 3x \quad >9 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 4 \quad y<-4 \\ 5-y> \ 0 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 3x-10<0 \\ 2x \quad >0 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} 6y \quad \geqslant 42 \\ 4y+12\leqslant 0 \end{cases}$

195 - ست حله هریک ازسیستمهای غیر مساو یها را پیدا کرده وچندعددی‌را که‌به حله این ستها تعلق داشته باشند نام بگیرید :

(د) $\begin{cases} x-0,8 > \ 0 \\ -5x < 10 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2-x\leqslant 0 \\ x-4\leqslant 0 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 1> 3x \\ 5x-1>0 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} 10x < 2 \\ x > 0,1 \end{cases}$.

196 - هریك ازسیستمهای غیرمساو یهای زیررا حل کنید :

(a) $\begin{cases} 5(x-2)-x > 2 \\ 1-3(x-1) <-2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x-(x-4) < 6 \\ x > 3(2x-1)+18 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 3(2-3x)-2(3-2x) >x \\ 6 < x^2-x(x-8) \end{cases}$; (d) $\begin{cases} 17x-5(x+0,6) > 3x \\ 2(3,5-x)+5(2x-2,4) >x-26. \end{cases}$

197 ـ آن اعداد تام رادریافت کنیدکه شامل‌ستهای‌حله‌سیستمهای غیر مساوی های زیر باشند:

(a) $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ 7,2-y\geqslant 4 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 12a-37 >0 \\ 6a < 42 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 6-4b>0 \\ 3b-1>0 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} 3-18x <0 \\ 0,2-0,1x>0 \end{cases}$

198 ـ آن‌ستهای‌قیمتهای‌متحول a رادریافت کنیدکه‌به سیستمهای غیرمساویهای زیر صدق کند :

(a) $\begin{cases} 2,5\,a - 0,5\,(8 - a) < a + 1,6 \\ 1,5\,(2a - 1) - 2a < a + 2,9 \end{cases}$;

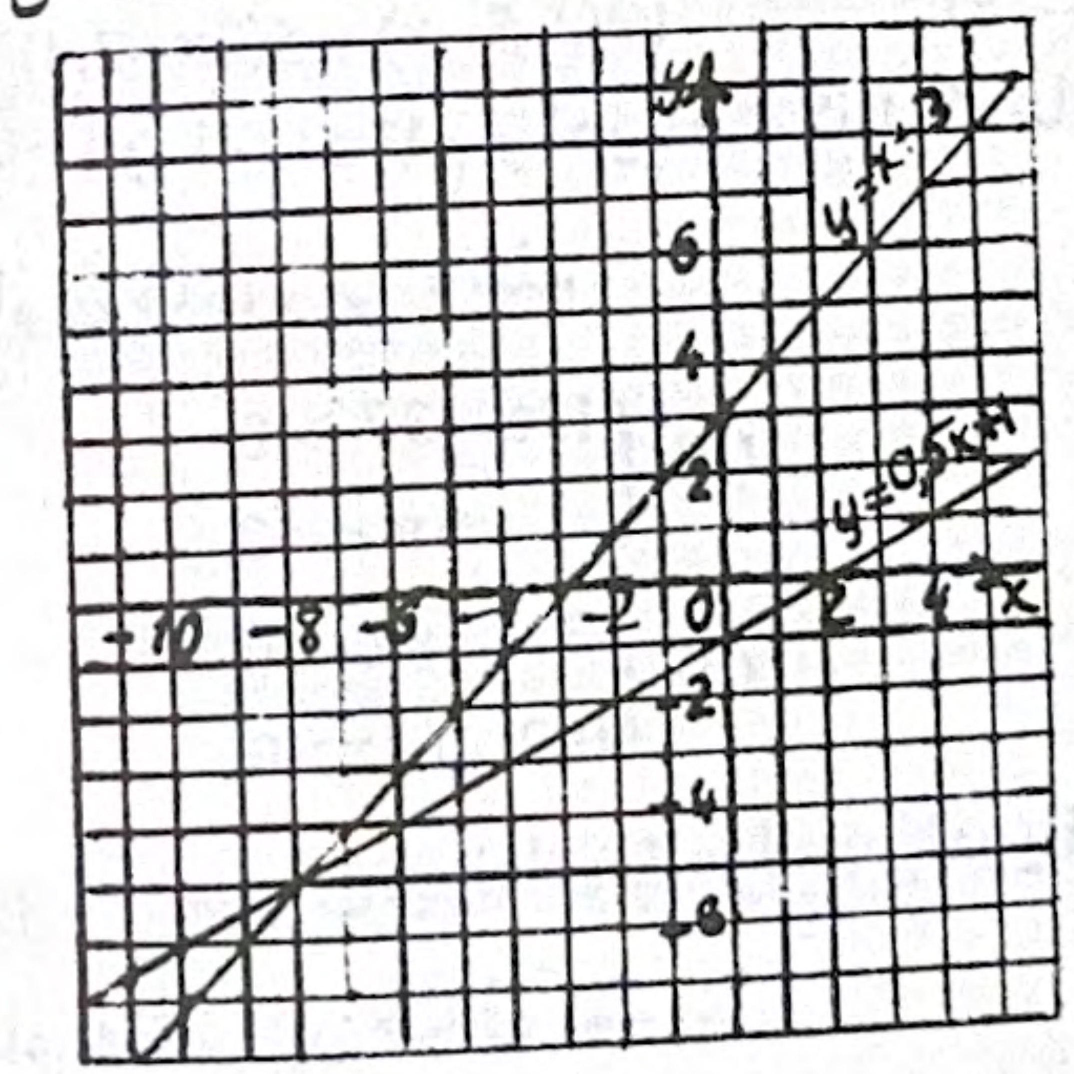
(b) $\begin{cases} 0,7\,(2a + 1) - 0,5\,(1 + a) < 3a \\ 2a - (a - 1,7) > 6,7 \end{cases}$

199 - ستهای آن اعداد تام را که شامل ستهای حل سیستمهای غیر مساویهای زیر باشند دریافت کنید:

(a) $\begin{cases} 2x - \frac{x-1}{3} > x \\ x - 1 < 3 - \frac{x+1}{2} \end{cases}$; (b) $\begin{cases} \frac{a-1}{2} + \frac{a+1}{3} < 1 \\ 2 - \frac{1-a}{4} > 0 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-4}{3} > 2x - 1 \\ 2x - \frac{y-5}{3} > x - 3 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} 3a - \frac{1+5a}{4} < a \\ \frac{a-1}{5} - a - 1 < 0 \end{cases}$

200 - a) در شکل (14) گرافهای تابع $y = x + 3$ و تابع $y = 0,5x - 1$ داده شده اند. با استفاده از این گرافها آن ست قیمتهای متحول x را تعیین کنید که به اساس آن هردو تابع قیمت مثبت داشته باشد سپس سیستم غیرمساویهای را ترتیب داده و آن را به طریق الجبری حل نماید.



شکل(14)

b) دو تابع $y = -x + 6$ و $y = 3x - 9$ را درنظر بگیرید. آن ست قیمتهای متحول x را دریافت کنید که بنابر آن هردو تابع مثبت گردند به کمک گراف این جوابها را پیدا کنید.

201 - هریك ازغیرمساویهای دوگانه زیررا حل کنید:

(a) $-3 < 2x - 1 < 2$; (b) $6,5 < \frac{7x+6}{2} < 20,5$

(c) $-12 < 5 - x < 12$; (d) $2 < \frac{6-4x}{5} < 10,8$

202 - به کدام قیمتهای y قیمت دو حده $5 - 3y$ در مسافه $]-1;1[$ تعلق میگیرد؟

103 - به کدام قیمتهای b قیمت کسر $\frac{5-2b}{4}$ به مسافه $[-2;1]$ تعلق میگیرد؟

204 - هریك از سیستمهای غیرمساوی زیررا حل کنید:

(a) $\begin{cases} x > 8 \\ x > 7 \\ x > -4 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} y < -1 \\ y < -5 \\ y < 4 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} m > 9 \\ m > 10 \\ m < 12 \end{cases}$

20 - حل مثال غیرمساویهای مرکب (ضرب و تقسیم)

در ذیل حل غیر مساویهای را که شکل $(ax+b)(cx+d)>0$ و $(ax+b)(cx+d)<0$ و $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ و $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ را داشته باشند درحالیکه a، b، c و d اعداد ها اند، درنظرمیگیریم.

مثال 1: غیرمساوی $(0,5x-1)(4-x)>0$ را حل میکنیم.

حل: ما میدانیم قیمت حاصله این دو عامل ضربی وقتی مثبت است که هر دو عامل ضربی هم علامه باشند یعنی یا هر دو عامل مثبت یا هر دو منفی باشند. پس غیرمساوی داده شده به آن قیمتهای متحول x حقیقت دارد که اقلاً یکی از دو سیستم غیرمساویهای زیر را صدق نمایند.

$$\begin{cases}0,5x-1>0\\ 4-x>0\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}0,5x-1<0\\ 4-x<0\end{cases}$$

ازاینجا داریم که:

$$\begin{cases}x>2\\ x<4\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}x<2\\ x>4\end{cases}$$

مسافه عددی $]2;4[$ ست حله سیستم اولی میباشد و ست حله سیستم دومی خالی است.

درحقیقت ست حله سیستم غیرمساوی داده شده عبارت از $]2;4[\cup\varnothing=]2;4[$ است.

مثال 2) غیرمساوی $\frac{2x-3}{5-4x}<0$ را حل میکنیم.

حل: خارج قسمت دو کسر وقتی منفی است که صورت و مخرج آن مختلف الاشاره باشند. پس غیرمساوی داده شده به آن قیمتهای متحول x حقیقت دارد که اقلاً به یکی از سیستم غیرمساویهای زیر صدق نماید:

$$\begin{cases}2x-3>0\\ 5-4x<0\end{cases} ; \quad \text{یا} \quad \begin{cases}2x-3<0\\ 5-4x>0\end{cases}$$

از حل هریك از این دو سیستم به دست می آید که مسافه عددی

$]1,5;+\infty[$ ست حله سیستم اولی و مسافه عددی $]-\infty;1,25[$ ست حله سیستم دومی میباشد. حال آنکه اتحاد این دو ست ست حله هر دو سیستم فوق است. بنا بر ان $]-\infty;1,25[\cup]1,5;\infty[$ ست حله غیر مساوی داده شده میباشد.

سوالها:

205- ست حله غیرمساوی زیر را پیدا کرده وهم دو قیمت متحول x را نشان دهید که به این ست حله تعلق داشته باشد. قیمت این حاصل ضرب را با صفر مقایسه کنید.

$$(0,5x-1)(x-5)<0$$

206- ست حلهٔ غیرمساوی زیر را پیدا کنید آیا اعداد $8;-0,6;0;4;100$ و 0—;3— به ست حله آن تعلق دارند:

$$(5y+3)(2y-7)>0$$

207- غیرمساویهای زیر را حل کنید:

(a) $x(10x-3)>0$; (b) $(2x-1)(x+1)>0$;

(c) $(10x-1)(5x-2)<0$; (d) $(5+7x)(4x+1)<0$.

208- به کدام قیمتهای متحول x قیمت حاصل ضرب $(x+1)(x-3)$ (a) منفی، (b) مساوی به صفر و (c) مثبت میباشد؟

209- a) به کدام قیمتهای متحول a قیمت کسر $\frac{8}{3a+18}$ مثبت است؟

b) به کدام قیمتهای متحول b قیمت کسر $\frac{2,5}{15-5b}$ منفی است؟

210 - غیرمساویهای ذیلرا حل کنید:

(a) $\frac{12}{x-762}>0$; (b) $\frac{-7\frac{1}{3}}{5-a}<0$; (c) $\frac{1,75}{3x-0,75}<0$.

211 - ست حله غیرمساوی $\frac{9-3x}{5x-12}<0$ را پیدا کرده وهم دوعددی را که به این ست حله تعلق داشته باشند نشان دهید .

212 - غیرمساویهای زیر را حل کنید:

(a) $\frac{x-17}{9-x}>0$; (b) $\frac{3x-4}{x}<0$

213 - ست قیمتهای y را دریافت کنید که به قیمتهای y غیرمساویهای زیر حقیقت پیدا کند:

(a) $(y-9)^2>0$ (b) $(y-8)(y^2+16)>0$;

(c) $(12-3y)(1+7y^2)<0$; (d) $(y-2)^2(y-3)<0$.

214 - هریك از غیرمساویهای زیر را حل کنید .

(a) $\frac{2a-7}{a^2+4}<0$; (b) $\frac{a+9,5}{3a^2+6}>0$; (c) $\frac{27-a}{a^2}<0$

استعمال غیرمساویها برای محاسبهٔ اندازه دقیق و تقریبی

21. مفهوم اندازه گیری دقیق و تقریبی

مردم در فعالیتهای روزمره عملی دائماً به کمیتهای مختلف مانند طول ،سطح ، مساحت،حجم، کتله ،حرارت وغیره سروکار دارند.

مقدار و اندازه واقعی بعضی از این کمیتهارا بصورت دقیق میتوان معین ساخت. بطور مثال میتوانیم تعداد گوسفندان یك رمه را، یا تعداد میز های یك صنف، یا تعداد شاگردان یك مکتب را بطور دقیق حساب کنیم. مگر در اکثر اوقات ما نمیتوانیم بعضی کمیتهارا به صورت دقیق اندازه نمایم. در این حالت ما فقط به مفهوم اندازه گیری تقریبی سروکار داریم. چنانکه در بعضی وقتها برای اندازه گیری ما به اعدادی سروکار میگیریم که حساب کردن آنها بصورت دقیق ناممکن است. ومجبور میشویم که به اندازه گیری تقریبی آن اکتفا کنیم. مثلاً تعین تعداد تماشاچیان تلویزیون یا شنونده گان رادیو کابل وهمچنان تعین تعداد خیل پرنده گان که در حالت پرواز میباشند، یا تعداد درختان جنگل وغیره را که در همچو موارد ما مجبوریم که به اندازه گیری تقریبی قانع گردیم.

22. واحد های اندازه گیری

اندازه گیری تقریبی بدون آلات امکان دارد ولی اندازه گیری دقیق توسط الات صورت میگیرد. مثلاً: اگر خواسته باشیم که طول میله را دقیق اندازه کنیم، در آنصورت اندازه گیری آن به کمك بعضی از آلات مثل خط کش، کمپاس، مکرومتر وغیره اجراشده میتواند. پس اندازه گیری دقیق به آلات اندازه گیری ومهارت پیمایش کننده مربوط است. اگر آله که توسط آن یك کمیت اندازه میشود دقیق وحساس نباشد یا ما به اندازه گیری مهارت نداشته باشیم در نتیجه در اندازه گیری اشتباه بوجود میاید.

عملیه اندازه گیری دقیق به کمیتهای مورد پیمایش نیز ارتباط میگیرد.
مثلاً اندازه گیری دقیق قسمتهی ازمساحت زمین، حرارت، سرعت پرواز طیاره وغیره ناممکن است.

بعضی اوقات برای سهولت محاسبه به جای اعداد چند رقمه که از پیمایش حاصل شده عددی راکه به آن نزدیك باشد به حیث قیمت تقریبی آن قبول کرده ومحاسبه را اجرا مینمایند به. طور مثال اگر ما عدد 2،19563 را ازنتیجه اندازه گیری حاصل کرده باشیم میتوانیم که به جای آن عدد 2،196 یا 2،20 راکه نام عدد تقریبی 2، 19563 با تغییر اضافی یادمیکنند، قبول کنیم وبعدازآن محاسبه را اجرا نمائیم .

سوالها:

215. کدام اعداد مفهوم (قیمت) دقیق اندازه وکدامها اعداد تقریبی رانشان میدهند :

a). اهالی شهر 7061 (نفر) رانشان میدهد،

b). ماشین دارای 82 پرزه میباشد،

c). کتله ماشین 1230 کیلو گرام است،

d). طیاره مسافربری 2 ساعت در پرواز است،

e). درطیاره 86 مسافر است،

f). سرعت صوت 332 متر فی ثانیه است،

g). نسبت طول محیط دایره برقطر 3،14 است؟

216. اعداد راتا دهها تکمیل کنید وطریق به دست آوردن اعداد

تقریبی را نشان دهید.
(آیا اعداد داده شده تقریبی کم شونده یا زیاد شونده اند)؟

(a) 12،41; (b) 8،493; (c) 3،45 ;
(d) 11،75: (e) 121،03; (f) 1،98.

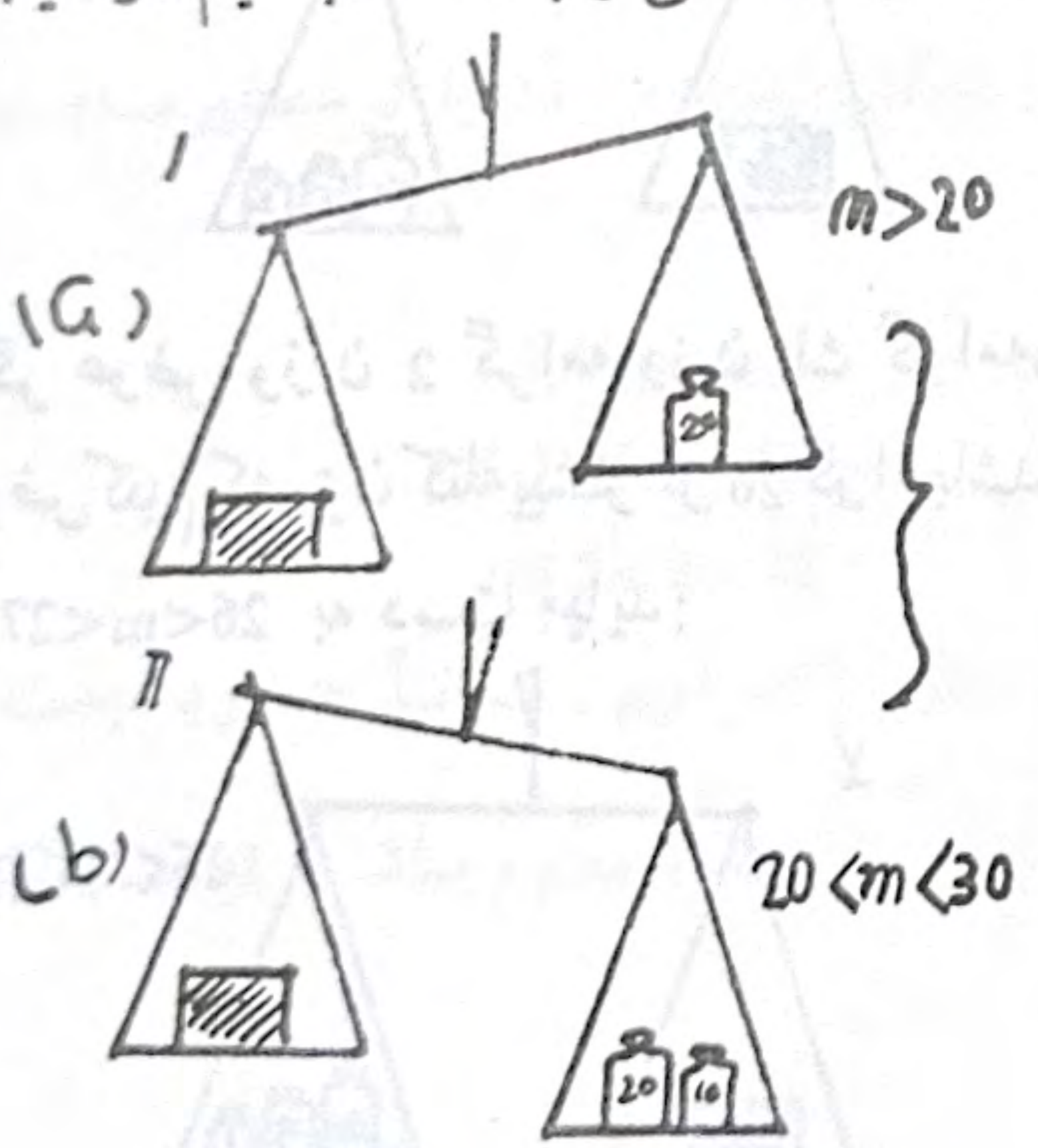
217. اعداد زیر را تا صدها تدویر سازید :

(a) 6 ،113; (b) 0،318; (c) 1،407;
(d) 10،275; (e) 250،3 (f) 11،096 .

218. عدد π یعنی 3،14159 را تا ده هزارم. تا صدم. تدویر نمایید. درمورد طریق تقریبی بودن آن رانشان دهید.

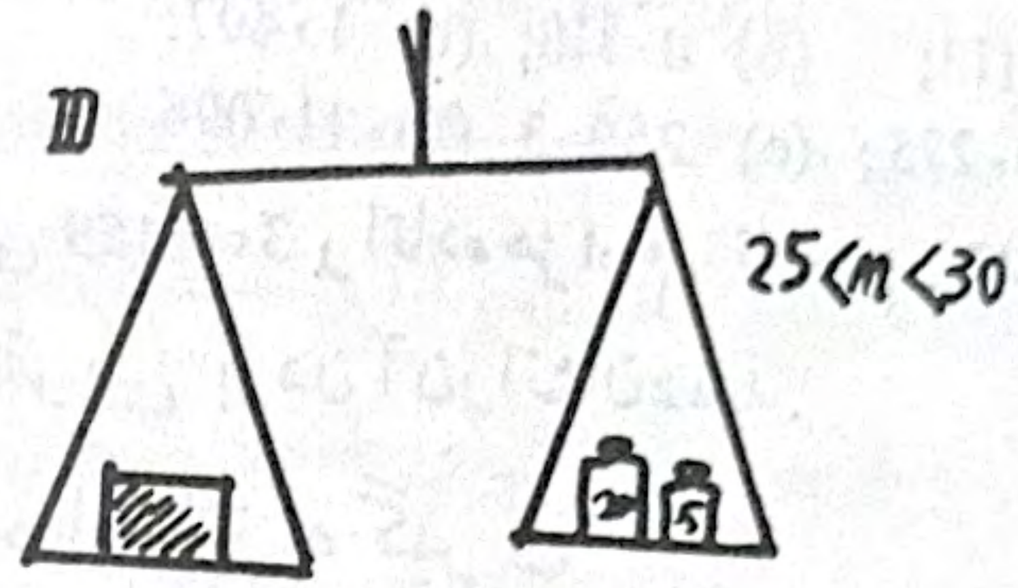
مفهوم حدود اندازه گیری

میخواهیم کتله یك جسم راتوسط ترازوی شاهیندار. به کمك وزنهای مختلف انتخاب شده که خورد ترین آنها یك گرام کتله دارد، مطالعه نماییم. جسمی راکه از 20 گرام بیشتر وزن دارد آن را دومرتبه وزن میکنیم ومیبینیم که کتله از 20 گرام زیادتر واز 30 گرام کمتر است مانند شکل (15 b,a) اگر این کتله شی را به M نشان بدهیم در نتیجه شکل (15)



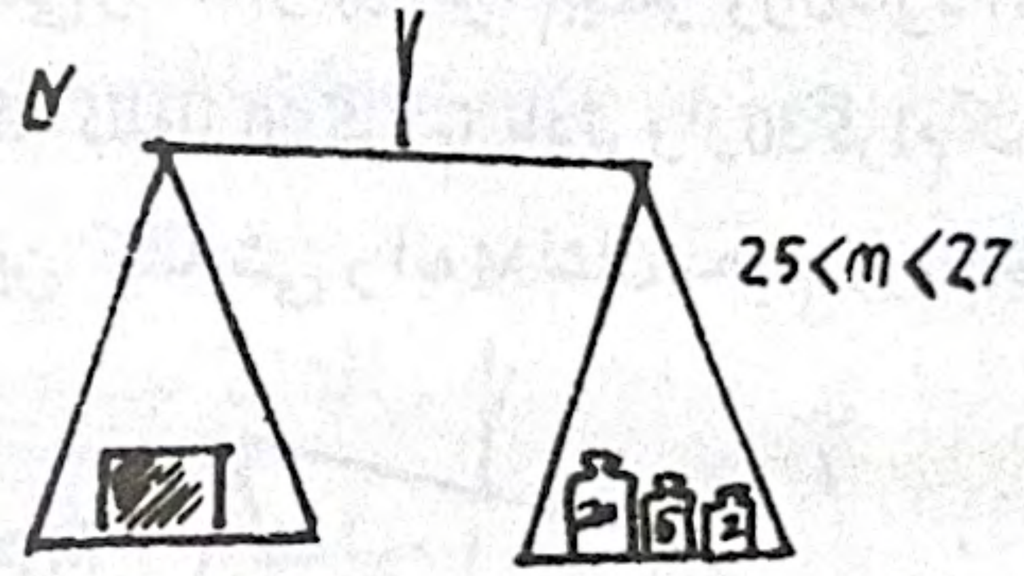
شکل (15)

وزن نمودن شی مذکور غیرمساوی زیر را نوشته کرده میتوانیم.
$20<M<30$ بعداً به وزن 20 گرام وزن 5 گرامه را علاوه میکنیم، اگر کتله جسم زیادتر از 25 گرام باشد بعداً زوزن کردن نتیجه خواهیم گرفت که:
$25<M<30$ اگر در وزن کفهٔ ترازو که وزن 25 گرام گذاشته شده 2 گرام



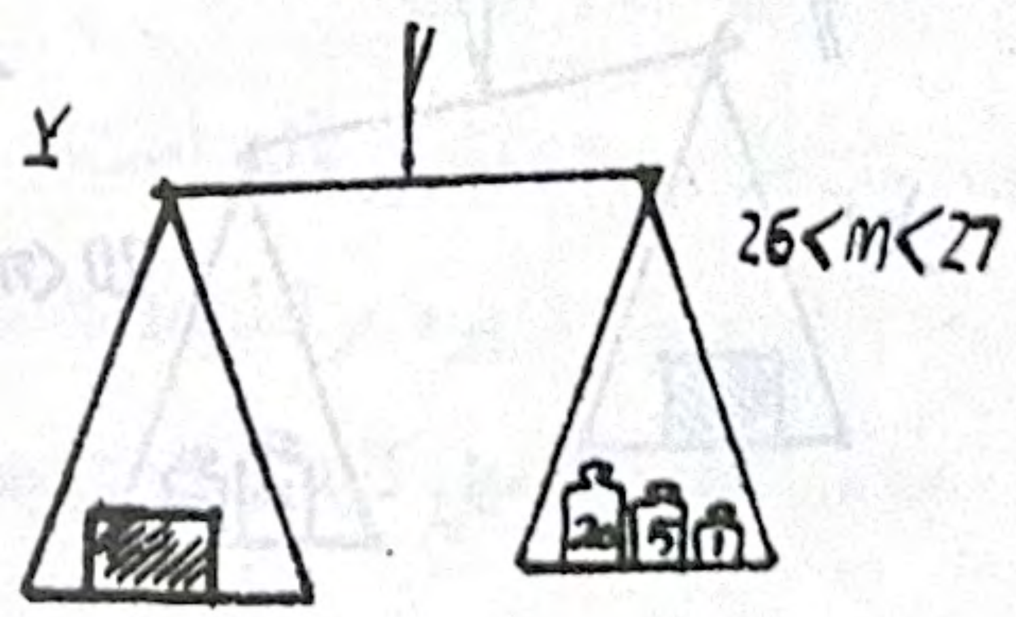
شکل (16)

دیگر را علاوه کنیم، دیده میشود که کتله جسم کمتر از 27 گرام است که $25<m<27$ حاصل میشود.



شکل (17)

حال اگر عوض وزن 2 گرامه وزن یك گرامه را در کفه ترازو بگزاریم و فرض کنیم که وزن کتله بیشتر از 26 گرام باشد در این صورت غیرمساوی $26<m<27$ به دست میاید:



شکل (18)

در نتیجهٔ وزن کردن دریافتیم که قیمت تقریبی کتلهٔ M بین 26 گرام و 27 گرام است. یا به عبارهٔ دیگر حد پایان کتله 26 گرام و حد بالای آن 27 گرام است. اگر عوض وزنهای یك گرامه و 2 گرامه وزن های خوردتری استعمال کنیم در آن صورت قیمت تقریبی به قیمت واقعی آن نزدیکتر میگردد. جهت تفهیم بهتر موضوع به حل یك مثال دیگر میپردازیم.

اگر طول اضلاع یك مثلث متساوی الاضلاع مساوی به a در حالی که $5,4\leq a\leq 5,5$ است باشد و بخواهیم که طول محیط آن را حساب کنیم در این صورت اگر محیط آن را به p نشان بدهیم. محیط مثلث مساوی الاضلاع یا p را از روی فارمول $p=3a$ حساب کرده میتوانیم. مطابق شرطی که $5,4<a$ است میتوانیم بنویسیم که $19,2\leq 3a$ میشود و همچنان مطابق شرطی که $a\leq 5,5$ است نتیجهٔ بدست میاید که $3a\leq 16,5$ است. در آنصورت نوشته میتوانیم که $16.2p\leq 16,5$ این عدد 16,2 و 16,5 به ترتیب، قیمتهای ناقص و فاضل مثلث را تشکیل میدهد و آن را توسط غیرمساویهای زیر منیویسیم:

$$5,4<a\leq 5,5$$
$$5.4\cdot 3<3\cdot a<5,5.3$$
$$16.2<3a<16,5$$

مثال دیگری را از نظر میگذرانیم. فرضاً حدود قیمت x در غیرمساوی $3<x<6$ بعضی از اعداد معلوم باشد. قیمت حدود $\frac{1}{x}$ را معین میسازیم.

از سوال معلوم میشود که x یک عددمثبت است، چون $x>3$ است

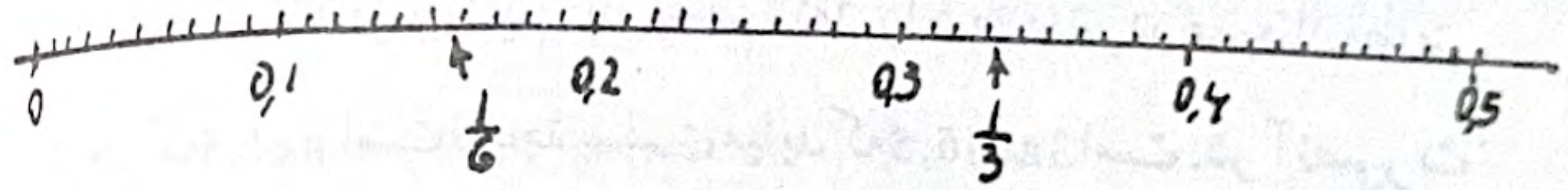
پس $\frac{1}{3} > \frac{1}{x}$ میشود،همچنان‌از اینکه $x<6$ است، پس $\frac{1}{6} < \frac{1}{x}$ میشود.

در نتیجه نوشته کرده میتوانیم که: $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$.

در اینجا عدد $\frac{1}{3}$ حد بالایی یا فاضل و عدد $\frac{1}{6}$ حد پائینی یا ناقص $\frac{1}{x}$ میباشد. میدانیم که $\frac{1}{3} = 0,333$ و $\frac{1}{6} = 0,166$ میشود .

پس میتوانیم که قیمت $\frac{1}{x}$ را 0,1 و 0,4 قبول کنیم .

در نتیجهٔ نوشته کرده میتوانیم که: $0,1 < \frac{1}{x} < 0,4$



شکل (19)

درشکل دیده میشود که مسافه بین اعداد 0,1 و 0,4 ومسافه بین اعداد 0,166 و 0,333 زیادتر است . از اینکه برای سهولت محاسبه درتعین قیمت تقریبی،ارقامی زیادتر از 5,5 رابه حیث واحد مرتبه بیشتر آن انتخاب نموده و عدد کمتر از 5 را حذف میکنند، پس به این اساس به جای عدد 0,166 قیمت تقریبی فاضل آن 0,2 را وبه جای عدد ... 0,333 قیمت تقریبی ناقص آن 0,3 راانتخاب مینمایم. درنتیجه قیمت تقریبی $\frac{1}{x}$ به‌شکل غیرمساوی $0,2 < \frac{1}{x} < 0,3$ را

ارایه مینمایم . حال‌آنکه این قیمت تقریبی خیلی دقیق نمیباشد .

سوالها:

219 - حدود هریک ازسوالها را تخمین کنید :

a) سرعت متوسط پیاده را ،

b) بلندی قد شاگردان صنف را ،

c) تحول درجه حرارت روز را .

220 - a) طول‌محیط مربعی‌را دریافت نمائید در صورتیکه طول یک ضلع آن acm بوده و $5,1<a<5,2$ باشد .

b) طول ضلع مربعی را دریافت کنید درصورتیکه محیط مربع مساوی به pcm بوده و $15,6<p<15,8$ باشد .

c) طول‌ضلع‌مربعی‌را دریافت کنیددر صورتیکه‌محیط مربع‌مساوی به pcm بوده و $8,4<p<8,5$ باشد .

فصل سوم

جذرالمربع و معادله های درجه دوم

مفهوم جذر المربع

23. اعداد نسبتی

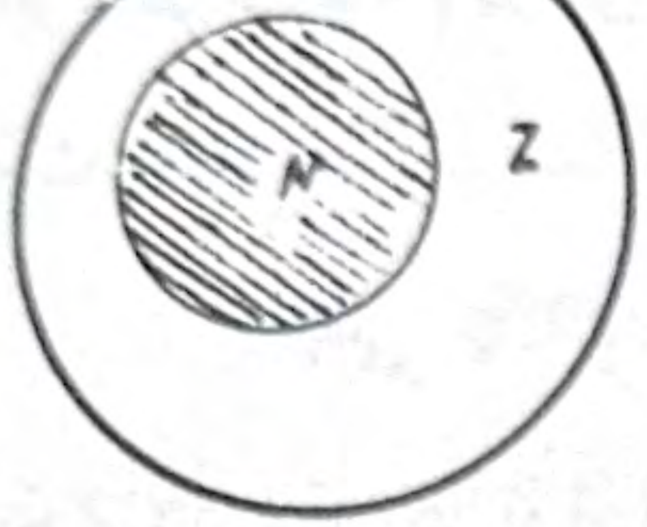
در درسهای گذشته ریاضی ما، ست گوناگون اعداد را مطالعه نمودیم. اعدادی که برای شمردن اشیأ تام استعمال میشوند ست اعداد طبیعی N را تشکیل میدهد کمترین عدد طبیعی عبارت از یك (1) است. آن ست اعدادی که در آن تمام اعداد طبیعی و عدد تضاد هرعدد طبیعی وصفر نیز در آن شامل است اعداد تام نامیده میشود ست اعداد تام را به Z نشان میدهیم.

درست اعداد تام عدد کمترین وهمچنان عدد زیاد ترین وجود ندارند. چون هرعدد طبیعی درست اعداد تام شامل است بناء ست اعداد طبیعی یك ست فرعی اعداد تام است. یعنی:

$$N \subset Z$$

ما این موضوع را ذیلاً توسط دیاگرام، که به نام ایولر[1] دیاگرام یاد میشود، طبق شکل (20) ارایه میکنیم.

(1) ایولر Eular ایولر ریاضیدان مشهور سویست که درقرن 18 درپترزبورگ زنده‌گی کرده است



شکل (20)

در شکل (20) دایرهٔ بزرگ ست اعداد تام و دایرهٔ خورد، که پرداز شده است، اعداد طبیعی را نشان میدهد.

هرنقطه دایرهٔ خورد در دایره بزرگ شامل است این مفهومی را توضیح میکند از اینکه ست اعداد طبیعی شامل ست اعداد تام بوده و آن قسمتهای سفید دایرهٔ بزرگ آن. ست فرعی تام که اعداد طبیعی نمیباشند ارایه میکند. یعنی این حصه دایره ست اعداد تام غیر مثبت وصفر را که در اعداد طبیعی شامل نیستند نشان میدهد.

علاوه بر اعداد تام درباره اعداد کسری (مثبت ومنفی) نیز معلومات داریم. اتحاد ستهای اعداد تام وکسری ست اعداد نسبتی را تشکیل میدهند. پس تمام اعداد مانند $\frac{4}{5}$؛ 27؛ $-\frac{11}{3}$؛ $\frac{2}{5}$؛ 0؛ 41-؛ و 29 درست اعداد نسبتی شامل اند.

ست اعداد نسبتی به حرف Q نشان داده میشود آن را چنین تعریف میکنند.

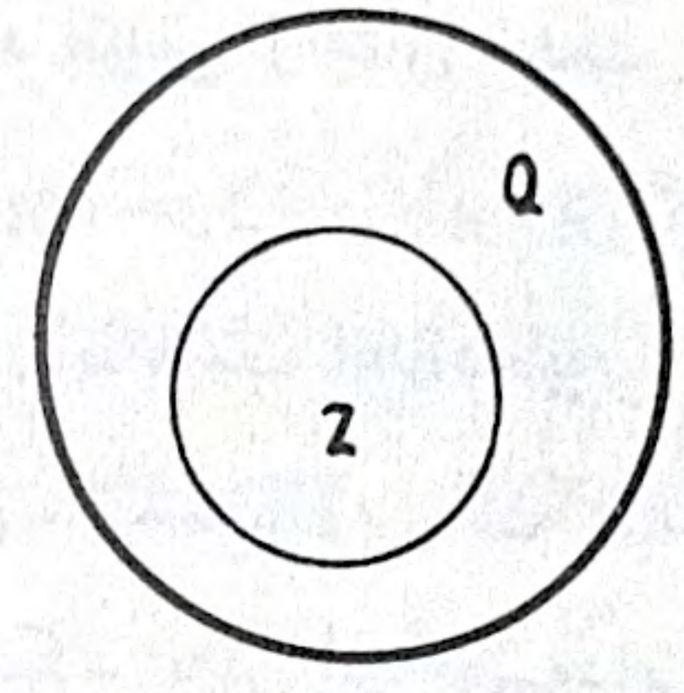
> «ست اعداد نسبتی عبارت از آن اعدادیست که تمام عناصر آن به شکل کسر $\frac{a}{b}$ درصورتیکه a و b اعداد تام بوده و b خلاف صفر باشد ارایه شده میتواند

چون هر عدد تام درعین وقت شامل ست اعداد نسبتی است

پس ست اعداد تام یک ست فرعی اعداد نسبتی میباشند .

یعنی $Z \subset Q$

این رابطه بین ست Z و Q به کمک دیاگرام ایولر درشکل (21) نشان داده شده است .



شکل (21)

اصطلاح اعداد نسبتی یا Rational Numbers از کلمه لاتینی (ratio) (ریشیو) که‌معنی آن نسبت است گرفته‌شده . یک عدد نسبتی را به طریقهای مختلف ارایه کرده میتوانیم. مثلاً :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{40}{80} = \ldots$$

$$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{-6}{8} = \frac{-18}{24} = \frac{-30}{40} = \ldots$$

$$-1{,}8 = \frac{-9}{5} = \frac{-18}{10} = \frac{-180}{100} = \ldots$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{8} = \frac{0}{2} = \ldots$$

سوالها :

221 - کدام یك عنصرست:

$$X = \left\{-100; -14{,}5; -2; -\frac{2}{3}; 0; 10; 15; 20\frac{1}{5}\right\}$$

a) شامل ست اعداد طبیعی است ،

b) شامل ست اعداد تام است،

c) شامل ست اعداد کسری است ،

d) شامل ست اعداد نسبتی است ،

e) شامل ست اعداد منفی است ،

f) شامل ست اعداد غیر منفی است ؟

222 - ست $C = \left\{-4\frac{5}{8}; -3; 0; \frac{1}{6}; 6; 8; 3; 9; 12\right\}$ داده شده است

چنان ستهای فرعی ست C را ترتیب دهید که عنصر آن

a) اعداد طبیعی ، (b) اعداد تام، (C) اعداد کسری،

d) اعداد جفت، (e) اعداد مثبت و (f) اعدادی که به 3 قابل تقسیم اند تشکیل دهند .

223 - برای متحول x سه سه قیمت را تعین کنید که رابطه های زیر را صدق کنند :

(a) $x \in N$; (b) $x \notin Z$; (c) $x \in Q$

224 - هر گاه N ست اعداد طبیعی و Q ست اعداد نسبتی باشند :

a) به کمک دیاگرام ایولر رابطه یی که بین ست اعداد N و Q

وجود دارد بنویسید.

b) آیا هریك ازاعداد طبیعی اعدادنسبتی شده میتواند یاخیر؟

c) ـ آیا هریك از اعداد نسبتی اعداد طبیعی شده میتواند یاخیر؟

225 ـ اتحاد و تقاطع ست های، زیر را پیدا کنید :

a) (اتحاد و تقاطع $\mathbb{N}$ و Z را ; (b) اتحادو تقاطع Z و Q را ;

c) اتحاد و تقاطع Q و $\mathbb{N}$ را.

226 ـ اعدادزیر را به‌شکل نسبت اعدادتام براعدادطبیعی بنویسید:

(a) $4 ; 25 ; 0 ; -27 ; -100$

(b) $0,3; -10,7; \frac{2}{5} ; 2\frac{3}{8} ; -3\frac{1}{4}$

227 ـ هریك از اعداد داده شده زیر را به شکل کسر $\frac{m}{n}$ طوریکه m اعداد تام و n اعداد طبیعی باشندآورده وبعداً درصورت امکان اختصار کنید.

(a) 36 ; (b) $4,6$; (c) $15\frac{1}{6}$; (d) $\frac{130}{78}$

(e) $-10,2$; (f) -45; (g) $-11\frac{2}{3}$; (h) $-\frac{38}{95}$

228 ـ فرض کنید که $a \in \mathbb{N}$ و $b \in \mathbb{N}$ باشندآیا رابطه‌های ذیل همیشه صحیح اند:

(a) $a+b \in \mathbb{N}$; (b) $a-b \in \mathbb{N}$; (c) $a.b \in \mathbb{N}$; (d) $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$

229 ـ فرض کنیدکه $a \in Q$ و $b \in Q$ باشند(در حالی‌که $b \neq 0$ باشد) آیا رابطه های ذیل همیشه حقیقت دارند :

(a) $a+b \in Q$; (b) $a-b \in Q$; (c) $a.b \in Q$; (d) $\frac{a}{b} \in Q$

230 ـ عملیه های زیر را انجام دهید :

(a) $(3,2-5,9) \div \left(-2\frac{1}{15} \div \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right)$

(b) $\{0,18 \div (-0,3) -10,2\} \div (-0,01)$

24 مفهوم جذرالمربع حسابی

اگر مساحت یك مربع مساوی به $64cm^2$ باشدآیا گفته میتوانید که طول اضلاع آن مساوی به‌چنداست ؟

هرگاه طول یك ضلع را (به حساب سانتیمتر) به x نشان بدهیم دراین حالت مساحت مربع x^2 میباشد.

طبق فرضیه مساحت این مربع مساوی به $64\ cm^2$ است، پس برای یافتن طول اضلاع مربع معادله $x^2=64$ راحل میکنیم. دراینصورت دو عددی هست که مربع آنها مساوی به 64 میشودوآنها عبارت از 8 و 8 ـ میباشند. هریك ازاین اعداد 8 و 8 ـ جذرالمربع 64 نامیده میشوند.

به‌صورت عمومی جذرالمربع یك عدد a عددی را گویند که مربع آن اعدادمساوی به a باشد. مثلاً:

هریك از اعداد $\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{3}$ جذرالمربع عدد $\frac{1}{9}$ است.

زیرا: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ وهمچنان $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ میشود

جذرالمربع 0 مساوی به‌صفر است زیرا $0^2=0$ میشود صفر تنها عدد یست که دارای یك جذر (صفر) است. جذرالمربع عدد 16 ـ درست اعداد

حقیقی وجود ندارد. زیرا: اعدد حقیقی یی موجود نیست که مربع آن مساوی به 16 - شود.

اکنون برای سوال حل شده قبلی یعنی برای معادله $x^2=64$ فقط یك جذر را قبول میکنیم زیرا طول به اعداد مثبت افاده میشود نه به عدد منفی، پس طول هر ضلع مربع مساوی به 8cm است. در واقعیت جذر غیر منفی معادله $x^2=64$ جذر المربع حسابی عددی 64 نامیده میشود.

به عبارهٔ دیگر جذر المربع حسابی عدد 64 عدد غیر منفی (مثبت) یی که مربع آن مساوی به 64 است میباشد.

تعریف:

جذر المربع عددی یك عدد a را عدد غیر منفی b گویند که مربع آن مساوی به a باشد. برای جذر المربع عدد a چنین علامه قبول شده است: $\sqrt{a}$، که $\sqrt{\ }$ علامه جذر المربع عدد a عدد تحت جذر نامیده میشود.

مثلاً نوشته $\sqrt{4}$ را جذر المربع عدد 4 میخوانند که $\sqrt{4}=2$ است.

زیرا 2 عدد غیر منفی بوده و $2^2=4$ است.

همچنان نوشته $\sqrt{1,21}$ را جذر المربع حسابی عدد 1,21 میخوانند.

به آسانی دیده میشود که $\sqrt{1,21}=1,1$ است. زیرا: 1,1 عدد غیر منفی بوده و $(1,1)^2=1,21$ است، پس از تعریف جذر المربع حسابی نقیجهٔ میشود که

اگر $a<0$ باشد در ست اعداد حقیقی $\sqrt{a}$ حل ندارد.

زیرا اعدادی حقیقی یی وجود ندارند که مربع آن مساوی به عدد منفی داده شده باشد.

مثلاً: در ست اعداد حقیقی چنین افاده ها $\sqrt{-25}$ و $\sqrt{-37}$ معنی ندارد.

هرگاه $a=0$ باشد $\sqrt{a}$ دارای حل است. زیرا: $\sqrt{0}=0$ است.

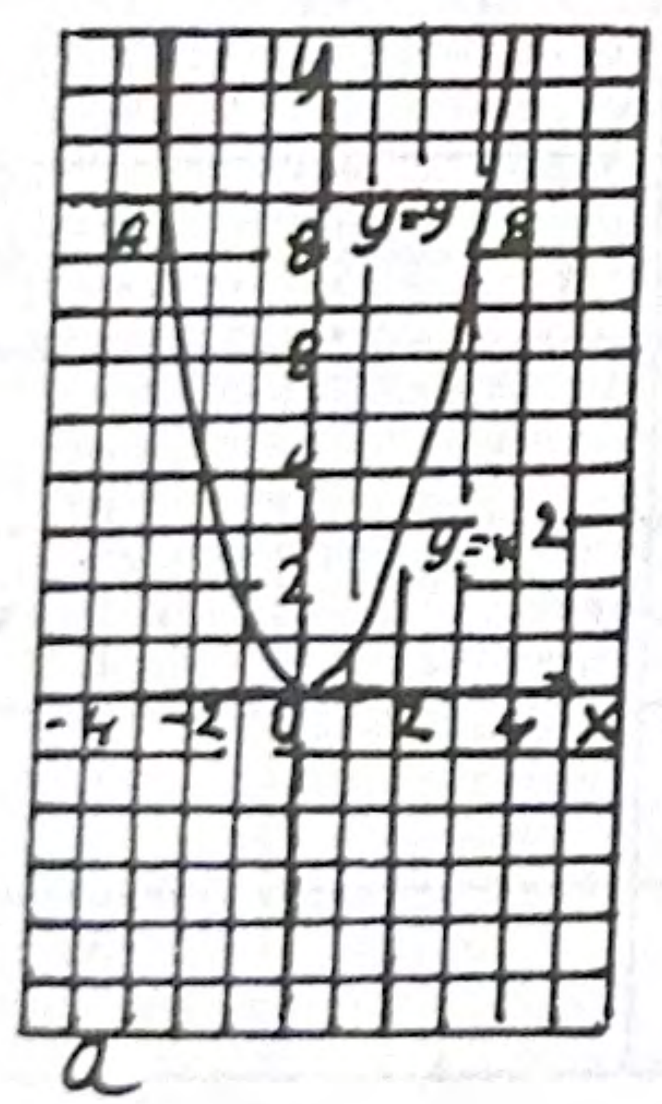
در حقیقت جذر المربع عددی (0) عبارت از صفر است، که آن غیر منفی بوده و $0^2=0$ میشود.

اکنون جذر المربع $a>0$ را مطالعه مینماییم.

فرض میکنیم که $a=9$ باشد افادهٔ: $\sqrt{9}$ معنی آنرا میدهد. که $\sqrt{9}=3$ میباشد.

زیرا: $3>0$ و $3^2=9$ است.

در شکل (22) پارابولای: $y=x^2$ و خط مستقیم $y=9$ طوری ترسیم شده

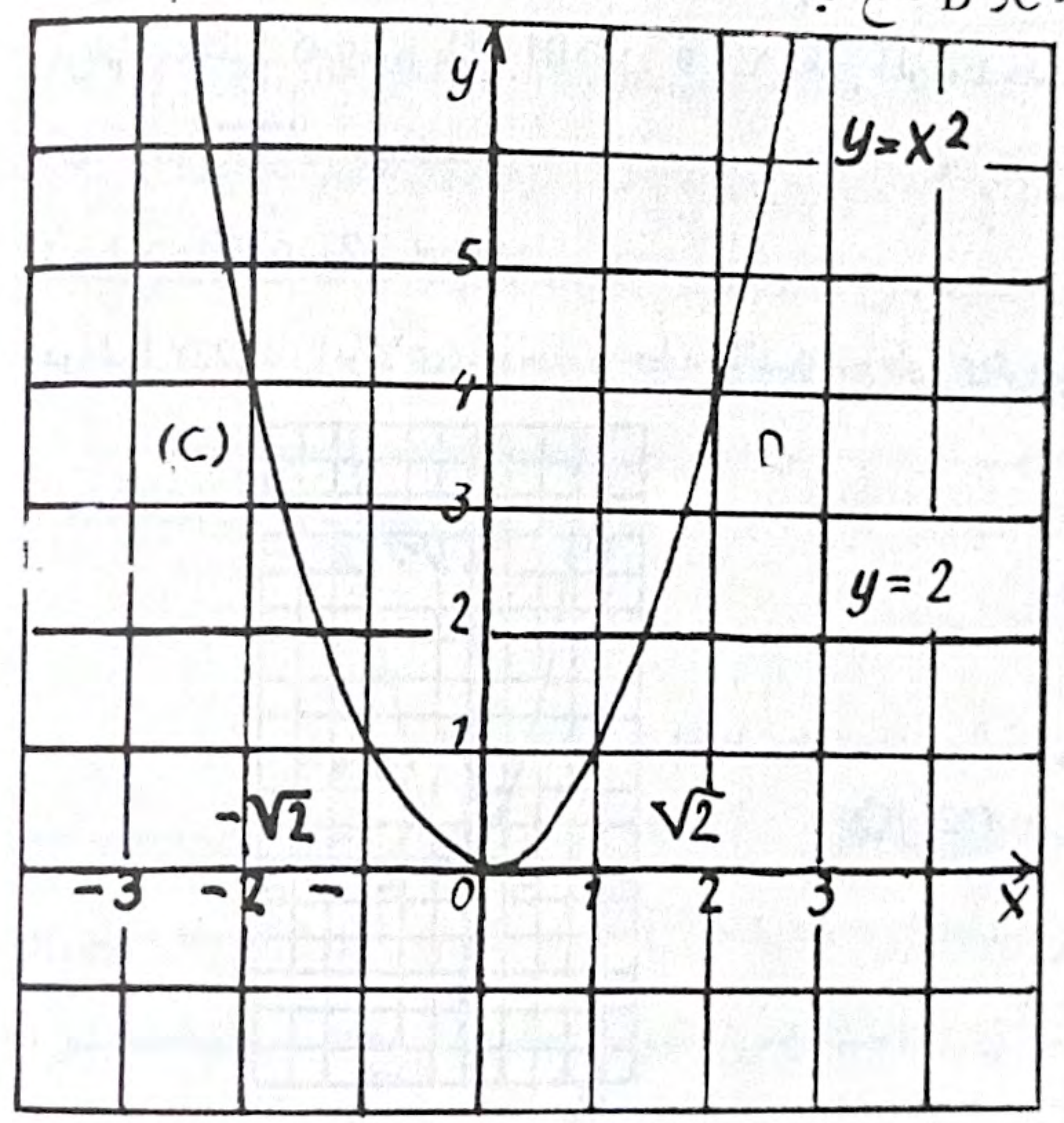


شکل(22)

است که خط مستقیم پارابولا را در دو نقطه A و B قطع میکند. ابسیس نقطه B عددی غیر منفی بوده که مربع آن مساوی به 9 و خود آن مساوی به $\sqrt{9}$ است میباشد. و ابسیس نقطه A عدد تضاد $\sqrt{9}$ ، یعنی: $-\sqrt{9}$ است.

حالا $a=2$ یعنی افاده $\sqrt{2}$ را در نظر میگیریم، هیچ یك عدد تام قیمت افاده $\sqrt{2}$ شده نمیتواند. زیرا: $1^2=1$ است که از عددی 2 کوچکتر و $2^2=4$ است که از 2 بزرگتر است، میباشد در بین 1 و 2 عدد تام موجود نیست و همچنان عدد کسری هم وجود ندارد که مربع آن مساوی به 2 باشد.

به همین ترتیب در بین عددهای نسبتی نیز چنین عددی نیست که مساوی به $\sqrt{2}$ باشد، ولی در مستوی گراف تابع $y=x^2$ و گراف خط مستقیم $y=2$ را رسم مینمایم ما میبینیم. که مانند درس گذشته، خط مستقیم پارابولا را در دو نقطه C و D قطع میکند.



شکل (23)

بنا برین طبیعیست که در چنین محاسبه کردن دو عدد متضاد پیدا شده میتواند که مربع آنها مساوی به 2 باشد، ولی این عددها نسبتی نمیباشند این اعداد مربوط ست اعداد دیگریست که آنها را به نام اعداد غیر نسبتی یاد میکنند.

$\sqrt{2}$ یك عدد غیر منفی، غیر نسبتی است که مربع آن مساوی به 2 میباشد.

به کمك گراف (شکل 23) به آسانی یافته میتوانیم که قیمت تقریبی عددی $\sqrt{2}$ تقریباً ابسیس نقطه D یعنی $\approx 1,4$ است. و ابسیس نقطه C عدد تضاد $\sqrt{2}$ میباشد. یعنی تقریباً $-\sqrt{2} \approx -1,4$ میباشد. به همین ترتیب واضح ساخته میتوانیم که جذر المربع اعداد های 3;5;6;5 نیز اعداد نسبتی نمیباشند و آنها را اینطور نشان میدهیم $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$; $\sqrt{6,5}$ و $-\sqrt{6,5}$ هر یك از اعداد $\sqrt{6,5}$ و $-\sqrt{6,5}$; $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ اعداد غیر نسبتی اند(عدد π که نسبت طول محیط یك دایره را بر طول قطر آن افاده میکند نیز یك عدد غیر نسبتیست.)

اتحاد اعداد نسبتی و غیر نسبتی ست اعداد حقیقی را تشکیل میدهند. این ست اعداد حقیقی را معمولاً به حرف R نشان میدهند پس گفته میتوانیم که افاده $\sqrt{a}$ در ست اعداد حقیقی به تمام قیمتهای دلخواه که $a \geq 0$ باشند حل دارد.

سوالات :

231 ـ نشان دهید که :

a) 5 جذر المربع حسابی 25 میباشد.

b) 0,3 جذرا لمربع حسابی 0,09 است ،

c) 7 - جذرالمربع حسابی 49 نمیباشد ،

d) 0,6 جذرالمربع حسابی 3,6 نمیباشد .

232 . نشان دهید که مساویهای زیر صحیح است :

(a) $\sqrt{121}=11$; (b) $\sqrt{400}=20$; (c) $\sqrt{0,25}=0,5$ (d) $\sqrt{0,09}=0,3$

233 - قیمت جذری افاده های زیر را پیدا کنید :

(a) $\sqrt{49}$; (b) $\sqrt{10000}$; (c) $\sqrt{2500}$; (d) $\sqrt{900}$;

(e) $\sqrt{0;81}$; (f) $\sqrt{0,16}$; (g) $\sqrt{0,04}$; (h) $\sqrt{\frac{25}{4}}$;

(l) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; (m) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; (n) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

234 - قیمت افاده های زیر را پیدا کنید :

(a) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{16}$; (b) $\sqrt{81}\cdot\sqrt{100}$; (c) $\sqrt{0,09}+\sqrt{0,25}$;

(d) $\sqrt{0,04}-\sqrt{0,01}$; (e) $3\cdot\sqrt{9}$; (f) $-7\cdot\sqrt{0,01}$;

(g) $0,1\cdot\sqrt{400}+0,2\sqrt{1600}$; (h) $\frac{1}{3}\sqrt{0,36}+\frac{1}{5}\sqrt{900}$.

235 . حساب کنید .

(a) $\sqrt{16}+\sqrt{\frac{4}{25}}$; (b) $\sqrt{\frac{36}{49}}+\sqrt{100}$;

(c) $\sqrt{\frac{4}{9}}-\sqrt{\frac{1}{9}}$; (d) $\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}}$.

236 - کدام یکی از افاده های ذیل حل دارد :

(a) $\sqrt{100}$; (b) $\sqrt{-100}$; (c) $-\sqrt{100}$; (d) $\sqrt{10}$

(e) $\sqrt{-36}$; (f) $\sqrt{83,1}$; (g) $-\sqrt{186}$

237 - به کدام قیمتهای متحول x افاده های زیر دارای حل است :

(a) $\sqrt{x}$; (b) $\sqrt{-x}$; (c) $\sqrt{-25x}$;

(d) $\sqrt{17x}$; (e) $\sqrt{x^2}$; (f) $\sqrt{-8x^2}$?

238 - به کدام قیمتهای متحول هر یك از افاده های زیر معین میشود :

(a) $\sqrt{x-3}$; (b) $\sqrt{a+2}$; (c) $\sqrt{2b-1}$;

(d) $\sqrt{8x+4c}$; (e) $\sqrt{\frac{1}{3x-6}}$; (f) $\sqrt{\frac{2a+5}{3}}$;

(g) $\sqrt{\frac{n}{14-7n}}$; (h) $\sqrt{\frac{b-9}{b+1}}$.

239 - گراف تابع $y=x^2$ وخط مستقیم $y=7$ را رسم کنید بررو ی محور x نقاطی را تعین کنید که ابسیس آنها مساوی به $\sqrt{7}$; $-\sqrt{7}$ باشد سپس قیمتهای تقر یبی هر یك از اعداد $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ را به کمك کسر اعشاری پیدا کنید .

240 - از گراف تابع $y=x^2$ استفاده کرده و برروی محور x آن نقاطی را پیدا کنید که ابسیس های آنها مساوی به $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{4}$; $-\sqrt{4}$; $\sqrt{3,5}$; $-\sqrt{1,6}$ باشند .

241 - به کمك علامه $\sqrt{}$ شکل دیگری هریك ازمعادله های (a) $x^2=3$ و (b) $x^2=6,5$ را بنویسید. با استفاده از گراف تابع $y=x^2$ قیمت تقریبی این جذرها را پیدا کنید .

242 - معادله‌های زیر را حل کنید :

(a) $x^2=16$; (b) $x^2+8=0$; (c) $x^2-0,04=0$;

(d) $\frac{2}{3}-x^2=0$; (e) $x^2=\frac{1}{8}$; (f) $\frac{1}{3}x^2-10=0$.

25 - عینیت $(\sqrt{a})^2=a$ درحالی که $a\geq 0$ باشد،

طبق تعریف جذرالمربع حسابی قیمت افاده $\sqrt{a}$ درحالی که $a\geq 0$ باشد عبارت از عددی غیرمنفی است که مربع آن مساوی به a میباشد.

پس برای تمام قیمتهای دلخواه غیرمنفی a مساوی

$$(\sqrt{a})^2=a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حقیقت دارد مساوی (I) درست اعداد حقیقی غیر منفی یك عینیت است.

با استفاده از عینیت (1) در بعضی اوقات عدد دلخواه غیرمنفی به شکل مربع نیز نوشته شده میتواند. مثلاً:

$$2=(\sqrt{2})^2;\quad 0,5=(\sqrt{0,5})^2;\quad \frac{1}{7}=\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2.$$

اینگونه تحویل کردن افاده‌های فوق یك شکل عینیت مساوی (1) رانشان میدهد.

مثال 1) قیمت افادهٔ: $(0,1.\sqrt{18})^2$ را پیدا کنید.

قرار خاصیت طاقت وطاقت نمای حاصلضرب نوشته کرده میتوانیم که

$$(0,1.\sqrt{18})^2=(0,1)^2.(\sqrt{18})^2$$

از طرف دیگر میدانیم که $(\sqrt{18})^2=18$ است

پس $(0,1.\sqrt{18})^2=(\sqrt{0,01.18})^2=0,01.18$ ....

در نتیجه $(0,1.\sqrt{18})^2=0,18$ ....

مثال 2 کسر: $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$ را اختصار کنید.

برای اختصار کردن این کسر، صورت کسر را به شکل تفاضل مربعات دوحده مینویسیم.

$$x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2$$

$$\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}=\frac{x^2-(\sqrt{3})^2}{x+\sqrt{3}}=\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x+\sqrt{3}}=x-\sqrt{3}$$

سوالات:

243- مربع هریك از اعداد زیر را پیدا کنید:

$\sqrt{25};\ \sqrt{81};\ \sqrt{2};\ \sqrt{3};\ -\sqrt{4};\ \sqrt{5};\ -\sqrt{6};\ \sqrt{\frac{1}{2}};\ -\sqrt{1,3}.$

244- قیمت هریك از افاده های زیر را پیدا کنید.

(a) $(\sqrt{7})^2$; (b) $\sqrt{3}.\sqrt{3}$; (c) $(-\sqrt{26})^2$; (d) $-\sqrt{14}.\sqrt{14}$

(e) $(3\cdot\sqrt{5})^2$; (f) $0.\sqrt{2}\sqrt{2}$; (g) $(0,5\cdot\sqrt{8})^2$;

(h) $(-2\cdot\sqrt{15})^2$ (i) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$

245- درصورت امکان هریك از افاده های داده شده زیر را به شکل مربع بنویسید:

(a) 9; (b) -64; (c) 6; (d) 10; (e) $2,5$;

(f) $0,25$; (g) $a\cdot(a>0)$; (h) $4b\cdot(b>0)$

246- هریك از کسرهای زیر را اختصار کنید:

(a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; (b) $-\frac{5}{\sqrt{5}}$; (c) $\frac{10}{3\sqrt{10}}$; (d) $-\frac{a}{3\sqrt{a}}$

247- هریك از افاده های زیر را به شکل تفاضل مربعات دوحده

نوشته و آنها را به عامل ضربی جدا کنید.

(a) x^2-9 ; (b) a^2-3 ; (c) $4a^2-7$; (d) $16b^2-11$;
(e) $c-4\ (c>0)$; (f) $5-a, (a>0)$.

248- هریك از کسرهای زیررا اختصار کنید :

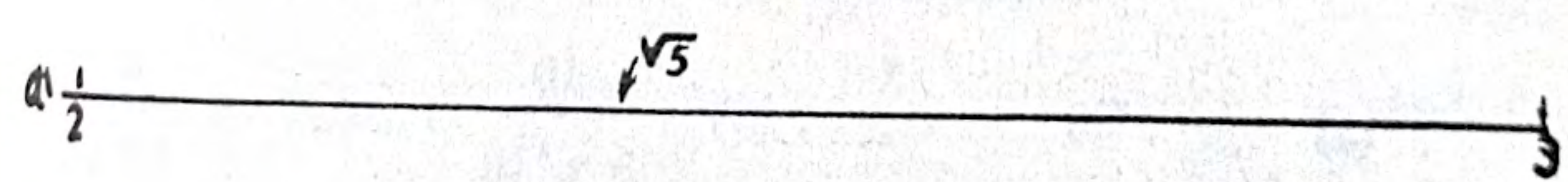
(a) $\frac{a^2-4}{a+2}$; (b) $\frac{c^2-6}{c-\sqrt{6}}$; (c) $\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$; (d) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

26. قیمت تقریبی جذرالمربع اعداد مثبت

مامیدانیم که جذرالمربع بعضی ازاعداد مثبت یك عدد نسبتی شده میتواند ولی جذرالمربع تمام اعداد مثبت را به‌شکل کسری یانسبتی ارایه کرده نمیتوانیم. مثلاً: جذرالمربع 4 و $\frac{16}{25}$ را به‌ترتیب بشکل 2 و $\frac{4}{5}$ ارائه کرده میتوانیم، ولی جذرالمربع $\sqrt{5}, \sqrt{10}$ و $\sqrt{30}$ را به شکل نسبتی ارایه کرده نمیتوانیم. از اینرو قیمت جذرالمربع بعضی ازاعدادمثبت به‌شکل تقریبی کسراعشاری ارایه میشود. اکنون مثالی رامطالعه مینمایم که بکمك آن قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ را دریافت کرده میتوانیم :

$$2^2<5<3^2$$

بنابر آن $2<\sqrt{5}<3$



شکل(24)

عدد 2 قیمت تقریبی ناقص وعدد 3 قیمت تقریبی فاضل $\sqrt{5}$ است با صحت ودقت امادا ریم.

$|\sqrt{5}-2|<3-2$ یعنی: $|\sqrt{5}-2|<1$

$|\sqrt{5}-3|<3-2$ یعنی: $|\sqrt{5}-3|<1$

اکنون قطعه خط [2;3] که طول آن مساوی به (1) است به 10 حصه مساوی تقسیم مینمایم.

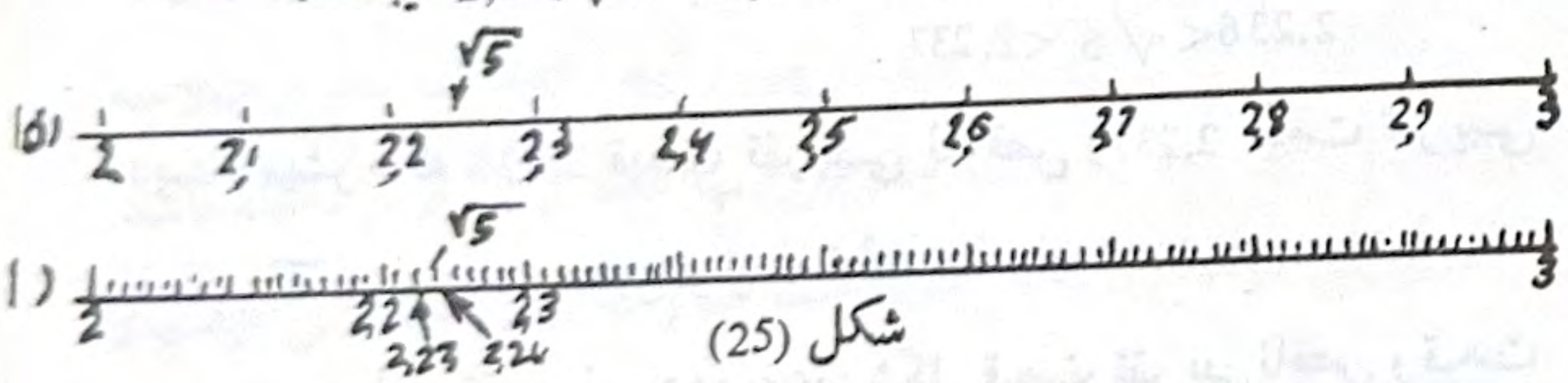
یعنی [2;2,1];[2,1;2,2];[2,2;2,3]...[2,9;3] ترادف اعداد 2;2,1;2,2;2,3 ...... 2,9 را تشکیل میدهد.

حال ازین ترادف ماجدول زیررا ترتیب میدهیم سپس آن دوعددی را انتخاب مینمایم، که عدد بین مربعات آنها واقع گردد.

x	2	2,1	2,2	2,3
x^2	4	4,41	4,84	5,29

ازجدول واضح میشود که $(2,2)^2<5<(2,3)^2$

پس قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ عبارت از $2,2<\sqrt{5}<2,3$ میباشد.



شکل (25)

عدد 2,2 قیمت تقریبی ناقص $\sqrt{5}$ عدد 2,3 قیمت تقریبی اضافی $\sqrt{5}$ است. هر کدام ازاین اعداد 2,2 و 2,3 قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ میباشد.

برای دوقیمت تقریبی داریم :

$|\sqrt{5} - 2,2| < 2,3 - 2,2$ یعنی: $\sqrt{5} - 2,2 < 0,1$

$|\sqrt{5} - 2,3| < 2,3 - 2,2$ یعنی: $\sqrt{5} - 2,3 < 0,1$

برای اینکه قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ بافرق دقیقتر 0,01 دریافت گردد لازم است که قطعه خط $[2,2;2,3]$ که طول آن مساوی به 0,1 است به ده حصهٔ مساوی تقسیم گردد، که این تقسیمات مختصات نقطه $\sqrt{5}$ را دربر دارد. برای معلومات زیاد جدول زیر را درنظر میگیریم:

x	2,2	2,21	2,22	2,23	2,24
x^2	4,84	4,8841	4,9284	4,9729	5,0176

ازجدول بالا فهمیده میشود که: $(2,23)^2 < 5 < (2,24)^2$

درحقیقت: $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$

بهمین ترتیب برای یافتن قیمت دقیق تقریبی $\sqrt{5}$ قطعه خط $[2,23;2,24]$ را به ده حصهٔ مساوی که طول هرحصه آن 0,001 باشد، تقسیم میکنیم. وبه اساس آن مختصات نقطه $\sqrt{5}$ را حساب میکنیم. در اینصورت یافته میتوانیم:

$2,236 < \sqrt{5} < 2,237$

دیده میشود که 2,236 قیمت تقریبی ناقص و2,237 قیمت تقریبی اضافی $\sqrt{5}$ است. بههمین ترتیب قطعه‌خط را به 0,0001 و0,00001 .... حصه های مساوی تقسیم نموده وبه‌عین شکل قیمت تقریبی ناقص وقیمت تقریبی فاضل را حاصل کرده میتوانیم. انجام‌دادن همچو محاسبه‌ها دائم ضروری نیست که برای آسانی کار از جدول جذر المربع استفاده کنید.

سوالات:

249 - صحت هریک از غیرمساویهای زیر را نشان‌دهید:

(a) $3 < \sqrt{12} < 4$; (b) $7,1 < \sqrt{51} < 7,2$

250 - اعداد زیر را باهم‌مقایسه کنید:

(a) $\sqrt{7}$ و 3 را، (b) 7 و $\sqrt{50}$ را، (c) $\sqrt{5}$ و 2,2 را، (d) 3,3 و $\sqrt{11}$ را.

251 - دوعددتام پی درپی رادریافت کنید که دربین هرجورهٔ ازآنها یکی از اعداد زیر قرار داشته باشند:

(a) $\sqrt{27}$; (b) $\sqrt{0,4}$; (c) $\sqrt{120}$

252 - دو کسراعشاری پی درپی‌متوالی را دریافت کنید که بعد ازعلامه اعشاری عین رقم را داشته و دربین آن اعداد زیر قرار داشته باشد:

(a) $\sqrt{3}$; (b) $-\sqrt{3}$.

253 - دو کسراعشاری پی در پی راپیدا کنید که بعد ازعلامه اعشاری به عین رقم را داشته ودربین‌آنها عدد $\sqrt{2}$ قرارداشته باشد. کدام یکی از کسرهای دریافت شده عبارت از نزدیکترین قیمتهای تقریبی $\sqrt{2}$ است؟

254 - قیمت عددی کدام یک از افاده‌ها زیادتر است:

(a) $\sqrt{29}$ یا $\sqrt{10} + \sqrt{19}$; (b) $\sqrt{27}$ یا $\sqrt{20} + \sqrt{7}$ ؟

27 . عینیت : $\sqrt{x^2}=|x|$

افادهٔ $\sqrt{x^2}$ را در نظر میگیریم در بین این افاده ست اعداد حقیقی میباشند. چون قیمت افادهٔ x^2 به تمام قیمتهای دلخواه x غیر منفی است پس تابع آن اعداد حقیقی غیر منفی است. از تعریف جذرالمربع نتیجه میشود که در قیمت دلخواه غیر منفی x قیمت افاده $\sqrt{x^2}$ مساوی به x است. یعنی با قیمتهای دلخواه $x\geq 0$ مساوی $\sqrt{x^2}=x$ حقیقت دارد.

مثلاً اگر $x=6$ باشد در اینصورت $\sqrt{x^2}=\sqrt{6^2}=6$ میشود.

اگر $x=\frac{2}{3}$ باشد در اینصورت $\sqrt{x^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$ میشود.

و اگر $x=0$ باشد در این صورت $\sqrt{x^2}=\sqrt{0^2}=0$ میشود.

برای قیمتهای دلخواه منفی x قیمت افادهٔ $\sqrt{x^2}$ اعداد منفیست یعنی برای همهٔ قیمتهای $x<0$ مساوی $\sqrt{x^2}=-x$ حقیقت دارد.

مثلاً: اگر $x=-5$ باشد، در این صورت: $\sqrt{x^2}=\sqrt{(-5)^2}=-5$ میشود..

اگر $x=-0,3$ باشد در اینصورت: $\sqrt{x^2}=\sqrt{(-0,3)^2}=-0,3$ میشود.

دیده میشود که به قیمتهای دلخواه x قیمت افاده $\sqrt{x^2}$ با قیمت افاده $|x|$ مطابقت مینماید.

حقیقتاً اگر $x>0$ باشد $|x|=x$، و اگر $x<0$ باشد $|x|=-x$ است.

در اینصورت رابطهٔ زیر درست تمام اعداد عینیت است :

$\sqrt{x^2}=|x|$ .... (1)

با استفاده از رابطهٔ (1) مثال زیر را در نظر میگیریم :

مثال 1) قیمت افادهٔ $0,2\cdot\sqrt{x^2}$ را درصورتی $x=-24,5$ باشد دریافت کنید.

ما میدانیم که $\sqrt{x^2}=|x|$ است.

پس $0,2\cdot\sqrt{x^2}=0,2\cdot|x|=0,2\cdot|-24,5|=0,2\cdot 24,5=4,9$

مثال 2 : افادهٔ $\sqrt{(x-5)^2}$ درصورتی که $x<5$ باشد ساده کنید.

ما میتوانیم که عینیت $\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|$ را بنویسیم.

از طرف دیگر اگر $x<5$ باشد.

پس $x-5<0$ میشود. در این صورت $|x-5|=-(x-5)=5-x$ میشود.

در نتیجه: $\sqrt{(x-5)^2}=5-x$ میشود.

مثال 3) افاده $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^8}$ را ساده کنید.

غرض ساده ساختن این افادهٔ عدد تحت جذر یعنی a^8 را به شکل یك حده زیر مینویسیم :

$$a^8=(a^4)^2$$

در اینصورت داریم که $\frac{1}{2}\sqrt{a^8}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(a^4)^2}=\frac{1}{2}|a^4|$

قیمت افادهٔ a^4 برای تمام قیمتهای دلخواه a غیر منفی بوده $|a^4|=a^4$ میشود.

در نتیجه: $\frac{1}{2}\sqrt{a^8} = \frac{1}{2}a^4$ به‌دست میاید .

سوالات .

255 - حساب کنید .

(a) $\sqrt{(0,1)^2}$; (b) $\sqrt{(-0,4)^2}$; (c) $\sqrt{(-1,9)^2}$

(d) $\sqrt{(2,4)^2}$; (e) $\sqrt{52^2}$; (f) $\sqrt{(-6)^2}$

256 - قیمت افاده های زیر را پیدا کنید :

(a) قیمت افادهٔ $2.\sqrt{a^2}$ را وقتی که a مساوی به 12 ; 7— باشد،

(b) قیمت افادهٔ $0,1\cdot\sqrt{y^2}$ را وقتی که y مساوی به 15;37— باشد.

257 - هر یك از افاده های زیر را به افاده عینیت مساوی آن تبدیل کنید.

(a) $\sqrt{p^2}$; (b) $\sqrt{y^2}$; (c) $3\sqrt{b^2}$; (b) $-0,2\sqrt{x^2}$

258 - هر یك از افاده های ذیل را به افاده مساوی آن تبدیل کنید:

(a) $\sqrt{c^2}$ را، اگر $c\geq 0$ باشد ; (b) $\sqrt{a^2}$ را، اگر $a>0$ باشد ،

(c) $\sqrt{x^2}$ را، اگر $x<0$ باشد (d) $\sqrt{a^2}$ را اگر $a>0$ باشد .

259 - هر یك از افاده‌های زیر را به افاده‌های مساوی آن تبدیل کنید:

(a) $\sqrt{(a-1)^2}$; (b) $\sqrt{(c+2)^2}$; (c) $\sqrt{x^2+2x+1}$; (d) $\sqrt{4y^2-4y+1}$

260 - افاده های زیر را به افاده های مساوی آن تبدیل کنید:

(a) افاده $\sqrt{(x-4)^2}$ وقتی که $x\geq 0$ باشد ،

(b) افاده $\sqrt{(3-m)^2}$ وقتی که $m\geq 0$ باشد ،

(c) افاده $\sqrt{(7+y)^2}$ وقتی که $y<-7$ باشد ،

(d) افاده $\sqrt{(n+4)^2}$ وقتی که $n<-4$ باشد .

261 - افاده های تحت جذر را اولاً به قیمت مربع یك حده نوشته وسپس قیمتهای هر کدام آن‌را پیدا کنید :

(a) $\sqrt{2^4}$; (b) $\sqrt{(-5)^4}$; (c) $\sqrt{3^6}$; (d) $\sqrt{(-2)^8}$

(e) $3\cdot\sqrt{(-2)^6}$; (f) $-2\cdot\sqrt{10^4}$; (g) $0,1\cdot\sqrt{(-3)^8}$;

(h) $100\cdot\sqrt{(0,1)^{10}}$.

262 - افاده‌های زیر را ساده کنید :

(a) $\sqrt{y^6}$ را درصورتی که $y\geq 0$ باشد،

(b) $\sqrt{m^4}$ را درصورتی که m عدد دلخواه باشد،

(c) $1,5\cdot\sqrt{a^8}$ را درصورتی که $a<0$ باشد،

(d) $2\cdot\sqrt{b^4}$ را درصورتی که $b\geq 0$ باشد .

263 . معادله های زیر را حل کنید:

(a) $\sqrt{x^2}=4$; (b $\sqrt{x^2}+1=0$.

264 - غیر مساویهای زیر را حل کنید :

(a) $\sqrt{(x-2)^2}<4$; (b) $\sqrt{(5-x)^2}<2,5$.

265 - گراف تابع $y=\sqrt{x^2}$ را رسم کرده ست قیمتهای متزاید تابع را تعین کنید.

266 - معادله‌های زیر را حل کنید:

(a) $\sqrt{x}=9$; (b) $\sqrt{x}=\frac{1}{3}$; (c) $\sqrt{x+1}=-2$

(d) $\sqrt{x+1}=1$; (e) $\sqrt{6x-3}=5$; (f) $\sqrt{10x+7}=0$

28 . جذرالمربعهای حاصل ضرب وحاصل تقسیم:

میخواهیم که قیمت افادههای $\sqrt{81.4}$ و $\sqrt{4}\cdot\sqrt{81}$ را باهم مقایسه کنیم.

وهمچنان $\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}=9.2=18$

دیده میشود که $\sqrt{81\cdot 4}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}=18$

قضیه 1 . هرگاه $a\geq 0$ و $b\geq 0$ باشد پس $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ است

$$\sqrt{a.b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ ....\ (1).$$

برای ثبوت حقیقی مساوات (1) طوری که در آن $a\geq 0$ و $b\geq 0$ است. باید یادآورشویم که $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\geq 0$ بوده $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=a\,b$ میباشد.

حالا مطابق تعریف جذر مربع گفته میتوانیم که مساوی (1) برای تمام قیمتهای داده شده متحول حقیقت دارد.

۱) قیمت حاصل ضرب $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ غیر منفی است. زیرا طبق خاصیت جذر مربع وقتی که $a\geq 0$ و $b\geq 0$ باشند هر کدام از افادههای $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ دارای حل بوده و دارای قیمتهای غیر منفی میباشند.

بنابرخاصیت طاقت نما یک حاصلضرب داریم که:

$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=a\cdot b$. از اینکه در اینحالت رابطه (1) نیزحقیقت پذیر است پس برای جذر مربع حسابی خاصیت ذیلرا بیان میکنیم:

جذری یک حاصل ضرب اعداد غیرمنفی مساوی به حاصل ضرب جذرهای عوامل ضربی آن است . این حقیقت برای عوامل ضربی زیادتر از دوحد که تحت علامهٔ جذر قرار داشته باشند نیز قابل تطبیق میباشد . جذرمربع حسابی کسرنیز از همین نوع خاصیت پیروی میکند .

قضیه 2 : هرگاه $a\geq 0$ و $b>0$ باشد ،

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ ....\ (2)$$ است.

برای اثبات حقانیت مساوات فوق که در آن $a\geq 0$ و $b>0$ است از تطبیق اصول وقاعده قضیه (1) استفاده میکنیم. یعنی نشان میدهیم: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$ است وقتی که $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geq 0$ باشد .

زیرا:

1) قیمت خارج قسمت $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ غیرمنفی است بنابر تعریف جذر مربع وعلاوه بر آن درصورتی که $a\geq 0$ و $b>0$ باشد هریک از افاده های $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ دارای حل است .

2) بنابرخاصیت طاقت نما کسر : $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$ است .

به اساس تعریف جذر مربع مساوی (2) وقتیکه $a\geq 0$ و $b>0$ باشد حقیقت داراد .

پس به این اساس گفته میتوانیم که جذر مربع یک کسر که صورتش هر عدد غیر منفی و مخرجش مثبت باشد عبارت از نسبت جذر صورت بر جذر مخرج آن است .

با استفاده از قضیه فوق حل مثالهای زیر را از نظر میگذرانیم :

1) میخواهیم قیمت افادهٔ $\sqrt{64\cdot 0,04}$ را پیدا کنیم .

حل :

با استفاده از قضیه (1) مینویسیم .

$$\sqrt{64\cdot 0,04}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{0,04}=8\cdot 0,2=1,6$$

2) قیمت $\sqrt{32\cdot 98}$ را دریافت کنید .

حل: غرض حل سوال افادهٔ تحت جذر را تغییر میدهیم :

$$32\cdot 98=(16\cdot 2)(49\cdot 2)=16\cdot 49\cdot 4$$

برای یافتن قیمت افادهٔ $\sqrt{16\cdot 49\cdot 4}$ قضیه جذر مربع یك حاصل ضرب که عامل ضربی آن عدد غیر منفی باشد مورد استفاده قرار میدهیم:

$$\sqrt{16\cdot 49\cdot 4}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{49}\cdot\sqrt{4}=4\cdot 7\cdot 2=56$$

3) قیمت افادهٔ $\sqrt{\frac{36}{169}}$ را پیدا کنید .

حل: مطابق قضیه دوم مینویسیم :

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}}=\frac{6}{13}$$

4) افادهٔ $\sqrt{49a^2}$ را در حالی که $a<0$ باشد ساده کنید.

حل: مطابق قضیه جذر یك حاصلضرب اعداد غیر منفی که مساوی

به حاصلضرب جذرهای آنست ما مینویسیم .

$$\sqrt{49a^2}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{a^2}=7\cdot|a|$$

چون $a<0$ است . پس در اینصورت $|a|=-a$ است .

بنا بران

$$\sqrt{49a^2}=7\cdot(-a)=-7a$$

5) قیمت افادهٔ $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$ را پیدا کنید .

حل: برای یافتن افاده فوق افادهٔ $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ را که در آن $a\geq 0$، $b\geq 0$ اند چنین مینویسیم :

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$$

پس $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{20\cdot 5}=\sqrt{100}=10$

6) حاصل تقسیم $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$ را پیدا کنید .

حل : برای یافتن قیمت افاده فوق مساوی $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ را طوری که $a\geq 0$ و $b>0$ باشد در نظر میگیریم .

پس $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{80}{5}}=\sqrt{16}=4$

7- افادهٔ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ را به شکل $a\cdot\sqrt{b}$ نوشته کنید طوری که a یك عدد نسبتی و b یك عدد طبیعی باشد .

حل : از ضرب کردن صورت و مخرج کسر $\frac{3}{\sqrt{2}}$ به $\sqrt{2}$ حاصل میکنیم که:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}=1,5\cdot\sqrt{2}$$

سوالات.

267 ـ قیمت هریك از افاده‌های زیررا پیدا کنید.

(a) $\sqrt{100\cdot49}$; (b) $\sqrt{121\cdot64}$; (c) $\sqrt{0,36\cdot49}$
(d) $\sqrt{144\cdot0,25}$; (e) $\sqrt{2,25\cdot0,04}$; (f) $\sqrt{0,16\cdot0,0025\cdot900}$

268 ـ قیمت هریك از افاده‌های‌زیررا پیدا کنید:

(a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; (b) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; (c) $\sqrt{\frac{64}{49}}$;
(d) $\sqrt{\frac{121}{25}}$ (e) $\sqrt{\frac{225}{256}}$; (f) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$

269 ـ قیمت این جذرها را پیدا کنید:

(a) $\sqrt{810\cdot40}$; (b) $\sqrt{72\cdot32}$; (c) $\sqrt{75\cdot48}$

270 ـ حقانیت بیانه های زیررا بررسی کنید:

(a) $\sqrt{3^2+4^2}<3+4$; (b) $\sqrt{100^2-6^2}>10-6$.

271 ـ حساب کنید:

(a) $\sqrt{13^2-12^2}$; (b) $\sqrt{312^2-312^2}$; (c) $\sqrt{17^2-8^2}$;

272 ـ قیمت هریك از افاده‌های زیررا پیدا کنید:

(a) $\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{16}{49}\cdot\frac{197}{9}}$; (b) $\sqrt{0,36\cdot0,25\cdot144}$;

(c) $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot2\frac{14}{25}}$; (d) $\sqrt{5\frac{1}{16}\cdot2\frac{34}{81}}$.

273 ـ هریك افاده‌های زیررا به شکل‌حاصل ضرب اعدادجذری بنویسید:

(a) $\sqrt{15}$; (b) $\sqrt{21}$; (c) $\sqrt{7a}$; (d) $\sqrt{-3c}$.

274 ـ قیمت حاصل ضرب افاده های‌زیررا پیدا کنید:

(a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; (b) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$; (c) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$;
(d) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; (e) $\sqrt{21}\cdot\sqrt{21^3}$; (f) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}$

275 ـ هریك از افاده های زیررا به شکل حاصل تقسیم اعداد جذری بنویسید:

$\sqrt{\frac{2}{7}}$; (b) $\sqrt{\frac{3}{10}}$; (c) $\sqrt{\frac{5}{a}}$; (d) $\sqrt{-\frac{b}{3}}$.

276 ـ خارج قسمتهای زیررا حساب کنید:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; (b) $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; (c) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$;
(d) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$; (e) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$; (f) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$.

277 ـ هریك‌از کسرهای‌زیررابه شکل $a\cdot\sqrt{b}$ نوشته‌کنید طوری که a عدد نسبتی و b عددی طبیعی باشد.

(a) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; (b) $-\frac{6}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{5}{2\cdot\sqrt{3}}$; (d) $-\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

278 ـ حساب کنید:

(a) $\sqrt{2^6\cdot3^4}$; (b) $\sqrt{5^4\cdot2^6}$; (c) $\sqrt{\frac{3^2\cdot5^6}{10^4}}$; (d) $\sqrt{\frac{7^2}{2^6\cdot5^4}}$.

279 ـ هریك از افاده های تحت‌جذر را به شکل حاصل ضرب طاقت‌نمادار نوشته و قیمتهای جذرمربع را پیدا کنید:

(a) $\sqrt{1225}$; (b) $\sqrt{9369}$; (c) $\sqrt{19600}$; (d) $\sqrt{44100}$.

280 - با استفاده از جدول جذرمربع قیمت افاده های زیر را از روی مثالهای حل شده زیر پیدا کنید.

$$\sqrt{96100}=\sqrt{961}\cdot\sqrt{100}=31\cdot10=310$$

$$\sqrt{26,01}=\sqrt{\frac{2601}{100}}=\frac{\sqrt{2601}}{\sqrt{100}}=\frac{51}{10}=5,1$$

(a) $\sqrt{448900}$; (b) $\sqrt{115600}$; (c) $\sqrt{7840000}$;
(d) $\sqrt{51,84}$; (e) $\sqrt{62,41}$; (f) $\sqrt{0,7744}$.

281 - اگر قیمت $\sqrt{2,35}\approx1,53$ و $\sqrt{23,5}\approx4,85$ باشند، بااستفاده از قیمتهای تقریبی داده شده قیمت تقریبی هریک ازافاده های زیر را پیدا کنید:

(a) $\sqrt{235}$; (b) $\sqrt{2350}$; (c) $\sqrt{23500}$;
(d) $\sqrt{0,235}$; (e) $\sqrt{0,0235}$; (f) $\sqrt{0,00235}$.

282 - افاده‌های زیررا به شکل یک حده‌ها بنویسید:

(a) $\sqrt{9a^2}$ را، وقتی که $a>0$ باشد؛ (b) $\sqrt{25b^2}$ را، و قتی که $b<0$ باشد؛
(c) $\sqrt{0,36x^2}$ را، وقتی که $x<0$ باشد؛ (d) $\sqrt{81y^6}$ را، وقتی که $y\leq0$ باشد.

283 - هر یک از افاده‌های رابه شکل کسری که صورت ومخرج آن یک حده باشد بنویسید:

(a) $\sqrt{\frac{49}{x^2}}$ وقتی که $x>0$ باشد؛

(b) $\sqrt{\frac{144}{y^2}}$ وقتی که $y<0$ باشد.

29. درآوردن ضریبها در زیر جذر وکشیدن آنها ازجذر:

میخواهیم کـه قیمت افاده‌های $\sqrt{50}$ و $4\cdot\sqrt{2}$ را باهم مقایسه کنیم. این‌مثال داده شده‌را به طریقه های‌مختلف حل کرده‌میتوانیم.

1) افادهٔ $\sqrt{50}$ را به شکل ذیل مینویسیم:

$$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\cdot\sqrt{2}$$

چون میدانیم که $5\cdot\sqrt{2}>4\cdot\sqrt{2}$ است.

بنابران، $\sqrt{50}>4\cdot\sqrt{2}$

2) میخواهیم کـه حاصل‌ضرب $4\cdot\sqrt{2}$ را به شکل جذر مربع بنویسیم که دراینصورت مربع عـامل‌ضربی مثبت 4 یعنی 16 را در زیر جذر بنویسیم.

یعنی:

$$4\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16\cdot2}=\sqrt{32}$$

اکنون $\sqrt{50}$ و $\sqrt{32}$ را باآسانی باهم مقایسه‌کرده میتوانیم. چون میدانیم که 50>32 است، پس $\sqrt{50}>\sqrt{32}$ میباشد.

درحل مثال که اول $\sqrt{50}$ را به‌اجزای ضربی اعداد 5 و $\sqrt{2}$ تبدیل کردیم دراینحالت میگوییم که جذرجزضربی $\sqrt{25}$ را که 5 میشود اززیر جذر بیرون کشیده ایم.

وقتیکه‌حل‌مثال دوم را در نظر میگیریم که‌در آن افاده $4\cdot\sqrt{2}$ رابه افاده جذرمربع $\sqrt{32}$ تبدیل کرده ایم گفته میشود که‌مربع جزضربی 4 را، که 16 میشود، درزیرجذرآورده‌شده‌است.

حالا مثالهای دیگری را مطالعه میکنیم.

مثال 1: اجزای ضربی افاده $\sqrt{9a^7}$ را از زیر جذر بکشید.

هرگاه $a \geq 0$ باشد افاده تحت جذر یعنی $9a^7$ را به شکل حاصل ضرب طوری میاوریم که در آن یکی از اجزای ضربی عینیتاً مساوی به طاقت نما یک حده باشد.

پس در اینصورت: $9a^7 = 9a^6 \cdot a = (3a^3)^2 \cdot a$

طبق قضیه حاصل ضرب و اجزای ضربی غیرمنفی میتوانیم بنویسیم:

$$\sqrt{9a^7} = \sqrt{(3a^3)^2 \cdot a} = \sqrt{(3a^3)^2} \cdot \sqrt{a} = |3a^3| \cdot \sqrt{a} = 3a^3\sqrt{a}.$$

مثال 2: در افاده $-4 \cdot \sqrt{3}$ چون قیمت افادهٔ $-4\sqrt{3}$ منفی است.

بنابر آن افاده مذکور را به شکل جذر مربع حسابی آورده

وچنین مینویسیم:

$$-4\sqrt{3} = -1 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{16 \cdot 3} = -\sqrt{48}$$

دیده میشود که جزضربی مثبت 4 افاده داده شده $-4\sqrt{3}$ را در تحت جذر درآورده درنتیجه افادهٔ مساوی آن که $-\sqrt{48}$ است حاصل نموده ایم.

مثال 3: در افاده $a \cdot \sqrt{2}$ جزضربی a را به تحت علامه جذر بیاورید.

در افاده $a \cdot \sqrt{2}$ جزضربی a هم منفی وهم غیرمنفی شده میتواند.

1) - اگر $a \geq 0$ باشد پس $a\sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$

2) - اگر $a < 0$ باشد در این صورت $-a > 0$ میباشد در نتیجه

$$a\sqrt{2} = -(-a)\sqrt{2} = -\sqrt{(-a)^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$$

سوالات:

284 - اجزای ضربی هریك از افاده های زیر را از جذر بکشید:

(a) $\sqrt{12}$; (b) $\sqrt{18}$; (c) $\sqrt{48}$; (d) $\sqrt{125}$; (e) $\sqrt{363}$

285 - مانند سوال (284) عملیه را اجرا کرده وسپس افاده های حاصل شده را ساده کنید.

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{24}$; (b) $-\frac{1}{7}\sqrt{147}$;

(c) $-\frac{1}{5}\sqrt{275}$ (d) $0,1 \cdot \sqrt{20000}$.

286 - جزضربی را در زیر علامه جذر آورده و افاده ها را ساده کنید.

(a) $7 \cdot \sqrt{10}$; (b) $5 \cdot \sqrt{3}$; (c) $10\sqrt{5}$; (d) $2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$.

287 - جز ضربی را در زیر جذر آورده وافاده زیر جذری را ساده کنید.

(a) $3 \cdot \sqrt{5}$; (b) $2 \cdot \sqrt{7}$; (c) $\sqrt{5 \cdot \frac{a}{5}}$;

(d) $\frac{1}{2}\sqrt{6x}$; (e) $-\frac{2}{3}\sqrt{3y}$.

288 - هریك از افاده های زیررا باهم مقایسه کنید:

(a) $3 \cdot \sqrt{3}$ و $\sqrt{12}$ را؛ (b) $\sqrt{20}$ و $3 \cdot \sqrt{5}$ را؛

(c) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{54}$ و $\sqrt{509} \cdot \frac{1}{5}$ را؛ (d) $3 \cdot \sqrt{120}$ و $2 \cdot \sqrt{270}$ را.

289 - اعداد زیررا به ترتیب متزائد (صعودی) بنویسید:

(a) $3\cdot\sqrt{3}$; $2.\sqrt{6}$; $\sqrt{29}$;   (b) $6\sqrt{2}$; $\sqrt{28}$; $3\sqrt{7}$;

290 - جزضربی هر یك از افاده های ز یر را از جذر بکشید :

(a) $\sqrt{7a^2}$ وقتی که $a \geq 0$ باشد، (b) $\sqrt{10y^2}$ و قتی که $y<0$ باشد ،
(c) $\sqrt{16x^3}$ وقتی که $x>0$ باشد، (d) $\sqrt{0,01b^5}$ و قتی که $b\geq 0$ باشد .

291 - (a) $x.\sqrt{3} = \sqrt{3x^2}$ مساوی به کدام قیمتهای x ست $\{2; 3; -5; -10\}$ حقیقت دارد ؟

(b) $c.\sqrt{5} = -\sqrt{5c^2}$ مساوی به کدام قیمتهای c شامل $\{-3; 1; 4; 10; -10\}$ حقیقت دارد ؟

292 - قیمت افاده $6.\sqrt{\frac{1}{3}}$ را به دو طریق پیدا کنید .

a) قیمت $\sqrt{0,3333}$ را از جدول جذر مربع پیدا کرده در 6 ضرب کنید .

b) افاده $6.\sqrt{\frac{1}{3}}$ را به شکل $\sqrt{12}$ نوشته کرده و قیمت آن را از جدول جذر مربع پیدا کنید. وهم بگوئید که کدام یکی از این دو طریقه عمومیت دارد ؟

293 - قیمت افاده های زیر را به کمك جدول جذر مربع پیدا کنید :

(a).. $\sqrt{5}$; (b) $15.\sqrt{2}$; (c) $14.\sqrt{\frac{1}{7}}$; (d) $12.\sqrt{\frac{5}{6}}$.

30 . تبدیل افاده های جذری

برای حل این مطلب مثالهای مختلف را مطالعه مینمایم .

مثال 1 : میخواهیم که افاده $2,3.\sqrt{5} - \sqrt{20} - \sqrt{\frac{1}{5}}$ را ساده کنیم .

حل : برای حل مثال افاده $\sqrt{20}$ را به دو عامل ضربی آن تجزیه میکنیم .

$$\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{5} = 2.\sqrt{5}$$

به همین ترتیب با استفاده از قضیه بیجذر مربع کسرها ، افادهٔ $\sqrt{\frac{1}{5}}$ را چنین مینویسیم :

$$\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1\,.\,\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,.\sqrt{5}} = \frac{1}{5}.\sqrt{5} = 0,2.\sqrt{5}$$

حالا میتوانیم بنویسیم . $2,3.\sqrt{5} - \sqrt{20} - \frac{1}{5}$

$$=2,3\sqrt{5} - 2.\sqrt{5} - 0,2\sqrt{5} = \sqrt{5}\,(2,3-2-0,2) = 0,1.\sqrt{5}$$

مثال 2 میخواهم کسر $\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{5}}{3+2\sqrt{3}}$ را اختصار کنیم .

حل : میدانیم که: $3 = (\sqrt{3})^2$ و $\sqrt{15} = \sqrt{5}\,.\,\sqrt{3}$ اند،

پس $$\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{5}}{3+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\,.\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

اکنون صورت و مخرج کسر آخر را به $\sqrt{3}$ ضرب مینمایم .

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\,.\sqrt{3}}{\sqrt{3}\ \sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$$

در نتیجه ....
$$\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{5}}{3+2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

مثال 3 : میخواهیم که قیمت تقریبی افادهٔ : $4\frac{\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}-1}$ را با کمك

جدول جذر مربع پیدا کنید .

حل :

اولاً کوشش مینمایم تا که افاده را ساده بسازیم. برای ساده ساختن افادهٔ مذکور صورت و مخرج کسر داده شده را به افاده یی ضرب میکنیم که مخرج آن یک عدد نسبتی شود . برای این مطلب صورت و مخرج کسررا به مزدوج عدد مخرج یعنی $\sqrt{2}+1$ ضرب مینمایم .

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2})^2-1=2-1=1$$

پس میتوانیم بنویسیم .

$$\frac{3.\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}-1}=\frac{(3\sqrt{2}+4)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=(3\sqrt{2}+4)(\sqrt{2}+1)$$

بعد از اجرای عملیه ضرب حاصل میداریم که :

$$(3\sqrt{2}+4)(\sqrt{2}+1)=3(\sqrt{2})^2+4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4=3.2+7\sqrt{2}+4$$
$$=10+7\sqrt{2}$$

ازجدول داریم که $\sqrt{2}\approx 1,414$ است.

در نتیجهٔ $10+7\sqrt{2}=10+7\cdot1,414=19,898$ میشود .

مثال 4 : هرگاه $a\geq0$ و $b\geq0$ باشد میخواهیم ثبوت کنیم که برای قیمتهای دلخواه a و b غیر مساوات $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ حقیقت دارد .

حل :

چون $a\geq0$ و $b\geq0$ است، یعنی برای تمام قیمتهای دلخواه $\sqrt{a+b}$

و $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ غیرمنفی میباشد. پس برای اثبات غیرمساوی فوق مربع این افاده ها را با هم مقایسه میکنیم :

$$(\sqrt{a+b})^2=a+b$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

چون $2\sqrt{a}\sqrt{b}\geq 0$ است ،

بنابراین $(\sqrt{a+b})^2\leq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ است .

در نتیجهٔ $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ حاصل میباشد .

سوالات :

294 - افاده های زیر را ساده کنید :

(a) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{300}$; (b) $3\sqrt{8}+2\sqrt{18}-\sqrt{50}$;

(c) $\sqrt{242}-\sqrt{200}+\sqrt{8}$; (d) $\sqrt{24}+\sqrt{96}-\sqrt{150}$

295 - افاده های زیر را ساده نموده و به کمک جدول قیمتهای زیر را حساب کنید :

(a) $3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$; (b) $2\sqrt{72}-\sqrt{50}-2\sqrt{8}$;

(c) $5.\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{27}-\sqrt{48}$; (d) $\sqrt{80}+\frac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{45}$.

296 - افاده های زیر را ساده کنید:

(a) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}+\sqrt{60}$; (b) $(\sqrt{28}-2\sqrt{3}+\sqrt{7}).\sqrt{7}+\sqrt{48}$

(c) $\sqrt{12}+2\sqrt{18}).\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{96}$; (d) $(4\sqrt{3}-2\sqrt{6}-1).a\sqrt{3}$.

297 - به عامل ضربی جدا کنید .

(a) $\sqrt{14}+\sqrt{7}$; (b) $\sqrt{33}+\sqrt{22}$; (c) $\sqrt{15}-\sqrt{6}$;

(d) $3+\sqrt{3}$; (e) $10-2\sqrt{10}$; (f) $a-5\sqrt{a}$.

298 - کسر های زیر را اختصار کنید.

(a) $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$; (b) $\frac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$; (c) $\frac{\sqrt{3}-3}{5.\sqrt{3}}$;

(d) $\frac{a\sqrt{d}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; (e) $\frac{a-\sqrt{ax}}{a\sqrt{x}}$; (f) $\frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$.

299 - قیمت هرجوره ازافاده های زیررا باهم مقایسه کنید :

(a) قیمت $\sqrt{2,5}$ و $\frac{\sqrt{2}+3}{2}$ را،

(b) قیمت $\sqrt{11}-1$ و $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ را .

300 - از فارمول $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ استفاده کرده افاده های زیررا ساده سازید:

(a) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$; (b) $(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)$;

(c) $(\sqrt{10}+7)(7-\sqrt{10})$; (d) $(2\sqrt{5}+\sqrt{19})(2\sqrt{5}-\sqrt{19})$

301 - نشان دهید که قیمت افاده های زیر اعداد نسبتی اند :

(a) $\frac{1}{3\sqrt{2}-4}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$; (b) $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$

302 - هریك از افاده های زیر را ساده نموده و به کمك جدول قیمت آنها را پیدا کنید :

(a) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$

معادلات درجه دوم

31. مفهوم معادلات درجه دوم

یك عده مسائل زیادی موجوداند که به شکل معادله $ax^2+bx+c=0$

آورده میشوند. دیده میشود که طرف چپ این معادله یك سه حده یك متحول درجه دوم وطرف راستش عبارت از صفر است. این نوع معادله ها را معادله درجه دوم مینامند.

تعریف : هر معادله یی که شکل $ax^2+bx+c=0$ واطوری که در آن x متحول $b;a$ و c اعداد ثابت و $a \neq 0$ راداشته باشد معادله درجه دوم نامیده میشود. ضریب x^2 یعنی a راضریب حداولی ، ضریب x یعنی b واضریب حد دوم وعدد c راحدثابت این معادله مینامند.

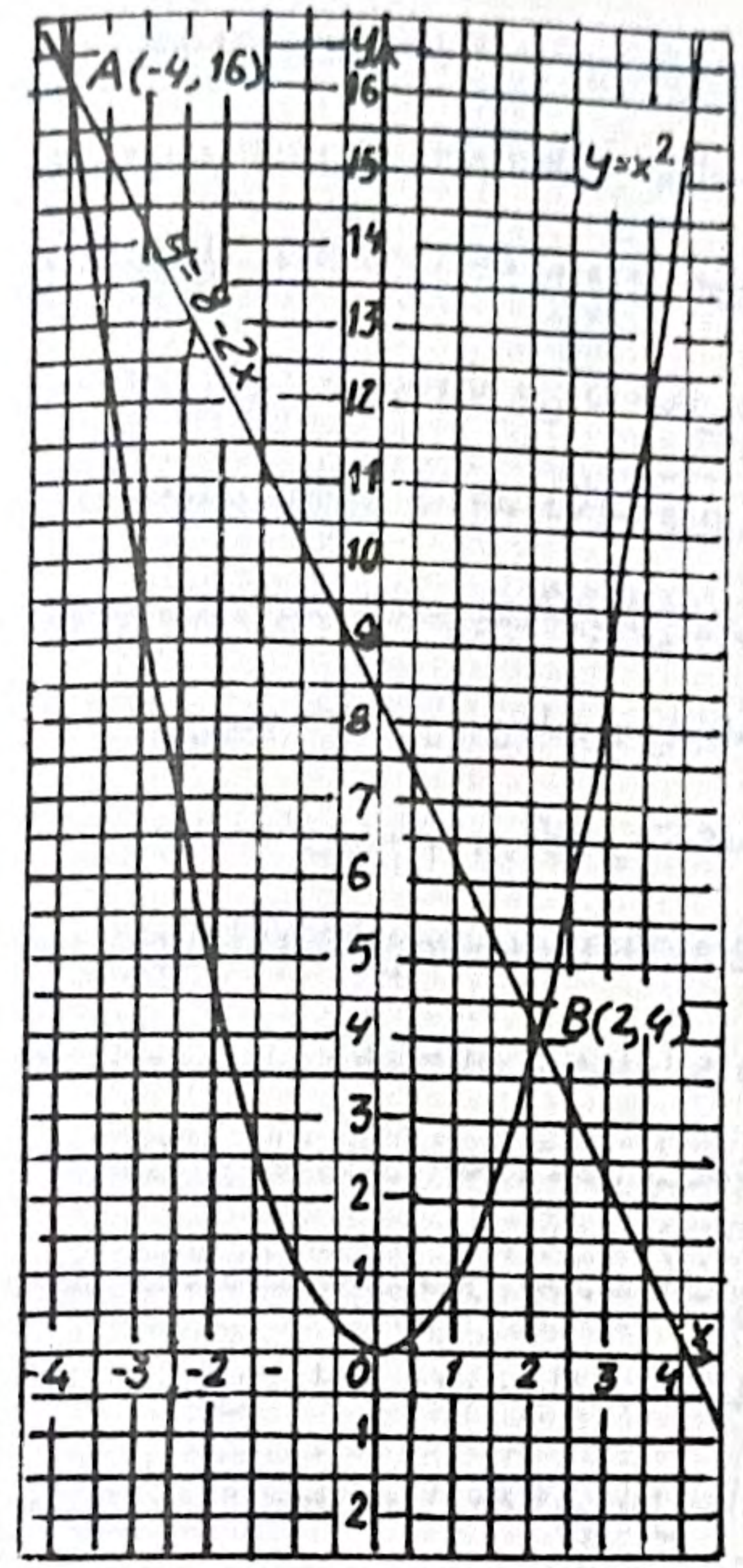
معادله های $3x^2-x-2=0$ و $x^2+2x-8=0$ معادله های درجه دوم اند. زیرا آنها شکل $ax^2+bx+c=0$ رادارند درمعادله اولی $b=-1;a=3$ و $c=-2$ است وهمچنان درمعادله دومی $b=2;a=1$ و $c=-8$ است.

اگر درمعادله درجه دوم ضریب x^2 یعنی $a=1$ باشد معادله را بنام معادله اصلاح شده یادمیکنند مثلاً معادله های $x^2+2x-8=0$ و $v^2-0,7v+5,6=0$ معادله های اصلاح شده میباشند. ماقبلاً حل معادله های درجه دوم را به طریق گراف مطالعه کرده ایم حل معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ به طریق گراف وقتی که $a \neq 0$ باشد، عبارت از ابسیس تقاطع پرابول $y=ax^2$ وخط مستقیم $y=-bx-c$ میباشد .

مثلاً میخواهیم که معادله $x^2+2x-8=0$ را به طریق گراف حل کنیم.

حل: غرض حل این مطلب اولاً معادله را به شکل $x^2=-2x+8$ مینویسیم سپس گرافهای آنها را رسم میکنیم دیده میشود که گرافهای تابع

$y=x^2$ و $y=-2x+8$ یکدیگر را در نقاط A و B که ابسیس آنها مساوی به 4- و 2 است، قطع میکنند. مانند شکل (26) اینك اعداد 4- و 2 جذر های معادله $x^2+2x-8=0$ نیز میباشند.



شکل (26)

وقتی که حل معادله درجه دوم به کمك گراف مطلوب باشد، در آن وقت اولاً معادله را به شکل معادله اصلاح شدهٔ آن در میاوریم. یعنی تمام اطراف معادله را به ضریب حد اول آن یعنی به ضریب x^2 تقسیم میکنیم. جذر این معادله اصلاح شده و معادله معادل آن را که حاصل میشود، با استفاده از تقاطع گراف $y=x^2$ با گراف خط مستقیم مربوط آن یعنی: $y=-2x+8$ حاصل میکنیم

سوالها :

303. در معادله های داده شده زیر که شکل $ax^2+bx+c=0$ را دارند قیمتهای a;b و c را نشان داده و هم بگوئید که کدام یکی از معادله های داده شده معادله درجه دوم اصلاح شده میباشد ؟

(a) $2x^2+17x+3=0$; (b) $5x^2-9x+4=0$;
(c) $x^2-12x-6=0$; (d) $-x^2+x-2=0$;
(e) $8x^2-7x=0$; (f) $x^2-81=0$.

304. هریك از معادله های زیر را به طریق گراف حل کنید :

(a) $x^2+3x-4=0$; (b) $x^2-2x-5=0$;
(c) $x^2+2x+5=0$; (d) $2x^2-x-3=0$.

32. حل معادلات درجه دوم به شکل تفاضل مربعات دوحده

تا اینجا ما به حل معادله درجه دوم مانند $x^2+6x+5=0$ را به کمك گراف آشنایی پیدا کرده ایم. حال میخواهیم که اینگونه معادلات را بدون کمك گراف حل کنیم. برای رسیدن به این مطلب از استعمال عینیت $(x+3)^2=x^2+6x+3^2$ استفاده میکنیم. اکنون به جای دوحد اول x^2+6x معادله داده شده قیمت آن یعنی $x^2+6x=(x+3)^2-3^2$ را در اصل معادله میگذاریم که در اینصورت معادله زیر $(x+3)^2-3^2+5=0$ حاصل میشود.

از اینجا $(x+3)^2-9+5=0$

یا $(x+3)^2-4=0$

یا $(x+3)^2-2^2=0$ به‌دست میاید.

با استفاده از فارمول تفاضل مربعات، طرف چپ معادله آخر بالا را مانند زیر تجزیه میکنیم:

$$(x+3+2)\cdot(x+3-2)=0$$
$$(x+5)\cdot(x+1)=0$$

در نتیجهٔ $x_1=-1$ و $x_2=-5$ عبارت از جذر های مطلوب معادله است

پس ست حله معادله مذکور عبارت از $\{-5 ; -1\}$ میباشد .

تبصره : برای اینکه قیمت دوحد اول x^2+6x معادلهٔ داده شده را به شکل مربع یک مجموع یعنی : $(x+3)^2$ بیاوریم . اولاً باید که معادله داده شده را به شکل اصلاح شده آن آورده وسپس نصف ضریب حد دوم آن را حاصل کنیم . در آخر باید که مربع نصف ضریب حد دوم را از مربع مجموع x جمع نصف ضریب حد دوم طرح کنیم . اینک این فرق را به جای دوحد اول معادله درجه دوم داده شده گذاشته و آن را حل میکنیم .

اکنون چند معادله دیگری که شکل $ax^2+bx+c=0$ داشته و در آن $a \neq 0$ باشد به طریق تفاضل مربعات دوحده حل مینمایم .

مثال 1 : میخواهیم که معادلهٔ : $x^2-5x+8=0$ . . . 1 را حل کنیم .

حل . طرف چپ معادله درجه دوم داده شده را به دو فکتور تجزیه میکنیم .

برای رسیدن به این مطلب ما مربع مجموع یک دوحده را جستجو میکنیم که حد اول آن را x وحد دوم آن را نصف ضریب حد دوم ، که عبارت از نصف -5 است ، تشکیل بدهند . واضحست که این دوحده مطلوب ما عبارت از $x-\frac{5}{2}$ بوده و مربع آن $(x-\frac{5}{2})^2$ میشود . از انکشاف این مربع مجموع ، دوحد اول سه حده طرف چپ معادله (1) به علاوه مربع حد دوم حاصل میشود .

$$(x-\frac{5}{2})^2 = x^2 - 2\cdot\frac{5}{2}x + (-\frac{5}{2})^2$$
$$= x^2-5x+\frac{25}{4}$$

از اینجا $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}=x^2-5x$ حاصل میگردد .

اکنون به جای x^2-5x قیمت آن یعنی : $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$ را در معادله (1) گذاشته و آن را حل میکنیم :

$$x^2-5x+8=0$$
$$(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+8=0$$
$$(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25-32}{4}=0$$
$$(x-\frac{5}{2})^2+\frac{7}{4}=0$$

چون طرف چپ معادله آخر از حاصل جمع دوحد $(x-\frac{5}{2})^2$ و $\frac{7}{4}$ ، که به تمام قیمتهای x همیشه بزرگتر از صفر است و هیچ یک عدد حقیقی یی موجود شده نمیتواند که طرف چپ آنرا صفر سازد ، تشکیل گردیده است ، بنا بر آن گفته میشود که معادله $x^2-5x+8=0$ حل ندارد . وست حله آن ست خالی است .

مثال 2 : معادلهٔ : $x^2-18x+81=0$ را حل کنید .

حل : طرف چپ معادله درجه دوم (سه حده) مساوی به مربع

دوحده $x-9$ است، پس معادله مذکور را به شکل $(x-9)^2$ نوشته کرده میتوانیم. دیده‌میشود که طرف چپ معادله فقط به قیمت $x=9$ صفرمیشود، پس‌معادله درجه‌دوم $x^2-18x+81=0$ دارای یک‌جذر، که عبارت از 9 است‌میباشد.

مثال 3. معادله: $3x^2-11x-20=0$ را حل کنید.

حل: نخست اطراف معادله رابه ضریب x^2 یعنی به 3 تقسیم مینمایم. معادله‌معادل آن یعنی: $x^2-\frac{11}{3}x-\frac{20}{3}=0$ حاصل‌میشود.

چون $\frac{11}{3}x$ دوچندحاصلضرب x در $\frac{11}{6}$ است

یعنی: $\frac{11}{3}x=2x\cdot\frac{11}{6}$ میباشد.

حال به‌جای‌دوحد $x^2-\frac{11}{3}x$ معادلهٔ داده شده معادل آن یعنی: $(x-\frac{11}{6})^2-(\frac{11}{6})^2$ را دراصل معادله‌گذاشته‌وآن‌راحل‌میکنیم

$$x^2-\frac{11}{3}x-\frac{20}{3}=\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\left(\frac{11}{6}\right)^2-\frac{20}{3}=\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{361}{36}$$

$$=\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\left(\frac{19}{6}\right)^2$$

اکنون معادله اولی‌را به شکل زیر نوشته کرده‌میتوانیم

$$\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\left(\frac{19}{6}\right)^2=0$$

اکنون معادله بالاراتجزیه کرده‌حاصل‌میداریم:

$$\left(x-\frac{11}{6}-\frac{19}{6}\right)\left(x-\frac{11}{6}+\frac{19}{6}\right)=0$$

$$(x-5)\left(x+\frac{4}{3}\right)=0$$

معادله آخری بامعادله اولی داده شده معادل میباشد. پس‌ست حله این معادله ست حله معادله $3x^2-11x-20=0$ میباشد وآن‌ست‌حله عبارت‌از $\left\{5;-\frac{4}{3}\right\}$ است.

سوال:

305 - هریك ازمعادله های زیررا به‌شکل تفاضل مربعات دوحده تجزیه وحل کنید:

(a) $x^2-2x-35=0$; (b) $x^2+8x-20=0$

(c) $y^2-16y+64=0$; (d) $x^2+x-2=0$

33. مفهوم جذر های معادله درجه دوم

ما حل معادله درجه دوم را به طرز تجزیه به دوفکتورمطالعه‌نمودیم ولی این طرزحل عملیات زیاد را ایجاب میکند، بنا براین، معادله درجه دوم‌رابه‌طریق‌عمومی‌حل کرده‌وفارمول‌جذرهای آن‌راحاصل میکنیم. بااستفاده‌ازاین فارمول‌عمومی‌ماميتوانيم که‌هرنوع‌معادله درجه دوم راحل کنیم.

$$ax^2+bx+c=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

برای حل کردن معادله، وقتی که $a\neq 0$ باشد، تمام‌حدهای آن‌رابه a تقسیم نموده‌وحاصل میداریم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

اکنون سه حدهٔ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ را به دو فکتور تجزیه میکنیم .

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

معادله(2) را چنین مینویسیم:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

تعداد جذرهای معادله (3) عبارت از جذرهای معادله (1) است. موجودیت جذرهای این معادله مربوط به کسر $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ میباشد.

چون $a \neq 0$ است، بنا براین مخرج کسر برای تمام قیمت‌های a مثبت است . پس علامه کسر به اساس علامه صورت تعین میگردد.

اگر افاده b^2-4ac را به D نشان بدهیم در اینصورت معادله (3) را به شکل: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0$ .... (4) مینویسیم وحالات زیررا مطالعه میکنیم:

1) هرگاه $D<0$ باشد در اینصورت قیمت کسر $\frac{D}{4a^2}$ منفی گردیده، ولی قیمت افاده $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}$ به تمام قیمتهای x مثبت میگردد. چون مجموع هیچ دو عدد مثبت مساوی به صفر نیست یعنی چنین معادله ایجاد شده نمیتواند، در نتیجه معادله(3) جذر نداشته و معادلهٔ معادل آن یعنی معادله (1) نیز جذر ندارد .

2) هرگاه $D=0$ باشد در این صورت معادله (3) شکل

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ را میگیرد . و این معادله حاصل‌شده دارای یك جذر مساوی به $-\frac{b}{2a}$ است . پس در این حالت معادله(1) که معادلهٔ معادل معادلهٔ بالا است نیز دارای همین یك جذر $x=-\frac{b}{2a}$ میباشد .

3) هرگاه $D>0$ باشد در اینحالت $\frac{D}{4a^2}$ معادله (4) منفی میشود حال آنکه حد $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ آن به تمام قیمت های x همیشه بزرگتر یا مساوی به صفر میباشد . پس در اینحالت صفرشدن حاصل جمع دو حد مثبت و منفی امکان پذیربوده و ما میتوانیم که با وضع کردن قیمت کسر $\frac{D}{4a^2}$ معادلهٔ (1) را چنین بنویسیم :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2=0$$

اکنون معادله بالا را به دو فکتور تجزیه میکنیم .

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0$$

هر کدام از فکتورهارا مساوی به صفر قرار میدهیم .

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}=0;\quad x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}=0$$

$$x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a};\quad x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}$$

در نتیجه معادله (1) دارای دو جذر $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

میباشد . به‌شکل مختصر آن را چنین مینویسیم : $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ که در اینجا $D=b^2-4ac$ میباشد. فارمول بالا را به‌نام جذرهای معادله درجه دوم یاد میکنند .

ما دیدیم که موجودیت و تعداد جذرهای معادله درجه دوم مربوط به قیمت افادهٔ $D=b^2-4ac$ میباشد. این افاده را Discriminant (قاسمه) معادله درجه دوم مینامند. (Discriminant کلمه لاتینی بوده و معنی آن تمیز کننده است)

خلاصه :

هرگاه $D<0$ باشد معادله جذر ندارد ، هرگاه $D=0$ باشد معادله یک جذر که آنهم $-\frac{b}{2a}$ است میداشته باشد و هرگاه $D>0$ باشد معادله دارای دوجذر $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ میباشد .

درصورتی که $D=0$ باشد برای حل معادله از استعمال فارمول جذر های معادله درجه دوم نیز استفاده کرده میتوانیم . زیرا وقتی که $D=0$ باشد فارمول جذرهای معادله درجه دوم شکل زیر را میگیرد:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}$$

پس به همین ترتیب این فارمول برای هر معادله درجه دوم که دارای جذر باشد قابل تطبیق است . اینک بااستفاده از فارمول بالا چند مثال معادله درجه دوم را حل مینمائیم :

مثال 1 : میخواهیم که معادلهٔ: $12x^2+7x+1=0$ را حل کنیم .

حل : در این معادله $a=12$; $b=7$ و $c=1$ است. حال قاسمه را تشکیل میدهیم :

$$D=b^2-4ac=7^2-4.12.1=49-48=1$$

دیده میشود که قاسمه مثبت است . بنابراین معادله دارای دوجذر است . با استفاده از فارمول، جذرهای معادله درجه دوم را دریافت میداریم :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{1}}{2.12}$$

$$x_1=\frac{-7+1}{24}=\frac{-6}{24}=-\frac{1}{4}$$

$$x_2=\frac{-7-1}{24}=\frac{-8}{24}=-\frac{1}{3}$$

پس :

ست حله معادله $\left\{-\frac{1}{3} ; -\frac{1}{4}\right\}$ میباشد .

مثال 2 : میخواهیم که معادله $x^2-12x+36=0$ را حل کنیم .

حل :

دراین معادله $a=1$; $b=-12$ و $c=36$ است .

پس $D=b^2-4ac=(-12)^2-4.1.36=144-144=0$ چون $D=0$ است معادله دارای یک جذر است .

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-12)\pm0}{2.1}=\frac{12}{2}=6$$

پس ست حل معادلهٔ داده‌شده عبارت از $\{6\}$ است.

مثال 3 : معادله $7x^2 - 25x + 23 = 0$ را حل میکنیم.

حـل : در این معادله $a=7$; $b=-25$ و $c=23$ است.

غرض حل قاسمه را تشکیل میدهیم.

$$D = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4\cdot 7\cdot 23 = 625 - 644$$

چون قاسمه منفیست، پس ست حل مذکور (در ست اعداد حقیقی) ست خالی میباشد.

حالت خصوصی:

حال میخواهم که توسط فارمول، جذرهای معادلهٔ درجه دوم معادله های دیگری را که در آنها کم از کم یکی از ضریب های b یا c آن صفر باشد حل کنیم. اینگونه معادله های درجه دوم را که در آنها یکی یا هردو ضریب b و c آنها صفر باشد به نام معادله های درجه دوم ناقص یاد میکنند.

به گونه مثال هریك از معادله های $3x^2+17x=0$; $x^2-1,21=0$ و $7x^2=0$ معادله‌های درجه دوم ناقص اند زیرا در معادلهٔ اولی $a=3$; $b=17$ و $c=0$ است همچنان در معادله دوم $a=1$; $b=0$ و $c=1,21$ و در معادله سوم $a=7$ $b=0$ و $c=0$ میباشند.

اکنون از فارمول جذرهای معادله درجه دوم برای حل کردن معادله ناقص $x^2-1,21=0$ استفاده مینمایم.

$$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4\ (-1,21) = 4,84$$

آن جذر معادله بوده و معادله را صدق میکند.

مثال دیگری را مطالعه مینمایم:

کشتی موتردار در 5 ساعت 24 کیلومتر را به سمت جریان دریا و 20 کیلومتر را به سمت مقابل جریان شنا میکند. اگر سرعت جریان دریا در تمام مسیر حرکت 2 کیلومتر فی ساعت باشد سرعت کشتی را بدون سرعت جریان دریا پیدا کنید.

حـل : فرض میکنیم که سرعت کشتی بدون سرعت آب x کیلومتر فی ساعت است در اینصورت سرعت کشتی به سمت جریان دریا $(x+2)$ کیلومتر فی ساعت و به سمت مقابل جریان دریا $(x-2)$ کیلومتر فی ساعت میباشد.

وقتی را که کشتی به‌سمت جریان دریا در فاصله 42 کیلومتر صرف کرده مساوی به $\frac{42}{x+2}$ ساعت بوده و وقتی را که کشتی به سمت مقابل جریان دریا در فاصله 20 کیلومتر صرف کرده مساوی به $\frac{20}{x-2}$ ساعت است. و وقتی را که کشتی در طول تمام سفر صرف کرده مساوی به $\left(\frac{42}{x+2}+\frac{20}{x-2}\right)$ ساعت است.

پس در این صورت: $\frac{42}{x+2}+\frac{20}{x-2}=5 \ldots\ldots (1)$

از عبارت سوال فهمیده میشود که باید سرعت کشتی نسبت به سرعت

آب زیادتر باشد یعنی قیمت مطلوب x باید غیرمساوی $x>2$ را صدق کند . پس معادله (1) بامعادلهٔ زیر معادل است :

$$5x^2-62x+24=0$$

که بعد از حل آن اعداد $\frac{2}{5}$ و 12 حله سیستم حاصل میشود که از آنجمله تنها و تنها عدد 12 شرط $x>2$ را صدق مینماید .

در نتیجه، مثال داده شده یک جواب دارد، یعنی سرعت کشتی بدون سرعت جریان دریامساوی به 12 کیلومتر فی ساعت است .

سوالات

317 — (a) حاصلضرب دو عدد طبیعی مساوی به 182 است هرگاه یکی آن نسبت به دیگرش 6 زیادتر باشد اعداد را پیدا کنید.

(b) عدد 120 را به شکل حاصلضرب دو عدد که یکی آن نسبت به دیگرش 2 کمتر است بنویسید.

318 — (a) طول مستطیل از عرضش 4 سانتیمتر زیاد تر است، اگر مساحت مستطیل 60 سانتیمتر مربع باشد ، محیط آن را پیدا کنید.

b) هرگاه محیط مستطیل 42 متر و مساحتش 210 متر مربع باشد طول اضلاع مستطیل را پیدا کنید.

319 — (a) حاصلضرب دو عدد طبیعی پی در پی از مجموع شان 109 زیادتر است اعدا د را پیدا کنید.

b) مربع مجموع دو عدد طبیعی پی در پی از حاصل جمع مربعهای شان

112 زیادتر است اعداد را پیدا کنید.

320 — (a) نسبت طول اضلاع قائم مثلث قائم الزاویه به 8:15 است ، اگر طول وتر آن 6,8 متر باشد مساحت آن را حساب کنید .

b) نسبت وتر مثلث قایم الزاویه با یکی از اضلاع قائم آن مساوی به $\frac{31}{12}$ است اگر طول یك ضلع قائم آن 15 سانتیمتر باشد محیط مثلث را حساب کنید .

321 — معادله های زیر را حل کنید:

(a) $\frac{x^2+1}{2}-x=2$; (b) $x.\frac{x+1}{6}-2x=2$;

(c) $3-\frac{x+2}{4}.x=x+5$.

322 — ست جذرهای معادله های زیر را پیدا کنید.

(a) $\frac{2x^2}{x-2}=\frac{7x-6}{x-2}$; (b) $\frac{x^2-6x}{x-5}=\frac{5}{5-x}$;

(c) $\frac{2x-1}{x+7}=\frac{3x+4}{x-1}$; (d) $\frac{5y+1}{y+1}=\frac{y+2}{y}$;

(e) $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$; (f) $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1$.

323 — (a) بنابر کدام قیمتهای y قیمتهای حاصل جمع و حاصلضرب کسرهای $\frac{y+1}{y-5}$ و $\frac{10}{y+5}$ باهم مساوی است؟

b) بنابر کدام قیمتهای a حاصل تفریق و حاصلضرب کسرهای $\frac{6}{a-4}$ و $\frac{a}{a+2}$ باهم مساویست؟

324—(a) در یك کسر صورت کسر نسبت به مخرجش به اندازه 1 زیادتر است، اگر به صورت کسر مذکور 3 و به مخرجش 18 را علاوه نماییم قیمت کسر حاصل شده نظر به کسر اولی به اندازه 1 کمتر میشود کسر اولی را در یافت کنید.

b) در یک کسر صورت از مخرجش به اندازه 4 خوردتر است، اگر از صورت کسر 3 را کم و بر مخرجش 5 را علاوه نماییم کسری که حاصل میشود از کسر اولی به اندازه $\frac{1}{3}$ کمتر است کسر اولی را پیدا کنید.

35. قضیه ویت.

معادله $5x^2-4x-12=0$ دارای دو جذر $-1\frac{1}{5}$ و 2 است که حاصل جمع جذرها مساوی به $\frac{4}{5}$ و حاصل ضرب شان $-\frac{12}{5}$ میشود.

دیده میشود که حاصل جمع جذرهای این معادله مساوی به نسبت ضریبهای دوم بر اول با تغییر علامه و حاصل ضرب جذرها مساوی به نسبت حد ثابت بر ضریب حد اولیست.

آیا هر معادله درجه دوم دلخواه این خاصیت حاصل جمع و حاصل ضرب جذرها را دارا است؟

هر معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ وقتی که $D>0$ باشد دو جذر دارد. هر گاه آنها را به x_1 و x_2 نشان بدهیم،

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ است.

اکنون حاصل جمع و حاصل ضرب جذرها را پیدا میکنیم.

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

در نتیجه: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ میشود

وقتی که $D=0$ باشد معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای یك جذر است که آن را نیز به کمك فارمول $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ تعیین کرده میتوانیم.

وقتی که $D=0$ باشد معادله دارای دو جذر مساوی است در نتیجه هر معادله درجه دوم دلخواه که جذر داشته باشد تطبیق شده میتواند.

اینك در این مورد قضیهٔ زیر را بیان میکنیم:

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ حاصل جمع جذرها مساوی به $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب جذرها مساوی به $\frac{c}{a}$ است. این قضیه به نام ریاضیدان مشهور فرانسوی (ویت)، که در سالهای (1540-1603) زنده‌گی میکرد، یاد میشود.

هر گاه معادلهٔ درجه دوم معادلهٔ اصلاح شده باشد، یعنی در معادله

$ax^2+bx+c=0$ قیمت ضریب a مساوی به 1 باشد در صورت موجودیت
جذرها حاصل جمع جذرها مساوی به $-b$ و حاصلضرب جذرها
مساوی به c میشود، در حقیقت در معادلهٔ درجه دوم اصلاح شده
حاصل جمع جذرها مساوی به ضریب دوم با تغیر علامهٔ آن و حاصل
ضرب جذرها عبارت از حد ثابت (c) است.

مثلاً معادله $x^2-7x+10=0$ را در نظر میگیریم.

میبینیم که آیا معادله حل دارد یا خیر؟ غرض حل این مطلب
قاسمه را تشکیل میدهیم.

$D=(-7)^2-4.10=49-40=9$ دیده میشود که $D>0$ است. پس معادله
دوجذر دارد.

فرض میکنیم که x_1 و x_2 جذرهای معادله باشد.

دراین صورت: $x_1+x_2=7$; $x_1 . x_2=10$ میشود.

هرگاه m و n دوعددی باشد که حاصل جمع آنها مساوی به $-\frac{b}{a}$
وحاصل ضرب آنها مساوی به $\frac{c}{a}$ باشد، پس درین صورت اعداد داده شده
جذرهای معادله $ax^2+bx+c=0$ میباشد.

بین جذرها و ضریبهای معادله درجه دوم یک رابطه موجود است،
که به اساس آن اگر جذر های معادله داده شده باشد. ازروی آنها
معادله درجه دوم را ترتیب داده میتوانیم.

فرضاً میخواهیم معادله یی را ترتیب دهیم که اعداد 7 و 2- جذر
های آن باشد. برای حل این مطلب حاصل جمع و حاصل ضرب جذر
ها را پیدا میکنیم.

حاصل جمع جذرها: $7+(-2)=5$

حاصل ضرب جذرها: $7.(-2)=-14$

پس معادله یی که اعداد 2- و 7 جذرهای آن است عبارت از
$x^2-5x-14=0$ می باشد.

سوالها

325- درصورت موجودیت جذرها بدون حل معادله حاصل جمع
و حاصل ضرب جذرهای معادله های زیر را پیدا کنید.

(a) $2x^2-9x-10=0$; (b) $5x^2+12x+7=0$;

(c) $x^2-37x+27=0$; (d) $y^2+41y+371=0$.

326- جذرهای هریک از معادله های زیر را پیدا کنید و باساس
قضیه ویت حاصل جمع و حاصل ضرب جذرها را حساب کنید. بعداً
حاصل ضرب و حاصل جمع جذر های حاصل شده را مقایسه کنید.

(a) $3x^2-14x-4=0$; (b) $2x^2+7x+6=0$;

(c) $x^2-2x-9=0$; (d) $2x^2+9x+8=0$.

327- a) درمعادله $x^2+px-5=0$ که یکی از جذرهای آن مساوی
به 7 است جذر دیگرش را با ضریب p آن پیدا کنید.

b) درمعادله $x^2-13x+q=0$ که یکی از جذرهای آن مساوی به 12,5
است جذر دیگرش را باحد ثابت q آن پیدا کنید.

328. (a) درمعادله $5x^2+bx+24=0$ که یکی از جذرهای آن مساوی به 8 است جذر دیگرش را با ضریب b آن پیدا کنید.

b) درمعادله . $10x^2-33x+c=0$ که یکی از جذرهای آن مساوی 5 است جذر دیگرش را باحدثابت c آن دریافت دارید.

329 . (a) فرق جذر های معادلـه درجـه دوم $x^2-12x+q=0$ مساوی به 2 است قیمت حدثابت q آنرا پیدا کنید.

b) فرق جذرهای معادله درجه دوم $x^2+x+c=0$ مساوی به 6 است قیمت حد ثابت c آن را پیدا کنید.

330- نشان دهید که جذرهای هریك ازمعادله های زیر هم اشاره شده نمیتوانند :

(a) $3x^2+113x-7=0$; (b) $5x^2-291x-16=0$.

331 . درصورت موجودیت جذرها بدون حل، علامهٔ جذرهای هریك ازمعادله های زیر را تعین کنید .

(a) $x^2+7x-10=0$; (b) $x^2-7x+1=0$;

(c) $5x^2+17x+16=0$; (d) $19x^2-23x+5=0$;

(e) $2x^2+5.\sqrt{3}x+11=0$; (f) $11x^2-9x+7-5\sqrt{2}=0$.

332 - درزیر جذرهای معادله درجه دوم داده شده است، معادله مربوط آنها را ترتیب داده وحل کنید :

(a) 3 ; 10 (b) $-7;-4$; (c) $-\frac{5}{8}$; 3 ;

(d) 1,5;3,5 (e) $2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}$; (f) $-\sqrt{5}; \sqrt{5}$

333 .مساوی‌های زیر به کدام قیمت های x حقیقت دارد .

(a) $(3x+1)^2=3x+1$; (b) $(3x+1)^2=3(x+1)$;

(c) $(3x+4)^2=4(x+3)$; (d) $4(x+3)^2=(2x+6)^2$?

334 - نشان دهید که سیستم غیرمساوی های زیر حل ندارد .

(a) $\begin{cases} x+7<x+1 \\ 2-x>0 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} (x-2)^2<0 \\ x<1 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} |x|<3 \\ x>12 \end{cases}$

36 . معادله هایی که به‌شکل معادله‌های درجه‌دوم آورده میشوند.

ماطرز حل معادله های خطی ودرجه دوم یك متحوله راآموختیم، حل معادله های درجه دوم یك متحوله کـه درجه شان از 2 بزرگتر ومغلقتراست بعضی ازآنها را میتوانیم به فکتورهاتجزیه وحل کنیم.

مثلاً معادله مانند $x^3-9x=0$...I را،

طرف چپ این معادله رابه فکتورهاتجزیه کرده حل میکنیم :

$$x(x^2-9)=0$$
$$x(x+3)(x-3)=0$$

ست حله معادله(1) عبارت از $\{0;-3;3\}$ است، ولی برای حل بعضی ازمعادله هـا ازمیتود دیگری یعنی از وضع متحول جدیـد استفاده کرده میشود. با تطبیق این میتود حل معادله ها را ازنظرمیگذرانیم.

مثال 1 :میخواهیم که معادلهٔ (2) .... $(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)-216=0$ را حل کنیم .

حل :

یك خصوصیت خاص معادله (2) را یاد آورمیشویم که افاده

x^2-5x در طرف چپ آن دو مرتبه تکرار شده است (اولی آن مربع تام و دومی آن به نمای یك است) این خاصیت امکان آن را میدهد که $x^2-5x=y$ وضع نمایم که در اینصورت معادله (2) نظر به متحول جدید شکل:

$$y^2-30y-216=0 \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

را به خود میگیرد اکنون معادله (3) را حل نموده و جذرهای آن را به دست میاوریم.

$$D=b^2-4ac=(-30)^2-4\cdot1(-216)=900+864=1764$$

$$y_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{30-\sqrt{1764}}{2\cdot1}=\frac{30-42}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

$$y_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{30+\sqrt{1764}}{2\cdot1}=\frac{30+42}{2}=\frac{72}{2}=36$$

از اینجا حاصل شد که $y=-6$ و $y=36$ است.

پس ما نوشته کرده میتوانیم که $x^2-5x=36$ و $x^2-5x=-6$ میباشد.

در حقیقت اتحاد ستهای حله های معادله های $x^2-5x=36$ و $x^2-5x=-6$ ست حله معادله (2) میباشد.

هرگاه این دو معادله حل شود معادله اولی دارای جذرهای 2 و 3 و معادله دومی دارای جذرهای -4 و 9 است. در نتیجهٔ ست حلهٔ معادلهٔ (2) $\{2;3;-4;9\}$ است.

حالا ببینیم که اگر در وقت حل کردن معادله ما متحول جدید یعنی y را وضع نکنیم معادله چی شکلی را به خود میگیرد؟

یعنی طرف چپ معادله عبارت از کثیر الحده میباشند. در اینصورت

معادله شکل معیاری زیر را میگیرد:

$$x^4-10x^3-5x^2+150x-216=0$$

حل این نوع معادله مشکل است.

مثال 2: معادله (4)..... $4x^4-5x^2+1=0$ را حل کنید.

برای حل این معادله $x^2=y$ وضع نموده که معادله (4) نظر به متحول جدید y شکل $4y^2-5y+1=0$ را میگیرد.

این معادله را حل کرده میابیم که $y=\frac{1}{4}$ و $y=1$ است.

بنابر آن گفته میتوانیم که $x^2=\frac{1}{4}$ و $x^2=1$ میباشد.

حال آنکه ست حله $x^2=\frac{1}{4}$ عبارت از $\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\}$ و ست حله $x^2=1$ عبارت از $\{-1;1\}$ میباشد، پس اتحاد این ستها یعنی: ست $\{-1;1;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\}$ ست حله معادله (4) است.

معادلهٔ داده شده معادلهٔ درجه چارم است. این معادله شکل معادله $ax^4+bx^2+c=0$ را دارد. در اینجا $a\neq0$ بوده چنین معادله ها را به نام معادله های Biquadratic معادلهٔ درجه چهارم یاد مینمایند.

سوالات

335. با استفاده از وضع کردن متحول جدید هریك از معادله های زیر را حل کنید.

(a) $(5x+1)^2+6(5x+1)-7=0;$

(b) $(x^2-9)^2-8(x^2-9)+7=0\cdot$

(c) $(2a^2+3a)^2-7(2a^2+3a)=-10$;

(d) $(y^2+2y+4)^2-7(y^2+2y+4)+12=0$.

336. هر یك از معادله های درجه چهارم زیر را حل کنید.

(a) $x^4+x^2-2=0$; (b) $x^4-8x^2-9=0$;

(c) $y^4-7y^2-144=0$; (d) $36Z^4-13Z^2+1=0$;

(e) $16x^4-10x^2+1=0$; (f) $x^4+15x^2+5=0$;

(g) $y^4-8y^2+16=0$; (h) $6y^2+1=0$;

(1) $x^4+0,16x^2=0$; (j) $x^4-25x^2=0$.

337– نشان دهید که معادله $2x^4+3x^2+1=0$ جذر ندارد.

338– تابعهای زیر داده شده است مختصات نقاط تقاطع گرافهای هر یك از تابعها را با محورهای مربوط آنها در یافت کنید:

(a) $y=x^4-10x^2+9$; (b) $y=x^4-2x^2-3$;

(c) $y=x^4+2x^2+6$; (d) $y=x^4+36x^2$.

جدول جذرا: مربع اعداد از 1,5 الی 9,9 و از 10 تا 99.

برای دریافت جذر مربع اعداد که دارای دو رقم است لازم است. آنرا به شکل x یا 10.x بیاوریم و بعد جدول را استعمال کنیم. مثلاً:

$$\sqrt{320}=\sqrt{10^2\cdot 3,2}=10\cdot 1,789=17,89.$$

$$\sqrt{0,32}=\sqrt{10^{-2}\cdot 10\cdot 3,2}=10^{-1}\cdot 5,657=0,5657 .$$

جدول جذرالمربع اعداد از 1,0 تا 9,9 واز 10 تا 99

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
1,0	1,000	3,162	4,0	2,000	6,325	7,0	2,646	8,367
1,1	1,049	3,317	4,1	2,025	6,403	7,1	2,665	8,426
1,2	1,095	3,464	4,2	2,049	6,481	7,2	2,683	8,485
1,3	1,140	3,606	4,3	2,074	6,557	7,3	2,702	8,544
1,4	1,183	3,742	4,4	2,098	6,633	7,4	2,720	8,602
1,5	1,225	3,873	4,5	2,121	6,708	7,5	2,739	8,660
1,6	1,265	4,000	4,6	2,145	6,782	7,6	2,757	8,718
1,7	1,304	4,123	4,7	2,168	6,856	7,7	2,775	8,775
1,8	1,342	4,243	4,8	2,191	6,928	7,8	2,793	8,832
1,9	1,378	4,359	4,9	2,214	7,000	7,9	2,811	8,888
2,0	1,414	4,472	5,0	2,236	7,071	8,0	2,828	8,944
2,1	1,449	4,583	5,1	2,258	7,141	8,1	2,846	9,000
2,2	1,483	4,690	5,2	2,280	7,211	8,2	2,864	9,055
2,3	1,517	4,796	5,3	2,302	7,280	8,3	2,881	9,110
2,4	1,549	4,899	5,4	2,324	7,348	8,4	2,898	9,165
2,5	1,581	5,000	5,5	2,345	7,416	8,5	2,915	9,220
2,6	1,612	5,099	5,6	2,366	7,483	8,6	2,933	9,274
2,7	1,643	5,196	5,7	2,387	7,550	8,7	2,950	9,327
2,8	1,673	5,292	5,8	2,408	7,616	8,8	2,966	9,381
2,9	1,703	5,385	5,9	2,429	7,681	8,9	2,983	9,434
3,0	1,732	5,477	6,0	2,449	7,746	9,0	3,000	9,487
3,1	1,761	5,568	6,1	2,470	7,810	9,1	3,017	9,539
3,2	1,789	5,657	6,2	2,490	7,874	9,2	3,033	9,592
3,3	1,817	5,745	6,3	2,510	7,937	9,3	3,050	9,644
3,4	1,844	5,831	6,4	2,530	8,000	9,4	3,066	9,695
3,5	1,871	5,916	6,5	2,550	8,062	9,5	3,082	9,747
3,6	1,897	6,000	6,6	2,569	8,124	9,6	3,098	9,798
3,7	1,924	6,083	6,7	2,588	8,185	9,7	3,114	9,849
3,8	1,949	6,164	6,8	2,608	8,246	9,8	3,130	9,899
3,9	1,975	6,245	6,9	2,627	8,307	9,9	3,146	9,950

ز چشمها بیشتر آن دیدم که از دیده [illegible]
[illegible] پیشمانت به پیشانی [illegible] فشار است

ادیتور: دین محمد (مضطر)

رسام: سیدمحمد انور (نوری)

طبع اول

تعدادطبع (۳۹۰۰۰) جلد

دوره استهلاك (۵) سال

مطبعه تعلیم و تربیه