وزارت تعلیم و تربیه
ریاست تالیف و ترجمه

# الجبر

برای
صنف هفتم

مؤلفان : پوهنمل محمد امان نادری، عبدالبصیر بینا احمدزی، نظام الدین

۱۳۶۳

جمهوری دموکراتیک افغانستان

وزارت تعلیم و تربیه

ریاست تالیف و ترجمه

3/1/83

# الجبر

صنف هفتم

مؤلفان: پوهنمل محمد امان، نادری، عبدالبصیر، بینا احمدزی، و نظام الدین

۱۳۶۳

بسم الله الرحمن الرحیم

شاگردان عزیز !

انقلاب دوران ساز ثور که تحت رهبری حزب دموکراتیک خلق افغانستان پیروز گردید بر ضد زیربنای فرتوت و پوسیدهٔ نظام فیودالی وساختمانهای ناقص روبنای آن ازجمله روابط طبقاتی تعلیم وتربیه به مبارزه آغاز نمود . و برای ایجاد یک سیستم مترقی همگانی و انقلابی تعلیم و تربیه پیکار بی امان خواهد نمود .

رژیم انقلابی و دموکراتیک درهمه ساحه های زندگی جامعهٔ ماتحولات عمیق و بنیادی را بمیان خواهد آورد که در بخش تعلیم وتربیه برای نوسازی وشگوفانی فرهنگ و تربیت انسان نوین تحول بزرگ آموزشی وپرورشی را پیریزی نموده که از سرچشمه زلال انقلاب شکوهمند ثور آبیاری میشود .

شاگردان عزیز !

شما از سیستم تعلیمی جدید که براساس حاکمیت ملی جبهه وسیع پدروطن وبراساس ضرورتهای مادی ومعنوی مردم زحمتکش کشورطرح شده ودر کشور انقلابی وقهرمان خود استفاده میکنید .

عنوانها | صفحه

**فصل پنجم**

یک حدها و چند حدها

34- مفهوم عینیتها (مطابقتها) . . . . . ۱۵۸
35- مفهوم یک حدها . . . . . ۱۶۲
36- مفهوم چند حدها . . . . . ۱۶۴
37- رفع قوسها یا کشیدن از قوسها . . . . . ۱۶۸
38- وضع قوسها یا قوس گذاری . . . . . ۱۷۳
39- حاصل ضرب یک حدها در چند حدها (پولینومها) . . . ۱۷۵
40- تجزیه چند حدها به حاصلضرب قوسها . . . . . ۱۸۱
41- حل معادلات توسط تجزیه . . . . . ۱۸۷
حاصلضرب پولینومها
42- حاصلضرب دودو حده . . . . . ۱۹۰
43- تبدیل کردن پولینوم به حاصلضرب قوسها . . . . . ۱۹۵
مطابقتهای مشهور
44- حاصلضرب مجموع و تفاضل دو یک حده . . . . . ۱۸۹
45- مطابقت مربع یک مجموع یا تبدیل مربع یک مجموع به شکل پولینوم . . . . . ۲۰۵


# فصل اول

## مفاهیم اساسی

### افاد ها ، مساویها و نامساویها

### افاده ها و ساده ساختن آنها

1. افاد های عددی

افاده های عددیرا با استفاده از استعمال ارقام ، عملیه های ریاضی و قوسها نوشته میتوانیم .

درذیل نمونه های افاده های عددیرا ببینید:

(1) $15+17$ ; (2) $(1,5+3,5).2$ ;
(3) $64 \div 8^2$ ; (4) $(27-9) \div 15$ ;
(5) $(45 \div 5-9) \div 7$ (6) $(2+7) \div (3^2-9)$ .

آیا گفته میتوانید که درارایه هریك ازافاده های فوق کدام عملیه‌های ریاضی به کاربرده شده و چند مرتبه؟ اگر دقت کنید دیده

میشود که افـاده ( 1 ) محض حاصل جمع 15 و17 که عبارت از32
است میباشد. دزارا یه افاده ( 2 ) از دوعملیهٔ جمع وضرب و وضع
قوسین استفاده شده که بعد ازساده ساختن قیمت آن مساوی به 10
میشـود . آیـا میـدانیدکـه نـوشـتن افـاده ( 3 ) از
استعمال ضرب وتقسیم استفاده شده و در آن یك مرتبه عملیه ضرب
به کار برده شده و قیمت عددی آن مساوی به 1 میشود ؟ عملیه هاییرا
که درنوشتن افاده های ( 4 ) و( 5 ) به کاررفته نام بگیرید وقیمت
عددی آنها را حساب کنید .

آیا میدانیدکه درنشاندادن افاده ( 6 ) هرچارعملیهٔ فوق به کار
رفته ودر آن قوسین دومرتبه تکراراً واقع شده است ؟ اگر دقت
شود معلوم کردن قیمت عددی افاده ( 6 ) نامکن است . چرا ؟

طریق ساده ساختن هریك از افـادههـای ذیلـرا
ازنظر بگذرانید:

(1) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{9+10}{24}=\frac{19}{24}$ ;

(2) $3,7-4,2=-0,5$ ;

(3) $1,5\cdot(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}\cdot(\frac{3-2}{4})=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ ;

(4) $(2^3-8)\div 5=\frac{2.2.2-8}{5}=\frac{8-8}{5}=\frac{0}{5}=0$ ;

(5) $18\div(3.2^2-12)=\frac{18}{3.2.2-12}=\frac{18}{12-12}=\frac{18}{0}$



1. به سوالات ذیل جواب بگویید :

( a ) آیا افاده ( 5 ) فوق کدام قیمت مشخص دارد؟ شما عدد
18را بر صفر تقسیم کرده میتوانید؟ آیا تقسیم یك عدد بر صفر ممکن است؟

( b ) درحل افا ده ( 4 ) فوق به جای $2^3$ عدد2.2.2 که عبارت
از 8 میشود نوشته شده است . چرا ؟

( c ) آیا قیمت عددی افـادهٔ $(9-5\div 45)\div 42$ را پیدا کرده
میتوانید؟ چرا؟

> عددی که بعد ازاجرای عملیه های یك افاده عددی
> حاصل میشود قیمت عـددی آن افـاده ویـا بـه صورت
> مختصر قیمت آن نامیده میشود .

از حل مثال فوق میتوانیم بگوییم که :

> ( 1 ) یا قیمت عددی یك افاده عبارت از یك عدداست،
> ( 2 ) یا یافتن قیمت عددی یك افاده ناممکن است .

2. افاد ههای ذیلرا ساده کنید :

(a) $\frac{5}{3}+2\frac{1}{4}$ ; (b) $3\frac{1}{2}-5\frac{3}{4}$ ; (c) 2.3,7;

(d) $2\frac{1}{3}-1\frac{5}{6}$ ; (e) $3\frac{5}{8}\cdot 1\frac{3}{5}$ ; (f) $5.3^2$;

(j) $3^2\cdot 2^3\div 72$ ; (h) $\frac{(1,5)^2}{1}\cdot\frac{1}{5}$ ; (i) $2\div\frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^2$ .

3. قیمت عددی افاد ههای ذیلرا حساب کنید :

(a) $1\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}$ ; (b) $\frac{4}{9}.(3\frac{1}{2}+1)$ ; (c) $1\frac{7}{8}\div(1\frac{1}{4}-\frac{3}{4})$ ;

(d) $4-1\frac{7}{9}$ ; (e) $\frac{3}{7}\div(12-1\frac{1}{7})$ ; (f) $-\frac{8}{11}.5$ ;

(g) $\frac{5}{8}.(-\frac{4}{15})$ ; (h) $\frac{27}{29}\div(\frac{63}{58})$ ; (i) $\frac{3}{7}.(6,3)$ ;

(j) $(1,4)\div\frac{3}{7}$ ; (k) $(8,1)\div 0,9+1$ (L) $\frac{5}{9}\div(-\frac{25}{49})$ .

4. طاقتهای ذیلرا ساده کرده و قیمت عددی آنها را محاسبه کنید :

(a) $3^2$ ; (b) $(0,3)^2$ ; (c) $(\frac{3}{4})^3$ ;

(d) $(1\frac{1}{2})^2$ ; (e) $2^3$ ; (f) $(0,02)^3$ ;

(g) $12^3$ ; (h) $(1,2)^3$ ; (i) $(0,75)^3$ ;

(j) $3^4$ ; (k) $4^4$ ; (L) $(\frac{3}{4})^4$.

5. کدام یك از روابط ذیل صحیح و کدام آنها غلط است :

(a) $8\frac{2}{3}\div 4\frac{1}{3}-5<-10$ ; (b) $2\frac{1}{2}\div\frac{5}{8}=4$ ;

(c) $44^2\div(12,3+1,7)=105$ ; (d) $(15,8-1,2)\div 17>3.10$ ;

(e) $3\frac{1}{8}.(1\frac{1}{4}+\frac{1}{4})<6$ ; (f) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}).4\frac{4}{5}<\frac{1}{2}$ ;

(g) $(3^2-2^3).54$ ; (h) $5^2.2^3=200$ ?

6. قیمت عددی افاد ههای ذیلرا با هم مقایسه کنید :

(a) $2^3$ و $3^2$ را ، (b) $3\frac{1}{2}\div 1\frac{1}{6}$ و $27\div 9$ را ،

(c) $81\div 3$ و $3^2$ را ، (d) $(1,1)^2$ و $12,1$ را ،

(e) $2.5^3$ و $5.2^2$ را ، (f) $(10)^2$ و $(1,0)^2$ را ،

(8) $(1,01)^2$ و $(10,1)^2$ را ، (c) $3\frac{1}{2}$ و $2\frac{1}{2}$ را.

7. قیمت عددی هر یك از افاد ههای ذیلرا به دست آرید :

(a) $4(4-4)=$ ; (b) $4\div 4+4\div 4=$ ; (c) $(4+4+4)\div 4=$ ;

(d) $4-\frac{4}{4}=$ ; (e) $4.\frac{4}{4}=$ ;

(f) $4+\frac{4}{4}=$ ; (j) $4+(4+4)$ ; (h) $4+4-\frac{4+4}{4}$ ;

(i) $4+4+\frac{4}{4}$ .

8. (a) یك افاده عدیرا بنویسید که قیمت عددی آن 1 گردد .

(b) یك افاده عددیرا بنویسید که حل قیمت عددی آن ناممکن باشد.

(c) یك افاده عدیرا بنویسید که قیمت عددی آن 2— باشد .

(d) با استفاده از دو عملیه جمع و تفریق افاد ههای عددیرا بنویسید که قیمت عددی آنها مساوی به اعداد ذیل گردد :

(a) —12 ; (b) 1,5 ; (c) 0 ; (d) 0,75.

(e) با استفاده از دو عملیه ضرب و تقسیم افاد ههای عددیرا بنویسید که قیمت عددی آنها مساوی به اعداد ذیل شود :



(a) $-1$ ; (b) $\frac{3}{2}$ ; (c) $1\frac{3}{5}$ ; (d) $1,25$.

9. کدام یك از افاد ههای زیر معنی ندارد :

(a) $\frac{3,155}{(1,1)2-1,21}$ ; (b) $\frac{4\frac{2}{3}-2\left(\frac{7}{3}\right)}{0,25-1\frac{1}{4}+1}$ ;

(c) $\frac{2,5-\frac{5}{2}}{(1,8)^2-(18)^2}$ (d) $\frac{5\frac{1}{2}+3,5}{(2+1)(2-1)-3}$.

10 . هرجوره از افاد ههای ذیل را باهم مقایسه کرده و به صورت شفاهی جواب بگویید :

(a) $\frac{2}{25}$ و $\frac{125}{1}$ ،

(b) $(1,01)^2$ و $(01,1)^2$ را ،

(c) $5,2\div\left(-\frac{1}{52}\right)$ و $5,2\div\left(\frac{1}{52}\right)$ را ،

(d) $\left(\frac{12}{2}\right)^2$ و $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ را ،

(e) $2\cdot 5,2$ و $10,4$ را .

## سوالات تکراری .

11 . لااقل یك عددیرا که در بین هرجوره از افاده‌های ذیل واقع گردد پیدا کنید :

(a) در بین 5,2 و 5,1 ; (b) در بین 1,1 و $-1,1$ ;



(c) در بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ ; (d) در بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{10}$ ;

(e) در بین $\frac{17}{35}$ و $\frac{4}{7}$ ; (f) در بین 0,21 و $-0,22$ ;

(g) در بین $\frac{12}{16}$ و $\frac{6}{8}$ .

12 . (a) روی مستوی کمیات وضعیه دومحور x و y را که باهم عمود باشند رسم کنید .

به کمك این دومحور نقاط $A(0;-3)$ ، $B(-2;1)$ ، $C(5;2)$ ، $D(-3;-4)$ و $E(6;0)$ را دراین مستوی تعیین کنید .

(b) نقاط A ; B ; D ; E و F فوقرا به اندازه 5 واحد به طرف راست موازی به محور x انتقال داده ومختصات جدید نقاط مذکور را حساب کنید .

(c) نقاط مذکوررا به اندازه چار واحد به طرف پایین موازی به‌محور y انتقال‌داده ومختصات جدید نقاط مذکوررامحاسبه کنید.

## 2- افاد ههای متحولدار یا افاد ههای الجبری

افاد ههای $4(2-4)$ و $x(2-x)$ را در نظر گرفته و بگویید که این دوافاده ازهم چی فرق دارند ؟ قیمت افادهٔ $4.(2-4)$ عبارت از 8 است زیرا : $4(2-4)=4(4)=8$ آیا قیمت عددی افاده $x.(2-x)$ نیز همیشه 8 است ؟

شما میدانید که افادهٔ $4.(2-4)$ یك افادهٔ عددی‌بوده وقیمت آن

یك عدد ثابت یعنی 8 است ولی افاده $x.(x-2)$ یك افاده عددی نیست زیرا در آن متحول x موجود است. نظر به قیمتهای مختلف متحول قیمت افادهٔ مذکور تغیر پذیر است.

اینك نظر به چند قیمت مختلف متحول x ما چند افادهٔ عددی مربوط آنرا با قیمت هریك آنها در جدول ذیل مطالعه میکنیم.

| قیمت‌های مختلف x | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| افاده مربوطه افاده $x.(x-2)$ | $-2.(-2-2)$ | $-1.(-1-2)$ | $0(0-2)$ | $1.(1-2)$ | $2.(2-2)$ | $3.(3-2)$ |
| قیمتهای مربوط افادههای فوق | 8 | 3 | 0 | −1 | 0 | 3 |

ازمطالعهٔ جدول فوق فهمیده میشود که نظر به قیمتهای مختلف متحول x از افاده $x.(x-2)$ افاده‌های عددی مختلفی که قیمتهای آنها از هم متفاوت است حاصل میشود. حال اگر به جای x در افاده مذکور 4 نوشته شود افادهٔ $4.(4-2)$ فوق که قیمت آن 8 است حاصل میشود. از توضیحات فوق برمی آید که:

افاده $x.(x-2)$ یك افاده متحولدار یا افاده الجبری بوده و نظر به قیمتهای مختلف متحول x قیمتهای مختلفرا به خود میگیرد.



> افاده یی که در آن یك و یا چند متحول موجود باشد به نام افاده الجبری یاد میشود.

بنابر تعریف فوق آیا گفته میتوانید که افاده $2.x+y$ یك افاده الجبری است؟

افاده مذکور دارای چند متحول است؟ آنها را نام بگیرید.

ما میخواهیم که با قیمت $x=1$ و $y=3$، قیمت افاده $2.x+y$ را حساب کنیم.

$$2.x+y=2.1+3=2+3=5$$

حال با قیمت $x=1$ و $y=2$ قیمت افادهٔ مذکور را حساب میکنیم.

$$2.x+y=2.1+2=2+2=4$$

از حل افاده فوق چنین نتیجه میشود:

> قیمتهای یك افادهٔ الجبری مربوط به قیمتهای هریك ازمتحولهای آنست.

چنانچه افاده $2.x+y$ نظر به دو قیمت مختلف $y=3$ و $y=2$ درحالی که در هر دو صورت قیمت $x=1$ ثابت است افادهٔ مذکور دو قیمت مختلف 5 و 4 را انتخاذ میکند.

بعضی ازافادههای جبری نظر به بعض قیمتهای متحول و یا متحولهای خود دارای معنی نمیباشد. بطور مثال اگر افادهٔ $\frac{3.x}{x+2}$ مدنظر گرفته شود دیده میشود که با قیمت $x=-2$ افاده مذکور به

افادهٔ عددی $\frac{3.(-2)}{-2+2}$ تبدیل میگردد که آن عبارت از $\frac{-6}{0}$ میشود

ویك افاده بی‌معنی است . چرا ؟

به همین قسم افادهٔ جبری $\frac{x+2y}{x-y}$ با قیمت $x=y$ دارای کدام مفهوم (معنی) نیست چرا ؟

## سوالات

(13) آیا گفته میتوانید که نظر به کدام شرط افاده $\frac{5}{y+x}$ دارای هیچ مفهوم نمیباشد ؟

(14) آیا میدانید که افادهٔ $\frac{x}{y+5}$ بنابر کدام شرط دارای مفهوم بوده نمیتواند ؟

(15) بنابر قیمتهای داده‌شده متحولهای مربوط قیمت هریك از افاده‌های ذیلرا حساب کنید :

( a ) اگر $x=4$ باشد قیمت افادهٔ $(x+3).(x-3)$ را ،

( b ) اگر $y=0,2$ باشد قیمت افادهٔ $(y+0,1).(y-0,1)$ را ،

( c ) اگر $x=1,5$ باشد قیمت افادهٔ $(x+0,5).(x-\frac{3}{4})$ را ،

( d ) اگر $q=1$ و $p=\frac{1}{2}$ باشند قیمت افادهٔ $2p+p(q-2p)$ را ،

( e ) اگر $a=2, b=3$ و $c=-1$ باشند قیمت افادهٔ $a+2b+3c$ را ،

( f ) اگر $x=-1, y=3$ باشند قیمت افادهٔ $3x^2-2y$ را .



(16) نظر به قیمت $x=-1$ و $y=2$ قیمت افاده‌های ذیلرا محاسبه کنید:

(a) $3x-2.(x+y)$ ; (b) $1+3x.(y+2x)$ ;

(c) $(3y-2x)\div(x+y)$ ; (d) $x+3y.(y-x)$ .

(17) به کدام قیمت یا قیمتهای a و b قیمت هریك ازافاد همهای ذیل صفر میشود :

(a) $2.a+a(3-a)$ ; (b) $(a+2).(a-2)$ ;

(c) $(5+b).(b-4)$ ; (d) $(a-3)(b+2a)$ ;

(e) $(a+\frac{1}{3}).(b-1)$ ; (f) $(a-b)(b+c)$ ?

(18) نظر به کدام قیمتهای متحول مربوط آن هریك ازافاده‌های ذیل صفر میشود :

(a) $(2x-1).x$ ; (b) $a+(a-1).2$ ;

(c) $(4-a).b$ ; (d) $2x+3y-1$ ;

(e) $2y-3y+5$ ; (f) $5z+2z-y$ ?

(19) بنابر کدام قیمتهای x و y افاده های ذیل بی معنی میشود:

(a) $\frac{x+2}{x-2}$ ; (b) $\frac{x+3y}{3y-x}$ ;

(c) $y-(2x+3)$ ; (d) $x\div(x^2-4)$ ;

(c) $2.x\div(x^2-9)$; (f) $(4y-3x)\div(2y-1)$ ?

(20) (a) باقیمت $x=-2$ قیمت هردو افاده ذیلرا حساب کنید :

(1) $2x-5.(4x+3)$ ; (2) $4x-3(2x+3)$.

(b) کدام عناصر ست $A=\{0;4;8;12;16;20;24\}$ در بین قیمتهای حاصل شده افاد همهای فوق وجود دارد ؟

21 . قیمت افاده $a^2-2ab+b^2$ را بنابر قیمتهای a و b که در ذیل داده شده محاسبه کنید : (a) $a=-3$ و $b=5$; (b) $a=5$ و $b=-3$

آیا در هر دو حالت قیمتهای افادهٔ مذکور باهم مساوی است ؟

22 . جدول ذیلرا نقل وخانه پری کنید :

| x | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x^2-x}{5}$ | $\frac{6}{5}$ | | | 0 | | | | 4 | |

23 . (a)اگر مساحت یك مربع به S وطول ضلع آن به a نشان داده شود شما افادهٔ جبریرا ترتیب دهید که رابطه بین طول ضلع و مساحت آنرا ارائه کند .

(b) نظر به قیمتهای مختلف طول ضلع مربع را (به سانتیمتر) ومساحت آنرا (به سانتیمرمربع) حساب کرده وجدول ذیلرا تکمیل کنید :

| طول ضلع | a | 0,5 | $\frac{2}{3}$ | 3,2 | 5,7 | 11,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مساحت | S | | | | | |

24 . (a) افادهٔ ترتیب دهید که رابطه بین طول ضلع وطول محیط یك مربعرا ارائه کند.

(b) درجدول ذیل طول ضلع مربع به a وطول محیط آن به p نشان داده شده جدولرا نقل وتکمیل کنید :



| طول ضلع | a | 2,125 | $2(m+1)$ | $11\frac{3}{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| طول محیط | p | | | |

25 . درصورت امکان درهریک از افادههای ذیل آن قیمتهای x و y را تعیین کنید تاافاده مربوطرا بی معنی سازد .

(a) $\frac{15}{x(6-x)}$ ; (b) $\frac{x+y}{x-2}$ .

26 . شفاهی جواب بگویید. نظر بکدام قیمت متحول هریک از افادههای ذیل (a) بی معنی میشود ، (b) صفر میشود:

(1) $\frac{2x-4}{x-1}$ ; (2) $\frac{3y+9}{2y+8}$ ?

توجه ! ما میدانیم که اگر در افاده $\frac{5}{x-y}$ قیمتهای x و y باهم مساوی گردند دراین حالت مخرج افادهٔ مذکور صفر میگردد وتقسیم کردن عدد 5 پر صفر بی معنی است .

پس برای اینکه افادهٔ مذکور بی معنی نگردد ضروریست تا $x\neq y$ باشد. اگر ست قیمتهای افادهٔ مذکور رابه A نشان دهیم دراین حالت $A=\{(x\,;\,y)|x\neq y\}$ میباشدو چنین خوانده میشود : «A ست جورههای مرتبی است طوریکه در آن x مساوی به y نیست .»

27 . کدامین جورههای مرتب $(5\,;\,2)$ ; $(2\,;\,7)$ ; $(3\,;-1)$ ; $(\frac{1}{5}\,;-\frac{1}{2})$ ; $(\frac{1}{9}\,;-\frac{1}{7})$ ; $(0\,;-5)$ ; $(\frac{1}{8}\,;-0)$ ;

$B=\{(x;y)\mid x<y\}$ عنصرست $(-7;-0,1)$ ؛ $(5;1,171)$ ؛ $(-\frac{1}{6};\frac{3}{8})$

شده میتواند ؟

28 . دو نفرمسافر یکی با بایسکل ودیگرش بامو تر به ساعت 8 بجه صبح از کابل به طرف چاریکارحرکت میکنند . اگر سرعت متوسط بایسکل 24 کیلومترفی ساعت و ازموتر 52 کیلومترفی ساعت باشد درساعت 30 : 9 فاصله بین آنها چند کیلومتر خواهد بود ؟

29 . ست قیمتهای افادهٔ $x^2-9$ را دریابیددرصورتی که $x\varepsilon\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ باشد .

30 . ست قیمتهای افادهٔ $2x-3y$ را دریابید در صورتی که $(x;y)\varepsilon\{(2;5);(3,2);(0;1);(4;2)\}$ باشد .

31 . شکل لست وار هریک ازستهای ذیلرا بنویسید :

(a) $A=\{x\mid x\varepsilon\mathbb{N}\,;\,x<7\}$ در حالی که $\mathbb{N}$ ست اعدادطبیعی است .

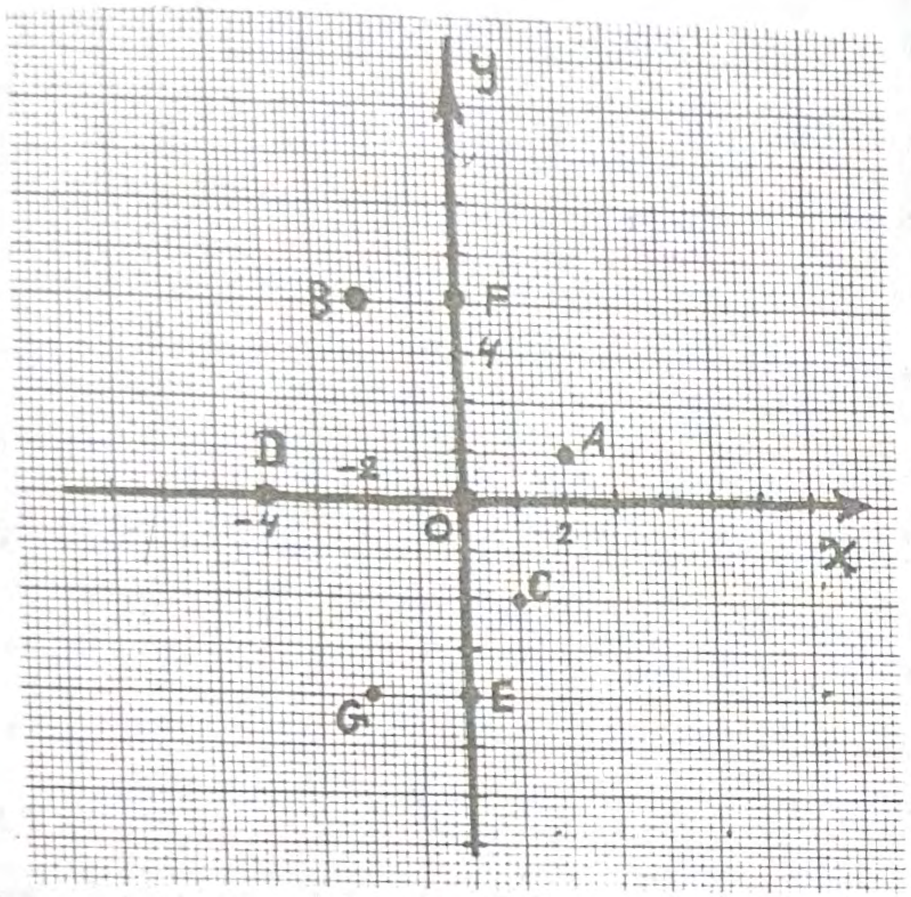
(b) $B=\{x\mid x\varepsilon I-4<x<5$ در حالی که I ست اعداد تام است .

(c) $C=\{y\mid y\varepsilon\mathbb{N}$ y قاسم 24 است$\}$ درحالی که y اعدادتام اند.

32 . (a) درشکل(۱) کمیات وضیعه نقاط : F,E,D,C,B,A و G را تعیین کنید .

(b) مساحت شکل چارضلعیرا کـه از وصل کردن نقاط G,B,F و E حاصل میشود حساب کنید .






شکل ( 1 )

(c) اگر نقاط A;B;C;D;E;F و G به اندازه 2 واحد به طرف راست ( مثبت ) موازی به محور y انتقال داده شوند کمیات وضعیه جدیدنقاط مذکوررا حساب کنید .

(d) نقاط A ; B ; C ; D و E را به اندازه یک واحد به طرف پایین ( منفی ) موازی به محور x حرکت داده و کمیات وضعیه جدید آنها رامحاسبه نمایید .

33 . حساب کنید :

$$(a)\ \frac{47\cdot7\,,2}{15}\ ;\ (b)\ \frac{29\,.\,48}{12:4}\ ;\ (c)\ \frac{0\,,27\,.\,23}{9}$$

34 . جدول ذیلرا نقل کرده وتکمیل کنید :

| (a ; b) | $a^2-b^2$ | a − 2b | b − 2a | 2a + b | 3a − b |
|---|---|---|---|---|---|
| (2 ; 1) | | | | | |
| (3 − 1) | | | | | |
| (−1 ; 4) | | | | | |

## 3 . بیانیه های محتو لدار :

ما میدانیم که یک بیانیه یا صحیح میباشد یا غلط . مثلاً اگر گفته شود : « شهر کابل در کنار رود هلمند واقع است . » این بیانیه از نگاه مفهوم غلط است . اما اگر بگوییم که : « شهر لشکر گاه در کنار رود هلمند واقع است . » این یک بیانیه صحیح است زیرا در بیانیه اول کابل در کنار رود هلمند واقع نیست ولی در بیانیه دوم شهر لشکر گاه در کنار رود هلمند واقع است . به همین قسم بیانیه : « 15<12 » ریاضی غلط است ولی بیانیه « 15 > 12 » آن یک بیانیه صحیح است .

یک بیانیه میتواند که یا صحیح باشد یا غلط ولی نمیتواند که همزمان هم صحیح باشد وهم غلط .

بیانیهٔ « x یک شهر اروپایی است . » را مدنظر بگیرید . این بیانیه نظر به بعضی کلماتی که به جای x در آن نوشته شود صحیح است . و نظر به بعضی کلمات دیگری که به جای x در آن نوشته شود غلط



است . مثلاً اگر کلمهٔ های : ماسکو . پاریس و پراگ به جای x در آن نوشته شوند بیانیه صحیح است . ولی اگر کلمه های کابل . دهلی توکیو و تاشکند در آن نوشته شوند بیانیهٔ حاصله از نظر مفهوم غلط میباشد .

به همین قسم در بیانیهٔ متحولدار $2x+1<7$ اگر بجای x قیمتهای کمتر از 3 را انتخاب کنیم بیانیه های جدیدی که حاصل میشود صحیح اند ولی اگر به جای x قیمت 3 و زیادتر از 3 را انتخاب نمایم بیانیه های حاصل شده غلط میباشند .

برای فهمیدن صحت یک بیانیهٔ متحول دار (جبری) نظر به یک عدد ، ما به جای متحول ، عدد مطلوب را گذاشته واز نتیجهٔ ساده کردن آن درستی آنرا قضاوت میکنیم .

یک بیانیه جبری میتواند که بیش از یک متحول داشته باشد . مثلاً بیانیه جبری ویامساوات $2x-3y=1$ دارای دو محتول x و y میباشند . دیده میشود که مساوات مذکور باقیمتهای :

$(x;y)\varepsilon\{(-1;-1);\ (0;-\frac{1}{3});(\frac{1}{2};0)\}$ صحیح است .

زیرا باقیمت $(-1;-1)$ بیانیه $2x-3y=1$ مساوی به 1 میگردد .

زیرا : $2(-1)-3(-1)=-2+3=1$

که یک بیانیهٔ صحیح است تبدیل میشود ، ولی باقیمتهای

$(x;y)\varepsilon\{(-2;-1);(0;1);(2;5)\}$

بیانیه مذکور غلط است . زیرا باقیمت $(-1;-2)$ بیانیهٔ $2x-3y=1$ قیمت منفی یک را که خلاف 1 است اتخاذ میکند ، حالانکه این یک بیانیه غلط است .

شما چند قیمت دیگر $(x;y)$ را انتخاب کنید تا بیانیهٔ مذکور را صحیح سازند : به همین قسم نا مساوی $a > 4.b$ دارای دو متحول a و b میباشد. این نا مساوی نظر به بعضی قیمتهای $(a;b)$ به طور مثال $(1;5)$ به یک بیانیهٔ صحیح تبدیل میگردد ولی بنا بر بعضی قیمتهای دیگر $(a;b)$ مثلاً به قیمت $(2;-1)$ به یک بیانیه غلط تبدیل میشود . زیرا با قیمت $(1;5)$ بیانیه $a > 4.b$ به بیانیه $(1) . 4 > 5$ که صحیح است تبدیل میگردد . ولی با قیمت $(2;-1)$ بیانیهٔ $a > 4.b$ به بیانیهٔ $4.2 > -1$ یا $8 > -1$ که یک بیانیهٔ غلط است تبدیل میشود:

شما چار قیمت دیگر $(a;b)$ را انتخاب کنید که دوی آنها نا مساوی $a > 4b$ را به یک بیانیه صحیح و دوی دیگر آنها آنرا به یک بیانیه غلط تبدیل سازند .

سوالات

35 . کدام یک از بیانیه های ذیل صحیح است ؟

(a) کسر $\frac{19}{95}$ اختصار پذیر نیست. یعنی ساده ترشده نمیتواند.

(b) کندهار به طرف شمال کابل واقع است .



(c) عدد 09 ، 18 بین اعداد 17 و 19 واقع است .

(d) حاصل ضرب $(0,25)$ و $(0,2)$ کمتر از حاصل جمع آنهاست .

36 . کدام یک از بیانیه های ذیل غلط است :

(a) $\frac{1}{2} \div 4 . = 2$ ; (b) $-1 > -9$ ; (c) $\frac{30}{2} \div 15 = 1$ :

(d) $\frac{5}{8} > \frac{6}{5}$ ; e) $\frac{3}{4} > -\frac{4}{3}$ ?

37 صحیح یا غلط بودن هر یک از بیانیه های ذیل را نشان بدهید:

(a) $5\frac{1}{2} - \frac{1}{2} . (4\frac{3}{4} + \frac{1}{4}) = 3$;

(b) $6 \div 9 + \frac{7}{9}$ ; $(2 - \frac{6}{3}) > \frac{1}{2}$ .

38 . آن ستهای فرعی ( سب ستهای ) ست

$A = \{9 ; -6 ; -3 ; -1 ; 0 ; 5 ; 8 ; 9 ; 18\}$ را تعیین کنید که اگر عناصر آن به جای x وضع شود

(a) افادهٔ $\frac{54}{x}$ را یک عدد تام بسازد.

(b) بیانیهٔ $\frac{2}{x} - 26 < 0$ را تحقق کند ( حقیقت بسازد ) .

(c) بیانیهٔ $11 . x + 37$ را مثبت بسازد .

39 . در هر یک از بیانیه های ذیل لااقل یک قیمت برای y طوری انتخاب کنید که شرط هر یک آنها را تحقیق کند .

(a) افاده $5+\frac{y}{3}$ را یک عدد تام سازد،

(b) افاده $\frac{5}{y}$ را یک کسر ساده ( اختصار ناپذیر ) سازد .

40 . درصورت صحیح بودن بیانیه ستون حرف (ص) جدول را و درصورت غلط بودن آن ستون حرف ( غ ) آنرا نشانی کنید .

| (x,y) | $2x-3y=5$ | صحیح ص | غلط غ |
|---|---|---|---|
| (−2 ; 5) | $2.(-2)-3(5)\neq 5$ | | ✓ |
| (−2 ; −3) | $2.(-2)-3(-3)=5$ | ✗ | ✓ |
| (0 ; −1) | $2.(0)-3(-1)=-3$ | ✓ | ✗ |
| (1 ; −1) | $2.(1)-3(-1)=-5$ | ✗ | |
| (2 ; 0) | $2.(2)-3.(0)=11$ | ✗ | |
| (7 ; 3) | $2.(7)-3(3)=5$ | ✓ | |

41 . ازست اعداد طبیعی N لااقل یک جوره مرتب ( x،y ) را طوری انتخاب کنید که بیانیه های ذیلرا حقیقت بخشند :

(a) x قاسم y است،

(b) y مضرب x است،

(c) $3x+11y>100$ گردد .



42 . کدام یک ازقیمتهای ذیل جورهٔ مرتب (x;y) :

(a) (15;3) ; (b) (0 − 1) ; (c) (8;5) ; (d) (2;4) ;
(e) 3;0) ; (f) (7;−7) ; (g) (1،5)

بیانیه های زیر را تحقق میکند :

(a) x قاسم y است ،

(b) xمضرب y است ،

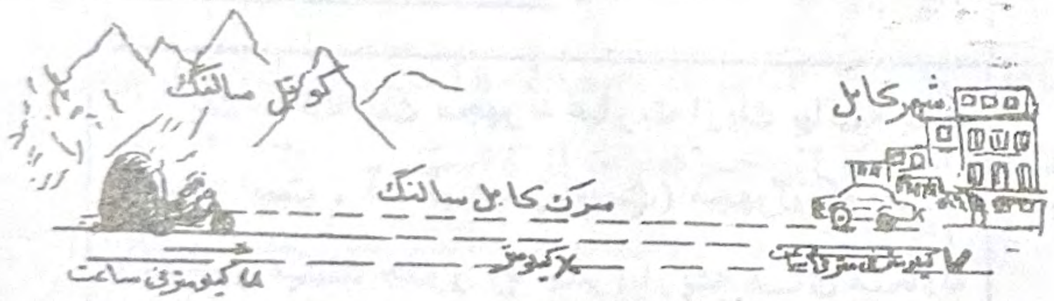
(c) x کمتر از y است ،

(d) xزیادتر از y است .

43 . افاده‌ههای ذیلرا بنا بر قیمت متحولهای مربوط آنها ساده کرده وقیمت آنها را حساب کنید :

(a) باقیمت $x=-3$ افادهٔ : $(3x+2)-(1-2x)$ را ،

(b) باقیمت $y=0,1$ افادهٔ: $(2y+0,8)+(1,1-y)$ را .




شکل ( 2 )

44 . در شکل 2 موتر و موتر سایکل در یک وقت مقابل هم حرکت میکنند.

(a) بنابر شکل فوق افاده ای ترتیب دهید تا به اساس آن وقت به هم رسیدن موتر و موتر سایکل افاده گردد .

(b) اگر سرعت موتر 54 کیلومتر فی ساعت واز موتر سایکل 22 کیلومتر فی ساعت باشد و بعد از 1:30 ساعت سفر باهم برسند فاصلهٔ بین کابل وسالنگ را حساب کنید .

(c) اگر سرعت موتر 38 کیلومتر فی ساعت واز موتوسایکل 19 کیلومتر فی ساعت باشد و فاصله بین سالنگ و کابل 114 کیلو متر باشد وقتیرا که آنها باهم میرسند محاسبه کنید .

(b) سرعت موترسایکل را حساب کنید درصورتی که سرعت موتر 76 کیلومتر فی ساعت و فاصله بین کابل و سالنگ 114 کیلو متر و وقت سفر آنها 1 ساعت باشد.

## 4 . معادلات یك مجهوله

یك معادله یك مجهوله عبارت ازیك بیانیه یك متحوله است . آن قیمتها (یاقیمت) مجهول که معادله را تحقیق میکنند جذور (یا جذر) یا ریشه های معادله نامیده میشوند .

حل یك معادله عبارت ازطریق یافتن ست جذور (جذر) همان معادله است .



یك معادله یك مجهوله میتواند که دارای یك ، دویاچندین جذر باشد .

هرمعادله یی که به شکل $ax=b$ باشد به نام معادله خطی یاد میشود. دراین معادله قیمت مجهول x بنابر قیمت دوعددجبری a و b حساب میشود. برای اینکه این معادله معنی داشته باشد باید که $a\neq o$ باشد.

در فصلهای مابعد در بارهٔ معادلات خطی مفصلاً صحبت خواهیم کرد. اینك درذیل ماحالات مختلف معادله های خطی $ax=b$ رامناقشه مینماییم .

(1) در معادله $ax=b$ اگر a و b خلاف صفر باشنددراین حالت حل معادله $x=\frac{b}{a}$ بوده ومعادله دارای یك جذرمشخص است. مانند معادله $9x=36$ که در آن $b=36,a=9$ است و دارای یك جذر مشخص است که این جذرعبارت از 4 است .

(2) اگر $a\neq o$ و $b=o$ باشد دراین حالت معادله مذکور دارای یك جذر که آنهم عبارت از صفراست میباشد . به طور مثال معادله $3x=o$ که دراین معادله $b=o,a=3$ میباشد . از مطالعه حقیقت $3.o=o$ واضح است که جذر معادله مذکور عبارت از o است .

(3) اگلون حالتیرا که در آن $a=0$ وهم $b=0$ باشد مطالعه میکنیم.
دراین حالت معادله $ax=b$ به معادله $0.x=0$ تبدیل میشود.
مامیدانیم که برای هرقیمت x مساوات $0.x=0$ حقیقت دارد.
پس دراین حالت تمام اعداد حقیقی عناصر ست حله معادله مذکور
شده میتوانند.

(4) اگر $a=0$, $b\neq 0$ باشد دراین حالت معادله مذکور شکل $0.x=b$
را به خود میگیرد. به طور مثال: $0.x=7$ ازاین جاد یده میشود
که اگرما به جای x هرعددی را که وضع کنیم چون طرف چپ
مساوات ضرب صفر میشود همیشه صفر میباشد وحالانکه طرف
راست آن عدد 7 است. ازینکه هیچگاه عدد صفر مساوی به 7 شده
نمیتواند، بنأ گفته میتوانیم که چنین معادله موجود شده نمیتواند.
علاوه بران مامیدانیم که اگر به حل معادله $x=\frac{b}{a}$ که در آن $b=0$
و $a=0$ گذاشته شود دراین حالت $x=\frac{b}{0}$ میگردد وواضحست که
تقسیم کردن یک عدد برصفر بی معنی است. پس میگوییم که در
حالت $a=0$ معادله $ax=b$ حل نداشته وست حله آن ست خالی است.

45. هریک از معادلات ذیلرا حل کنید:

(a) $3x-21=0$ ,  (b) $4,1x=-12,3$,

(c) $3\frac{1}{2}x=\frac{4}{7}$ ,  (d) $2,1y=0$.



46. معادلات ذیلرا حل کنید:

(a) $3x+5=4x-1$ ,  (b) $2,7y-2=4-0,3y$,

(c) $2,12x=1,12x+5$ ,  (d) $1,5x-7,5=0,4x+0,5$,

(e) $4y=3y$  (f) $4,1k-1=4,1k+15$.

47. ست حله هریک از معادلات ذیلرا حاصل کنید:

(a) $2(x-1)+5x-4=3(x-5)+1$ ,

(b) $8(x-7)-3(2x+9)=15$

(c) $3y-5(2-y)-54=0$ .

48. (a) بنا بر کدام قیمت p قیمت افاده $4p+1$ وقیمت افادهٔ $4p-1$ باهم مساوی میشوند؟

(b) بنا بر کدام قیمت x قیمت افادهٔ $3x+15$ وقیمت افادهٔ $3x+15$ باهم مساوی میشود؟

49. با کدام قیمت x قیمت افاده $6x-12$ از قیمت افادهٔ $17-2x$ به قدو 6 زیادتر میباشد؟

50. با کدام قیمت y قیمت افاده $y+4$ از قیمت افاده $3y-2$ به اندازه دو کمتر میباشد؟

51. معادلات ذیلرا حل کنید:

(a) $x\div 5=3\div 35$ ,

(b) $10,8\div 1,2=x\div 13,6$,

(c) $6\frac{1}{2}\div 3\frac{1}{4}=p\div 2\frac{1}{3}$.

52. جذور معادلات ذیلرا پیدا کنید:

(a) $5x+12x=41+5x$ ,

(b) $3(x-15)=3x+15$ .

53 . طول محیط یک مثلث مساوی الساقین 288 سانتی متر است . اگر درازی یک ساق آن از درازی قاعده اش 15 سانتی متر زیادتر باشد طول هرضلع آنرا حساب کنید .

سوالات برای تکرار :

54. عدد یرا پیدا کنید که حاصل جمع آن با نصف آن و ثلث یعنی $\frac{1}{3}$ آن مساوی به 22 گردد ؟

55. دریك مطبعه 1600 نفر روزانه به سه تایم (وقت) کار میکنند . اگر تعداد کارگران تایم اول 120 زیادتر از تعداد کارگران تایم دوم باشد و تعداد کارگران تایم سوم یك سوم تعداد مجموع کارگران دو تایم اول باشد تعداد کارگران هر تایم را حساب کنید .

56. افاده های ذیلرا از نظر بگذرانید :

(a) $\frac{1,5t+3}{3t+1}$ ; (b) $\frac{5x-1}{x+1}$ ;

(c) $\frac{5}{4^2 p-1}$ . (d) $\frac{a^2+16}{a^2-4}$ ;

بنا بر کدام قیمت یاقیمتهای متحول هریك از افاده های فوق

(a) صفر میشود،

(b) بی معنی میگردد .

57. روی مستوی کمیات وضعیه قایم دایره ای به مرکز C (−8;6) و به شعاع 10 واحد به کمك پرکار رسم کنید. مختصات تقاطع این دایره را با محورهای کمیات وضعیه دریابید .



58. آن ست جوره های $(x,y)$ را تشخیص کنید که در آن مرکبه های x و y آن اعداد یك رقمی باشد و هم بیانیه « x از y به اندازه 5 واحد کمتر است .» را تحقیق کند .

59. دوست $A=\{7;8;9;5\}$ $B=\{1;2\}$ مفروض است. ست اعداد دو رقمیرا ترتیب دهید که رقم یکهای آنرا عناصرست A و رقمدهای آنرا عناصرست B تشکیل دهد. آیا گفته میتوانید که ست مطلوب شما دارای چند عنصر خواهد بود؟

60. عددی را پیدا کنید که اگر از مجموع آن با نصفش و نصف نصفش ، ثلث آن تفریق شود مساوی 34 گردد .

61. حاصل جمع سه عدد تام پی درپی 60 میشود اعداد را پیدا کنید .

## 5 . نامساویهای متحولدار و مسافه های عددی

> نامساویهای محتولدار عبارت از بیانیه هایی دارای متحول است. دریافت آن قیمتهای متحول که نامساوی را صدق میکند بنام حل نامساوی وست اعدادی که هر کدام آنها نامساویرا تحقیق میکند بنام ست حله نامساوی یاد میشود .

اگر نامساوی $2x+9>3-x$ را مدنظر بگیریم دیده میشود که اگر به جای متحول x آن عدد 1 راوضع کنیم نامساوی مذکور

حقیقت پذیرمیشود . زیرا :

$1-3<2.1+9$ یا $2<11$ که یک بیانیه درست است .

همچنان اگر به جای x عدد صفر یا 1- را وضع کنیم دراین دو حالت نامساوی مذکور باالترتیب به افاد ههای: $3<4,9>7$ که هر دوی آنها بیانیه های درست یعنی صحیح اند تبدیل میشود . ولی اگر بجای x عدد 2- گذاشته شود دراین صورت نامساوی مذکور به بیانیهٔ $(2-)-3<9+(2-).2$ یا $5<5$ که یک بیانیه صحیح نیست تبدیل میشود . حال اگر به جای x هر عدد دیگری که از 2- زیادتراست بگذاریم دیده میشود که نامساوی مذکوربه یک بیانیه صحیح تبدیل میشود پس گفته میتوانیم که هر عدد زیادتراز 2- حل نامساوی مذکورمیباشد . وست حله نامساوی مذکور عبارت ازست تمام اعدادیست که از 2- زیادتر اند .

حل هندسی نامساوی فوق روی خط مستقیم کیمیات وضعیه ( خط عددی ) طبق شکل 3 ارائه میشود .

قسمت جواب درست بیانیه به ست جواب مطابقت نداود .



شکل ( 3 )

درشکل فوق نقطه یی به که 2- ارائه شده است شامل جواب نمیباشد. چی 2- نامساویرا تحقیق نمیکند .



مثال اول . میخواهیم که ست حله نامساوی دوطرفه $1<x<9$ را روی خط عدد نشان بدهیم .

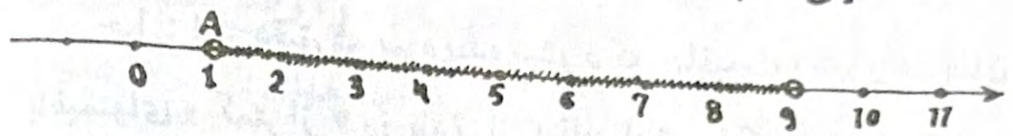
حل: اگر دقیق شویم دیده میشود که باقیمت $x=1$ وهمچنان باقیمتهای x کمتر از 9 وزیادتر از 1 نامساوی مذکوردارای حقیقت میباشد . چنانکه اگر به جای x عدد 4,51 در نامساوی مذکوروضع شود نامساوی شکل $1<4,51<9$ را که یک بیانیه درست است اختیارمیکند . ولی اگر به جای x عدد 9 یازیادتر از 9 ویا کمتر از 1 وضع شود نامساوی مذکوربه یک بیانیه غلط مبدلمیگردد . مثلاً اگر به x قیمت $\frac{1}{2}$ داده شود دراین صورت نامساوات مذکور به بیانیه : $1\leq\frac{1}{2}<9$ که یک بیانیه غلط است تبدیل میگردد .

زیرا ما میدانیم که بیانیهٔ $1\leq\frac{1}{2}$ درست نیست .

به همین قسم اگر به جای x عدد 9 وضع شود نامساوی مفروض به بیانیه : $1<9<9$ که قسمت $9<9$ که بیانیه مذکور درست نیست تبدیل میگردد. واضع است که اگر به عوض x قیمتهای بیشتر از 9 وضع شود نامساوی مذکور به یک بیانیهٔ غلط تبدیل میگردد. از توضیحات فوق چنین نتیجه میشود که ست حلهٔ نامساوی $1<x<9$ مفروض تمام اعداد حقیقی یی که بین 1 و 9 واقع اند تشکیل میدهد . ( 1 در جملهٔ آنها شامل است اما 9 شامل نیست ) . ما این ست حله را

روی خط عدد طبق شکل 4 در زیر ارائه مینمائیم .

مسافه یی که به جواب مطابقت دارد

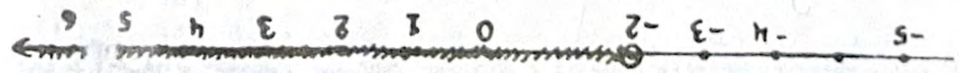



شکل ( 4 )

ست حله نامساوی مفروض مختصات نقاط مربوط قسمت مخطط شکل مذکور که عبارت از قطعه خط AB است و مسافه عددی را از 1 الی 9 ارائه میکند میباشد. اگر دقت نمایید دیده میشود که نقطهٔ A سیاه شده ولی نقطه B سیاه نشده است واین میرساند که مختصات نقطهٔ A یعنی عدد 1 شامل ست حله است ولی مختصات نقطه B یعنی عدد 9 شامل است حله نیست وشکل جبری بطور خلص مسافه مطلوب چنین : $]1;9[$ نشان داده میشود .

مثال دوم . هرگاه ارائه حل نامساوی دوطرفه $5<x<12$ روی خط عدد مطلوب باشددراین صورت حل نا مساوی مذکور عبارت از مختصات تمام نقاط قطعه خطی است که مسافهٔ عددی 5 تا به 12 را درروی خط عدد (محور کمیات وضعیه) در بر میگیرند. واین حل توسط شکل 5 ارائه میشود . یعنی: $[5;12]$

که این مسافه بسته جواب




شکل ( 5 )



نقاط مربوطه اعداد 5 و12 شامل ست حله میباشند .

ستهای فرعی تمام اعدادرا که بشکهای :

اول $]-\infty;-3[$ —دوم $]-4;5[$ —؛سوم $[2,\infty[$

وچارم $]-3;\infty[$ —ارائه میشوند به نام مسافه های عددی یاد میشوند. مسافه های فوقرا به ترتیب اول مسافه نیمه باز طرف چپ، دوم مسافه بسته ، سوم مسافه نیمه باز طرف راست وچارم مسافه بازیاد میکنند .

سوالات

62 . یا کدام قیمتهای x که در ذیل داده شده نامساوی $2x-7x+2>0$ دارای حقیقت میباشد؟

63 . لااقل دو قیمت متحول x را دریابید که نامساویهای ذیلرا تحقیق کنند :

(a) $x-5>13$ , (b) $3x<8$ .

64 . لااقل دو قیمت متحول y را در یافت کنید که نامساویهای ذیلرا تحقیق کنند :

(a) $y^2>y$ , (b) $y^2<y$ .

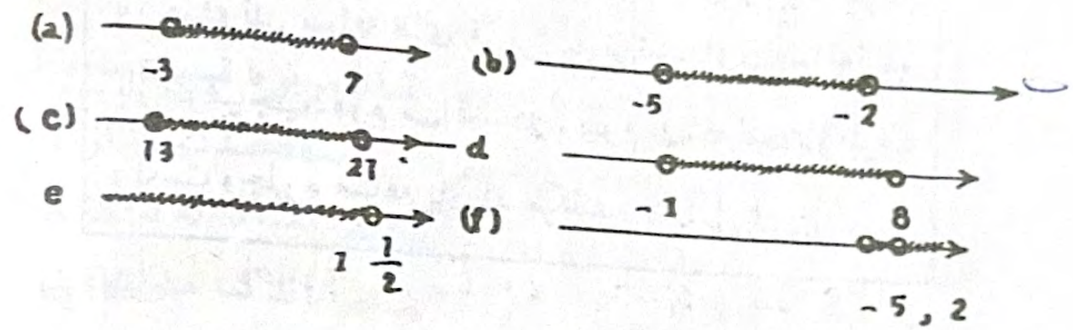
65 . مسافه های داده شده را توسط خط عدد ارائه کنید :

(a) $[2,\infty[$ , (b) $[-1,3]$, (c) $[-1,\infty[$ ,

(d) $]-\infty , 4\frac{1}{2}]$ ;(e) $[-4,0]$.

66 مسافه های عـدد ی مربوط مخطط خطوط مرسومهٔ ذیلرا بنویسید :

(a)
(b)
(c)
(d)
(c)
(f)




شکل ( 6 )

67 . ست حلهٔ هر یک از نامساویهای ذیلرا توسط خطنشان بدهید :

(a) $x > -1$ , (b) $x < 5$ , (c) $x \leq 8$ .

(d) $1 \geq x < 5$ , (e) $2 < x < 9$ , (f) $-1 \leq x < 9$ .

68 . کدام یک از اعداد داده شده عنصر ست حله $-3 < x < 4,2$ شده میتوانند :

(a) 5,1 ; (b) 4,2 ; (c) $-4$ ; (d) 0 ; (e) $-2$ ; (f) $-3,1$ ?

69 . کدام یک از اعداد داده شده شامل مسافه $[2 , -7]$ شده میتوانند :

(a) $-7,5$ ; (b) $-4$ ; (c) 2,5 ; (d) $1\frac{2}{3}$ ; (e) $-9$ ;

(f) 10 ?

70 . دو عدد مثبت و دو عدد منفی را پیدا کنید که به مسافه های ذیل مربوط باشند :



(a) $[-1 ; 1,5]$ ; (b) $[-0,7 ; 3\ \frac{1}{2}]$;

71 . آن اعـداد تامیرا که بـه مسافـه های ذیـل تعلق میگیرنـد نام بگیرید :

(a) $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$ ; (b) $[3\frac{1}{2} ; 7\frac{1}{9}]$ ; (c) $[0 ; 1\ \frac{1}{2}]$ ;

(d) $[-4 ; -1[$ ; (e) $]0 ; 1[$ ; (f) $]-1 ; 2,1[$ .

72 . آیا عدد 2,13 در مسافه $[2 ; -3]$ شامل است ؟

(b) آیا عدد 1 در مسافه $[8 ; 1,6]$ شامل است؟

(c) آیا عدد 1,3 در مسافه $[4 ; 1 ; -3]$ شامل است؟

(d) آیا عدد صفر در مسافهٔ $[1 ; 0 ; 1 ; -0]$ شامل است؟

73 . مسافه های ذیلرا توسط خط عدد ارائه کنید :

(a) $]-\infty ; 1,5]$ , (b) $[-3 ; 12]$ ;

(c) $[-5 ; \infty[$ , (d) $]-\infty ; \infty[$ .

74 . ست حله نامساوی $13x-1 \leq 10x+8$ را توسط

( a ) خط عدد ، ( b ) مسافه عددی ارائه کنید .

75 . بنا بر قیمتهای داده شده x و y افاد ههای ذیلرا ساده کرده وقیمت هر کدام آنها را پیدا کنید :

( a ) باقیمت $x = 0,5$ و قیمت $y = -1$ قیمت افاده :

$2 . (2x - 3y) + 3,6x$ را معلوم کنید.

( b ) باقیمت $x = -3$ و قیمت $y = 2,1$ قیمت افاده :

$(3,2x - 5,1y) - (1,8x - 1,1y)$ را معلوم کنید .

76 . قیمت افاد ههای ذیلرا پیدا کنید :

(a) $\frac{2\,،\,15\,.\,30\،5}{0\,،\,01}$ ; (b) $\frac{0\,،\,01\,.\,3\,،\,15}{0\,،\,001}$ .

77. طول قاعده یك مثلث متساوی‌الساقین‌از طول یك ساق‌آن 3cm دراز تراست . اگـرطول محیط آن 60cm باشد طول هرضلع آنرا حساب کنید .

78. طول‌یك ضلع‌یك مثلث‌دوچند طول‌ضلع دوم و4cm کمتراز طول ضلع سوم آنست . اگر طول محیط مثلث مذکور41cm باشد طول‌هرضلع آنرا پیدا کنید .

79. میخواهیم که یك میدان سپورت مستطیلی را که محیط آن 360 متربوده ودرازی‌آن ازعرضش 20 مترزیاد تراست کانکریت کنیم . اگـرقیمت تمام شد هرمترمربع کانـکریت 60 افغانی باشد مصرف میدانرا حساب کنید .

80. رابطه p ازست {زردآلو ؛ انار؛توت} =A به‌طرف ست {قروت ؛ انگور ؛ ناك ؛ آلو ؛ شفتالـو}=B بنا بـر ارتباط مشترك بودن حرف اول‌یاحرف‌آخر کلمات عناصرستها تعریف شده‌است. دیاگرام تیری رابطه‌p را ازA به طرف B رسم کنید.

81.یك‌رابطه d ازست$\{-1\,;\,5\,;\,4\frac{1}{3}\,;\,2\,;\,-\frac{1}{2}\}$ =A به‌طرف‌ست $\{3\,;\,7\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,4\,;\,3\frac{1}{3}\,;\,1\frac{1}{2}\}$ =B برای‌عناصر $x \in A$ و $y \in D$ توسط‌جمله: « x از y یك واحد کمتراست» تعریف شده است. ست جوره های مرتب رابطه d را بنویسید .

82. یك رابطه g ازست ( A به طرف ستD سوال 82) توسط جمله : «خارج قسمت x : y یکعدد طبیعی‌است. » تعریف شده‌است. ست جور ههای مرتب رابطه q را بنویسید .

83. یك را بطه q ازست ( A به طرف ست D سوال 82) توسط جمله : « خارج قسمت x : y یکعدد طبیعی است . » تعریف شده است ست جور ههای مرتب رابطه q را بنویسید .

84 .دوست $A=\{-3;-1;0;7\}$;$B=\{-2;3;5\}$ رابا یك‌رابطه m از A به‌طرفB برای $x \in A$ و $y \in B$ تصور کنیدطوری که $x+y>0$ گردد . دیاگرام رابطه m را رسم کنید.

85 . یـك رابـطه f ازست $A=\{3;8;10;17;21\}$ بـه طـرف ست $B=\{1;2;9;11\}$ بـرای $x \in A$ و $y \in B$ توسط افاده $x-y>0$ تعریف شده‌است . ست جور ههای مرتب رابطه f را بنویسید .

86. یك رابطه q را از ست $X=\{0;04;1;48;5;55\}$

به طرف ست $Y=\{0;02;0;005;0;37\}$

برای $y \in Y$ و $x \in X$ طوری تعریف شده که خارج قسمت x;y یك‌عدد طبیعی‌است‌ست‌جوره‌های‌مرتب رابطه q رابنویسید .

87. گراف رابطه پیرا که توسط ست جوره های مرتب :

$\{(1,1)\,;\,(3,-1)\,;\,(-1,3)\,;\,(2-1)\,;\,(2,1)\,;\,(-3,1)\,;\,(-3,2)\,;\,(-2,2)\}$

داده شده است درمستوی کمیات وضیه رسم کنید .

88. گراف هر یك ار روابطی را کـه‌توسط افادههای ذیل‌توضیح

شده است در مستوی کمیات وضعه رسم کنید :

(a) $\{(x,y) \mid -3 < x < 6, y = 1\}$،

(b) $\{(x,y) \mid x = 1 < y < 3\}$.

89. دایره‌یی به‌شعاع 5 واحد طول و به‌مرکز $C(2,3)$ رسم کنید.

با در نظر داشت رابطهٔ « داخل دایره یا بالای دایره بودن » کدام یك از جوره های مرتب

$\{(3;7);(1;-8);(2;8);(2;-2;(7;3);(-5;-4);(0;0);(1;0)(1\frac{1}{4};-9);$

$(\frac{1}{3};4\frac{1}{8});(\frac{3}{4};7\frac{5}{8});(\frac{1}{3};\frac{1}{8});(\frac{7}{8};-4\frac{3}{4})\}$ را بطهٔ مذکور را به دایره تعقیب میکند ؟



# فصل دوم

# تابع

## 6. مفهوم تابع

یکی از مفهومهای اساسی ریاضی تابع میباشد. غرض فهمیدن این مفهوم مثالهای ذیلرا مطالعه مینمایم :

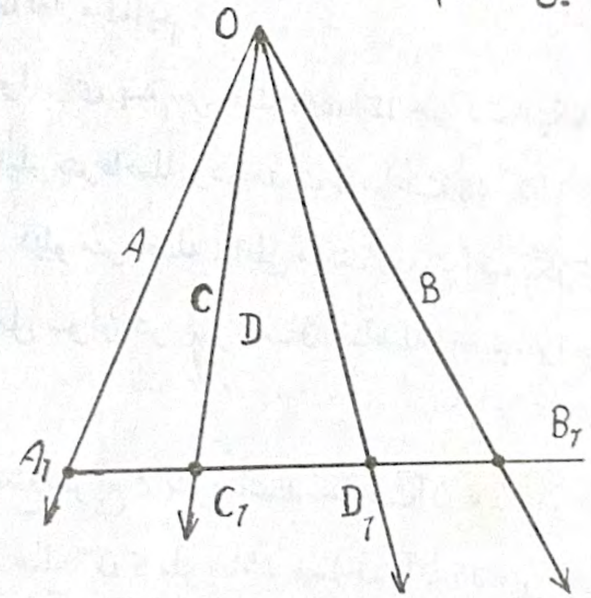
مثال 1. با یسکل سواری به سرعت 12 km/h حرکت میکند. در مدت 2 ساعت 24 کیلومتر فاصلهٔ ودر مدت 4 ساعت 48 کیلومتر ودر مدت نیم ساعت 6 کیلومتر فاصله راطی میکند. میتوانیم بگوئیم که در این مثال بایسکل سوار در هر زمان فاصله معینی را طی کرده‌است.

مثال 2. اگر یک ضلع مربع 2 متر باشد مساحت آن 4 متر مربع میشود واگر طول یک ضلع آن 6 متر باشد مساحت آن 36 متر مربع میشود. و اگر طول ضلع آن 0,1 متر شود مساحت مذکور 0،01 متر مربع میباشد. به همین ترتیب گفته میتوانیم که برای هر طول ضلع مساحت مربع یک قیمت معین را میگردد.

مثال 3 . شکل ذیلرا در نظر بگیرید که از نقطه O شعاعات رسم شده که قطعه خط های AB و $A_1B_1$ را قطع میکند. میتوانیم بگوئیم که برای هر نقطه قطعه خط AB یک نقطه در قطعه خط $A_1B_1$ معین شده میتواند :

مثال 4 . شاگردان در صنف نشسته اند. میتوانیم بگوییم که به هر شاگرد یک جای معین است. به همین ترتیب مثالهای مختلف وزیادی وجود دارد که دارای یک مفهوم مشترک است .

و این مفهوم مشترک چی خواهد بود ؟




شکل ( 7 )

اولاً در هر مثال دوست شامل است [ (ست وقت ، ست فاصله) ( ست طول ضلع وست مساحت ) (ست نقاط یک قطعه خط و ست نقاط قطعه خط دیگر ) ( ست شاگردان وست جای شاگردان که به آن نشسته اند ) ] .



ثانیاً درهر مثال بین هر دوست یک مطابقت وجود دارد که هر عنصر یک ست را به یک عنصر ست دیگر ربط میدهد. بعداً دیده میشود که درهر مثال یک طریق ویاقاعدهٔ وجود دارد که توسط آن این تقابل مطابقت برقرار میگردد .

( در مثال اول غرض فهمیدن فاصله طی شده ، سرعت ضرب وقت ودرمثال دوم برای دریافت مساحت مربع قاعدهٔ مربع نمودن طول ضلع آن ودرمثال سوم عبوردادن شعاعات از قطعه خطها ودرمثال چارم به چشم دیده میشود که شاگردان درجای نشسته اند : یعنی برای اینکه بدانیم احمد کجانشسته است باید متوجه صنف شد .)

با استفاده ازمفهوم فوق تابع را چنین تعریف مینمایم .

تعریف : رابطه بین عناصر و دوستی که در آن به هر یک از عناصر ست اول محض یک عنصر ست دوم موافقت کند تابع نامیده میشود

یا : رابطه بین ست X و ست Y که توسط آن به هر عنصر ازست X تنها و تنها یک عنصر ست Y تقابل نماید به نام تابع یاد میگردد.

دراین صورت ست X[ ست وقت‌ها، ست طولهای اضلاع مربع ست نقاط قطعه خط AB وست شاگردان صنف ] دومین یامنبع تابع نامیده میشود .

ست Y[ ست فاصله هاوست مساحت‌ها مربع وست نقاط خط

مستقیم $A, B,$ وست جای شاگردان ] رنج یاهدف تابع نامیده میشود.
همچنان ست X را به نام ساحه تعریف تابع وست X را به نام ساحه
قیمتهای تابع نیز یاد مینمایند.

معمولاً در الجبر ساحه تعریف وساحه قیمتهای تابع توسط بعضی از اعداد معین میگردد. امادرهندسه ساحه تعریف و ساحه قیمتهای تابع (دومین ورنج) توسط نقاط و اشکال هندسی معین میشود.

دراینصورت تابع باساحه تعریف X وست قیمتهای Y وهمچنان ست X را درست Y منعکس مینمایند.

## 7. ارایه یك تابع

مامیدانیم که یك تابع عبارت از قانون تقابل (تطابق) بین عناصر دوست است. دراین جاسوال به وجود می آید که این قانون را بکدام شکل نوشته کرده میتوانیم؟ ویادرالجبرچی قسم ارایه میشود؟ یعنی یك تابع را چی قسم ارایه کرده میتوانیم ؟

برای ارایه تابع چندین طریقه موجود است که اکنون هر کدام آنرا مطالعه مینماییم

### a. ارایه تابع توسط جدول

ارایه تابع را به کمك جدول ذیل که در سطراول آن عناصرست اولی (دومین) ودرسطر دیگری آن عناصرست دومی (رنج) طوری نوشته میشود که به هرعنصرست اولی یك عنصرست دومی تقابل نماید. جدول ذیل را اوا به کمك مثال اولی درس گذشته تشکیل مینما یم.



| وقت به ساعت | $\frac{1}{2}$ | 1 | 4 | 4 | 8 | . . |
|---|---|---|---|---|---|---|
| فاصله طی شده به کیلومتر | 6 | 12 | 24 | 48 | 96 | . . |

درجدول دیده میشود که چی قسم قانون تقابل بین عناصر دوست وجود دارد. این طریق بنام ارایه یك تابع توسط جوره های مرتب یاد میگردد. دراین جوره مرتب مرکبه های اولی شان عناصرست دومین تابع ومرکبه های دوم شان عناصرست رنج تابع را تشکیل میدهند.

نواقصی که دراین طریقه ارایه یك تابع وجوددارد عبارت از آن است که بعضی از جدولها جای زیادی را میگیرندوعلاوه براناگر دومین ورنج عناصرز یادی داشته باشند درا ینصورت نوشتن تمام قیمتهای آن مشکل خواهد بود.

### b. ارایه تابع توسط فورمول.

دردرس گذشته طریق ارایه تابع را توسط ست جوره های مرتب دانسیتم. اکنون میخواهم که این موضوعرا توسط فورمول ارایه داریم. درمثال دوم درس گذشته مادیدیم که مساحت مربع توسط فورمول $y=x^2$ محاسبه میگردد. یعنی بادانستن قیمت طول اضلاع مربع (عناصرست دومین) میتوانیم قیمت مساحت (عناصرست رنج) رامحاسبه کرد. این طریقه خیلی متناسب وساده بوده درصورتی که فورمول ومحاسبه آن مشکلات را بارنیاورد. علاوه بر آن حالاتی موجود شده نمیتواند که برای تابع فورمول نمیباشد طوری که

مثال چارم پارا گراف درس گذشته یك تابع است مگر برای نشستن جای احمدوز رغونه کدام فورمول موجود شده نمیتواند .

c . ارایه تابع توسط گراف

این حالات را طوری آغاز مینمایم که محور فصله قیمتهای متحول ومحور ترتیب قیمتهای مربوطه تابع را ارایه‌دار ند. دراین‌صورت ست نقاط را دریافت میداریم که‌هر عنصر ست X محض به یك‌ستY توافق نما یند. مثال اولی درس گذشته که اگر قیمتهای متحول زمان (وقت)را بالای‌محور فصله‌وقیمتهای مربوط آنرا بالای محور ترتیب بنویسیم‌ماچندین‌نقاط را حاصل میداریم که اگراین نقاط را باهم وصل نماییم گراف تابع مربوطه حاصل میگردد .

این‌طریقه‌گرافیکی‌ارایه‌تابع خیلی‌وضاحت داشته‌ومعمول‌میباشد ودر فزیك استعمال زیادی داود .ضروریست که همه این طریقه ها را خصوصاً طریقه گرافیکی وفورمول آنرا بدانیم وبه طور خلاصه چنین‌بیان میداریم :

اگر دریك‌گراف به‌نقطهٔ‌فصله‌یك‌وتنها یك‌نقطهٔ ترتیب‌موافقت‌نماید در آن صورت‌رابطه یی که توسط این گراف نشان داده‌میشود گراف تابع‌میباشد.

سوالات

90 . یك‌تابع p که بکمك جوره‌های مرتب $(1;1)$ ; $(-2;\frac{1}{2})$;$(s;\frac{1}{3})$;$(3,5;\frac{2}{7})$;$(0,01;-100)$تعین میشود مفروض است. ست‌دومین‌وست رنج این‌تابع P را بنویسید .

91. تابع $y = f(x)$ توسط جدول ذیل داده شده است،

| x | —7 | —5 | —3 | —1 | 0 | 1 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 50 | 26 | 10 | 2 | 1 | 2 | 10 | |

$f(-3)$ ; $f(1)$ و $f(0)$ را ایبابید.

92 اگر تعداد قطرهای مضلع را به q و تعداد اضلاع آنرا به x نشان دهیم رابطه بین x و q در جدول ذیل داده شده است ،

| x | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| q | 0 | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 27 | 35 | 44 | 54 |

به سوال های ذیل جواب بگوئید :

پنج ضلعی چند قطردارد ؟ هشت ضلعی چند قطردارد ویازده ضلعی چند قطردارد ؟ اگرمضلع 14 قطرداشته باشد آن چند ضلعی است؟ومضلعی که54 قطرداشته باشدچند ضلعی میباشد؟ آیااین‌رابطه بین x و q یك تابع را ارایه میکند یا خیر؟

93. اگر به هریك ازاعداد اولیه دورقمی عدد 0 وبه هر یك ازاعداد غیراولی دورقمی‌عدد 1 توافق کند به 12 کدام عدد موافق می آید؟ به 17 کدام‌عدد به 29 کدام‌عدد وبه 99 کدام عدد؟ آیا به

چنین مشخصات یك تابع را معین کرده میتوانید ؟

94. تابع توسط فورمول $y=\frac{x^2-1}{3}$ داده شده است. برای قیمتهای x،
$x \in \{-7;-4;0;5;7\}$ قیمت مربوطه y آنرا پیدا کنید.

95. تابع به فورمول $h(x)=10x+1$ که در این جا
$x \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ داده شده است این تابع را توسط
ست جور همای مرتب افاده نمائید.

96. تابع که توسط فورمول $y=2x+7$ داده شده است به قیمتهای
$x \in \{200;-5;5;1000\}$ کدام قیمتهای y تقابل مینماید ؟
با کدام قیمتهای x قیمت y مساوی به 21- ; 1007 ; و17 میشود ؟

97. از تابعی که توسط فورمول $f(x)=\frac{1}{5}(2x-1)$ داده شده است
$f(3)$ ; $f(10)$ و $f(-7)$ را دریافت کنید. وهم بگوئید که با کدام قیمت
x بیانیه های $f(x)=9$ ; و $f(x)=-7$ حقیقت دارد.

98. دومین توابع ذیل را تعین کنید.

(a) $y=\frac{5}{x-3}$ ; (b) $y=24x+3$ ;

(c) $y=\frac{16}{x}$ ; (d) $y=\frac{71}{3x+12}$ .

99. معادله های ذیل را حل کنید .

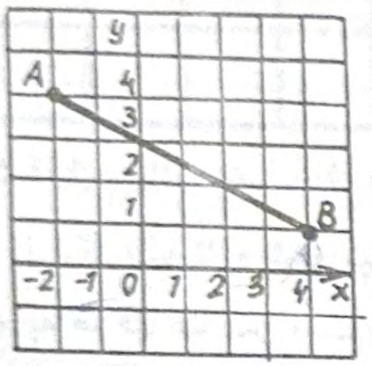
$1-1,7x+3(0,9x+2)=3,4$;
$(5-0,2y).7-0,3y=39$.



100. به شکل مسافهٔ عددی بنویسید .

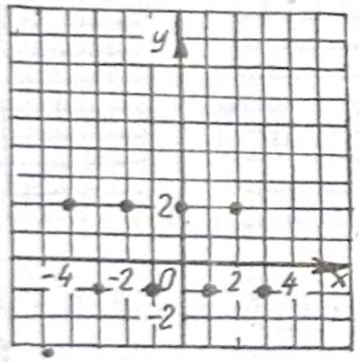
(a) ست فصله‌های (دو مین) نقاط قطعه خط AB شکل (8) را ؛

(b) ست ترتیبهای (رنج) نقاط قطعه خط AB شکل (8) را.




شکل ( 8 )

101. تابع توسط گراف در شکل ( 9 ) داده شده است. از این گراف استفاده کرده جدول ذیلرا پر کنید .




شکل ( 9 )

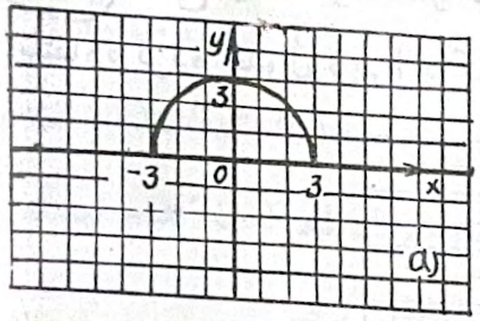
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

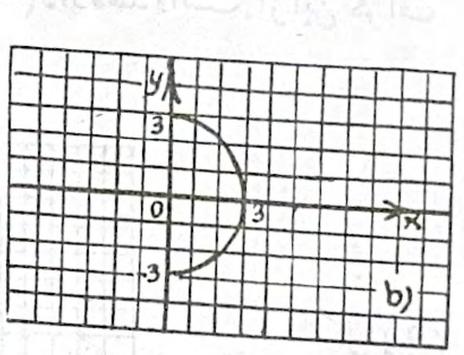
102 . تابع توسط گراف شکل ( 10 ) داده شده از روی گراف جدول ذیلرا خانه پری کنید .

شکل (10)

| x | −3 | −2 | 0 | 1,5 | 9 | 3 | 4 | 4,5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | | | | | | |

103 . کدام یک ازنیم دائر ههای که در شکل های (11-b) و (11-a) رسم شده اند گراف تابع شده میتواند درصورتیکه رابطه ازعناصر ست x به طرف عنا صر ست y باشد ؟




شکل (11-a)　　شکل (11-b)

104 . تابع که توسط شکل $y=\frac{x-2}{3}$ داده شده درنظر گرفته معین کنید که آیا نقاط :

A (7 ; 1) ; B (−3 ; −1) ; C (0 ; 1) ; D (11 ; 1, 8) ;
E (0 ; 0, 4)

به گراف این تابع متعلق اند ویانه ؟



105. بنابر تابع f که به‌فورمول $f(x)=1-8x$ داده شده‌است؛ آیا بیانیه های $f(-1)=9$ ; $f(\frac{1}{2})=-3$ و $f(3)=25$ صحیح است ؟

106 . معادله های ذیلرا حل کنید :

(a) $\frac{x}{2,22}=\frac{5}{3,7}$ ، (b) $\frac{3,4}{x}=\frac{0,17}{1,5}$ .

107 . (a) سرعت یک موتر 27 km/h است . این سرعت رابه متر فی ثانیه افاده کنید .

(b) سرعت یک‌موتر 5m/sec است. این سرعت را به کیلومتر فی ساعت افاده کنید .

## تناسب مستقیم

### 8. مفهوم تناسب مستقیم

اگر زمان حرکت یك جسم رابه t وفاصلهٔ طی‌شده در این‌زمان را به s نشان‌دهیم درصورتی که جسم مذکور به طور منظم به‌سرعت 5m/sec حرکت کند $s=5t$ میشود. واضح است که به‌هر قیمت t یك قیمت s تقابل مینماید . لذا $(t>0)\ s=4t$ یك تابع است . مثال دیگر را از نظرمیگذرانیم : اگر n تعداد قطی‌های گوگرد و p قیمت آنها باشد اگر قیمت یك قطی‌گوگرد 2 افغانی باشد دراینصورت $p=2n$ میشود . مامیدانیم که دراین‌رابطه به هر قیمت n یك‌قیمت p موافقت

مینماید . لذا را بطه $p=2n$ یك تابع میباشد که توسط $n \varepsilon N$ معین میشود . درمثالهای فوق توابع را از نظر گذشتاندیم که شکل $y=ax$ را داشت که در این جا x و y متحول و a یك عدد خلاف صفر میباشد .

> هر تابعی که به شکل $y=ax \quad (a \neq 0)$ باشد تناسب مستقیم نامیده میشود ، که درین جا y مستقیماً متناسب به x است و a را ضریب تناسب میگویند .

ست تمام اعدادحقیقی یا بعضی ستهای فرعی آن مسافه معین تناسب مستقیم شده میتوانـد . ازفارمول $y=ax$ درصورتـی کـه $x \neq 0$ باشد $a = \frac{y}{x}$ حاصل میشود .

برای اینکه بدانیم که یك تابع $y=f(x)$ یك تناسب مستقیم است و یانه ، حاصل تقسیم مرکبه هـای x و y یعنی $\frac{y}{x}$ را پیـدا میکـنیم . (درصورتی که $x \neq 0$ است.) اگر این حاصل تقسیم ها مساوی به یك عدد ثابت a (که a خلاف صفر باشد ) شوند وهم برای x مساوی به صفر y هم مساوی به صفرشود گفته میشود که y مستقیماً متناسب به x است . a را ضریب تناسب میگویند .

مثال اول : تابع $a \xrightarrow{f} b \quad b=f(a)$ توسط جدول ذیل داده شده است :

| a | —4 | —3 | —1,5 | 2,5 | 5 | 6 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| b | —12 | —9 | —4,5 | 7,5 | 15 | 18,3 |



برای اینکه بدانیم که این تابع یك تناسب مستقیم است ویا نه برای هر جوره مرتب $(a;b)$ حاصل تقسیم $\frac{b}{a}$ را پیدا میکنیم.

| a | —4 | —3 | —1,5 | 2,5 | 5 | 6,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| b | —12 | —9 | —4,5 | 7,5 | 15 | 18,3 |
| $\frac{b}{a}$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

چون حاصل تقسیم تمام جوره های مرتب به یك عدد 3 مساوی شد، لذا این تابع یك تناسب مستقیم است. عدد 3 را ضریب تناسب میگویند.

مثال دوم : یك موتراز یك محل حرکت نموده بعد از x ساعت به مسافه y کیلو متراز محل مذکور دور میشود. این رابطه بین وقت وفاصله را درجدول به طورذیل نشان میدهیم :

| x | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 4,1 | 8,1 | 12,0 | 18,9 | 20,2 | 24,2 | 27,9 | 32,1 |

برای اینکه بدانیم که آیا این رابطه یك تناسب مستقیم است و یانه حاصل تقسیم $\frac{y}{x}$ را دریافت میکنیم .

| x | 0,5 | 1 | 1, 5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 4,1 | 8,1 | 20,0 | 15,0 | 20,2 | 24,2 | 27,9 | 32,1 |
| $\frac{y}{x}$ | 8,2 | 8,1 | 8,0 | 8,0 | 8,1 | 8,1 | 8,0 | 8,0 |

حاصل تقسیم $\frac{y}{x}$ سرعت متوسط موتر را در هر فاصله طی شده و وقت مربوط آن افاده میکند و به این نتیجه میرسیم که x و y در رابطه واقع اند که به تناسب مستقیم نزدیک است .

مثال سوم : اگر x کتله آرد و y قیمت آن باشد آیا متحول y به متحول x متناسب است ویا نه ؟ برای هر جورهٔ قیمتهای متحولین x و y حاصل تقسیم $\frac{y}{x}$ به عددی مساوی است که نرخ یک کیلو گرام آرد را نشان میدهد. پس متحول y به متحول x مستقیماً متناسب است .

سوالات

108 . آیا هریک از توابعی که توسط جدولهای ذیل داده شده تناسب مستقیم است ؟

| x | 1 | 2 | 5 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 12 | 24 | 60 | 72 | 90 |

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 |

| x | 2 | 5 | 8 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 125 | 20 | 22,5 | 30 |

| x | 0 | 1 | 9 | 7 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | -3 | -6 | - 21 | - 90 |

109 . تابع f یک تناسب مستقیم است و ضریب تناسب آن 5 است .

تابع f را به شکل فورمول افاده نموده جدول ذیل را پر کنید :



| y | 0,2 | 0,7 | 1,8 | 4 | 8,9 | | 10 | | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | | | | | | 45,5 | | 75 | |

110 . توابع x و y تناسب مستقیم اند . از جدول اولاً ضریب تناسب هر کدام را دریافت نموده وسپس جدولها را پر و بالاخره این تناسب ها را توسط فورمول ارائه نمایید.

| x | 2 | 4 | 3,4 | 10 | 9,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 5,6 | 1,2 | 2,7 | 3,8 | 3,6 |

| x | -3 | -1 | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | 6 | | |

111 . موتری به سرعت 18km/h حرکت میکند . فارمولی را بنویسید که رابطه راه طی شده ای s را در وقت t نشان دهد . اگر s به متر و c به ثانیه نشان داده شوند فارمول کدام شکل را بخود اختیار مینماید؟

112 . قیمت یک کیلو گرام کچالو 7 افغانی است فارمولی را بنویسید که رابطه قیمت y را ( به حساب افغانی ) نظر به کتله کچالو (به حساب کیلو گرام ) افاده کند . اگر قیمت کچالو y (به حساب پول) و کتله آن به x ( به حساب گرام ) نشان داده شود فارمول کدام شکل را میگیرند ؟

113 . معادله های ذیل را حل کنید :

a) $3,6 \div x = 18 \div 27$ , (b) $1,2 \div 0,04 = 3,7 \div b$

c) $\frac{81}{0,5} = \frac{y}{0,75}$, (d) $\frac{16}{a} = \frac{0,48}{1,7}$ .

## 9 خاصیت تناسب مستقیم

اگر دریك تناسب مستقیم که توسط $y=4x$ داده شده باشد به x قیمت های کیفی مثلاً $x_1=3$ و $x_2=5$ بدهیم در ینصورت y قیمتهای $y_1=12, y_2=20$ را بـه خـود میگیرد : اگر حاصل تقسیمهـای $\frac{x_1}{x_2}$ و $\frac{y_1}{y_2}$ را با هم مقایسه کنیم دیده میشود که:

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{3}{5}=0,6$ و $\frac{y_1}{y_2}=\frac{12}{20}=0,6$ میشود. دیده میشود که هردو حاصل تقسیم با هم مساوی‌اند. اگر ما به متحول s دو قیمت مثلاً $x_3=8, x_4=13$ انتخاب میکردیم به آنها قیمتهای $y_3=32, y_4=52$ نیز باهم موافقت مینمود در این حالت حاصل تقسیم‌های $\frac{x_3}{x_4}$ و $\frac{y_3}{y_4}$ باهم مساوی میشوند. $\frac{8}{13}=\frac{32}{52}$ و $\frac{y_3}{y_4}=\frac{8}{13}$ به‌صورت‌عمومی اگر تابع $y=f(x)$ تناسب مستقیم باشد $(x_1;y_1)$ و $(x_2;y_2)$ جور همای مرتب موافق قیمتهای متحول x و y باشند $(x_1;y_1)$ و $(x_2\neq 0)$ باشددر آن آن صورت $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_1}$ میشود.

زیرا اگر $y=ax$ باشددراینصورت $y_1=ax_1$ و $y_2=ax_2$ میشود. $(y_2\neq 0 و 0, x_2\neq 0)$ لذا ما نوشته کرده‌میتوانیم که :

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{a\,x_1}{a\,x_2}=\frac{x_1}{x_2}$$

اگرقیمتهای x و y اعداد مثبت باشند این خاصیت را چنین بیان نموده میتوانیم :



> در تناسب مستقیم اگر قیمت x چند مرتبه زیاد یا چند مرتبه کم شود قیمت y نیز همانقدر زیاد یا کم میشود.

مثال . اگر قیمت 8 قطی گوگرد 16 افغانی باشد قیمت 62 قطی گوگرد چند افغانی خواهد بود؟ این مثال را به صورت ذیل حل میکنم.

فرضاً قیمت 8 قطی گوگرد x افغانی باشد .

چون تعداد قطیهای گوگرد مستقیماً متناسب به قیمت آن است پس این تناسب یك تناسب مستقیم است لذامانوشته کرده می توانیم که :

$$\frac{8}{16}=\frac{62}{x}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{62}{x}$$

$$x=\frac{62\,.\,2}{1}=124$$

$$x=124$$

## سوالات

1 14 (a) یك توریست مسافه بین یك قریه وشهررادریك ساعت و 20 دقیقه طی نموده است. مسافه 1و5 چند همان مسافه را به همان سرعت درچقدروقت طی مینماید ؟

(b) یك تانك توسط یك نل در 2 ساعت و30 دقیقه پر میشود . معلوم کنید که تانك دیگری که ظرفیت آن سوم حصه تانك

مذکور میباشد توسط همان نل در چند ساعت پر خواهد شد ؟

115 . اگر از یك حلقه سیم 250 دانه میخ ساخته شده بتوانند، معلوم کنید از حلقه سیمی که طول آن چارم حصه طول حلقه اولی باشد چند دانه از همین قسم میخ ساخته میشود.

116 . یك کارگر دوسه روز 4500 دانه خشت میریزاند. معلوم کنید که کارگر مذکور در 8 روز چند دانه خشت میریزاند .

117 . کتلهٔ $12cm^3$ آهن مساوی به 63,6 گرام است. کتله تقریبی آهنی که حجمش $25cm^3$ باشد چند گرام میشود ؟

118 . تانکی پنج موتر را در یك ساعت و 15 دقیقه توسط بنزین پر کردند . آیا هفت داته همین تانکها در 2 ساعت توسط بنزین پر شده میتواند ؟

119 . یک تناسب مستقیم توسط $y = -1,8x$ داده شده است. قیمت y را به قیمت $x = -15$ دریافت کنید . وهم بگویید که به کدام قیمت x تابع مذکور قیمت 72 را بخود میگیرد .

## 10 . تقسیم به اجزای متناسبه

اگر $\frac{a}{2} = k$ ، $\frac{b}{5} = k$ ، $\frac{c}{7} = k$ یعنی $b = 5k, a = 2k$ ، $c = 7k$ باشد در اینصورت گفته میشود که اعداد a, b و c با اعداد 7,5,2 متناسب اند k را ضریب تناسب میگویند و $k \neq 0$ است .



مثال ذیلرا حل میکنیم :

مثال میخواهیم که طول هرضلع یک مثلث را که اضلاع آن به اعداد 3,2 و 4 متناسب بوده وطول محیط آن مساوی به 45 cm است پیدا کنیم .

حل : اگر k ضریب تناسب باشد در آنصورت طول هرضلع مثلث طبق ذیل حساب شده میتواند : $c=4k\ cm, b=3k\ cm, a=2k\ cm$ میشوند. چون محیط مثلث مساوی به 45 cm است . بنا بران معادله ذیلرا ترتیب داده میتوانیم :

از حل این معادله $k=5$ حاصل میشود . $2k + 3k + 4k = 45$

پس $2k = 10$ ، $3k = 15$ و $4k = 20$ میشود. لذا طول هر ضلع مثلث $a = 10\,cm$ ، $b = 15\,cm$ و $c = 20\,cm$ میشود .

سوالات :

120 . عدد 468 را به اعداد 6,4,3 متناسباً تقسیم کنید .

121 . زاویه های مثلث را دریافت کنید درصورتی که آنها به اعداد ذیل متناسب اند :

(a) 4;3;1 ، (b) ;10;3;2

122 . طول اضلاع مثلث به اعداد 6,5,3 متناسب است ضلع کلان ترین آن از ضلع خورد ترین آن 64،2cm زیاد تر است . طول هر ضلع مثلث را پیدا کنید .

123 . طول و عرض یك مستطیل به اعداد 7;2 متناسب است و محیط

آن 3,6cm است. طول مستطیل از عرضش چقدر کلانتر است ؟

124. از تابع g که توسط $g(x) = x + \frac{1}{x}$ داده شده است $g(-5)$

$g\left(\frac{1}{3}\right)$ ، $g\left(-\frac{1}{7}\right)$ را دریافت کنید .

125. ست جذرهای معادله های ذیلرا پیدا کنید .

(a) $5x+3(x-1)=6x+11$،
(b) $3a-5(2-a)=54$،
(c) $8(x-7)-3(2x+9)=15$،
(d) $0,6-0,5(y-1)=y+0,5$.

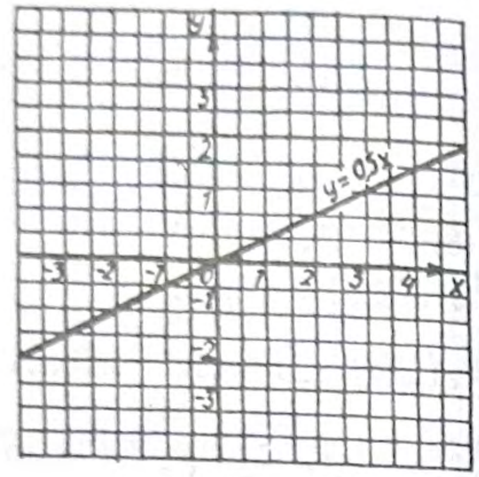
## 11. گراف تناسب مستقیم

میخواهیم که گراف $y=0,5x$ را رسم کنیم . دومین ورنج این تابع عبارت ازست تمام اعداد حقیقی است. درجدول ذیل بعضی قیمتهای x و y را دریافت میکنیم :

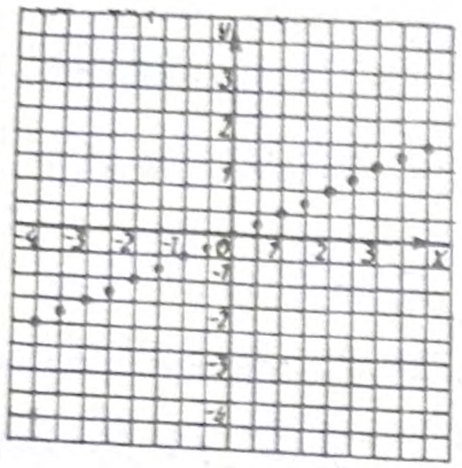
| x | —4 | —3 | —2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | —2 | —1,5 | —1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |

از روی جدول این نقاط رادر مستوی کمیات وضعیه پیدا میکنیم . طوری که مشاهده میشود این نقاط تماماً بالای یك خط مستقیم واقع اند. شکلهای (12،a)و(12،b) . اگر ازرابطه $y=0,5x$ قیمت های دیگر یرا برای x و y پیداکنیم و نقاط رادر روی گراف نشان دهیم این نقاط نیز بالای همین خط مستقیم واقع میگردند. طوری که در شکل دیده میشود این خط از مبدأ کمیات وضعیه میگذرد .





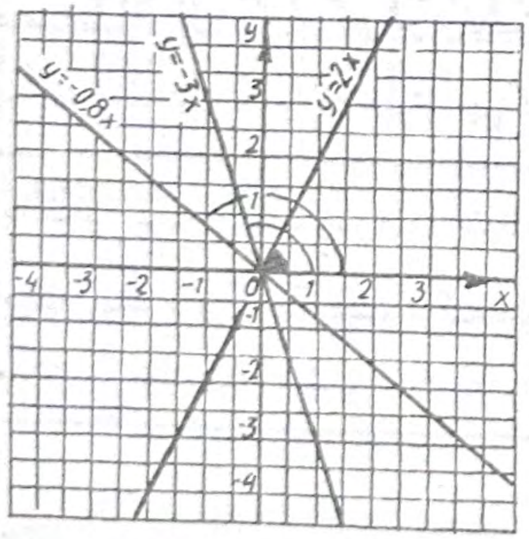

(شکل 12 a)



(شکل 12 b)

به صورت عمومی گراف تابع $y=ax$ $(a\neq 0)$ خط مستقیم است که از مبدأ کمیات وضعیه میگذرد . چون از دو نقطه تنها وتنها یك مستقیم میگذرد. لذا کافیست که برای رسم کردن گراف تابع شکل $y=ax$ یك نقطه کیفی آنرا در یافت کنیم و نقطهٔ دوم آن عبارت از مبدأ کمیات وضعیه است . ازوصل نمودن این دو نقطه خط مطلوب به دست میاید . مثلاً برای رسم نمودن تابع $y=2x$ اگر $x=3$ قرار داده شود قیمت y مساوی به 6 میشود . پس نقطه (3;6) را نشانی نموده آنرا به مبدأ کمیات وضعیه وصل میکنیم .

درنتیجه خط $y=2x$ به دست میاید. شکل 13 .




شکل ( 13 )

## سوالات

126 . معادله های ذیلرا حل نمایید :

(a) $3(0,9x-1)-2(x+0,6)=0$ , (b) $7-5(3,2-0,1y)=3-0,2y$

127 . برای تیار کردن یکنوع چینی از گل ، گچ و ریگ که به نسبت 2;1;5 مخلوط میشوند استفاده مینمایند . معلوم کنید که برای 350kg مخلوط چی مقدار گل ، گچ وریگ لازم است .

## تناسب معکوس :

### 12 مفهوم تناسب معکوس

اگر جسم از نقطه A تا به نقطه B به طور منظم حرکت نمائید وقتی راکه برای طی نمودن این مسافه صرف مینماید مربوط به سرعت حرکت آن میباشد . مثلاً اگر مسافه از A تا به B مساوی به 120m باشد وسرعت حرکت آن v (به‌متر فی ثانیه) ووقتی که صرف میشود به t (به ثانیه) نشان داده شود، در این صورت $t=\frac{120}{v}$ ثانیه میشود . دراین جا دیده میشود که هرقدر که v زیاد شود وقیمت t کم میشود وبر هر اندازه که v کم شود قیمت t زیاد میشود یعنی v و t معکوساً متناسب اند. لذا ما گفته میتوانیم که :

> هر تابع که به شکل $y=\frac{a}{x}$ باشد (درصورت $x\neq 0$) تناسب معکوس نامیده میشود و گفته میشود که متحول y به متحول x معکوساً متناسب است .



چون افاده $\frac{a}{x}$ به‌تمام قیمتهای x غیراز صفرمعین ومعنی دار است بنا بران دومین تابع که شکل آن $y=\frac{a}{x}$ است ست تمام اعداد حقیقی بدون صفرمیباشد. این تابع بطور $x.y=a$ نیزنوشته شده میتواند. برای اینکه فهمیده شود که یك تابع $y=f(x)$ تناسب معکوس است ویا نه ، حاصل ضرب تمام جورههای مرتب x و y را مطالعه میکنیم . اگر این حاصل ضرب ها مساوی به یك عدد ثابت $a(a\neq 0)$ شوند . تناسب مذکور معکوس است ودرغیر آن معکوس نیست. مثلاً تابع $y(x)$ توسط جدول ذیل داده شده است .

| x | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 15 | 7,5 | 5 | 3 | 2,5 | 1,5 | 1 |

اکنون حاصل ضرب جوره‌های مرتب $(x;y)$ را ذیلاً دریافت میکنیم :

| x | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 15 | 7,5 | 5 | 3 | 2,5 | 1,5 | 1 |
| y.x | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |

دیده میشود که حاصل ضرب های x و y مساوی به عدد ثابت 15 است ، پس تابع مذکوریك تناسب معکوس است وبه شکل $y.x=15$ ; $x=\frac{15}{y}$ نوشته میشود .

## سوالات

128 . توابعی که توسط جدولهای ذیل ارائه شده اند، کدام آنها تناسب معکوس را نشان میدهند؟

a

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 60 | 30 | 20 | 15 | 12 |

b

| x | −8 | −6 | −4 | −2 | −1 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | −2 | $-2\frac{2}{3}$ | −4 | −8 | −16 |

c

| x | 5 | 3 | 1 | −3 | −5 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0,3 | 0,5 | 1,5 | −0,5 | −0,3 |

129 . تابع $y = f(x)$ یك تناسب معکوس است ضریب را از جدول یافته شکل جبری تابع را بنویسید و جدول را تکمیل کنید.

| x | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,8 | 1 | 1,6 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 40 | 20 | 16 | 10 | 8 | 5 | 2 |

130 جدول مربوط تابع $y=\frac{8}{x}$ را تکمیل کنید :

| x | −4 | | −0,25 | 2 | 5 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | −4 | | | | 0,4 |



131 . تناسب مستقیم که گراف آن از نقاط (a)A (2;8);(b)B (5;3) ,C(−6;3);D (−2;7) (c) میگذرد توسط فورمول افاده کنید.

## 13. خاصیت تناسب معکوس

در درس بیشتر مادیدیم که اگر فاصله بین دو نقطه A و B 120m باشد و یك جسم از A به B به طور منظم به سرعت v حرکت کند و بعد از t ثانیه به نقطه B برسد. توسط رابطه $t=\frac{120}{v}$ که یك تناسب معکوس است نشان داده میشود . حال اگر به v دو قیمت دلخواه $v_1=5$ و $v_2=6$ داده شود $t_1=24$ و $t_2=20$ میشود. حاصل تقسیم $\frac{v_1}{v_2}$ و $\frac{t_1}{t_2}$ را دریافت میکنیم.

$\frac{v_1}{v_2}=\frac{5}{6}$ , $\frac{t_1}{t_2}=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$ به آسانی دیده میشود که حاصل تقسیم $\frac{v_1}{v_2}$ مساوی به معکوس حاصل تقسیم $\frac{t_1}{t_2}$ میباشد.

اگر دو قیمت دلخواه دیگری فرضاً $v_3=15, v_4=20$ را در نظر بگیریم در اینصورت $t_3=8, t_4=6$ میشود. خارج قسمت آنها عبارت اند از :

$\frac{v_3}{v_4}=\frac{3}{4}$ در اینصورت نیز خارج قسمت $\frac{t_3}{t_4}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ ; $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ مساوی به معکوس خارج قسمت $\frac{t_3}{t_4}$ میشود. لذا به صورت عمومی گفته میتوانیم که :

اگر $y = f(x)$ یك تناسب معكوس بوده $(x_1;y_1)(x_2;y_2)$ جور همای مرتب مربوط x و y این تناسب باشند در این صورت $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ می شود

ما این رابطه را چنین ثبوت کرده میتوانیم : از رابطه $y = \frac{a}{x}$ مانوشته میتوانیم که $y_1 = \frac{a}{x_1}$ ، $y_2 = \frac{a}{x_2}$ این دو رابطه را طرف به طرف تقسیم میکنیم :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\frac{a}{x_2}}{\frac{a}{x_1}} = \frac{a}{x_2} \cdot \frac{x_1}{a} = \frac{x_1}{x_2}$$

پس

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

اگر قیمتهای متحول x و y اعداد مثبت باشند خاصیت تناسب معکوس را چنین بیان نموده میتوانیم: بهر اندازه یی که قیمت x زیاد شود به همان اندازه قیمت y کم میگردد ، و بالعکس به هر اندازه اگر قیمت x کم گردد به همان اندازه قیمت y زیاد میشود. از ین خاصیت تناسب استفاده نموده زیادتر سوالات را حل نموده میتوانیم :

مثال : یک موتر به سرعت 10 km/h حرکت کرده مسافه AB را در 6 ساعت طی میکند. اگر در بازگشت با سرعت 12km/h حرکت



نماید میخواهیم بدانیم که این مسافه را در چقدر وقت طی میکند .

حل فرضاً موتر در بازگشت x ساعت وقت صرف نموده باشد چون وقت معکوساً متناسب به سرعت حرکت است پس مانوشته کرده میتوانیم که : $\frac{x}{6} = \frac{10}{12}$ از اینجا $12x = 60$ ; و $x = 5$

لذا موتر راه بازگشت را در 5 ساعت طی مینماید .

سوالات

132. دو پارچه آهن و المونیم داریم که کتله های شان مساوی اند کثافت المونیم $2,7\ g/cm^3$ و کثافت آهن $7,8\ g/cm^3$ است. حجم کدام یک از پارچه ها زیادتر است وچقدر ؟

133. سه تراکتوریک مزرعه را در 60 ساعت قلبه کرده میتوانند. آیا 12 عراده از همین نوع تراکتورها این مزرعه را در چقدر وقت قلبه خواهند کرد ؟

134. موتری به سرعت 60 km/h حرکت کرده مسافه A تا B را در 3 ساعت و 15 دقیقه طی کرده میتواند . اگر سرعت موتر 15 cm/h زیاد شود همین مسافه را در چقدر وقت طی خواهد نمود ؟

135. بر روی گراف نقاط $A\ (2;7)$, $B\ (6;1)$ ونقاط $A_1$, $B_1$ متناظر اینها را که نظر به مبدأ کمیات وضعیه متناظر اند تعین کنید . کمیات وضعیه نقاط $A_1$ و $B_1$ را دریافت کنید .

136. یک تناسب معکوس توسط رابطه $y = \frac{10}{x}$ داده شده است . به قیمت

. $x=-0,2$ قیمت تابع را دریافت نماید و نیز حساب کنید که به کدام قیمت x قیمت تابع مساوی به 5- میشود .

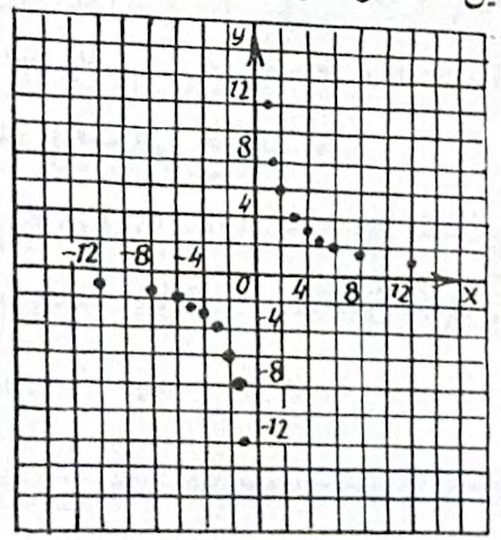
## *14- . گراف تناسب معکوس

یک تناسب معکوس مثلاً $y=\frac{12}{x}$ را در نظر میگیریم ما میدانیم که دومین این تابع ست تمام اعداد حقیقی غیر از صفر میباشد. گراف این تابع را رسم میکنیم برای این مقصد دو جدول ذیل را تشکیل میدهیم :

| x | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 12 | 8 | 6 | 4 | 3 | 2,4 | 2 | 1,5 | 1 |

| x | −1 | −1,5 | −2 | −3 | −4 | −5 | −6 | −8 | −12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | −12 | −8 | −6 | −4 | −3 | −2,4 | −2 | −1,5 | −1 |

این نقاط فوق را روی گراف نشانی میکنیم در شکل ( 14 ) .




شکل ( 14 )

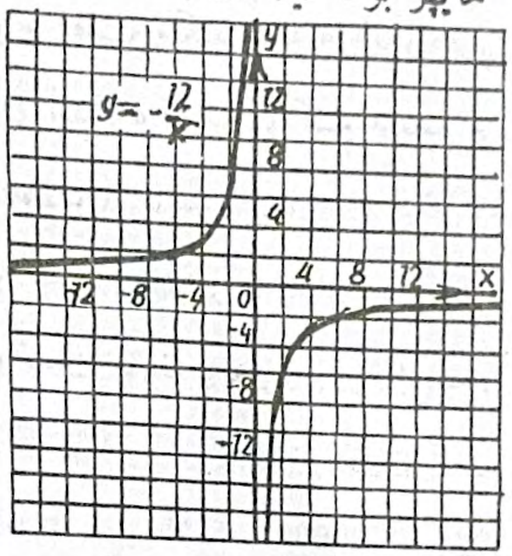


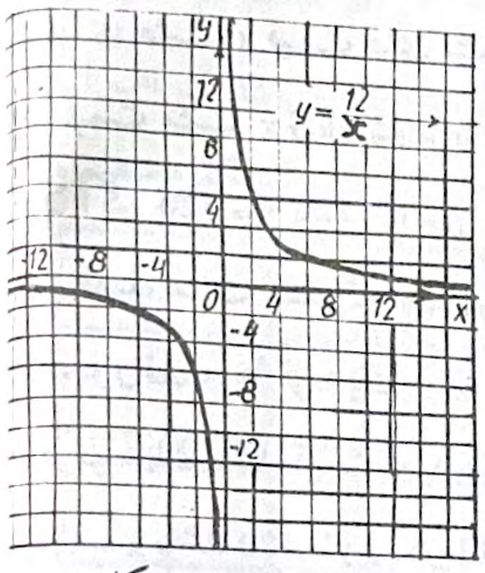
چون صفر ( 0 ) عنصر ست دومین بوده نمیتواند. بنابران در گراف نقطه های وجود ندارد که فصله شان صفر باشد. یعنی گراف این تابع محور y را قطع نمیکند، همچنین به هیچ قیمت x قیمت y مساوی به صفر شده نمیتواند بنابران گراف این تابع محور x را هم قطع نمیکند . به قیمتهای مثبت x قیمت های مثبت y موافقت میکند . به هر اندازه یی که قیمت مثبت x زیاد شود به همان اندازه قیمت y کم میشود مثلاً اگر $x=120$ باشد $y=0,1$ اگر $x=2400$ باشد $y=0,0005$ میشود، پس فصله مثبت نقطه گراف هر قدر که زیاد باشد آن نقطه همان قدر به محور فصله ها نزدیك میشود. وقیمت مثبت x هر قدر که به صفر نزدیك باشد قیمت y به همان اندازه زیاد میشود . مثلاً اگر $x=0,03$ باشد $y=400$ واگر $x=0,000001$ باشد $y=12000000$ میشود .

نقاطی که کمیات وضعیه آنها منفی است نظر به مبدا کمیات وضعیه متناظر نقاطی اند که کمیات وضعیه آنها مثبت است. گراف تابع $y=\frac{21}{x}$ که در شکل (14) نشان داده شده است در حجره اول و سوم واقع میگردد .

اگر تابع به شکل $y=\frac{a}{x}$ داده شده با شد و $a<0$ باشد. به قیمتهای مثبت x قیمتها ی منفی y موافقت مینمایند و بر عکس به قیمتهای منفی x قیمتهای مثبت y موافقت میکنند. در شکل (15) گراف تابع $y=\frac{-12}{x}$ را رسم

شده است، که در حجره دوم وچارم واقع شده است. به صورت عموم تابعی که بشکل $y=\frac{a}{x}\ (x\neq 0)$ داده شده باشد گراف آن خط منحنی است که از دوشاخه تشکیل شده است. این شکل را هایپر بولا مینا مند.




شکل (15)

سوالات.

137ـ گراف تابع $y=\frac{8}{x}$ را رسم کنید.

138ـ گراف تابع $y=\frac{6}{x}$ را رسم کنید.

( a ) از روی گراف شکل (15) . $y(1)$ , $y(1,5)$ , $y(2)$ , $y(3)$ را در یافت کنید.

( b ) به قیمهای مسافه های عددی x

(1,3) ,(1,5;6) قیمت مسافه های عددی y را بدست آورید.

139ـ گراف تابع $y=\frac{-8}{x}$ را رسم نمایید. آیا نقاط A(−4;−1) ,B(0,0) ,C(0,01 ;−400) و $D\left(16\ ;-\frac{1}{4}\right)$ به گراف مذکور تعلق دارند؟

140ـ مساحت یك مستطیل که اضلاع آن x cm و y cm اندمساوی به $15\ cm^2$ است y را ازجنس x افساده نموده رابطه بین x و y را تعیین کرده وگراف آنرا رسم کنید.

141ـ موتری به سرعت 10km/h حرکت نموده و مسافه یی را در 2 ساعت و 30 دقیقه طی مینماید. اگرسرعت آن 2km/h زیادگردد آیا راه بازگشت را در 2 ساعت طی کرده میتواند؟

142ـ جمله «مجموع اعداد a و b به حاصل ضرب آنها مساوی است.» رامدنظر بگیرید. کدامین قیمت جوره های مرتب (a;b) که عبارت از (11;1,1) ,(2,2) ;(5;1,25) ,(7;1, 3) ,(6;1,2) اند. جملهٔ فوق را صدق میکند؟

## تابع خطی :

### 15. تعریف تابع خطی

موتری ازایستگاه A شروع به حرکت نموده وبه فاصله 20km ازان دورشده است. اگرموتر مذکور به‌سرعت 50 km/h حرکت کند بعد از t ساعت ازایستگاه A به کدام فاصله s قرارمیگیرد؟

واضح است که در t ساعت موتر 50t کیلو متر مسافه راطی میکند. پس بعد از t ساعت ازایستگاه A به‌فاصله (20+50t) کیلو متر مسافه واقع میشود :

یعنی : $s=50t+20$ که در اینجا $t$ دِا است :

چون به هر قیمت $t$ تنها یك قیمت $s$ موافقت میکند پس رابطه $s=50t+20$ یك تابع است . شکل عمومی این قسم توابع $y=ax+b$ میباشد .

> هر تابعی که به شکل $y=ax+b$ آمده بتواند به نام تابع خطی یاد میشود .

چون به تمام قیمتهای $x$ قیمت این تابع معین است پس دومین تابع مذکور و همچنان رنج آن راست تمام اعداد حقیقی تشکیل میدهد .

سوالات :

143 ـ اگر مجموع زوایای داخلی یك مضلع محدب $n$ ضلعی را به $s$ نشان بدهیم دراینصورت $s=180°\ (n-2)$ میشود .

به قیمت $n=4, n=5, n=10$; $s$ چند درجه میشود ؟

آیا مضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن $900°$ باشد؟

آیا تابع مربوط یعنی ( $s$ ) تابع خطی است ؟ ست دومین این تابع کدام است ؟

144. در یك حوض $140m^3$ آب است و در هر ثانیه $0,1m^3$ آب از آن میریزد . اگر بعد از $t$ ثانیه درحوض مذکور $v$ مترمکعب آب باقی بماند رابطه بین $v$ و $t$ را بنویسید. آیا این رابطه بین $t$ و $v$ یك تابع خطی است ؟



145 ـ از جمله توابع ذیل کدام آنها خطی اند ؟ ضریبهای $a$ و $b$ یی هریك از توابع خطی آنها را نشان دهید .

$y=-x+2$ ; $y=\frac{5}{x}$ ; $y=2x^2+8$;

$y=-3x$ ; $y=\frac{x}{5}$ ; $y=5(3-x)$ .

146 ـ تابع توسط رابطه $y=2x-5$ داده شده است . اگر:

(a) $X=\{-1;0,1;2;3\}$ (b) $X=\left\{\frac{-2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, 0, \frac{5}{6}\right\}$

باشند رنج تابع را در یافت کنید

147 ـ آیا تابع که توسط رابطه $y=0,4x-6$ داده شده است تابع خطی است ؟ جدول ذیل را تکمیل کنید .

| x | −2 | -0,75 | 0 | 1,15 | 2,5 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | | | −4 | −2 | 0 |

148 . توابع $x$ $y=-\frac{1}{3}$ و $y=0,2x$ را رسم کنید .

149 . برای کدام قیمت ضریب $k$ تابعی که توسط رابطهٔ $y=kx$ داده شده باشد گراف آن از نقطه $(2;3,0)\ 4$ میگذرد ؟

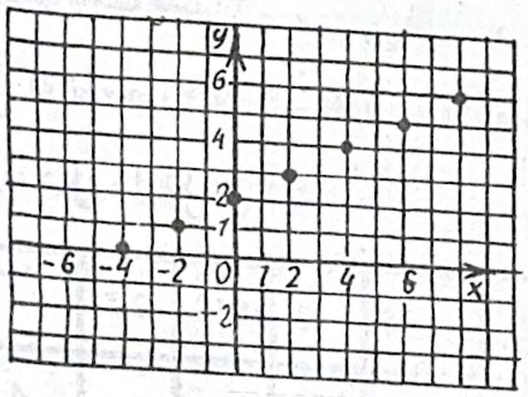
## 16 . گراف تابع خطی

میخواهیم گراف تابع $y=0,5x+2$ را رسم کنیم . قیمتهای

مربوطه x و y را توسط جدول ذیل نشان میدهیم :

| x | −6 | −4 | −2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

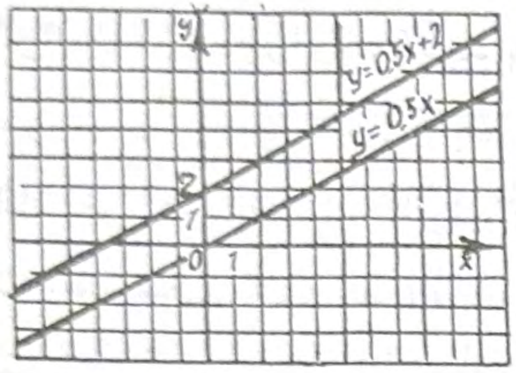
اکنون نقاط را بروی کاغذ گراف نشانی کرده و گراف مربوط آنها را رسم میکنیم . به آسانی دیده میشود که این نقاط بالای یک خط مستقیم واقع میشوند شکل ( 16 ). ازطرف دیگر ما میتوانیم گراف $y=0,5x+2$ را با گراف $y=0,5x$ مقایسه نمائیم .




شکل (16)

دیده میشود که برای هر قیمت کیفی x قیمت افاده $0,5x+2$ از قیمت افاده $0,5x$ ، **0** به اندازه 2 واحد زیادتر است لذا ترتیب هر نقطه گراف $0,5x+2$ از ترتیب گراف $0,5x$ به اندازه 2 واحد زیادتر میباشد . پس اگر از نقطه (0;2) یك خط موازی به خط $(0,5x)$ رسم کنیم خط مستقیم که گراف آن $y=0,5X+2$ است به دست میاید شکل (17). به صورت عمومی هر تابع که به شکل $y=ax+b$ باشد گراف آن خط مستقیم است.

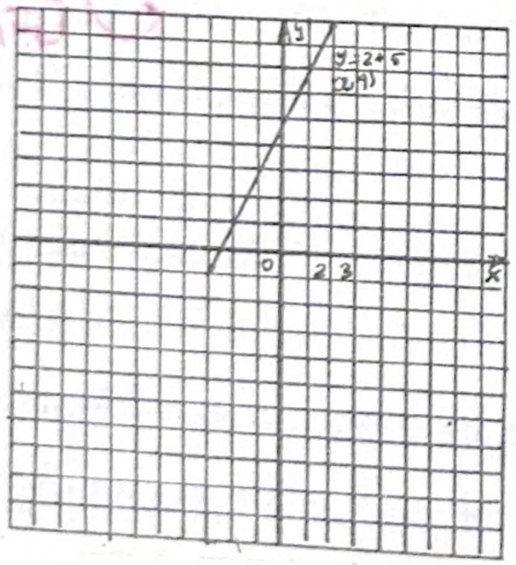





شکل (17)

چون برای رسم نمودن یك خط مستقیم دانستن دو نقطه آن کافیست لذا برای رسم نمودن گراف مستقیم $y=ax+b$ اولا دو نقطه آنرا دریافت نموده وسپس آنها را با هم وصل میکنیم گراف مطلوب به دست میاید .

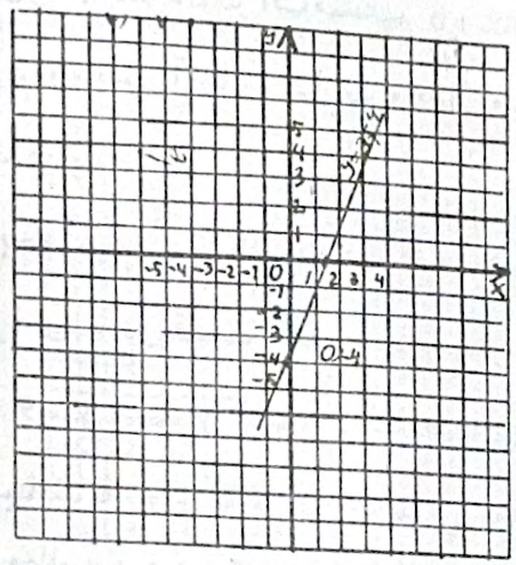
مثلاً اگر ما بخواهیم که گراف مستقیم $y=2x+5$ را رسم کنیم در اینصورت برای x دو قیمت کیفی میدهیم. فرضاً $x_2=-3, x_1=2$ که در اینصورت $y_2=-1, y_1=9$ میشود . نقاط $A(2;9)$ ، $B(-3;-1)$ را که به دست میایند به روی کاغذ گراف نشانی نموده وصل میکنیم. در نتیجه گراف مطلوب به دست میاید شکل (18). به همین ترتیب




شکل (18)

اگر بخواهیم کم گراف $y=3x-4$ را رسم نماییم به x دو قیمت دلخوا فرضاً $x_1=0$ و $x_2=4$ میدهیم که قیمت y بالترتیب $y_1=-4$، $y_2=8$ میشود این نقاط یعنی $A(0;-4)$، $B(4;1)$ را روی کاغذ گراف نشانی نموده و با هم وصل میکنیم. اینك خط AB که حاصل میشود گراف مطلوب است.

شکل (19)



سوالات

150. گراف تابع $y=0,8x-4$ را رسم کنید و به سوالات ذیل جواب بدهید:

(a) در صورتیکه x قیمت های 5 ; 1,5 را بگیرد y کدام قیمتها را بخود میگیرد ؟

(b) به کدام قیمت x قیمت y مساوی به 4 میشود ؟

(c) عددی را دریافت کنید که تصویرش 4- شود .



151. گراف تابع $y=1,5x+6$ را رسم کنید. از روی گراف به سوالهای ذیل جواب بدهید:

(a) به کدام قیمتهای x قیمتهای y مساوی به 0 ; 3- ; 3 میشود ؟

(b) ست قیمتهای x را در یافت کنید که بنا بر ان قیمتها (1) تابع قیمتهای منفی بگیرد؟ (2) تابع قیمتهای مثبت را اختیار نماید، (3) تابع قیمتهای از 3 کمتر را بگیرد.

152. گراف تابع $y=x-3$ را رسم نمایید. از روی گراف آن ست قیمتهای x را در یافت کنید که برای آنها قیمت افاده $x-3$

(a) مساوی به 4 باشد ،

(b) مساوی به 2- باشد ،

(c) از 4 زیادتر باشد ،

(d) از 5 کمتر باشد .

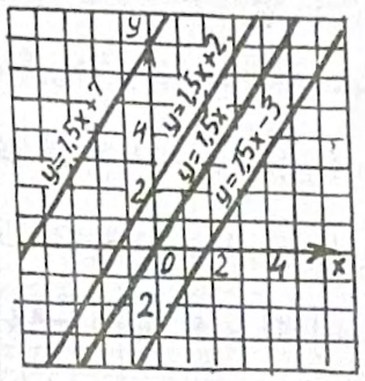
153. بدون ترسیم گراف تابع $y=1,2x-7$ واضح نمایید که کدامین نقاط $A(10;5)$ ; $B(15;11)$, $C(-15;-10)$, $B(-4;-53)$ روی گراف تابع مذکور واقع شده میتواند ؟

## 17. - ضریب زاویوی یا میل خط مستقیم

دردروس بیشتر ملاحظه نمودید که گراف توابع $y=ax$، $y=ax+b$ خطوط مستقیمی اند که باهم موازی میباشند. از این معلوم میشود که تمام خطوط مستقیمی که شکل $y=ax+b$ را داشته و قیمتهای a

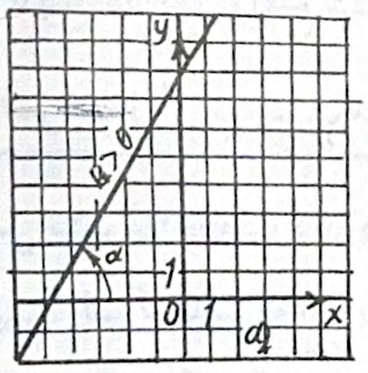
آنها باهم مساوی باشند باهم موازی میباشند .

چنانچه گرافهای توابع $y=1,5x;y=1,5x+2;y=1,5x+7y=1,5x-3$;
که در شکل های ( 20 ) رسم شده اند باهم موازی میباشند.




شکل(20)

وسعت زاویه یی که خط $y=ax+b$ با محور x میسازد مربوط به a میباشد. اگر a عدد مثبت باشداین زاویه حاده است شکل ( 21 ). واگر عدد منفی باشد این زاویه منفرجه است ( شکل 22 ) عدد a را ضریب زاویه یی یا میل خط مستقیم مینامند در شکل (23) رابطه $y=ax+b$ اگر $x=0$ باشد $y=b$ میشود پس گراف این خط محور را در نقطه که فاصله آن صفر و ترتیب آن b باشد قطع میکند .




شکل(21)




شکل(22)



## سوالات

154-خطوط ذیلرا رسم کنید $y=-0,5x, y=2x+4, y=2x-3, y=2x$

$y=-0,5x+3, y=-0,5x-2$

در خطوط فوق میل (ضریب زاویه یی) و ترتیب مربوط نقطهٔ تقاطع آنهابامحور y دریافت کنید .

155 - گرافهای خطوط ذیل را رسم $y=-2x-2, y=0,5x-2$

$y=-4x+1$ میل هریك از ین خطوطرا دریافت نمایید :

آیا قبل از رسم نمودن گراف خطوط مربوط توابع فوق گفته میتوانید که خطوط مذکورمحور y را در کدام نقطه قطع میکند؟

156 - توابع ذیلرا در نظر بگیرید :

$y=4,3x-7, y=1,2x+6$

$y=-2,4x+9,6, y=-5x+2$

گراف توابع فوق رارسم کنید و میل خطوط مذکوررا به دست آورده و تقاطع آنها را با محور y دریافت کنید .

157 - تابع $y=ax+6$ داده شده است باکدام قیمتهای a این خط باخطوط $y=-8,2x, y=x+3,7, y=100x-1, y=-3x+7$ موازی میشود؟

158 - باکدام قیمتهای k خط مستقیم $y=kx-1$ از نقاط (a) M(20;0) (b) P(-4;14) میگذرد؟

# فصل سوم

## سیستم معادلات دو مجهوله

### 18. معادلات دو مجهوله

تساوی $3x+2y=5$ جمله جبریست که دارای دو مجهول x و y میباشد. این نوع مساویها را معادله دومجهوله مینامند. هریك از جوره های مرتب $(0;2,5);(1;1);(4;-1)$ که اگر مرکبه اول آن به جای مجهول x و مرکب دوم آن به جای مجهول y بیانیه الجبری $3x+2y=5$ نوشته شوند آنرا به مساوات حقیقی تبدیل میکنند. این جور ههای مرتب مذکور حل معادله $3x+2y=5$ گفته میشود. در حالی که جوره مرتب $(3;1)$ که بیانیه الجبری $3x+2y=5$ را بمساوی حقیقی تبدیل نمیکند، پس حل آن گفته نمیشود.

ست آن جور ههای مرتبی که اگر به جای مجهولها در معادله گذاشته و معادله را به مساوات حقیقی تبدیل می کنند ست حله آن معادله نامیده میشود. برای پیدا کردن ست حله معادله $3x+2y=5$



اولاً میتوانیم که یك مجهول را توسط مجهول دیگر افاده کنیم. چنانچه در این معادله y به واسطه مجهول x طوری افاده میشود که حد $3x$ را با تغییر علامه به طرف راست معادله انتقال میدهیم. یعنی $2y=-3x+5$ از تقسیم کردن هردو طرف معادله فوق به 2 معادله ذیل حاصل میشود:

$y=-1,5x+2,5$

اکنون یك قیمت دلخواه x را انتخاب نموده و آنرا در معادله $y=-1,5x+2,5$ گذاشته و به اساس آن y را حساب مینمائیم.

مثلاً اگر $x=\frac{1}{3}$ انتخاب شود در این صورت $y=2$ میشود

زیرا: $y=-1,5\frac{1}{3}+2,5=2$

واگر $x=2$ باشد در اینصورت $y=-0,5$ میشود.

زیرا: $y=-1,5\cdot 2+2,5=-0,5$

دیده میشود که حلهای معادله $y=-1,5x+2,5$ باست حلهای معادله $3x+2y=5$ مساویست.

مانند جور ههای مرتب $(2;\frac{1}{3})$ و $(2;-0,5)$ که حلهای معادله $3,x+2y=5$ میباشند یکعده جوره های مرتب دیگری نیز موجود اند که قیمت متحولهای x و y آنها معادله $3x+2y=5$ را صدق مینمایند. معلوم میشود که تعداد این نوع جوره های مرتب نهایت زیاد است، پس تعداد عناصر ست حله معادله $3x+2y=5$ بی نهایت میباشد.

## سوالات .

159 . نشان دهید که جوره مرتب اعداد $x=1\frac{5}{7}$ ، $y=5\frac{2}{7}$ حل معادله $x+y+7=5$ شده‌میتواند . وهم دو حل دیگری این معادله را تعیین کنید .

160 . قیمت دو متحول x ، y در جدول ذیل داده شده است :

| x | —5 | —4 | —3 | —1 | 0 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 3 | 4 | 1 | —5 | 4 | —3 | 0 |

کدام یکی از قیمتهای جوره مرتب ( x;y ) مربوط جدول حل معادلات زیرین میباشند .

(a) $x^2+y^2=25$ ; (b) $x^2-y^2=7$ ?

161 . در معادله $2u+7v=4$

( a ) متحول v را بواسطه u افاده کنید .

( b ) متحول u را بواسطه v افاده کنید .

162. درمعادله های ذیل متحول y را به واسطه x افاده کرده سه سه حل آنها را پیدا کنید . (a) $3x+2y=1$; (b) $5y,-2x=7$

163 . یك معادله دومجهوله را ترتیب دهید که جور همای مرتب ذیل حله های آن باشد .

(a) (2;4,5) (b) (—1;2).



164 . آیا معاطه های ذیل حل دارد ؟ (P و q متحولها اند.)

(a) $P^2+q^2=-4$ ، (b) $2P-q+2=2P-q+7$

165 . اگر شاگردی n جلد کتابچه رافی جلد 2 افغانی و m دانه قلم را فی دانه 3 افغانی خریده بتواند معلوم کنید به 19 افغانی چند جلد کتابچه وچند دانه قلم خریده میتواند . ( تمام حلهای سوال را پیدا کنید.)

166 . گراف توابع ذیلرا رسم کنید :

(a) $y=-1,08x+4$ ,

(b) $y=2,7x$ .

167 . از افاده های ذیل کدام یکی از آنها تناست مستقیم و کدام یکی از آنها تناسب معکوس شده میتواند ؟

(a) $y=-1,27\,x$, (b) $y=\frac{7,5}{x}$ , (c) $y=3x+4$, (b) $y=-\frac{5}{x}$

168 . رابطه P باست جور همای مرتب داده‌شده گراف رابطه رارسم نموده و بگویید که آیا این رابطه P یك تابع شده میتواند ؟

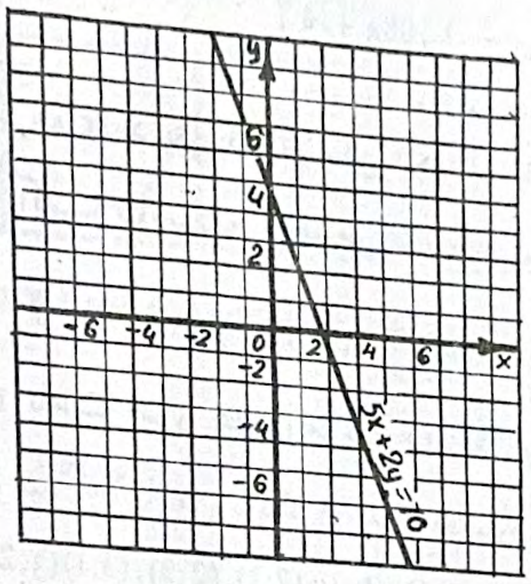
{ (1;1) ، (1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1) (3;2) , (3;3) }

## 19 . تابع خطی

هر یك از معادله‌های $2x+0.y=12$ ; $0x+3y=7,5$ ; $5x+2y=10$ شکل معادله عمومی $ax+by=c$ را دارد. هر معادله که به شکل $ax+by=c$ باشد طوریکه a ، b ، c اعداد ثابت و x و y متحولهانه، معادله خطی نامیده میشود .

برای ترسیم گراف معادله خطی اقلاً باید یکی از ضرب

های a و b آن خلاف صفر باشد. اکنون اگر معادله $5x+2y=10$ را در نظر گرفته و بخواهیم که متحول y را به واسطه x افاده نمایم در این صورت حاصل میکنیم که $y=-2,5x+5$ میشود. معادله $5x+2y=10$ یا معادله $y=-2,5x+5$ عبارت از تابع خطی بوده گراف آن خط مستقیم میباشد. مانند شکل (23).




شکل(23)

معادله معین شده $ax+by=c$ را در نظر میگیریم.

هر گاه $b\neq 0$ باشد معادله $ax+by=c$ شکل $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ را میگیرد. پس برای $b\neq 0$ قیمتهای دلخواه a (وهم $a\neq 0$) معادله $ax+by=c$ تابع خطی را معین میکند گراف آن عبارت از خط مستقیم است و هر گاه $b=0$ و $a\neq 0$ باشد گراف معادله $ax+o\cdot y=c$ نیز عبارت از خط مستقیم است.

مثلاً در معادله $2x+0.y=12$ همان جوره های مرتب اعداد را

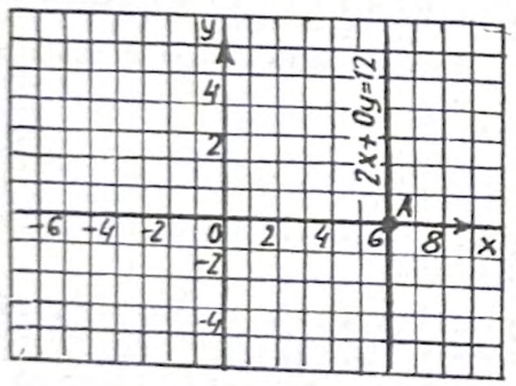


صدق مینماید که برای تمام قیمتهای دلخواه y قیمت x آن مساوی به 6 است. مانند جوره های مرتب

$(6;0,01)$ , $(6;-18)$ , $(6;1004)$ پس گراف معادله $2x+0,y=12$ ست نقاطیست که در آن اپسیس شان مساوی به 6 بوده اردنیت های شان اعداد دلخواه است. جوره های مرتب مختصات نقاط خط مستقیمی میباشند که از نقطه $(6;0)$ گذاشته و موازی به محور y است. مانند شکل 24

> در نتیجه. گراف معادله $ax+by=c$ که اقلاً یکی از ضریبهای a یا b آن خلاف صفر باشند عبارت از خط مستقیم است.

مثال، میخواهیم معادله $x+4y=12$ را رسم کنیم.



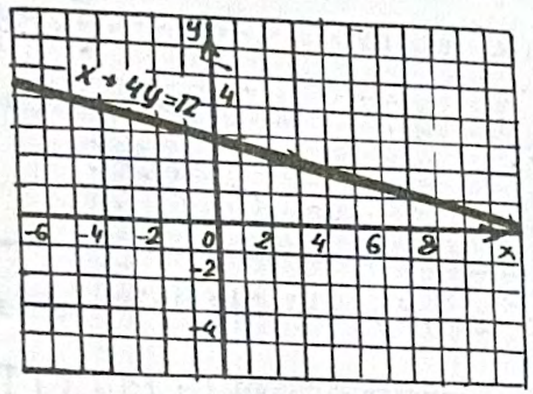

شکل (24)

حل: دیده میشود که درین معادله ضریبهای a و b خلاف صفر است و گراف آن عبارت از خط مستقیم میباشد. از اینکه موقعیت خط مستقیم را توسط دو نقطه نیز تعیین کرده میتوانیم، بنابران برای ترسیم گراف کمیات وضعیه دو نقطهٔ کیفی را تعیین مینمائیم.

مثلاً به x دو قیمت دلخواه راانتخاب نموده بنابرا ین قیمتهای x در مقا بل قیمتها ی y مر بوط آنهارا از معادله حساب مینمائیم. یعنی اگر $x=0$ انتخاب شود $y=3$ میشود .

اگر $x=4$ انتخاب شود $y=2$ میشود .

اکنون درمستوی کمیات وضعیهٔ نقاط کمیات وضعیه $A(0;3)$، $B(4;2)$ رانشانی کرده وآنها راتوسط خط مستقیم باهم وصل میکنیم درنتیجه گراف مطلوب حاصل میشود. مانند شکل 25.




شکل (25)

هر گاه $a=b=0$ باشد گراف معادله خط مستقیم نمیباشد ک درحقیقت $c=0$ میشود .

در اینصورت معادله $0.y=0.x+0$ راحاصل میکنیم که حل آن تمام اعداد جوره های مرتب دلخواه بوده وگراف آن تمام سطح مستوی میباشد. وقتی که $c\neq 0$ باشدمعادله حل ندارد. و میگوییم کهست حل آن ست خالیست.

سوالات

169. آیا هریک ازبیانیه های ذیل ، توابع از $y\to x$ شده



میتوانند ؟ گراف آنها را رسم کنید : (a) $x+y=6$ ; (b) $2x-y=8$.

170. بدون ترسیم گراف توابع ذیل مختصات نقاط تقاطع آنهارا بامحورهای کمیات وضعیه دریافت کنید: (a) $3x+2y=6$ ; (b) $x-5y=12$

171. (a) اگر اپسیس یک نقطه گراف تابع $3x-2y=5$ مساوی به 0,4 باشد اردنیت این نقطه را پیدا کنید.

(b) اگر اردنیت یک نقطه گراف تابع $x-2y-1=0$ عبارت از 0,5 - باشد اپسیس این نقطه را پیدا کنید .

172. بالای خط اعداد مسافه بین هرجوره از نقاط رادریافت کنید:

(a) A (5) ، B (9) ، (b) C (-7) و D (2) را.

173. افاده هریک از سوالات ذیل راترتیب داده آنهارا حساب کنید.

(a) فرق اعداد $12\frac{1}{13}$ و حاصل ضرب اعداد 8 و $\frac{1}{12}$ را،

(b) حاصل ضرب مجموع وفرق اعداد . 35,37,8 را.

174. بدون ترسیم گراف درکمیات وضعیه نقاط تقاطع معادله: $0,3x-0,4y=12$ را (a) بامحور اپسیس (b) بامحور اردنیت پیدا کنید .

175. عدد دورقمی را پیداکنید که پنج چند مجموع ارقام خودش باشد.

## 20. سیستم معادلات خطی

- طریق مختلف حلهای سیستم معادلات دو مجهوله

سیستم معادلات خطی دو مجهوله ایرادرنظر میگیریم که درهریک

از آنها اقلایکی از ضریبهای آن خلاف صفرباشد . حل گرافی این نوع معادلات عبارت ازیافتن کمیات وضعیه نقاط مشترک دو خط مستقیم درمستوی کمیات وضعیه است : مامیدانیم که دوخط مستقیم درمستوی کمیات وضعیه یاهمدیگر را قطع میکند یا با هم موازی میباشند ( درحالت موازی بودن دوخط مستقیم یا نقطه مشترک ندارند یا باهم منطبق میشوند) اکنون هریک ازین حالتها را ذیلاً مطالعه میکنیم :

حالت اول - سیستم معادله های ذیلرا در نظر میگیریم :

$$\begin{cases} 3x + y = -11 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

حل : درهریک ازمعادلات فوق y را به واسطه x افساده کرده وچنین می نویسیم :

$$\begin{cases} y = -3x - 11 \ldots\ldots (1) \\ y = 0,5x - 4 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

دیده میشود که ضریبهای زاویوی سیستم معادله های خط مستقیم مختلف اند ، یعنی از معادله ( 1 ) ، 3 واز معادله ( 2 ) عبارت از $0,5$ است.

پس خطهای مستقیم مربوط آنها همدیگررا قطع میکنند. کمیات وضعیه نقطه تقاطع این دوخط حله این سیستم معادلات میباشند .

حالت دوم - سیستم معادلات ذیلرا درنظر میگیریم :

$$\begin{cases} 3x-2y=12 \ldots\ldots (1) \\ 6x-4y=11 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$



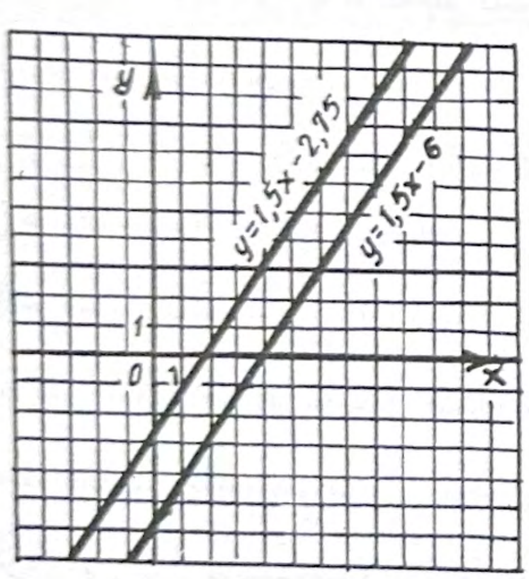
درهریك ازمعادلات y را به واسطه x افاده کرده، حاصل مینمایم.

$$\begin{cases} y=1,5x-6 \ldots\ldots (3) \\ y=1,5x-2,75 \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

در رابطه های ( 3 ) و ( 4 ) دیده میشود که ضریبهای زاویوی هردومعادله باهم مساوی اند . پس خطهای مستقیم مربوط آنها باهم موازی اند .

خط مستقیم $y=1,5x-6$ محور y را در نقطه $(0;-6)$ وخط مستقیم $y=1,5x-2,75$ محور را دو نقطه $(0,-2,75)$ قطع میکنند. درنتیجه این دوخط مستقیم نقطه مشترك ندارند، مانند شکل 26 . بنابران سیستم معادلات رابطه های ( 1 ) و ( 2 ) حل ندارد .

به عبارت دیگر ما میگوییم که ست حله سیستم فوق ست خالی است.




شکل 26

هرگاه اطراف معادله اولی سیستم را به 2 ضرب کنیم معادله

$6x-4y=24$

حاصل میشود. دیده‌میشود که طرف چپ معادله‌ها باهم مساویست ، یعنی باهر قیمت همزمان x و y طرف چپ سیستم باهم‌مساوی میشوند در حالی که طرف راست آنها باهم‌مساوی‌نبوده یعنی 24و 11میباشد .

در نتیجه گفته میتوانیم که سیستم معادلات .

$$\begin{cases} 6x-4y=24 \\ 6x-4y=11 \end{cases}$$

حل ندارد.

بعباره دیگر میگویم که ست حله معادلات اولی ست خالی است.

حالت سوم ـ سیستم معادلات

$$\begin{cases} 5x-7y=16 \quad \ldots\ldots (1) \\ 20x-28y=64 \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

حل . اگر اطراف معادله ( 2 ) را به 4 تقسیم کنیم سیستم ذیلرا حاصل میکنیم . ذیلرا در نظر میگیریم:

$5x-7y=16$ ..... (3) $5x-7y=16$ ..... (4)

دیده میشود که این سیستم معادلات از دومعادله مساوی تشکیل‌شده که‌گرافهای آنها باهم منطبق میشوند، بنابران کمیات وضعیه هر نقطه دلخواه گراف برای هر یك از معادلات فوق صدق مینماید . یعنی تمام‌نقاط حل‌آنها میشوند. پس‌حله‌سیستم فوق‌بی‌نهایت‌است. بطور خلاصه میگوییم اگردرهر یك ازسیستم‌معادلات خطی دو متحوله بیکه اقلاً یکی‌ازضریبهای‌آنها مساوی به صفرنباشد این‌سیستم معادلات یاهیچ حل‌نداردویا دارای بی‌نهایت حلها میباشد .



## سوالات

176ـ درهر یك ازمعادله های ذیل y را توسط x افاده کرده و تعیین کنید که کدام‌یکی از آنها ( a ) یك‌حل‌دارد( b ) بی‌نهایت حل دارد ( c ) هیچ حل ندارد .

(a) $\begin{cases} y-6x=0 ; \\ x-y=-2; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x+8y=24; \\ x+12y=36; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 15,x-4y=1; \\ 5x+2y=-2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0,2x+0,3y=0 \\ x+1,5y=4 ; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x=11-3y; \\ 3y=11-2x ; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x-3y=7 ; \\ 5x+2y=26. \end{cases}$

177 . از گراف مربوط معادلات‌ذیل استفاده کرده‌واضح کنید که چرا سیستم مذکوردارای یك حل است؟

$$\begin{cases} 3x+0y=15 \\ x+y=7 \end{cases}$$

178 . معادله $5x-y=2$ داده شده‌معادلاتی را ترتیب بدهید که‌با معادله‌داده‌شده یك‌سیستم‌راطوری تشکیل‌دهند که‌سیستم‌های‌مذکور (a) یك‌حل‌داشته باشد، (b)حل نداشته باشدو (c) بی نهایت‌حلها داشته باشد.

179 . ساده کنید . (a) $(\frac{4}{15}+\frac{7}{12}-\frac{19}{20})\cdot 2,5+0,25$

(b) $30+2,8\,(\frac{4}{25}-\frac{9}{25}-\frac{1}{6})$

## 21 . حالتهای خصوصی سیستم معادلات خطی

تاحال ماسیستم معادلات را توسط گراف حل میکردیم، ولی این طرز حل معادلات در اکثر مورد، مثلاً وقتی که کمیات‌وضیعه نقاط تقاطع از محورات کمیات وضیعه‌دور قرار داشته باشد عملی

شده نمیتواند. ( حل آن عملی نیست.) علاوه بر آن در بعضی مسایل نتیجه حل گرافیك آن دقیق تر نیست، بنابران ضروریست تا طرق دیگر حل سیستم معادلات جستجو گردد .

اینك در ذیل راه‌های دیگری حل سیستم معادلات را ارایه مینمایم:

اگر ضریب یکی از متحولهای سیستم دو معادله خطی مساوی به صفر باشد بدون ترسیم گراف آنها را مثل ذیل حل کرده میتوانیم :

مثال ـ میخواهیم سیستم معادلات ذیلرا حل کنیم:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 2 \ldots\ldots (1) \\ 2x + 0 \cdot y = 20 \cdot \ldots (2) \end{cases}$$

همه عناصرمت حله، معادله $2X + 0 \cdot y = 20$ که شکل (10;q) را داشتبه باشد (که درآن q اعداد دلخواه‌است ) صدق مینما یند. بجز از جور همهای مرتب شکل متذکره کدام جورهٔ مرتب دیگری معادله مذکوررا صدق نمی کند .

ازست جور همهای مرتب شکل (10;q) ماآن جورهمهای مرتب را جدا میکنیم که معادله (1) سیستم را صدق نمایند. غرض رسیدن به این مطلب در معادله $3x - 7y = 2$ قیمت متحول x یعنی 10 را وضع نموده وقیمت y را حساب میکنیم .

$$3 \cdot 10 - 7y = 2$$
$$30 - 7y = 2$$
$$-7y = 2 - 30$$
$$-7y = -28$$
$$7y = 28$$
$$y = 4$$



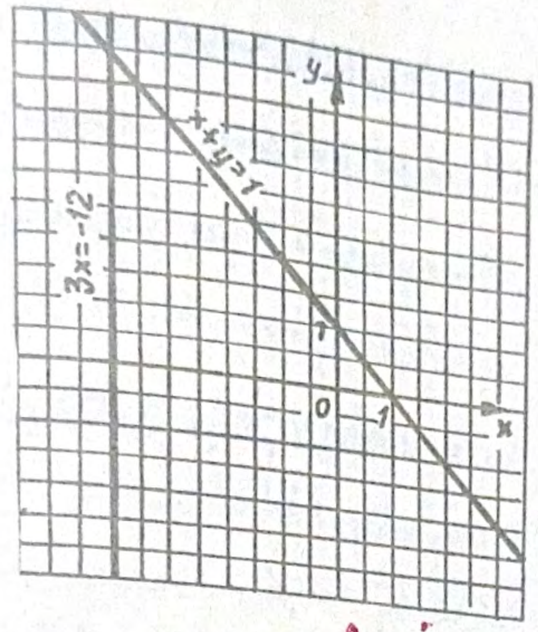
از نتیجه این حل جوره مرتب (10;4) حاصل میشود که هردو معادله سیستم را صدق میکنند. یعنی حل سیستم داده شده میباشد. از این جا گفته میتوانیم که سیستم مذکوردارای یك حل (10;4) است .

مثال 2ـ میخواهیم سیستم معادلات :

$$\begin{cases} 3x = -12 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

را حل کنیم.

حل . معادله اولی سیستم دارای یك متحول x است، که به قیمت $x = -4$ به مساوات حقیقی تبدیل میشود. چون حل سیستم معادله دومتحوله جور همهای مرتب اعداد میباشد. دراینصورت ممکن است که متحول y در معادله اولی موجود نباشد. طوری که جور همهای مرتب اعداد شکل (4;q—) آنرا به مساوات حقیقی تبدیل کند . برای حل این مطلب معادله $3x = -12$ را شکل $3x + 0.y = -12$ که هرجوره مرتب دلخواه قیمت متحولهای x وy را به شکل (4;q—) حل آن میباشد مینویسیم . (دراینجا قیمت q اعداددلخواه است .) حال قیمت $x = -4$ را به معادله‌دوم سیستم گذاشته وقیمت حل آنرا که 5 میشود حاصل میکنیم. در نتیجه ست $\{(-4;5)\}$ که عبارت از یگانه‌حل سیستم است حاصل میشود .حل گرافیك این سیستم درشکل 27 نیز ارایه شده است .




شکل (27)

سوالات :

180- سیستم معادلات ذیلرا حل کنید .

(a) $\begin{cases} 0,x-9y=45 \\ 2x+3y=-35 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 5x-0,y=45 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x=-5 \\ x+2y=1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 2y+9=0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x=-2 \\ 9x+y=2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 4x-3y=12 \\ 5y=4 \end{cases}$

181 . حاصل جمع افاده ذیلرا پیدا کرده وقیمت افاده را در صورتی که $x=1,38$ ، $y=1,88$ باشند دریافت کنید .

$1,25x-2,3y-1,6x-5;4x+6,5y+1,55x,$

22-حل سیستم معادلات به طریق جمع

برای حل کردن سیستم معادلات خطی دو متحوله لازم است که دران ضریب متحولها خلاف صفر باشند. دراینصورت ازطرف به طرف جمع کردن معادلات داده‌شده معادله دیگری خطی‌دو متحوله



به وجود می آید، که این هم یکی ازطرزهای اساسی حل سیستم معادله های خطی دومجهوله میباشد . برای فهمیدن این مطلب سیستم معادلات ذیلرا درنظر میگیریم :

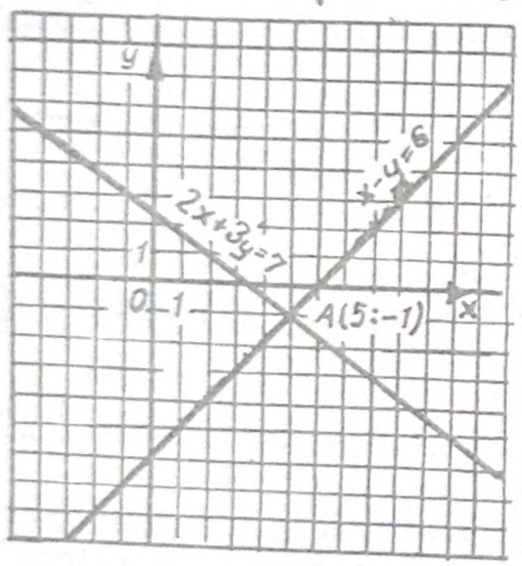
$$\begin{cases} 2x+3y=7 & \dots\dots (1) \\ x-y=6 & \dots\dots (2) \end{cases}$$

ازجمع کردن طرف به این سیستم معادلهٔ جدید ذیل حاصل میشود.

$$3x+2y=13 \quad \dots\dots (3)$$

هرگاه گراف خطهای مستقیم مربوط معادلات ( 1 و ( 2 )رسم گردد دیده میشود که این خطهای مستقیم یکدیگررا درنقطه $(5;-1)$ قطع مینمایند .

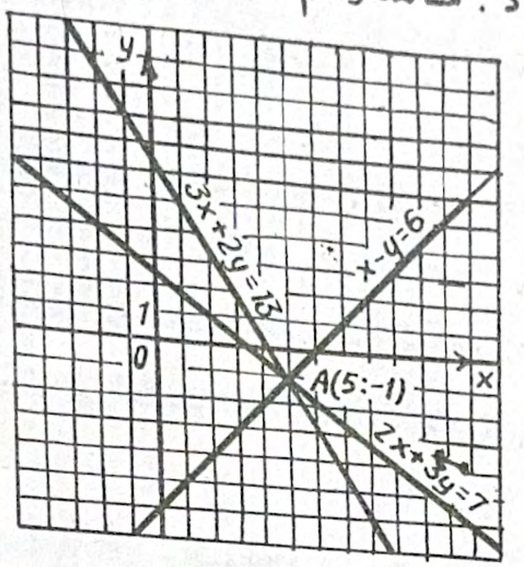
حالا می بینم که آیا خط مستقیم معادله ( 3 ) هم از نقطه $A(5;-1)$ میگذرد یاخیر !




شکل ( 28 )

با رسم کردن گراف معادله ( 3 ) به این حقیقت میرسیم که این جوره مرتب $(5;-1)$ نه تنها معادله ( 1 ) و ( 2 ) را صدق می کند

بلکه همین معادله (3) را نیز صدق کرده یعنی خط مستقیم معادله (3) نیز از همین نقطه $A(+5;-1)$ که نقطه تقاطع خطهای سیستم معادلات است میگذرد. مانند رسم




شکل 29)

از اینکه خطه مستقیم معادله (3) با هیچ یك از خطهای مستقیم داده شده منطبق نمیشود بنابران سیستم معادلات:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-y=6 \end{cases}$$

وسیستمهای: $\begin{cases} 3x+2y=13 \\ x-y=6 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$ دارای عین حل اند.

یعنی کمیات وضعیه نقطه $A(5;-1)$ تمام سیستمهای فوق را صدق میکند. متکی باحل مثال فوق خاصیت ذیلرا بیان کرده میتوانیم:

معادله ییکه از جمع کردن طرف به طرف یک سیستم معادلات خطی داده شده حاصل میشود باهر یک از معادلات داده شده وسیستم جدید راطوری تشکیل میدهد که ست حل هر یک از این سیستمهای



جدید باسیستم اولیه عین چیز میباشد.

اکنون با استفاده از این خاصیت سیستم معادلات خطی ذیلرا حل و توضیح میکنیم. مثال - میخواهیم سیستم معادلات:

$$\begin{cases} 2x+y=9 \ldots\ldots\ldots (1) \\ x-y=24 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

را حل کنیم.

حل: سیستم معادلات را طرف به طرف جمع کرده معادله ذیلرا حاصل مینماییم: $3x=33$ این معادله اخیر الذکر با معادله (2) سیستم معادلات داده شده سیستم ذیلرا تشکیل میدهد:

$$\begin{cases} 3x-=33 \ldots\ldots\ldots (3) \\ x-y=24 \ldots\ldots\ldots (4) \end{cases}$$

از معادله (3) سیستم حاصل شده دریافت میداریم که $x=11$ است. حال این قیمت x را در معادله (4) سیستم گذاشت $y=-13$ را حاصل میکنیم. در نتیجه ست $\{(11;-13)\}$ یگانه حل سیستم اولی داده حاصل میشود.

مثال 2 - میخواهیم سیستم معادلات:

$$\begin{cases} 5x+11y=8 \quad (1) \\ 10x-7y=74 \quad (2) \end{cases}$$

را حل نماییم.

حل: هرگاه سیستم معادلات فوق طرف به طرف جمع کرده شود سیستم معادلات شکل ساده را نمیگیرد، یعنی هیچ کدام از متحولها افنا نمیگردد. برای حذف کردن متحول x اطراف معادلهٔ اولی

را در ( 2 − ) ضرب میکنیم تا که ضریب متحول x در هر دو معادل متضاد گردند .

$$\begin{cases} -10x - 22y = -16 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$$

اینک از طرف به طرف جمع کردن معادلات سیستم فوق معادله $-29y = 58$ که ضریب x آن مساوی به صفر است حاصل میشود. معادله اول سیستم با معادله حاصله $-29y = 58$ سیستم جدید ذیلرا تشکیل میدهد:

$$\begin{cases} -29y = 58 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$$

اکنون از معادله اول سیستم حاصل شده $y = -2$ را حاصل میکنیم که از گذاشتن این قیمت y در معادله دوم سیستم $x = 6$ به دست میاید . در نتیجه یگانه حل سیستم اولی داده شده که عبارت از $\{(6;-2)\}$ است حاصل میشود .

مثال ۳ ـ میخواهیم سیستم معادله های:

$$\begin{cases} 9x + 7y = 7 \\ 2x - 3y = -85 \end{cases}$$

راحل کنیم.

حل : برای یافتن ست حلـه سیستم ، اطراف معادله اول را در 3 و اطراف معادله دوم را در 7 ضرب کرده سیستم معادلات ذیلرا حاصل میکنیم :

$$\begin{cases} 27x + 21y = 21 \\ 14x - 21y = -595 \end{cases}$$



از جمع کـردن طرف به طرف سیستم فـوق معادلۀ $41x = -574$ را حاصل میکنیم پس مینویسیم :

$$41x = -514$$
$$2x - 3y = -85.$$

$$\begin{cases} x = -14 \\ 2x - 3y = -85 \end{cases}$$

به قیمت $x = 14$ ازسیستم فوق $y = 19$ حاصل میشود .

دراین صورت ست حله سیستم داده شده عبارت از $\{(-14;19)\}$ حاصل میشود .

## سوالات

182. در گراف نشان دهید که سیستم معادلات $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 16 \end{cases}$

وسیستم معادلات

(a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x = 21 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x = 21 \\ x + y = 16 \end{cases}$ دارای عین حل اند .

درحالی که معادله $3x = 21$ مربوط سیستمهای a و b ازجمع کردن سیستم اولی داده شده حاصل شده است .

183. سیستم معادلات ذیلرا حل کنید .

(a) $\begin{cases} 2x + 11y = 12; \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 8x - 17y = -14; \\ -9x + 15y = 12; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x - 7y = 30; \\ 4x - 5y = 90; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x - 8y = 28; \\ 11 - 8y = 24. \end{cases}$

184 . سیستم معادلات ذیلرا حل کنید :

(a) $\begin{cases} 40x+3y=10; \\ 20x-7y=5; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 15x-3y=-3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 33x+42y=10; \\ 9x+14y=4; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 13x-12y=14; \\ 11x+18y=40; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 10x-9y=8; \\ 15x+2y=0,5 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 9y+8z=-2; \\ 4y+5z=-11; \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 0,75x+20y=95; \\ 0,32x-25y=7; \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 5u-6v=0; \\ 4u+17v=109. \end{cases}$

185 . سیستم معادلات ذیلرا به شکل $ax+by=c$ تبدیل نموده وحل کنید .

(a) $\begin{cases} 5(x+2y)-3=x+5; \\ 4(x-3y)-50=-y; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5(x-3y)-6=2x+1; \\ 3(x+6y)+4=9y+19. \end{cases}$

186 . سیستم معادلات ذیلرا حل کنید .

(a) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y-2=0; \\ 5x-y=56; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{1}{5}x-\frac{1}{6}y=0; \\ 5x-4y=2; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+11)=\frac{1}{3}(y+13)+2; \\ 5x=3y+8 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \frac{1}{4}(x-3y)=\frac{1}{3}(x+2y) \\ x+5y=12. \end{cases}$

187 . آیا سیستم معادلات ذیل حل دارد ؟

(a) $\begin{cases} 3x+5y=34; \\ 4x-5y=13; \\ 2x-y=-1; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 6x-6y=-15; \\ 13x+3y=-86; \\ 3x-y=-18. \end{cases}$

188 . معادله خط مستقیم $3x-2y=25$ داده شده است بدون ترسیم گراف معین کنید که :



(a) اپیستروا ردنیت کدام نقطه باهم مساوی اند ،

(b) اپیستروارد نیت کدام نقطه باهم متضاد اند ؟

## 22 . ترتیب سیستم معادلات خطی

بسیاری از مسائل به کمک سیستم معادلات حل شده میتوانند

برای این مطلب مثال های ذیلرا درنظر میگیریم .

مثال ۱ . برای کتاب خانه 10 گده کاغذ و 16 درجن قلم را به 110 افغانی خریدند هرگاه قیمت سه گده کاغذ از قیمت 4 درجن قلم 2 افغانی و20 پول زیادتر باشد قیمت یک گده کاغذ و یک درجن قلم را معلوم کنید .

حل: هرگاه قیمت یک گده کاغذ x افغانی و از یک درجن قلم y افغانی باشد دراینصورت 10 گده کاغذ و16 درجن قلم $10x+16y$ افغانی میشود که معادله ذیلرا ترتیب میدهیم: $10x+16y=110$ .... (1)

چون قیمت 3 گده کاغذاز 4 درجن قلم 2,2 افغانی زیادتر است لذا معادله ذیلرا ترتیب داده میتوانیم : $3x-4y=2,2$ .... (2)

حالا x و y باید قیمت های را بگیرد که معادله های ( 1 ) و( 2 ) را صدق کند. یعنی آنها باید سیستم معادلات $10x+16y=110$ $3x-4y=2,2$ راصدق نمایند .

بعد از حل نمودن سیستم معادلات $y=3,5, x=5,4$ راحاصل میکنیم. بایدبنا بر شرط مسئله قیمت های x و y اعداد مثبت

باشند ، درحالیکه جوابهای حاصله به شرط سوال مطابقت دارند .

مثال 2 : به هر یک از دو الماری چند چند جلد کتاب مانده شود درصور تیکه عملهای ذیلرا انجام داده بتوانیم ! اگر از الماری اولی 8 جلد کتاب گرفته و به الماری دوم بگذاریم تعداد کتابهای اولی $\frac{3}{2}$ ام حصه تعداد کتابهای الماری دومی گردیده واگراز الماری دوم 2 جلد کتاب رابه الماری اولی بگذاریم تعداد کتابهای الماری اولی دوچند الماری دومی شود ؟

حل : اگر تعداد کتابهای الماری اولی رابه x وازالماری دومی رابه y نشان بدهیم وقتیکه ازالماری اولی 8 جلد کتاب رابه الماری دوم میگذاریم در الماری اولی $(x-8)$ جلد کتاب ودر الماری دوم $y+8$ جلد کتاب میشود. نظربه شرط سوال میتوانیم بنویسیم

$$1,5(x-8)=y+8$$

بهمین ترتیب اگر 2 جلد کتاب را ازالماری دوم به الماری اولی بگذاریم درالماری اولی $x+2$ جلد کتاب ودر الماری دوم $y-2$ جلد کتاب میشود. چون درینصورت تعداد کتابهای الماری اولی دوچند تعداد کتابهای الماری دومی میشود پس میتوانیم بنویسیم :

$$x+2=2(y-2)$$

آن قیمتهای اعدادطبیعی x و y که سیستم معادلات :

$$\begin{cases} 1,5x-y=20 \\ x-2y=-6 \end{cases}$$

را صدق میکنند . جواب مطلوب اند .

بعد از حل سیستم معادلات $x=23$ و $y=14,5$ را حاصل میکنیم.



ازاینکه جواب مثال داده شده باید اعداد طبیعی باشند بنابران مثال فوق حل ندارد .

سوالات

189 . اگر مجموعه دوعدد 13 وفرق آنها مساوی به 2 باشد اعداد را پیدا کنید .

190 . محیط یک مستطیل 30 متر است طوریکه طول آن از عرضش به اندازه یک متر زیادتر میباشد . طول وعرض مستطیل مذکوررا دریافت کنید .

191 - دهقانی برای کشت کردن سبزیجات وغله جات 700 هکتار زمین جدا کرد . زمینی را که برای کشت کردن غله جات جدا کرد نظربه زمین که برای کشت سبزیجات جدا کرده 60 هکتار زیادتر بود. معلوم کنید که برای سبزیجات و غله جات چند ، چند هکتار زمین جدا شده است .

192 - اتحادیه کوپراتیف برای کشت وکار دو نوع تراکتوررا که مجموع آن 187 تراکتور میشوند فرستاد . اگر تعداد تراکتور های یک نوع آن نظربه نوع دیگر 23 تراکتور زیادتر باشد معلوم کنید که ازهر نوع آنها چند تراکتور فرستاده شده است .

193 - یک مخزن آب توسط دو نل از آب پر میشود طوریکه از نل اولی برای مدت 20 دقیقه واز نل دومی برای مدت 10 دقیقه آب

بریزد در مخزن 1200 لیتر آب جمع میشود . اگر نل اولی برای مدت 15 دقیقه ونل دومی برای مدت 7 دقیقه باز باشد درمخزن 885 لیتر آب جمع میشود. معلوم کنید که درهر دقیقه ازهر نل چند لیتر آب درمخزن میریزد .

194 - دوعددی را پیدا کنید اگر نصف عدد دوم به‌عدد اولی جمع شود 65 حاصل میشود .واگر $\frac{1}{3}$ حصه عدد اولی ازعدد دوم کم شود عدد اولی حاصل میشود . اعداد کدام اند ؟

195 - دو برادر 16دانه‌چارمغز دارند. اگر برادر کلان 6 دانه‌چارمغز رابه برادرخوردخودبدهدچارمغزهای‌برادرخوردسه‌برابر چارمغز های‌برادر کلان‌میشود. هر کدام‌ازبرادرهاچنددانه‌چارمغزدارند ؟

## سوالات عمومی فصل سوم

196 - کدام یکی‌ازجوره‌های‌مرتب‌ذیل که قیمت‌متحول‌های x و y اند حل معادله $x2-2y=7$ شده میتواند ؟

(a) $(5;8)$ ; (b) $(-4;-11,5)$;(c) $(-1;-3)$; (d) $(1,2;-2,78)$

197 - ست $A=\{4;9;25;36\}$ و $B=\{-6;-5;-3;-2;\ 2;3;5;6\}$ است . برای $x\varepsilon A, y\varepsilon B$ یک رابطه q را از A به طرف B به اساس افادهٔ $x=y2$ مدنظر گرفته دیاگرام تیری رابطه q را ارایه کنید .

198 - معادله های دومجهوله‌را ترتیب دهید که حل های آن جوره مرتب اعداد ذیل باشند



(a) $(10;3)$, (b) $(0;-7)$, (c) $(\frac{3}{5};-0,8)$,(d) $(-1,4,-3,6)$.

199 - درمعادلهٔ $ax+2y=8$ ضریب x را پیدا کنید طوریکه جوره مرتب $(1;2)$ حله آن باشد .

200 - برای قیمتهای $x=5;y=7$ قیمت‌ضریب(k)رااز معادله $kx-2y=1$ پیدا کنید .

201 - قیمت b را تعین کنید در صورتیکه جوره مرتب اعداد $(-3;8)$ معادله $5x+by=17$ را صدق نمایند :

202 - ست حل های معادله های ذیلرا پیدا کنید .

(a) $(x-2)^2+(y-5)^2=0$;(b) $x^2+(y+1)^2=0$;

203 - تمام جور ههای مرتب اعداد طبیعی را پیدا کنید که حله معادلات ذیل باشند :

(a) $x+y=11$ ; (b) $x+y=18$.

204 - ست تمام جوره‌مرتب اعداداولیه$(a;b)$ را پیدا کنید که معادله $a+b=42$ را صدق نمایند .

205 - آیا جورهٔ مرتب اعداد $(a;b)$ راکه دراینجا a عدد غیر تام و b عدد تام باشد موجود شده میتوانند که معادلات ذیلرا صدق نمایند .

(a) $8x+y=13$; (b) $x+8y=13$ ?

206 - دوحله هریک از معادلات ذیلرا پیدا کنید :

(a) $0.x+2y=-7$; (b) $3x+0\ y=-21$.

207 - کدام یک از معادلات ذیل تابع خطی را از $x \to y$ معین مینمایند :

(a) $1,7x = 3y = 0$; (b) $5x - 0,y = 4$;

(c) $x - 0,6y = 1,5$; (d) $0.x + 4y = 1,6$ ؟

208 - توسط ترسیم گراف نشان دهید که خطوط مستقیم $y = -x + 5$ $2x - y = 16$; و $x + 2y - 3 = 0$ یکدیگر را در یک نقطه قطع میکنند و هم کمیات وضعیه این نقطه را دریافت کنید .

209 - در یک سیستم کمیات وضعیه خطوط مستقیم $x + y = 6$، $y - 2x = 0$ را رسم کنید. و نقطه تقاطع آنها را بدست بیاورید.

210 - گراف معادلات ذیلرا رسم کنید : (a) $x + y = 6$;

(b) $-y = 0$; (c) $2x + 0 . y = 10$, (d) $0.x + 5y = -10$.

211 - در معادله $a x - y = 4$ قیمت ضریب a را طوری انتخاب کنید که گراف این معادله از نقطه $A(3;5)$ بگذارد .

212 - به کدام قیمت c گراف خط مستقیم $y = 2,5x + c$ از نقطه $K(2;-3)$ میگذرد ؟

213 - در معادله $y = ax + b$ قیمت های a و b را چنان تعیین کنید که گراف این معادله از دو نقطه که یکی آن مبدأ کمیات وضعیه و دیگرش نقطه $B(1;2)$ باشد بگذرد .

214 - گراف معادلات ذیلرا رسم کنید: (a) $x = y$ ; (b) $x = -y$



215 - سیستم معادلات ذیلرا به شکل گراف حل کنید :

(a) $\begin{cases} 2x - 3y = -1; \\ x + y = -8; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 1; \\ 3x + 2y = 10; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = -3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x - 2y = 1; \\ 2x - y = 4; \end{cases}$

216 - بکدام قیمت a گراف خطوط مستقیم $x + y \neq a$، $5x - 2y = 3$ یکدیگر را در نقطه یی مربوط محور y قطع میکنند ؟ مساله را توسط ترسیم گراف ارایه کنید.

217 - بکدام قیمت b گراف خطوط مستقیم $x - 2y = 4$، $bx + 3y = 10$ یکدیگر را در نقطه مربوط محور x قطع میکنند؟ مساله را توسط ترسیم گراف نشان دهید .

218 - کمیات وضعیه نقطه تقاطع دو خط مستقیم ذیل را پیدا کنید :

(a) اگر معادله خط مستقیم اولی $5x - 2y = c$ بوده و از خط مستقیم دومی $x + py = 2$ باشد در صورتی که خط مستقیم اولی از نقطه $A(5;-1)$ وخط مستقیم دوم از نقطه $B(-7;3)$ میگذرند.

(b) اگر معادله خط مستقیم اولی $2x + xy = 5$ بوده و معادله خط مستقیم دومی $3x - 2y = K$ باشد در حالیکه خط مستقیم اولی از نقطه $A(-2;3)$ و خط مستقیم دوم از نقطه $B(3;-2)$ میگذرند .

219 - سیستم معادلات ذیلرا طور گرافیک حل کنید :

(a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 2y = 3 \\ x + y = 16 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2 \\ 3x + 2y = 48 \\ x - y = 1 \end{cases}$

220-بکدام قیمت k خطوط مستقیم $y=2x-5$ ، $y=x+2$ و $y=kx-12$ یکدیگر را در یك نقطه قطع میکنند ؟

221 - در سیستمهای ذیل کدام یکی آنها دارای یك حل است .

دارای بی نهایت حل است وهیچ حل ندارد ؟

(a) $\begin{cases} 2x+5y=17 \\ 4x-10y=54 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{x}{5}=\frac{y}{15}=1 \\ 6x-2y=35 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 0,2x-5=17 \\ -x+25y=-55 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x+\frac{1}{3}y=10 \\ 9x-2y=1 \end{cases}$

222 - بکدام قیمت c سیستم های ذیل هیچ حل ندارند؟

(a) $\begin{cases} 3x-y=10 ; \\ 9x-3y=c ; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y=c \\ 5x+2y=3 \end{cases}$

223 - بکدام قیمت a سیستم های ذیل بی نهایت حل دارند ؟

(a) $\begin{cases} 2x+5y=10 ; \\ 6x+ay=30 ; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} ax-4y=7 \\ 12x+3y=16 . \end{cases}$

224 - سیستم معادلات ذیلرا حل کنید:

(a) $\begin{cases} 30x+0,y=5 ; \\ 0,6x+7y=2 ; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 27x+0.y=-9 ; \\ 5x-0,8y=1 ; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=6 ; \\ 0.x+0,02y=0,6 ; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \frac{3}{2}y=1 ; \\ 0,1x-4y=0 \end{cases}$

225 - بکدام قیمت های p و q سیستم معادلات ذیل حلهای ذیلرا دارند.



(e) $\begin{cases} 0,2x=p \\ x+py=q \end{cases}$ درصورتیکه $y=-7,x=30$ باشد ؟

(b) $\begin{cases} \frac{2}{7}y=9 \\ px-qy=1 \end{cases}$ $y=14,x=10$ باشد ؟

226 - سیستم معادلات ذیلرا حل کنید :

(a) $\begin{cases} 25x-18y=75 \\ 35x-28y=35 ; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 35x=3y+5 \\ 49x=4y+9 ; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2(2x+y-1)=3 \\ 2(2y-x+1)=3 ; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 6(x+y)=8+2x-3y \\ 5(y-x)=5+3x+2y . \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y+1}{3} \\ \frac{y}{7}=\frac{x+2}{6} ; \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \frac{y}{2}-\frac{x+y}{5}=0,1 ; \\ \frac{y}{5}-\frac{x-y}{2}=0,1 ; \end{cases}$

227 - قیمتها ی a و c معادله $ax-8y=c$ را پیدا کنید درصورتی که خط مستقیم مربوط آن از نقاط $A(1;-1), B(9;-6)$ میگذرد .

228 - اگر خط مستقیم معادله $ax+by=1$ ازنقاط $K(8;+3)$ و $M(-12;5)$ بگذرد ضریب های a و b آنرا پیدا کنید .

229 - آیا سیستم معادلات ذیل حل دارند:

(a) $\begin{cases} 5x-4y=1 \\ 3x+y=13 \\ 7x-5y=1 ; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 11x+3y=-1 \\ 2x+y=3 \\ 5x+2y=4 ? \end{cases}$

230- مجموع پول دو نفر 60 افغانیست اگر $\frac{1}{5}$ حصه پول نفر اول مساوی به $\frac{1}{7}$ ام حصه پول نفردوم باشد حصهء هر کدام را تعیین کنید .

231- دوازده سال بعد عمر پدر سه چند عمر پسرش خواهد شد

تفاوت بین عمر هایشان30 سال است.عمر هر کد ام آنهارامعلوم کنید.

232- یك زارع یتکعداد گوسفند رااز قرارهر گوسفند چارصد افغانی ویکتعد ادگاورااز قرارهر گاوبه یکهز ارافغانی فروخته و مجموعاً 27000 افغانی رابد ست آورد.تعدادگاوها وگوسفند ها رامعلوم کنیددرصورتی که مجموع گاوها گوسفندها30 راس با شد.

233- احمد به محمود میگوید:«من 20 سال از تو کلا نترم وپنج سال بعد عمر من دوچند عمر توخواهد شد.» عمر هر کدام آنها را معلوم کنید.

234- دو بچه مجموعاً 252 مهره دارند، یکی از آنها مهره های خودرابه گروپهای شش دانه یی ودیگرش به‌گروپها ی 9 دانه یی جد امیکند.اگر تعد ادگرو پهای هردوی آنها 34 باشد تعدادمهره همای هر کدام آنهارامعلوم کنید.

235- شخص به دیگری گفت، «اگرتمام پول‌خورا بمن بد هی من صاحب 15 افغانی خواهم‌شد.»واوگفت:

«اگر تو ثلث پول خودرابمن بد هی من پنج ا فغا نی‌خوا هم داشت.» معلوم کنید که هر کدام آنها چند، چند افغانی دارد؟

236- اگر قیمت پنج قلم و 9 کتابچه 102ا فغانی وقیمت 6 قلم و 7 کتابچه(111)افغانی با شد قیمت یکد ا نه قلم‌ویک کتابچه‌را معلوم کنید.

237- عددد ورقمی یرابنو سید که مجمو ع ارقا م آن 16 بو ده



واگر جایی ارقام آنهاتبدیل شودعد دی که‌حاصل میشودا زعد داولی 18 کمتر باشد.

238- احمد سه چندفرید دارا یی دارد.وقتیکه احمد 20 افغانی‌را به فرید بد هد دارایی‌احمد دوچند دارایی فرید میشود.هر کد ام آنها چند افغانی دار ایی دارد؟

239- سه‌عدد تاق‌پی‌درپی رابنویسید که‌مجموع‌ارقام آنها75شود.

# فصل چارم

## طاقت و طاقت نماء به اعداد طبیعی

### 24- تعریف طاقت نما و خواص آن

شما میدانید که $3^5$ چنین معنی میدهد که عدد 3 پنج دفعه در حالت ضرب قرار دارد.

یعنی : $3^5 = 3.3.3.3.3$

در اینجا عدد 3 را قاعده و عدد 5 طاقت نماء و افاده 3 را افاده طاقت دار مینامند.

وچنین خوانده میشود : «سه به نما پنج یا سه به طاقت پنج.»

وهمچنین $(-4)^4$ را به شکل ذیل مینویسند:

$$(-4)^4 = (-4)\ (-4)\ (-4)\ (-4)$$

حالا اگر $a^3$ را در نظر بگیریم گفته میتوانیم که a سه دفعه با خودش در حالت ضرب قرار دارد :



یعنی: $a^3 = a \cdot a \cdot a$

بصورت عمومی برای هر عدد a وهر عدد طبیعی n افاده:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.\ldots\ldots\ldots.a}_{n \text{ دفعه}}$$

تعریف شده میتواند. این نشان میدهد که a, n مرتبه در حالت ضرب با خودش قرار دارد. در افاده $a^n$ ، a را قاعده n را طاقت نما یا نما و $a^n$ را طاقت مینامند.

هر عدد a به نمای یک مساوی به خود عدد a است. یعنی: $a^1 = a$

مثال 1 – قیمت $7 \cdot 2^4$ را دریابید.

حل : برای یافتن قیمت این افاده اول یا فتن قیمت طاقت $2^4$ و بعداً عملیه ضرب راانجام میدهیم.

مرحله اول $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ :

مرحله دوم $7 \cdot 2^4 = 7 \cdot 16 = 112$

مثال 2– قیمت افاده $0,5 \cdot 68^2$ را حساب کنید.

حل اولا قیمت افاده $68^2$ را یافته وبعداً عملیه ضرب را اجرا میکنیم.

$$68^2 = 68 \cdot 68 = 4624$$

$$0,5 \cdot 68^2 = \frac{1}{2} \cdot 4624 = 2312$$

مثال 3– قیمت افادهٔ $(-3)^4 + 2^6$ را حساب کنید.

حل : برای یافتن قیمت مجموعه $(-3)^4 + 2^6$ اولا قیمت هریک

از اجرای جمع را یافته بعداً عملیه جمع را اجرا مینماییم .

(1) $-2^6 = -1 \cdot 2^6 = -64$

(2) $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

$-2^6 + (-3)^4 = -64 + 81 = 17$

در نتیجه

## سوالات

340 با استفاده از تعریف طاقت مفهوم هر یك افاد همهای ذیلرا توضیح وقیمت آنها را حساب کنید :

(a) $5^3$; (b) $15^{10}$; (c) $(-2)^6$ ;

(1) $(\frac{3}{7})^4$ ; (e) $29^1$; (f) $3b^{11}$ .

241ـ مفهوم افادههای ذیلرا به اساس تعریف طاقت توضیح کنید:

(a) $(-c)^{28}$ ; (b) $(x+a)^{19}$ ; (c) $2^k$

درحال که $k \in N$ است .

242 ـ درافاد همهای ذیل قاعده وطاقت نما آنها را نشان دهید.

(a) $(9c)^4$ ; (b) $(-3x)^6$ ; (c) $25\,a^3$

(d) $-P^3$ ; (e) $(-x)$ ; (f) $2^{3k}$ در حالی که $k \in N$

(g) $(b+c)^7$ ; (h) $b^3 + c^3$ .

243 ـ طاقتهای ذیلرا به شکل ضرب نوشته وقیمت هریك آنرا دریافت دارید :

(a) $3^5$ ; (b) $(-5)^2$ (c) $-5^3$

(d) $(\frac{2}{3})^4$ ; (e) $(0,5)^5$ ; (f) $(1\frac{1}{3})^3$



244 ـ قیمت افاد همهای ذیلرا دریافت کنید :

(a) $9.(\frac{5}{6})^3$ ; (b) $(-10)^6$ ; (c) $9.\{\frac{5}{6}\}^2$

(d) $4.5^3$ ; (e) $-5 \cdot 2^5$ (f) $-2^4 \cdot 15$ ; (g) $2700 \cdot (0,1)^3$

245 ـ افاده های ذیلرا مقایسه کنید .

(a) $2^{10}$ و $10^2$ را ; (b) $3^4$ و $4^3$ را ;

(c) $0,2$ و $0,2^3$ را ; (d) $1,2$ و $1,2^2$ را ;

(e) $0,3$ و $(0,3)^2$ را ; (f) $0,3$ و $-(0,3)^2$ را.

246 ـ بنابر قیمتهای داده‌شده متحولهای مربوط قیمت هریك‌از افاد همهای ذیلرا پیدا کنید :

(a) $3x^4$ را وقتی که $x=-2$ باشد،

(b) $8x^3$ را وقتی که $x=-0,5$ باشد،

(c) $xy^4$ را وقتی که $x=0,12$ و $y=-2$ باشد،

(d) $x\,y$ را وقتی که $x=-\frac{1}{2}$ و $y=+15$ باشد.

247 ـ حاصل ضربهای ذیلرا به شکل طاقت افاده کنید .

(a) b.b.b.b..b.b ; (b) $(-7p)(-7p)(-7p)$

(c) $(x+a)(x+a)(x+a)$ ; (d) 5c.5c.5c.5c.5c.

(e) $(-3a)^2 (-3a)^2 (-3a)^2$ ; (f) $(x^2-1)(x^2-1)(x^2-1)$

248 ـ اعداد ذیلرا به شکل مربع ( طاقت نمای 2 ) ویا مکعب ( طاقت نما 3 ) بنویسید .

(a) 8; (b) 81; (c) 125 (d) $\frac{4}{9}$; (e) $3\frac{3}{8}$; (f) $5\frac{4}{9}$.

249- درست $A=\{1;2;3;4;5\}$ طوری که $n \varepsilon A$ باشد ست حلهر یك از افاده‌های ذیلرا دریافت کنید:

(a) $2^n$ , (b) $3^n$

250- برای $n \varepsilon N$ غیرمساوانهای ذیلرا حل کنید

(a) $3^n < 100$; (b) $5^n < 1000$;

(c) $15 < 2^n < 35$; (d) $25 < 3^n < 250$

## 25. خواص اساسی طاقتها

مثال: میخواهیم که حاصلضرب دو عدد طاقت نماه‌دار $x^5, x^3$ را به دست آریم.

حل: ما میدانیم که:

$x^5 = x.x.x.x.x$

$x^3 = x.x.x$

مساواتهای فوق‌را طرف به طرف ضرب مینماییم.

$$x^5.x^3 = \underbrace{(x.x.x.x.x.)}_{\text{5 دفعه x}} . \underbrace{(x.x.x.)}_{\text{3 دفعه x}}$$

$$x^5.x^3 = \underbrace{x.x.x.x.x.x.x.x}_{\text{(5+3) دفعه x}} = x^8$$

یا .....

$$x^5.x^3 = x^8 = x^{5+3}$$



از حل مثال فوق دیده میشود که:

> حاصلضرب دو عدد یکه قاعده های شان باهم مساویست عبارت از عددیست که قاعده آن عبارت از قاعده یکی از اجزای ضربی بوده و نما ی آن مسا وی به حاصل جمع نماهـای اجزای ضربی میباشد.

بصورت عموم اگر a یك عـدد دلخواه m و n دو عدد طبیعی مدنظر گرفته شوند مساوات ذیلرا نوشته کرده میتوانیم:

$$a^n.a^m = a^{m+n}$$

ثبوت:

$$a^n = \underbrace{a.a.....a}_{\text{n دفعه a}}.....(1)$$

$$a^m = \underbrace{a.a.a.....a}_{\text{m دفعه a}}.....(11)$$

مساواتهای (1) و (11) راطرف به‌طرف باهم ضرب مینماییم:

$$a^n.a^m = \underbrace{a.a.a.a.a.....a.a}_{\text{(n+m) دفعه a}}$$

و یا

$$a^n.a^m = a^{m+n}$$

این رابطه خاصیت اساسی طاقترادرضرب طور ذیل توضیح میکند:

برای به‌دست آوردن دو افاده طاقت‌نما دارای که قاعده شان عین چیز باشند طاقت نما های اجزای ضربی را باهم جمع نموده و به‌حیث طاقت نما ی یکی از قاعده آنها مینویسیم.

این خاصیت حاصلضرب اعداد (طاقت) نما دار برای ضرب کردن اضافه از دو حد نیز قابل اجراست. مثلاً برای ضرب کردن سه عدد طاقت نما دار عملیه ضرب را چنین اجراء میکنیم :

$$a^m . a^n . a^k = (a^m . a^n).a^k = a^{m+n} .a^k = a^{m+n+k}$$

با استفاده از حل مثال فوق حقیقت ذیل را بیان میکنیم :

حاصل ضرب چندین افاد ههای طاقت دار که قاعده‌های شان باهم مساویست عددیست که قاعده یکی از عوامل ضربی بوده و نما ی آن عبارت از مجموع نماهای عوامل ضربی میباشد.

سوالات :

251- افاد ههای ذیلرا با هم ضرب و به شکل طاقت بنویسید:

(a) $a^5 . a^3$; (b) $x^{10} . x^8$; (c) $c^{12} . c^{11}$ ;

(d) $b^{12} . b^{93}$; (e) $2^6 . 2^4$.

252- سوالهای ذیلرا به شکل عامل ضربی طاقتدار آنها بنویسید:

(a) $x^{10}$; (b) $y^{15}$; (c) $2^{12}$; (d) $5^{17}$ .



253 - حاصلضربهای ذیلرا تعیین کرده قاعده‌ها و نماهای هریك از حاصلضربهای حاصل شده را نام بگیرید :

(a) $x . x^5 . x^4$; (b) $10^2 . 10^5 . 10^5$ ;

(c) $(2y)^3 . (2y^2)^2$ ; (d) $(1000\ b)^3 . (1000\ ab)$

(e) $x^n . x^3$ (در حالیکه $n \varepsilon N$ است) ; (f) $5^m \cdot 5$ ($m \varepsilon N$ در حالیکه)

254 - اگر $A = \{5 ; 3 ; 0\}$ و $B = \{2 ; 4\}$ باشد قیمت افاد ههای ذیلرا برای $x \varepsilon A$ , $y \varepsilon B$ محاسبه کنید :

(a) $3xy^2$; (b) $x^3y^2$.

255 - هر یک از اعداد طاقتدار ذیلرا به قاعدهٔ 2 بنویسید:

(a) $2^5 . 2^3$; (b) $2^6 . 4$; (c) $8 . 2^7$; (d) $16 . 32$

256 - برای قیمتهای طبعی n هر یک از افاد ههای ذیلرا به قاعده 5 بنویسید :

(a) $5 . 5$; (b) $5^n . +125$; (c) $5^n . +1\ 5^n . 25$

257 - در سوالهای ذیل x را از جنس c افاده کنید :

(a) $c^3 x = c^5$; (b) $x c^5 = c^9$; (c) $c^6 x = c^{11}$; (d) $c^4 x = c^{15}$;

(e) $c^3 x = c^7$; (f) $x c^4 = c^{16}$.

## 25- طاقت نمای اعداد طاقتدار

افاده $(x^3)^5$ بیان میکند که $x^3$ پنج دفعه باهم درحالت ضرب قرار دارد . یعنی : $(x^3)^5 = x^3 . x^3 . x^3 . x^3 . x^3$

بااستفاده از خاصیت ضرب اعداد طاقتدار افادهٔ فوق چنین نوشته میشود:

$$x^3 . x^3 . x^3 . x^3 . x^3 = x^{3+3+3+3+3} = x^{4.5} = x^{15}.$$

پس $(x^5)^5 = x^{5.5} = x^5$

به صورت عموم برای هر عدد a وبرای هر عدد n , m شامل اعداد طبیعی افادهٔ : $\boxed{(a^m)^n = a^{m.n}}$ صحت دارد.

زیرا افادهٔ $(a^m)^n$ بیان میکند که $a^m$ , n دفعه باهم درحالت ضرب است . یعنی : $(a^m)^n = \underbrace{a^m . a^m . a^m \ldots\ldots\ldots a^m}_{\text{n دفعه } a^m \text{ درحالت ضرب}}$

$$\underbrace{a^{m+m+m+\ldots\ldots\ldots+m}}_{\text{n دفعه } a^m \text{ دحالت ضرت}} = a^{m.n}$$

از اینجا نتیجه میشود که : $(a^m)^n = a^{m.n}$

برای رفع کردن طاقتهای اعداد طاقتدار ، قاعده راتغییر نداده و نماهاباهم ضرب میشوند.

بخاطر باید داشت که اگر طاقت نماه یک عدد منفی جفت باشد حاصل ضرب آن مثبت واگر تاق باشد حاصل ضرب آن یک عدد منفی میشود .

مثال اول : $(-2)^{10} = \{(-2)^2\}^5 = 4^5 = 1024$

مثال دوم : $(-3)^3 = (-3)^2(-3) = 9 . (-3) = -27$

سوالات

258- افاد ههای ذیلرا ساده کنید .

(a) $(x^3)^2$ ; (b) $(x^4)^3$ ; (c) $(x^5)^4$ ; (d) $(x^4)^5$ ; (e) $x^2 . y^3$



259 - طاقتهای ذیلرا به قاعده b بنویسید(درحالیکه $k \varepsilon N$ است).

(a) $(b^k)^4$; (b) $b^k . b$ ;(c) $(b^3)^k$ .

260 - (a) عدد طاقتدار $2^{20}$ را به اعداد طاقتدار که قاعده آنها یکی از اعداد طاقتدار ذیل باشند تبدیل کنید :

(1) $2^2$; (2) $2^4$; (3) $2^5$; (4) $2^{10}$ .

(b) عدد طاقتدار $2^{60}$ را به یک عدد طاقتدار دیگری که قاعده هریک از آنها از اعداد ذیل باشند تبدیل کنید :

(1) 4; (2) 8 ; (3) 16 ; (4) 32 .

261 - جدول ذیلرا تکمیل کنید .

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-1)^n$ | | | | | | | | | | |

262 - برای قیمتهای $x \varepsilon N$ رنج تابع $y = (-1)^n$ را دریافت کنید .

263 - قیمت افاد ههای ذیلرا مقایسه کنید :

(a) $(-1,7)^5$ و 0 را ; (b) 0 و $(-2\frac{3}{7})^4$ را .

(c) $25^5$ و $125^3$ را (d) $(\frac{1}{4})^6$ و $(\frac{1}{8})^3$ را .

264 - بنابر کدام قیمتهای x مساواتهای ذیل حقیقت پیدامیکند:

(a) $(3^5)^x = 3^{10}$; (b) $3^5 . {}^3x = 3^8$ ;

(c) $(5^x)^4 = 5^{12}$; (d) $5^x . 5^4 = 5^{12}$

2o5 - درست اعداد طبیعی N آن قیمتهای جوره مرتب x , y را در یافت کنید که هر یک از مساویهای ذیل حقیقت پیدا کند :

(a) $(2^x)^y = 2^6$ (b) $2^x . 2^y = 2^6$ .

266 - افاده های ذیلرا به شکل $x^n$ ویا $-x^n$ بیاورید.

(a) $x^5 . (x^2)^3$ ; (b) $(-x^3)^4 . x^5$ .

267 - تقاطع و اتحاد ست های ذیلرا پیدا کنید :

(a) $[-1 ; 4]$ و $[2 ; 7[$ را،

(b) $]-\infty ; 5]$ و $]-2 ; +\infty[$ را.

## 27. حاصل ضرب اعداد با نما های یکسا (طاقت نما های مساوی)

توجه کنید ! افادهٔ $(a . b)^4$ را با استفاده از قوانین تبدیلی و اشتراکی ضرب چنین نوشته کرده میتوانیم :

$$(ab)^4 = \underbrace{(ab)(ab)(ab)(ab)}_{(ab)\text{ دفعه }4} = \underbrace{(a.a.a.a)}_{a\text{ دفعه }4} . \underbrace{(b.b.b.b)}_{b\text{ دفعه }4} = a^4 b^4$$

خلاصه : $(ab)^4 = a^4 . b^4$

دیده میشود که $(ab)^4$ عبارت از حاصل ضرب $a^4$ و $b^4$ است .

به صورت عموم برای هر عدد a , b و برای هر عدد طبیعی n افاده : $(ab)^n = a^n . b^n$ دارای حقیقت است .

زیرا :

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)(ab) \ldots\ldots\ldots\ldots ab)}_{a\,b\text{ دفعه }n}$$



$$(a.b)^n = \underbrace{(a . a . a \ldots\ldots a)}_{a\text{ دفعه }n} . \underbrace{(b . b . b \ldots\ldots b)}_{b\text{ دفعه }n} = a^n b^n$$ با

در نتیجه : $(ab)^n = a^n . b^n$

## سوالات

268 . حاصل ضرب های ذیلرا به شکل طاقت نما عوامل ضرب بی بنویسید :

(a) $(xz)^6$ ; (6) $(by)^{10}$ ; (c) $(2ab)$ ;

(b) $(5ax)^5$ ; (e) $(0{,}2b^2)^5$ ; (f) $(3a^2b)^4$ .

269 - قیمت افادههای ذیلرا در یابید:

(a) $(2 . 10)^3$ ; (b) $(3.100)^4$ .

270 - افادههای ذیلرا ساده کنید :

(a) $(-0{,}3b^3y^2)^5$ ; (b) $(2x^2y)^5$ ;

271 - افاده های ذیلرا به شکل طاقت نماه حاصل ضرب آنها ارائه کنید :

(a) $-b^4.t^4$ ; (b) $a^5 x^5$ ; (c) $a^9 y^4$ ; (d) $-8x^3$ ;

(e) $27\, a\, a^6$ ; (f) $9c^4p^6$ (g) $-1000\, a^6b^6$ ; (h) $3^2\, a^{10}\, b^{15}$.

## 28. خارج قسمت اعداد طاقتدار که دارای عین قاعده باشند

مثال : میخواهیم که $x^5$ را با $x^2$ تقسیم نماییم :

$$x^5 = \underbrace{x.x.x.x.x.x}_{x\text{ دفعه }5}$$

$$x^2 = \underbrace{x.x}_{\text{2 دفعه } x}$$

هردو افاده فوقرا طرف به طرف تقسیم مینمائیم :

$$\frac{x^5}{x^2} = \frac{x.x.x.x.x.x.x}{x.x} = x.x.x = x^3$$

افاده $\frac{x^5}{x^2} = x^3$ را بشکل $\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$ نیز ارایه کرده میتوانیم.

این بیان میکند که طاقت نماه خارج قسمت دوعدد که دارای عین قاعده است عبارت ازفرق نماه های مقسوم علیه میباشد .

به صورت عموم برای هرعدد a بدون صفروبرای هرجوره از اعداد طبیعی m و n افاده $a^m \div a^n = a^{m-n}$ حقیقت دارد.

طوری که $m > n$ است :

ثبوت :

$$a^m = a.a.a.\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{m دفعه a درحالت ضرب}}.a$$

$$a^m = a.\underbrace{a.a.\ldots\ldots\ldots}_{\text{n دفعه a درحالت ضرب}}.a$$

حالا مساویهای فوقرا طرف به طرف تقسیم مینما ییم :

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a.a.a\ldots\ldots a.a}^{\text{a دفعه m}}}{\underbrace{a.a\ldots\ldots\ldots a}_{\text{a دفعه n}}}$$



چون $m > n$ است پس در کسر فوق تعداد a درصورت نظر به تعداد a درمخرج زیاد تر است . بنا بر اختصار، تعداد a مخرج a صورت از بین رفته و بعداز اختصار $m-n$ دفعه a در حالت ضرب قرار میگیرد که ما آنرا به شکل $a^{m-n}$ نشان داده میتوانیم. در نتیجه $(m-n)$ بحیث نما a درخارج قسمت حاصل میشود .

بصورت خلاصه :

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a.a.a.a\ldots\ldots a}{a.a\ldots\ldots a} = (\underbrace{a.a\ldots\ldots a}_{\text{a دفعه } (m-n)})$$

یعنی :

در نتیجه

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

با استفاده از نتیجه فوق حقیقت ذیلرا بیان میکنیم :

> خارج قسمت دوعدد طاقتدار که دارای عین قاعده باشند عبارت ازعددیست که قاعدهٔ آن قاعده یکی از آنها بوده و نمای آن فرق نماهای مقسوم و مقسوم علیه میباشد . یعنی از نماهای مقسوم نمای مقسوم علیه تفریق میشود .

درحالت خصوصی با استفاده ازرابطه : $a^m \div a^n = a^{m-n}$

نشان داده میتوانیم که هرعدد a به نما صفر مساوی به یک میشود.

یعنی $a^0 = 1$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

ثبوت : مامیدانیم که :

درصورتی که $m = n$ باشددرین صورت:

$a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$ ..... (1) میشود.

حالانکه : $a^m \div a^m = 1$ ..... (2)

زیرا هر عدد تقسیم برخودش مساوی به 1 میشود .

ازمقایسه مساواتهای (1) و (2) نتیجه‌میشود :

$$\boxed{a^0 = 1}$$

متکی به این حقیقت:

$(a.b)^0 = 1$ ; $(100)^0 = 1$ ; $(0,145)^0 = 1$ ; $(\frac{1}{3})^0 = 1$ ;

$(4,37)^0 = 1$ ; $(0,02)^0 = 1$ ; $(3+1,23)^0 = 1$.

درحالتی که $m<n$ باشد . دراین حالت طاقت نما منفی شده این موضوع خارج بحث فعلی بوده ودر آینده بران بحث خواهیم کرد.

## سوالات

272 ـ خارج قسمتهای ذیلرا دریافت کنید :

(a) $x^5 \div x^3$ ; (b) $y^{10} \div y^7$ ; (c) $a^{21} \div a^{17}$ ;

(d) $5^7 \div 3^2$ . (e) $7^9 \div 7^4$ ; (f) $(\frac{1}{3})^{15} \div (\frac{1}{3})^{13}$

273ـ قیمت افاد مها ذیلر ادریافت کنبد :

(a) $5^6 \div 5^4$ (b) $10^{15} \div 10^{12}$ ; (c) $(0,5)^{10} \div (0,5)^6$

(d) $(1\frac{1}{3})^8 \div (1\frac{1}{3})^6$ ; (e) $(2,72)^{13}$ ; (f) $(\frac{2}{3})^7 \div (\frac{2}{3})^4$



274 ـ طاقت نما نتیجه حاصل شده را به قاعده 3 تعیین کنید :

(a) $3^n . 3$ درحالی که $n \varepsilon N$ است .

(b) $3^k \div 3^5$ درحالی که $k \varepsilon N$ و $k>5$ باشد،

275 ـ قیمت کسر های ذیلرا محاسبه کنید :

(a) $\frac{7^9 . 7^5}{7^{14}}$ , (b) $\frac{3^{15}}{3^5 . 3^7}$ , (c) $\frac{(-2)^8 5^3}{5^4 . 2^{10}}$ ;

(d) $\frac{43.57}{2^5 . 5^6}$ ; (e) $\frac{5.9^{10}}{0^8 . 3^6}$ ; (f) $\frac{(-2)^6 . 49^4}{(-7)^7 . 8^3}$ .

276 ـ حاصل تقسیم افاده های ذیلرا پیدا کنید :

(a) $\frac{c^3 . c^5}{c^3}$ ; (b) $\frac{a^{15}}{a^7 . a^6}$ ; (c) $\frac{(x^5)^3}{x^5 . x^4}$ ;

(a) $\frac{(-y)^{12} . (-y)}{y^{22}}$ ; (e) $\frac{(2b)^4}{(2b)^3}$ ; (f) $\frac{12a^3 b^3 c^2}{ab^2 c}$

377 ـ قیمت افاده‌های ذیلرا دریابید:

(a) $3x^2$ درصورتی که $x=2,6$ باشد .

(b) $-2,5y$ درصورتی که $y=-1\frac{2}{3}$ باشد،

(c) $10\, a^2 b^0$ درصورتی که $a=-3$ ، $b=8$ باشد ،

(d) $a^0 c^3$ درصورتی که $a=\frac{2}{3}$ $c=-\frac{1}{3}$ باشد.

## اختصار کسر ،حاصلضرب وحاصل‌تقسیم دو کسر

### 28. اختصار کسور

هر افاده به شکل $a/b$ طوری که $b \neq 0$ باشد کسرنامیده میشود

کسر $\frac{25\,a}{100}$ را در نظر میگیریم :

اگر صورت ومخرج این کسر به 25 تقسیم شود. کسر $\frac{a}{4}$ حاصل میشود. برای تمام قیمتهای دلخواه a کسر $\frac{25\,a}{100}$ و کسر $\frac{a}{4}$ دارای عین قیمت میباشد .

> به صورت عموم برای هر عدد a و b (درحالیکه $b \neq 0$ است) اگر صورت و مخرج کسر $\frac{a}{b}$ به یك عدد غیر از صفر ضرب و یا تقسیم شود قیمت کسر تغیر نمیکند که این خاصیت یکی از خواص اساسی کسور است .

طوری مثال کسر $\frac{8\,y^2}{3y}$ وادرحالی که $y \neq 0$ است در نظر میگیریم صورت مخرج این کسر را به y تقسیم کرده ویا میگوییم که به y اختصار کرده آنرا ساده میسازیم .

$$\frac{8y^2}{3\,y} = \frac{8\,y}{2}$$

مساوات حاصل شده فوق برای تمام قیمتهای دیگر y بجز از صفر حقیقت دارد . مثالهای ذیلرا در نظر میگیریم :

مثال 1 . کسر $\frac{24a^2\,b}{56ab}$ را ببینید ، دیده میشود که 8 a b عامل ضربی مشترك صورت و مخرج آن است . این کسر را به 8 a b ( درحالیکه $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ) اختصار کرده میتوانیم .



دراین صورت داریم : $\frac{24\,a^2\,b}{56\,a\,b} = \frac{3\,a.8\,a\,b}{7.8\,a\,b} = \frac{3a}{7}$

مثال 2 . فرضاً کسر $\frac{x^8}{x^{12}}$ (درحالیکه $x \neq 0$) داده شده است.

این کسر را به $x^8$ اختصار کرده میتوانیم .

حل : ما میدانیم که:

$x^8 \div x^8 = 1$

$x^{12} \div x^8 = x^4$

از ینجا :

$$\frac{x^8}{x^{12}} = \frac{x^8}{x^8.x^4} = \frac{1}{x^4}$$

مثال 3 .میخواهیم که کسر $\frac{(4\,a^5)^3}{(2\,a^2)^6}$ را (درحالیکه $a \neq 0$) اختصار نماییم، قبل از اختصار صورت ومخرج را به شکلهای ذیل مینویسیم :

$$\frac{(4\,a^5)^3}{(2\,a^2)^6} = \frac{(2^2)^3 . a^{15}}{2^6\,a^{12}} = \frac{2^6 . a^{15}}{2^6 . a^{12}} = a^3$$

در نتیجه

$$\frac{(4\,a^5)^3}{(2\,a^2)^6} = a^3$$

## سوالات

278 - کسرهای ذیلرا اختصار نمایید :

(a) $\frac{5b}{15}$ ; (b) $\frac{24\,c}{24\,y}$ ; (c) $\frac{7p}{12\,pq}$ ;

(d) $\frac{25\,cd}{18\,ad}$ ; (e) $\frac{3\,a}{15\,ab}$ ; (f) $\frac{54\,p}{45\,p^2}$ ;

(g) $\frac{-8\,x^5}{12\,x}$ ; (h) $\frac{26\,b^2}{65\,b^5}$ ; (i) $\frac{-77\,y^2}{-55\,y}$ .

279 - افادههای ذیلرا ساده کنید :

(a) $\frac{5 \cdot a^7}{2 \cdot a^3 \cdot a^{21}}$ ; (b) $\frac{a^4 \cdot a \cdot 5}{10 \cdot a \cdot b}$ ; (c) $\frac{(a^2 \cdot y)^5}{(a \cdot y^2)^7}$ ;

(d) $\frac{(-b \cdot x^3)^5}{(-b^2 \cdot x^2)^6}$ ; (e) $\frac{(2p \cdot q^4)^3}{(6p^2 \cdot q^5)^2}$ ; (f) $\frac{(b^5)^2}{(-b^3) \cdot^2 (b)^{14}}$ .

280 - قیمت افاد ههای ذیلرا دریابید :

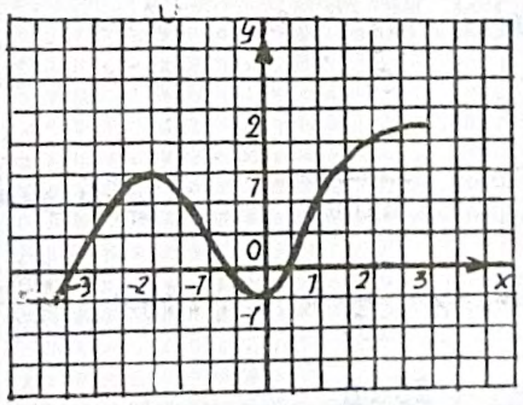
(a) $\frac{4^{10}}{2^{16}}$ ; (b) $\frac{8^6}{2^{25}}$ ; (c) $\frac{6^6}{2^5 \cdot 3^7}$ ;

(d) $\frac{5^7 \cdot 2^9}{10^8}$ ; (e) $\frac{10^{12}}{5^6 \cdot 2^{13}}$ .

281 - دررسم ذیل گراف یک تابع $y = f(x)$ در نظرگرفته شده است . به اساس گراف جدول ذیلرا تکمیل کنید :

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f (x) | | | | | | |

شکل (30)




## 29 . حاصل ضرب دو کسر

برای بدست آوردن حاصلضرب دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ صورترا



درصورت ومخرج را دو مخرج ضرب نموده حاصل ضرب صورتهارادرصورت وحاصل ضرب مخرجهارادرمخرج مینویسیم: کسر حاصل شده عبارت ازحاصل ضرب دو کسر است .

یعنی : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ..... (1)

مساوات (1) برای تمام قیمتهای a، b، c و d درحالی که $b \neq 0 ; d \neq 0$ باشند حقیقت دارد .

با استفاده از مساوات (1) گفته میتوانیم :

> حاصل ضرب دو کسر عبارت ازیك کسر سومیست که صورت آن عبارت از حاصل ضرب صورتهای آن و مخرج آن عبارت از حاصل ضرب مخرجهای دو کسر مفروض است .

مثال . 1 $\frac{6a^2}{5y} \cdot \frac{3a}{7y^3} = \frac{6a^2 \cdot 3a}{5y \cdot 7y^3} = \frac{18a^3}{35y^4}$

مثال . 2 $12a^2b \cdot \frac{5}{6ab^3} = \frac{12a^2b}{1} \cdot \frac{5}{6ab^3} = \frac{12^{\,2}ab}{6a^3b} = \frac{10a}{b^2}$

توجه کنید که با استفاده از مساوات (1) افاده $\frac{a}{b}$ را به شکل $\frac{-a}{b}$ یا $\frac{a}{-b}$ تبدیل کرده میتوانیم .

$-\frac{a}{b} = -1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{-1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$

اگر صورت ومخرج کسر $\frac{-a}{b}$ رادر $(-1)$ ضرب کنیم کسر $\frac{a}{-b}$ حاصل میشود.

$$(-1)\ \frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

خلاصه :

تساویهای فوق بیان میکند: هرگاه پیش روی یك کسر علامهٔ منفی باشد این علامه را پیش روی هر یك ازاجزای همان کسر (صورت یا مخرج) نوشته کرده میتوانیم بدون آنکه در قیمت کسر کدام تغیری پیدا شود.

سوالات

282-بـه قیمت $a=\frac{2}{3}$ ; $b=-5/6$ ; $c=\frac{9}{10}$ ; $d=\frac{1}{5}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ را حساب کنید.

283 - بعد از اختصار نمودن شکل کسر حاصلضر بهای ذیلرا بنویسید :

(a) $\frac{5}{8} \cdot \frac{y}{10}$ ; (b) $\frac{3a}{4} \cdot \frac{8}{a}$ ; (c) $\frac{b^2}{10} \cdot \frac{5}{b}$ ;

(d) $\frac{18}{c^4} \cdot \frac{c^3}{24}$ ; (e) $x \cdot \frac{y}{5}$ ; (f) $0,5a \cdot \frac{10b}{a}$ ;

(g) $\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{9}{2a^3}$ ; (h) $1\frac{2}{3}x^2 \cdot \frac{9}{10x^2}$ ; (i) $\frac{7x^2}{24y} \cdot 1\frac{1}{7}\ y$ ;

(j) $\frac{m^2}{16n} \cdot \frac{24}{m.n}$ ; (k) $\frac{35ax^2}{12b^2y} \cdot \frac{8ab}{21xy^2}$ ; (l) $\frac{48x^9}{49y^4} \cdot \frac{7y^2}{16x^3}$ .



284- افاد ههای ذیلرا ساده سازید :

(a) $-0,2ay^3\left(\frac{10a}{y^3}\right)$ ; (b) $\frac{15p^2}{8q^6} \cdot \frac{16q^4}{25p^3}$ ;

(c) $\frac{b^4}{1,5c} \cdot \frac{-9c}{4b^5}$ ; (d) $\frac{a^4}{-10x^5y^6} \cdot \frac{-5x^5y^2}{2a^2}$ .

285- به اثبات رسانید که افـاد ههای داده شده ذیل برای هر قیمت دیگر x بجزاز صفرهمیشه مساوی به (1) میشود :

(a) $\frac{2^{11}}{x^4} \cdot \frac{(-x^5)^2}{8^2}$ ; (b) $\frac{3^3}{x^3} \cdot \frac{9^2}{x^3} \cdot \frac{(x^5)^2}{27^2}$ .

286- توسط قیمت گذاری n نشان دهید که افادهٔ $\frac{10^n+2}{3}$ برای تمام قیمت $n \varepsilon N$ عبارت از یك عدد طبعیست.

## 30. خارج قسمت دو کسر

خارج قسمت دو کسر عبارت از کسریست که ازحاصل ضرب معکوس کسر مقسوعلیه دو کسر مقسوم حاصل میشود.

طور مثال خارج قسمت دو کسر : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ عبارت از کسر $\frac{a.d}{b.c}$ است.

زیرا :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

اکنون صورت ومخرج کسر طرف راست مساوات فوق درمعکوس کسر $\frac{c}{d}$ یعنی در $\frac{d}{c}$ ضرب کرده ومینویسیم:

$$\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{d}}=\frac{\frac{a}{a}\cdot\frac{d}{c}}{1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$$

در نتیجه :

$$\boxed{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}}$$

این مساوات برای تمام قیمت های a، b، c و d در حالی که $c\neq0$ ، $d\neq0$ و $b\neq0$ باشند حقیقت دارد.

مثال . 1

$$\frac{5x^3}{6a}\div\frac{15x}{2a^2}=\frac{5x^3}{6a}\cdot\frac{2a^2}{15x}=\frac{5x^3\,.\,2a^2}{6a\,.\,15\,x}=\frac{ax^2}{9}\ .$$

مثال . 2

$$\frac{18a^3}{25b^5}\div36a^4=\frac{18a^3}{25b^5}\div\frac{36a^4}{1}=\frac{18a^5}{25b^5}\cdot\frac{1}{36a^4}=\frac{18\,a^5}{25b^5.36a^4}=\frac{a}{50b^5}$$

سوالات:

287 - خارج قسمت افاد ههای ذیلرا بهشکل کسر به دست آرید:

(a) $\frac{x}{x}\div\frac{3x}{3}$ ; (b) $\frac{p}{9}\div\frac{p}{3q}$ ; (c) $\frac{m}{3n}\div\frac{2m}{n}$ ;

(d) $\frac{b^3}{2a}\div(-\frac{4b}{a^3})$ ; (e) $\frac{x2}{10}\div(20\,x)$ ; (f) $\frac{p}{6}\div(0,2p^2)$ ;

(g) $5\div\frac{10\,a}{7.b}$ ; (h) $2\frac{6}{1}\,x\div\frac{26x^2}{9}$ ; (i) $1\frac{3}{13}\,b\div\frac{8\,b}{a}$ ;

(j) $-0,36y\div\frac{9y}{10z}$ ; (k) $\frac{15a^3b^2}{c}\div(0,75ab^2)$ ; (l) $\frac{72a^4x^3}{-25\,y}\div\frac{-48a^3}{5y^2}\,.x^3\,.$



288 - (a) بنا بر کدام قیمتهای x هر یك از مساوی های ذیل (که در آنها $a\neq0$ ، $d\neq0$ میباشند) حقیقت پیدا میکنند ؟

(a) $\frac{12\,a^3}{5d^3}\,.\,x=\frac{3b}{2a}$ ; (d) $\frac{25b^3}{12\,a^4}\div x=-\frac{5\,b}{4\,a}$ .

(b) بنابر کدام قیمتهای a و b موجودیت مساوا تهای فوق امکان پذیر نیست ؟

## 31 . طاقت نمای کسر

کسر طاقتدار $(\frac{a}{b})^3$ را که در آن $b\neq0$ است در نظر میگیریم، در این جا کسر $\frac{a}{b}$ قاعده و 3 طاقت نمای آنست. کسر مذکور را بهشکل $\frac{a^3}{b^3}$ نیز مینویسند. زیرا :

(بنابر تعریف اعداد طاقتدار) $\frac{a}{b}\,.\,\frac{a}{b}\,.\,\frac{a}{b}=(\frac{a}{b})^3$ حالا نکه طرف راست مساوات فوقرا بنابر اجرای عملیه ضرب کسور طبق ذیل نیز ارایه کرده میتوانیم :

$$\frac{a}{b}\,.\,\frac{a}{b}\,.\,\frac{a}{b}=\frac{a\,.\,a\,.\,a}{b\,.\,b\,.\,b}$$

(به اساس تعریف اعداد طاقتدار)... $\frac{a\,.\,a\,.\,a}{b\,.\,b\,.\,b}=\frac{a^3}{b^3}$

درنتیجه : $(\frac{a}{b})^3=\frac{a^3}{b^3}$

به صورت عموم هر کسر طاقتدار $(\frac{a}{b})^n$ را که در آن b خلاف

صفر بوده و n یک عدد تام غیر منفی است ، به شکل $\frac{a^n}{b^n}$ نیز نوشته کرده میتوانیم . زیرا :

$$(\frac{a}{b})^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots\cdots \frac{a}{b}}_{\text{n دفعه } \frac{a}{b} \text{ در حالت ضرب}}$$

حالانکه :

$$\underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots\cdots \frac{a}{b}}_{\text{n دفعه}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{\text{n دفعه a}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{\text{n دفعه b در حالت ضرب}}} = \frac{b^n}{b^n}$$

در نتیجه

$$\boxed{(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

سوالات

289 - به شکل کسر افاده کنید .

(a) $(\frac{x}{2y})^3$ ; (b) $(\frac{3a}{c})^4$ ; (c) $(\frac{-a}{3b})^3$

(d) $(\frac{n^2}{10})^3$ ; (e) $(\frac{10\ a^4}{3\ x^4})^2$ ; (f) $(\frac{-\ x^5}{t\ z^2})^4$

(g) $(\frac{2}{-p^4 q^3})^6$ ; (h) $(\frac{-a b^0}{5c^6})^8$ ; (i) $(\frac{2x^5}{0{,}2y^{10}})^5$ .

290 - افاده های ذیل را ساده کنید :

(a) $(\frac{a^3}{b^3})^2 \cdot (\frac{b^4}{a^2})^4$ ; (b) $(\frac{-2x^4}{y^5})^4 \quad (\frac{y^7}{4x^6})^3$



291 - درصورت امکان افاده های ذیل را به شکل طاقت تمام مربع یا مکعب بنویسید :

(a) $\frac{x^2}{y^4}$ ; (b) $\frac{8a^6}{b^3}$ ; (c) $-\frac{25}{x^6}$ (d) $-\frac{1000x^3}{x^6}$ ;

(e) $-\frac{p^3}{27q^9}$ ; (f) $\frac{a^{30}}{6b^{60}}$ .

292 - قیمت افاده های ذیلرا دریابید :

(a) $\frac{4^3 . 3^{10}}{10}$ ; (b) $\frac{2^3 . 6^3}{2^{25} . 9^5}$ ;

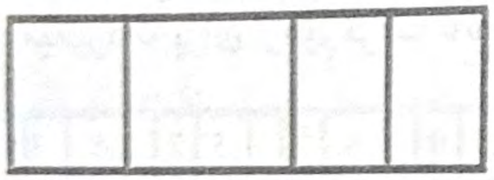
293 - در خالیگاه □ یکی از علامات مناسب $>$ ، $<$ یا $=$ را بنویسید تا افاده عددی مربوط آن حقیقت پذیر گردد :

(a) $(0{,}3)^{61}$ □ $(-0{,}3)^{61}$ ; (b) $(-1{,}9^{19}$ □ $1{,}9^{19}$ ;

(c) $(-5{,}6)^4$ □ $(-5{,}6)^4$ ; (d) $-0{,}8^{11}$ □ $(-0{,}8)^{11}$ .

294 - (a) در رسم ذیل چند زاویه قایمه موجود است؟

(b) در این شکل چند مستطیل موجود است ؟



## 32 - مطالعه گراف تابع $y = ax^3$

مطالعه گراف توابع $y = ax^3$ و $y = ax^3$

مسئله ذیلرا در نظر میگیریم :

اگر مساحت سطح کلی مکعب به S ( سانتیمتر مربع ) وطول یک

کناره آن به b (سانتیمتر ) ارایه شود دراینصورت $S = 6\,b^2$ میشود زیرا دیده میشود که سطح مکعب عبارت ازشش مربع انطباق پذیری که مساحت هر یک از آنها ( به حساب سانتیمتر مربع ) مساوی به $b^2$ میشود ، میباشد.پس مساحت سطح کلی مکعب مساوی به $6b^2$ است .

فارمول $S=6b^2$ مربوط به مساحت سطح کلی مکعب بوده که به اساس طول تیغه یا کنار آن افاده شده است .

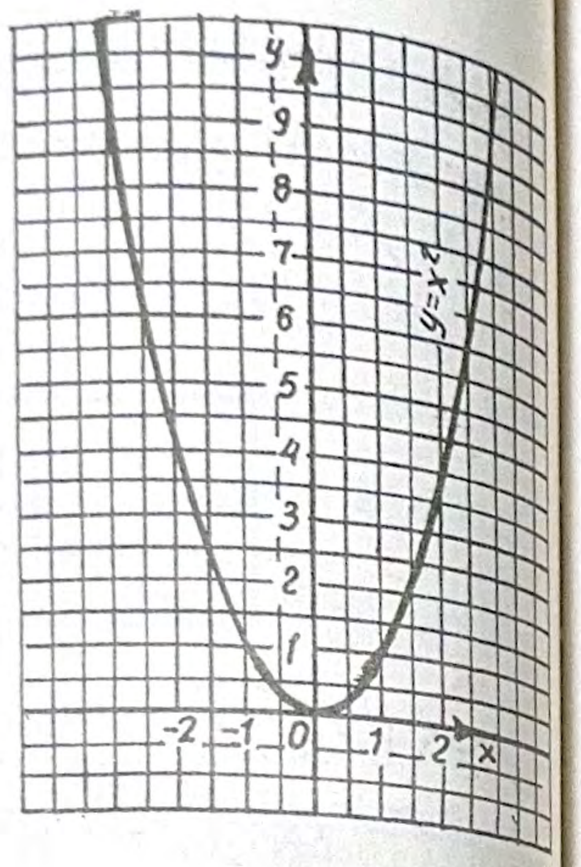
پس گفته میتوانیم مساحت سطح کلی یك مکعب تابع طول کناره آنست. اکنون ما تابعیرا که توسط شکل $y=ax^2$ ارایه شده ودر آن a عدد ثابت خلاف صفر بوده x و y متحولها میباشند مدنظر میگیریم.

افاده $ax^2$ برای هر قیمت دلخواه x معنی دارد.یعنی ست تمام اعداد حقیقی دومین تابعیرا تشکیل میدهد . دراینصورت $X = ]-\infty;+\infty[$ وقتی که $a=1$ باشدفارمول $y=ax^2$ شکل $y=x^2$ را میگیرد که برای ترسیم گراف تابع آن جدول ذیلرا ترتیب میدهیم:

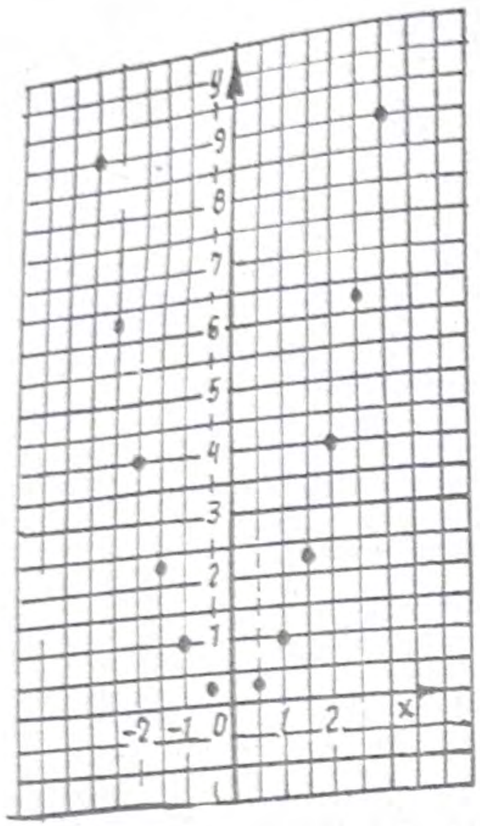
| x | −3 | −2,5 | −2 | −1,5 | −1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 9 | 6,25 | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |

اگر $x=0$ انتخاب گردد y نیز صفر گردیده و گراف از مبدای مختصات میگذرد. برابرهر قیمت دیگری x بجز از صفر قیمت افادهٔ $x^2$ مثبت است ( زیرا، هرعدد مثبت و منفی به نمای جفت مثبت است)






شکل (32)




شکل (31)

بنا بران تمام نقاط تابع غیر از نقطه ( 0,0 ) بالاتر از محور x واقع بوده و y های آن مثبت است . برای قیمتهای متضاد x قیمتهای y با هم مساویست. مثلاً برای قیمت $x=-15$ قیمت $y=225$ میشود واگر قیمت $x=15$ انتخاب شود . قیمت $y=225$ میشود .

پس آن نقاط منحنی اپسیس ها (فصله ها) ایشان متضاد اند نظر به محور y متناظر بوده و متناظر نقطه ( 0,0 ) خودش است ، یعنی هر نقطه گراف تابع $y=x^2$ نظر به محور y دارای یك نقطه متناظر است.

ازاین خاصیت تابع $y=x^2$ استفاده کرده وترسیم گراف آنرا مختصر میسازیم. { مثلاً انتخاب قیمتهای منفی برای اپسیس (فصله‌ها) نقاط لازم نیست } نقطه هایرا مدنظر میگیریم که مختصاتهایشان در

جدول داده شده است، مانند شکل(31) . اگر دقت شود دیده میشود، تعیین مختصات آن نقاط گراف که نزدیک مبدا واقع اند، مشکل است. غرض رفع این مشکل ما اعداد مثبت را که به صفر نزدیکتر باشد به حیث ابسیس نقاط انتخاب نموده ونقاط مذکوررا تعیین میکنیم .

| x | 0,1 | 0‘2 | 0,3 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0,01 | 0,04 | 0,09 | 0,16 |

ازجدول معلوم است هنگامی که x به صفر تقرب کند y نیز سریعتر به صفر تقرب میکند. این، چنین معنی دارد که گراف تابع درحول مبدأ محورات کمیات وضعیه قیمتهای x و y با هم نزدیك (زیچ) شده به صفر تقرب میکنند .

نقطه های نشانی شده راتوسط خط روان پیوست کرده و درنتیجه گراف تابع را حاصل میکنیم، مانندشکل(32 ).

مثال 1 . میخواهیم گراف تابع $y = \frac{1}{3}x^3$ را رسم کنیم . .

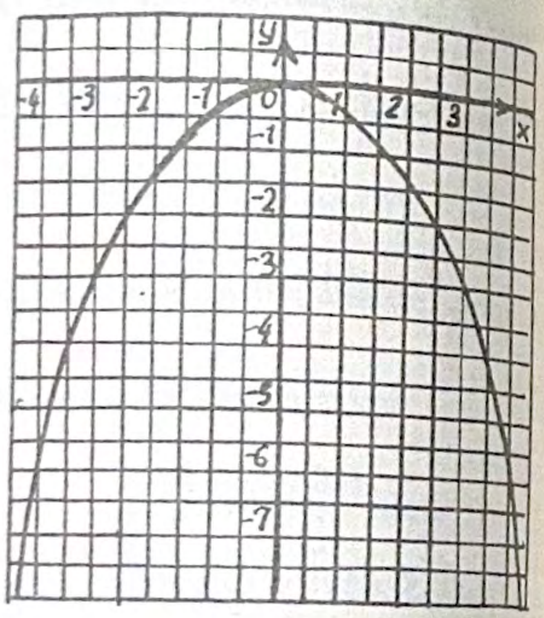
غرض رسیدن به این مطلوب جدول ذیلراترتیب میدهیم . درجدول قیمتهای x راتادوخانه اعشاری درنظر میگیریم .

| x | −4 | −3,5 | −3 | −1,5 | − 2 | −1,5 | − 1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 5,33 | 4,08 | 3 | 2,08 | 1,33 | 0,75 | 0,33 | 0,08 | 0 | 0,08 | 0,33 | 0,75 | 1,33 | 2,08 | 3 | 5,33 |

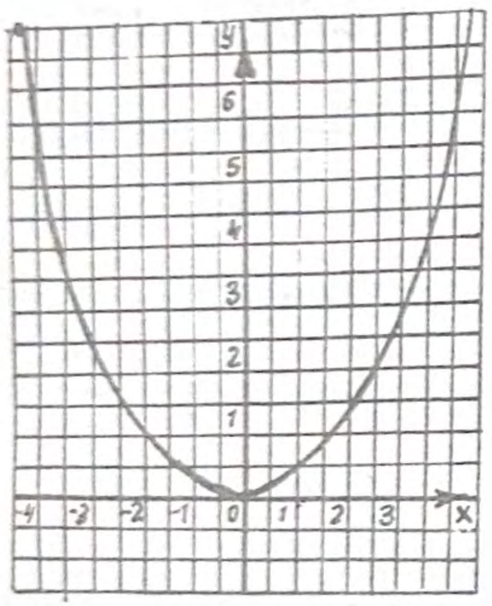


برای تکمیل کردن جدول فوق ازجدول گراف تابع $y = x^3$ استفاده میکنیم طوریکه هریک ازقیمت $x^3$ را با 3 تقسیم مینماییم. این خارج قسمت مختصات نقاط تابع $y = \frac{1}{3}x^3$ را ارایه میکند. مختصات نقاط را درجدول ترتیب داده وبرروی کاغذ گراف نشانی مینمایم. تمام این نقاط نشانی شده را توسط خط روان پیوست کرده ودرنتیجه گراف تابع $y = \frac{1}{3}x^3$ را حاصل میکنیم .

$y = \frac{1}{3}x^3$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{3}x^3$



شکل ( 34 )



شکل( 33 )

مثال 2 : میخواهیم گراف تابع $y = -\frac{1}{3}x^3$ را رسم نماییم.

درمرحله اول جدول را ترتیب میدهیم. برای ترتیب این جدول از قیمتهای تابع $y = \frac{1}{3}x^3$ استفاده کرده میتوانیم ،طوریکه اشارهٔ

قیمتهای y را تغییر داده نقاط مختلف تابع $y=-\frac{1}{3}x^2$ مانند جدول ذیل حاصل مینماییم :

| x | −4 | −3,5 | −3 | −2,5 | −2 | −1,5 | −1 | −0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | −5,33 | −4,08 | −3 | −2,08 | −1,33 | −0,75 | −0,33 | −0,08 |

| x | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | −0,08 | −0,33 | −0,75 | −1,33 | −2,08 | −3 | −4,08 | −5,33 |

نقاط مربوط مختصات جدولرا در کاغذ گراف نشانی کرده وتوسط خط روان‌پیوست مینماییم درنتیجه‌گراف تابع $y=-\frac{1}{3}x^2$ حاصل میشود، مانندشکل(34).

از مشاهده گرافهای (33) و( 34 )دیده میشود که‌گراف توابع $y=\frac{1}{3}x^2$ و $y=-\frac{1}{3}x^2$ نظر به محور x متناظر اند .

منحنی توابع که شکل $y=ax^2$ ( در حالیکه $a\neq 0$ است .) داشته باشندیک نوع پارابول گفته میشود. وقتیکه $a>0$ باشدگراف تابع $y=ax^2$ درنیمهٔ مستوی بالای محور x وو قتیکه $a<0$ باشد درنیمه مستوی‌پایین‌محور x واقع‌میشود. گراف‌تابع $y=ax^2$ که نظر به‌محور y متناظر است بنابر قیمتهای‌متضاد x ; y دار ی‌قیمتهای مساویست .

اگرترسیم‌گراف تابع $y=ax^2$ (درحالیکه $a\neq 0$ است)مطلوب باشد، دراینصورت ما چند نقطه‌آنرا تعیین نموده و از وصل کردن



این نقاط توسط خط روان منحنی مطلوب را حاصل مینماییم .

از اینکه هرمرکبه مختصات هر نقطه این منحنی یك عنصرست فرعی اعداد حقیقی‌بود.ومشکل‌است که‌تمام‌گراف منحنی تابع را توسط ست اعداد حقیقی ارایه نماییم ، پس دراین صورت قسمتی از منحنی تابع را که‌یك‌ست‌فرعی‌نقاط پارا بول میباشد مطالعه میکنیم.

## سوالات

295 ـ ازروی رسم (32) که در گراف $y=x^2$ داده شده است استفاده کرده:

(a) به‌قیمت $x\in\{-2,3;1,2;2,3\}$ قیمتهای y رادریافت‌نمایید؛

(b) به قیمت $y\ 1,6;\ 0$ قیمت x را پیدا کنید .

296 ـ درر سم (32) از گراف $y=x^2$ استفاده نموده ،

(a)قیمت افاده $x^2$ را حساب کنید درصورتی که $x=2,3; x=1,2$; $x=3,2; x=2,7$ باشد .

(b) آن ست قیمتهای x راکه در آن قیمت تابع مساوی به 4 است دریافت کنید .

(c) یك قیمت x را که‌بنابر آنها قیمت‌تابع:

(1) از 4 کمتر باشد،(2) از 4 زیادتر باشد تعیین کنید .

(d) ست قیمتهای x را که در آنها قیمت $x^2$ از 9 کمتر است پیدا کنید .

297 ـ دررسم (32) گراف تابع $y=x^2$ را در نظر گرفته قیمتهای ذیل تابع را مقایسه نمایید :

(a) f (1،9) و f (2،2) را،

(b) f (−2،8) و f (−2،4) را ،

(c) f (−3،1) و f (2،6) را،

(d) f (−1،7) و f (2،4) را .

298 ـ تابع $y=x^2$ که توسط شکل (32) داده شده است مدنظر بگیرید. ست تصاویر {1;3} (b) ؛{−2;0} (c) ؛{−1;2} (d) ؛{−3;1} (a) را پیدا کنید.

299 ـ در مسافتهای [1;3] (a)،[−5; 2] (b) کمترین وزیاد ترین قیمتهای راکه‌به‌واسطه فارمول $y=x^2$ داده‌شده‌است‌در یافت کنید.

300 ـ (a) اگر طول یك ضلع مربع 3 چند شود در مساحت آن چی تغییر به وجود میاید ؟

(b) اگر طول یك ضلع مربع یك دهم گردد درمساحت آن چی تغییربه وجود میاید ؟

(c) اگر مساحت‌مربع 4 چند شوددرطول ضلع آن چی تغییراتی به وجود میاید؟

301 اگر A (a;b) یك نقطه گراف تابع $y=x^2$ باشدنشان‌دهید که نقطه B(−a،b) نیز یك‌نقطه دیگر گراف این تابع‌است.



302 ـ گراف تابع را که توسط فارمول $y=0،5x^2$ داده‌شده است‌رسم کنید:

(a) از روی گراف پیدا کنید که برای کدام قیمتهای x تابع y

(1) قیمتهای 0;4;5;6 را اختیار میکند ؟

(2) قیمتهای بزرگتر از صفر را اختیار میکند ؟

(b) آن ست قیمتهای رانشان دهید که به‌اساس آن x درمسافه های ذیل متعلق باشد :

(a) [2;4] ; (b) [−4 ;−2] ; (c) [−3;0] ; (d) [−2;3];

303 ـ گراف‌ـتابع $y=-0،5x^2$ را راسم‌نموده از روی گراف پیدا کنید که بکدام قیمتهای متحول x قیمت y :

(a) مساوی به 5−; 2−; 0 میشو د؟

(b) قیمتهای کمتراز صفر را میگیرد ؟

(c) قیمتهای زیادتر از2− را میگیرد ؟

304 ـ کدام یکی ازنقاط ذیل به گراف تابع $y=-100x^2$ تعلق دارد:

(a) K (1،5; −225) ; (b) L (−3 ; −900) ;

(c) M (2;400) ; (d) N( − 0،01 ; −1) ?

305 ـ میدانیم که مساحت دایره a ( به حساب سانتیمتر مربع ) توسط فارمول $S=\pi r^2$ اوایه میشود که دراینجا r شعاع دایره ( به حساب سانتیمتر) و $\pi$ عدد است که تقریباً مساوی به 3,14 میشود .

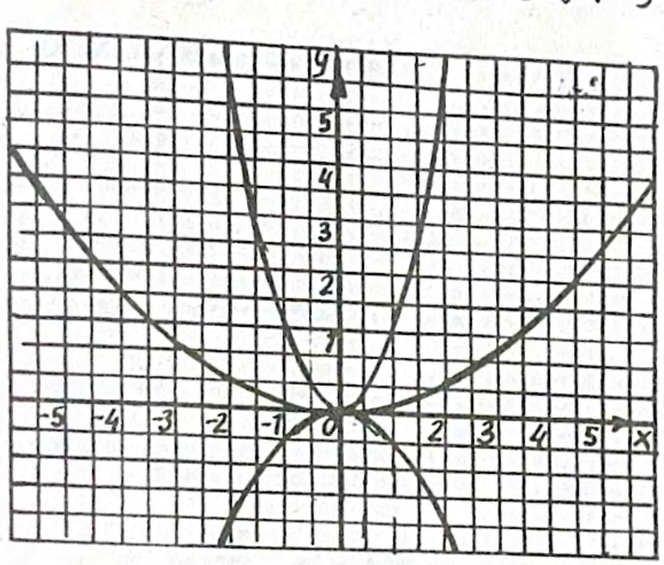
( a ) اگر طول شعاع دایره 2 چند شود درمساحت آن چی تغییر رخ میدهد ؟

( b ) اگر طول شعاع دایره یك ششم گردد درمساحت آن چی تغییر به وجود میاید ؟

( c ) اگر مساحت دایره 9 چندشود درطول شعاع آن چی تغییری پیدا میشود ؟

( d ) اگرمساحت دایره یك بیست و پنجم شود در طول شعاع آن چی تغییری رخ میدهد ؟

306 ـ در شکل(35) گراف تابع $y=ax^2$ رسم شده است.
برای هریك از تابعهای داده شده قیمت ضریب a را پیدا کنید .



شکل (35)

307 ـ سیستم معادلات ذیلرا توسط رسم گراف حل کنید .

(a) $\begin{cases} y=x^2 \\ y-2x-3=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y=x^3 \\ x+y=6 \\ y-x=2 \end{cases}$



308 ـ افاده های ذیلرا حساب کنید :

(a) $\frac{8^{15}}{4^{22}}$ ; (b) $\frac{(-9)^{27}}{(-27)^{18}}$ .

## 33. مطالعه گراف تابع $y=ax^3$

تابع $y=ax^3$ راکه دراینجا a عدد خلاف صفر x و y متحول هااند در نظر میگیریم. مسافه تحول این تابع درست اعداد حقیقی معین میباشد. یعنی $ax^3$ برای تمام قیمتهای دلخواه x معنی دارد .

وقتی که $a=1$ باشد . فارمول $y=ax^3$ شکل $y=x^3$ را میگیرد .

حالا گراف تابع $y=x^3$ را رسم مینمایم. وبرای ترسیم گراف مطلوب جدول ذیلرا ترتیب میدهیم ( درین جدول بعضی قیمتهای تقریبی تابع نیزشامل اند ) .

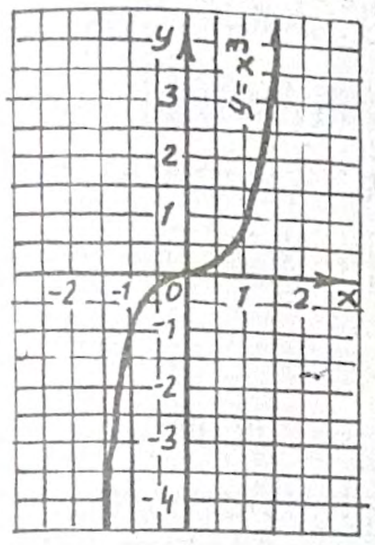
| x | —2 | —1,5 | —1 | —0,5 | 0 | 1 | 1,5 | 2 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | —8 | —3,38 | —1 | —0,13 | 0 | 1 | 3,38 | 8 | 0,13 |

دیده میشود که گراف این تابع ازمبدای کمیات وضعیه میگذرد یعنی اگر $x=0$ باشد $y=0$ است. به قیمتهای مثبت x قیمتهای y مثبت و باقیمتهای منفی x قیمتهای y نیز منفی میشوند. مثلاً اگر $x=4$ باشد $y=64$ واگر $x=-6$ باشد $y=-216$ میباشد . پس گراف تابع در دو ناحیه (حجره) اول وسوم قرارمیگیرد .

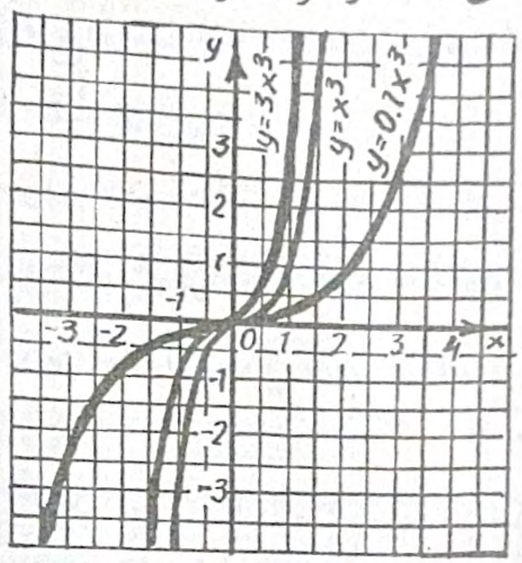
برای قیمتهای متضاد x قیمتهای y نیزمتضاد ومعین میشود .

مثلاً اگر $x=5$ باشد . $y=125$ و برای $x=-5$ $y=-125$ میشود .

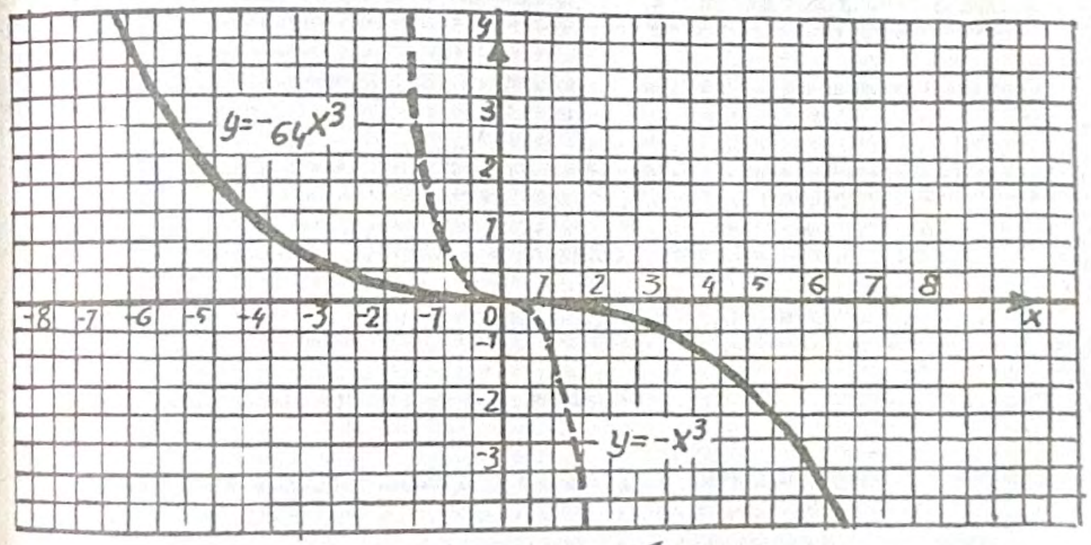
پس نقاط گراف نسبت به مبدای کمیات وضعیه متناظر میباشند .
از این خاصیت متناظر بودن گراف تابع مذکور درترسیم آن استفاده کرده اولاً نقاط مربوط یك شاخه ، منحنی را در مستوی کمیات وضعیه تعیین نموده و سپس تناظر آنها را نظر به مبدای 0 که مرکز تناظر است تعیین مینمایم .



شکل ( 36 )



شکل ( 37 )



شکل (38)



اکنون درمستوی کمیات وضعیه نقاط تعیین‌شده جدول رانشانی کرده و این نقاط نشانی‌شده را توسط خط روان پیوست مینمایم که درنتیجه گراف تابع $y=x^3$ حاصل میشود .

از ترسیم گراف تابع $y=x^3$ برای ترسیم گرافهای توابع دیگر شکل $y=ax^3$ (برای دیگر قیمتهای a بجز از صفر) نیز استفاده‌شده‌میتواند.

رسمهای (37) و (38) گراف توابعی که به‌شکل $y=ax^3$ داده شده ( برای قیمتهای مختلف a ) ترسیم گردیده است . گراف تابع که به شکل $y=ax^3$ داده شده طوریکه $a\neq 0$ باشد .پارابول مکعبی نامیده میشود .

معلوم میشود که مرکبه کمیات وضعیه هرنقطه این گراف به یک عنصر ست تمام اعداد حقیقی تقابل میکندومشکل است که تمام نقاط گراف $y=x^3$ را توسط ست تمام اعداد حقیقی ارایه کنیم. پس گراف رسم شده حصه منحنی $y=x^3$ بوده ست فرعی پارابول مکعبی است .

سوالات

309 - در رسم (36) گراف تابع $y=x^3$ داده شده بااستفاده از آن سوالات ذیلرا حل کنید :

(a) به قیمیت $x=0,8;-0,8;1,2;-1,2$ قیمتهای y رادریافت نمایید.

(b) به قیمتهای $y=27, y=-8$ قیمت x را پیدا کنید .

310 - در رسم (36) از گراف تابع $y=x^3$ استفاده نموده

( a ) قیمتهای افاده $x^3$ را حساب کنید درصورتیکه $x=1,3;x=1,4$، $x=1,8$ باشد .

( b ) قیمتهای ذیل تابع را باهم مقایسه کنید :

(1) $f(1)$ ، $f(1,2)$ را، (2) $f(-1,4)$ و $f(1,2)$ را

(3) $f(-1)$ و $f(0)$ را و $f(0)$ ; $f(1)$ را .

( c ) قیمت x را دریافت کنید درحالیکه قیمت افادهٔ $x^3$ مساوی به 8 ومساوی به $-125$ باشد .

311 - ( a ) اگرطول تیغه یا کناره مکعب 2 چند شود درحجم آن چی تغییری وارد میشود ؟

( b ) اگرطول کناره یك مکعب یك هشتم گردد دوحجم آن چی تغییری بوجود میاید ؟

( c ) اگرحجم یك مکعب 27 چند گردد درطول کناره آن چی تغییری بوجود می آید؟

312 - گراف تابع $y=-x^3$ را رسم کنید طوری که در وقت رسم کردن آن از قیمتهای متضاد جدول گراف شکل (36) استفاده نمایید.

( a ) به قیمت $x=0,7;-0,7:1,8;-1;3$ قیمتهای y رادریافت نمایید.

( b ) به قیمت $y=46;-46$ قیمتهای x را پیدا کنید .

( c ) نظر به قیمتهای $y>0;y<0$ و $y=0$ ست قیمتهای متحول x را دریافت کنید .

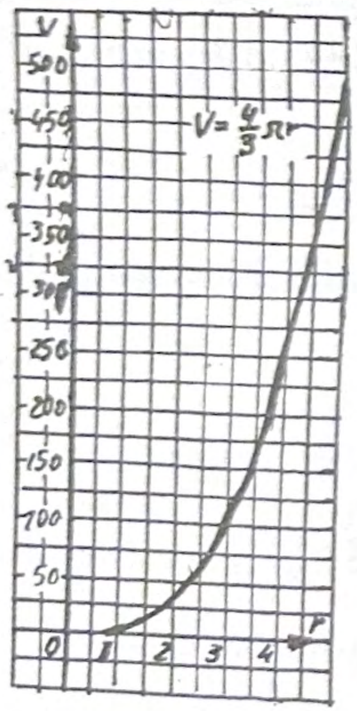


313 - میدانیم که حجم کره توسط فارمول $V=4/3\pi r^3$ حساب میشود که دراینجا r شعاع کره (به حساب سانتیمتر) V حجم کره (به حساب سانتیمترمکعب) و $\pi$ عدد که تقریباً مساوی به 3,14 است میباشند . درشکل (39) گراف متحول حجم بنا بر طول شعاع آن ترسیم گردیده است به کمك این گراف :

( a ) حجم کره را پیدا کنید درصورتی که طول شعاع آن مساوی به 2،9 سانتیمتر و 4,2 سانتیمتر باشد .

( b ) طول شعاع کره را پیدا کنید درصورتی که حجم آن 260 سانتیمتر مکعب و 375 سانتیمر مکعب باشد .

( c ) هرگاه حجم کره یکه شعاع آن 3,7 سانتیمتر است دوچند شود طول شعاع آن چقدرزیاد خواهد شد ؟




شکل (39)

314 ـ آیا کدام یکی از نقاط ذیل مربوط گراف تابع $y=25x^3$ میباشد.

(a) A(1,2;4,32) ; (b) B(−2;−200) ; (c) C(0,4;1,6) ?

315 ـ صحت مساوانتهای ذیلرا تحقیق کنید :

(a) $3^3+4^3+5^3=6^3$

(b) $(1+2+3+4)^2=1^3+2^3+3^3+4^3$

316 ـ هریك از اعداد ذیلرا به شکل حاصلضرب اعداد افاده کنید:

(a) 54 ; (b) 144 ; (c) 225 ; (d) 243.

317 ـ اعداد ذیل را به شکل اعداد نما داری که قاعده‌هایشان 2 یا 3 باشند بنویسید :

(a) 64; (b) 81 ; (c) 512 ; (d) 729 ; (e) 1 024 .

318 ـ اعداد ذیلرا به شکل حاصل جمع اعداد نما داری که قاعده هایشان 2 باشد افاده کنید .

(a) 6; (b) 18 ; (c) 42 .

319 ـ قیمت افاده ذیلرا دریافت کنید درصورتی که $x\varepsilon\{1,5;-2\}$ باشد .

(a) $x^2; -x^2; (-x)^2$ ; (b) $x^3; -x; (-x)^3$ .

320 ـ بنابرقیمتهای ذیل x قیمت افاده های $x^2$ و $x^3$ را باهم مقایسه کنید :

(a) 1; 7; 10; (b) $\frac{2}{3}$ ; $\frac{1}{6}$ ; 0,1; (c) 0; −3; $\frac{1}{3}$ .

321 ـ قیمت افاده های ذیلرا دریافت کنید :

(a) $0,001\,x^5$ وقتیکه $x=-2$ باشد .



(b) $100000\,y^6$ درصورتیکه $y=0,1$ باشد .

(c) $x^4\,y^4$ درصورتیکه $x=2, y=5$ باشد .

(d) $0,1\,x^3\,y^3$ درصورتیکه $x=-2, y=5$ باشد .

322 ـ آن سیتهای ( ستهای فرعی) ست $\{3;-2;-3\}$ را پیدا کنید که ست حله معادلات ذیل باشند :

(a) $x^4=81$ ; (b) $x^3=-81$ ; (c) $0,25x^6=16$

(d) $x^4=6x^2-x^3$ ; (e) $x^2-x=2$; (f) $x^4+36=13x^2$

323 ـ بنابر کدام قیمتهای n غیر مساواتهای ذیل حقیقت دارد :

( کمك :درموقع ضرورت از جدول طاقت 2 و 3 استفاده کنید.)

(a) $52<10^n<8041$ ; (b) $333<3^n<881$ ;

(c) $1000<2^n<10000$ ; (d) $500<3^n<1000$

324 ـ افاده های ذیلرا باهم ضرب کنید :

(a) $a^{10}.a^{12}.(-a^5)$; (b) $x.(-x).(-x^6)$ ;

(c) $y^k.y^s.y^2$ ; (d) $b^n.b^n.b^3$ .

325 ـ افاده های ذیلرا به شکل طاقتهای که دارای عین قاعده باشند بنویسید :

(a) $2^5.8$ ; (b) $16.64$ ; (c) $7^n.343$ ; (d) $81.3^k$ .

326 ـ درصورت امکان افاده های ذیلرا به شکل دوعامل ضربی که یکی از آنها $5x^2$ باشد بنویسید:

(a) $10x^{20}$ ; (b) $2x^{45}$ ; (c) $-30x^3$ ; (d) $15x^2$.

327 - افاد همای ذیلرا به شکل $3^n$ و $-3^n$ - طوریکه $n \varepsilon N$ باشد بنویسید :

(a) $(-3^3)^2$ ; (b) $(-3^2)^3$ ; (c) $-(3^3)^2$ ; (d) $-(-3^2)^3$ ;

328 - بدون حل درخالیگاه ذیل یکی از علایم $<$ ، $>$ یا $=$ را بگذارید تاافاده را صحیح سازد :

(a) $(-1,75)^5 \square (-0,29)^2$ ; (b) $(-36)^7 \square (-2,1)^6$;

(c) $0,98^6 \square 1,02^5$ ; (d) $(\frac{5}{6})^6 \square (\frac{6}{5})^2$.

329 - افاد همای ذیلرا باهم ضرب نموده ساده کنید :

(a) $(x^3).^2(-x^3)^4$ ; (b) $(x^n)^5.(-x^2)^6$; (c) $(-y^3)^7.(-y^4)^5$ ;

(d) $(-c^k)^4.(c^5)^2$

330 - درعوض p آنافاد همای طاقتدار رابنویسید کهمساواتهای ذیل برای تمام قیمت متحولها حقیقت داشته باشد :

(a) $p^5 = x^{20}$ ; (b) $p^7 = -b^{35}$ ; (c) $p^3.c^6 = -c^{20}$

(d) $y^7.(y^2)^4 = p^5$.

331 - حاصلضر بهای ذیلرا به شکل اعداد طاقت نما داری که دارای عین قاعده باشند بنویسید:

(a) $4^5.2^{21}$ ; (b) $5^{13}.25^{11}$ ; (c) $8^5.16^3$ ; (d) $27^{10}.9^{15}$.

332 - قیمت افاد همای ذیلرا پیدا کنید که با قیمت داده شده متحول n موافق باشند :

(a) $n.(-1)^n$ درصورت که $n=1;2;3;4;5$ باشد :



(b) $\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$ درصورتی که $n=1;2;3;4;5$ باشد .

333 - قیمت افاد همای ذیلرا دریافت کنید :

(a) $(-1)^k + (-1)^{k+1}$ درصورتی که $k \varepsilon N$ باشد،

(b) $(-1)^n + (-1)^{2n+2}$ درصورتی که $n \varepsilon N$ باشد ،

(c) $(-1)^p.(-1)^p$ وقتی که $p \varepsilon N$ باشد،

(d) $(-1)^{2p}.(-1)$ وقتی که $p \varepsilon N$ باشد .

334 - افاد همای ذیلرا ساده کنید :

(a) $(-1\frac{2}{3}a^2c^3)^3$; (b) $(-0,75x^4y^2)^2$;

(c) $(\frac{5}{8}ay^4)^3.(1\frac{1}{15}a^5)^2$ ; (d) $(-\frac{7}{9}x^4)^3.(-\frac{3}{13}x)^2$.

335 - هریك ازافاده های ذیلرا به شکل افاده یکه دارای طاقت نما باشد بنویسید :

(a) $100a^2$ ; (b) $81y^4$ ; (c) $-27x^4$ ; (d) $-64c^3$;

(e) $-100000c^{10}$ ; (f) $0,0001x^{100}$ .

336 - قیمت افاد همای ذیلرا محاسبه کنید :

(a) $4,2.5^5$ ; (b) $(\frac{1}{3})^{13}.13^{13}$ ; (c) $0,2^5.5^7$ ;

(d) $0,4^{10}.2,5^{12}$ ; (e) $0,2.25^3$ ; (f) $(\frac{1}{9})^6.81^4$.

337 - قیمت هرجوره ازافاده های ذیلرا باهم مقایسه کنید :

(a) $10^7$ و $2^6.5^7$ را ؛ (b) $16^{12}$ و $2^{23}.3^{11}$ را؛

( c ) $25^{25}$ و $20^{50}.3^{50}$ را ، ( d ) $63^{30}$ و $5^{30}.3^{60}$ را )

338 ـ درداخل قوسها افاده های را بنویسید که بنابـر ان هریك از مساوات ذیل برای تمام قیمتهای a حقیقت داشته باشند :

(a) $(\quad)^5.(\quad)^2=a^{11}$ ; (b) $(\quad)^4(\quad)^3=-8a^{10}$ ;

(c) $(\quad).(\quad)=72a^{13}$ ; (d) $(\quad).(\quad)=-108a^9$.

339 ـ هر کدام از حاصل تقسیمهای ذیلرا به شکل طاقت نما بنویسید.

(a) $b^{15}\div b^{13}$ ; (b) $7^{39}\div 7^{18}$ ; (c) $(2a)^{300}\div(2a)^{200}$ ;

(d) $(-3b^{99})\div(3b^{49})$ ; (e) $(0,3x^{60})\div(0,3x^5)$ ;

(f) $(-0,1a)^{88}\div(-0.1a)^8$.

340 ـ قیمت افهاد های ذیلرا دریافت کنید :

(a) $13^{100}\div 13^{98}$ ; (b) $2^{14}\div 8^4$ ; (c) $\frac{3^8.2^7}{3^6.2^7}$ ; (d) $\frac{9^5.5^9}{3^3.5^{10}}$ ;

(e) $\frac{5^{10}.3^8}{75^4.3^{10}}$ ; (f) $\frac{15^8}{3^9.5^7}$

341 ـ نشان دهید که قیمت هر یك از افاد ههای ذیل به n ارتباط ندارد طوری که $n\varepsilon N$ و $n\geq 3$ است.

(a) $10^{n+1}\div 10^{n-1}$ ; (b) $3^{2n-1}\div 3^{2n-5}$; (c) $\frac{6^{n+1}.6^{n+2}}{6^{3n}}$ ;

(d) $\frac{5^{2n+3}.5^{3n-1}}{5^{2n+2}}$ ; (e) $\frac{9^n.3^{n+2}}{27^{n+1}}$ ; (f) $\frac{16^{n-2}.4^{n+1}}{8^{2n}}$ .

342 ـ بنابر کدام قیمتهای n افادههای ذیل رابه طاقت نمای که قاعده آن c باشد نوشته کرده میتوانیم :



را ازنظر میگذرانیم دیده میشود که افاد ههای مذکور از اعداد، و متحولها به کمك اجرای عملیه های جمع ، تفریق، ضرب ، تقسیم یا بلند بردن درجه تشکیل گردیده‌اند. افادههای فوق به‌نام افادههای نسبتی یاد میشوند .

آن افادههای نسبتی را که آنها به شکل تقسیم متحولها نباشند به نام افاده تام یا کامل یادمیکند. به‌جز از افادهٔ $\frac{a^3}{c}$ دیگر تمام افادههای فوق الذکر افادههای کامل اند .

در تبدلات افادههای تام تعویض یك افاده به افاد ههای دیگری که هریك از این افادهها یك افاده عینیتی افاده داده شده‌است امکان پذیراست . زیرا هریك از این افاد ههای حاصل شده مساوی به افادهٔ اولی است . چون چند حد ها نیز افاد ها اند، پس از این خاصیت افاد ها استفاده کرده در این مبحث ما به تبدیل مجموع و تفاضل چند حد ها به چند حده معیاری آنها میپردازیم .

مثال 1— . میخواهیم که مجموع دو چندحدهٔ ذیلرا به شکل چند حدهٔ معیاری آن تبدیل کنیم :

$(5x^2+7x-8)+(-3x^2-6x+9)$.

حل: ما میدانیم که اگر پیش از قوسها علامه مثبت باشد هریك از یك حد ها داخل قوسها را بدون تغیر علامه از قوس کشیده میتوانیم. پس متکی به این حقیقت ما مینویسیم :

$(5^2+7x-8)+(-3x^2-6x+9)=5x^2+7x-8-3x^2-6x+9$;

اکنون حده های مشابه را باهم جمع جبری نموده و مینویسیم :

$5x^2+7x-8-3x^2-6x+9=2x^2+x+1$

$(5x^2+7x-8)+(-3x^2-6x+)=2x^2+x+1.$

مثال 2. میخواهیم که فرق دوچند حدهٔ ذیلرا به شکل معیاری آنها بیاوریم :

$(10a^3-4a^2-16)-(-6a+8a^3-80)$

حل: ما میدانیم اگر پیش روی قوسها علامه منفی باشد یك حده های داخل قوسها را با تغییر علامه از قوس خارج میکنیم .

پس در این صورت مینویسیم :

$(10a^3-4a^2-16)-(-6a^3+8a-80)$

$=10a^3-4a^2-16+6a^3-8a+80$

بعد از جمع نمودن حدهای مشابه ما نوشته کرده میتوانیم که:

$10a^3-4a^2-16+6a^3-8a+80=16a^3-4a^2-8a+64$

$(10a^3-4a^6-16)-(-6a^2+8a-80)=16a^3-4a^2-8a+64$

سوالات

394 - هریك از افاد ههای ذیلرا به شکل چند حده های معیاری آنها تبدیل کنید :

(a) $1+3a+(a^2-2a)$ ; (b) $2x^3+3x+(-x+4)$ ;

(c) $(y^2-5y)+(5y-2y^2)$ ; (d) $(b^2-b+17)-(b^2+b+8)$ ;

(e) $(8n-3^3n^2)-(7-8n-2n^2)$ ; (f) $(a^2+5a+4)-(a^2+5a-4)$.

395 - افاد ههای ذیلرا ساده کنید :

(a) $(a^2-0,45a+12)+(0,8a^2-12a)-(1,6a^2-2a)$ ;

(b) $(y^2+1,75y-3,2)-(0,3y^2+4)-(2y-7,2)$ ;



(c) $-(\frac{2}{3}x^3-1\frac{1}{6}x)+(\frac{2}{8}x^3-\frac{3}{4}x+1)-(1-\frac{1}{2}x^2)$ ;

(d) $(0,6b^2-2,5b)-(0,35b^2+0,65b)-(0,75b^2-0,15b)$.

396 - معادله های ذیلرا حل کنید :

(a) $(17-5x)-(3x-11)=4$ ;

(b) $(19+2x)-(5x-11)=25$ ;

(c) $(3,2y-1,8)-(5,2y+34)=-5,8$ ;

(d) $1-(0,5x-15,8)=12,8-0,7x$ .

397 - قیمت هریك از افاد های زیرین را دریافت کنید :

(a) برای قیمتهای $a=2$ , $b=5$ قیمت افاده :

$(5,7a^2b-3,1ab+8b^3)-(6,9ab-2,3a^2b+8b^3)$

(b) برای قیمتهای $x=-0,28$ و $y=0,4$ قیمت افاده

$5x^3-(3xy-7x^2)+(5xy-12x^3)$.

398 - از شاگردان پرسیده شد که به قیمتهای $a=-0,25$, $b=-0,347$ قیمت افاده :

$(7a^3-6a^2b+5ab^2)+(5a^3+7a^2b+3ab^2)-(10a^3+a^2b+8ab^2)$

را حساب کنید . یکی از آنها گفت : «به سوال معلومات اضافی داده شده است». آیا گفته او حقیقت است ؟

399 - نشان دهید که قیمت هریك از افاد ههای ذیل به قیمت متحول مربوط آنها ارتباط ندارد :

(a) $(1,7-10a^2)-(1-3a^2)+(2+7a^2)$ ;

(b) $1-b^2-(3-2b^2)+(1+3b-b^2)$ .

400 - کدام یك از بیانیه های ذیل صحیح است :

(a) مجموع هر آن سه عدد طبیعی متوالی (پی درپی) به 3 قابل تقسیم است ،

(b) مجموع هر آن چارعدد طبیعی متوالی به 4 قابل تقسیم است؟

401 - درمساواتهای ذیل به جای M چی بنویسیم تاهر یک از مساواتهای مفروض به یک تساوی عینیتی تبدیل گردد :

(a) $M+(5x^2-2xy)=6x^2-9xy-y^2$ ;

(b) $M-(4ab-3b^2)=a^2-7ab+8b^2$ ?

202 - به‌عوض ستاره گکها درهریك از مساوتهای ذیل آن اعداد وحروف را بنویسید تا آنها به تساویهای عینیتی تبدیل گردند :

(a) $(5x^2+\ *\ -7)+(\ *\ -4x+\ *\ )=x^2+2x+1$ ;

(b) $(\ *\ -6y+13)-(9y^2-\ *\ +\ *\ )=2y^2+3y-4$ .

303 - نشان دهید :

(a) مجموع دوعدد دلخواه دورقمی که به‌شکل ab وbaنوشته میشوند به 11 قابل تقیم است ،

(b) فرق دوعددورقمی دلخواه که به شکل ba وab نوشته میشوند به 9 قابل تقسیم است .

(c) فرق دوعددورقمی دلخواه که به‌شکل ab وba نوشته‌میشوند به 3 قابل قسمت است .

404 - آن عددورقمیرا به دست آرید که حاصل جمع خودش ومجموع ارقامش 73 وحاصل جمع خودش باعددیکه‌ازتبدیل کردن جایهای ارقامش حاصل میشود 110 گردد.



405 - آن عددورقمیرا پیدا کنید که‌حاصل جمع‌خودش وعددیکه ازتبدیل کردن جایهای ارقامش حاصل میشود 88 وفرق شان53شود.

406 - (a) - مجموع سه عدد تاق متوالی 81 میشود اعدادرا معلوم کنید .

(b) مجموع چارعدد جفت متوالی 84 میشود اعداد را معلوم کنید.

## 38 - وضع قوسها

بعضی اوقات ضرورت میافتد که بعضی ازحد های یك چند حده‌را داخل قوسها نماییم . چون اجرای عملیه داخل‌قوس نمودن عکس اجرای عملیه کشیدن از قوسهاست ، بنابران بادرنظر داشت قاعده‌عملیه رفع قوسها (کشیدن از قوسها) مابه سهولت حد های مورد نظررا داخل قوسها نوشته کرده میتوانیم .

> اگر پیشروی قوسها علامه مثبت نوشته شود دراین‌صورت حده‌هایکه داخل قوسها برده میشوند بدون تغییر علامه نوشته گردند .

مثال 1 . چند حده $x^3-5x^2+7x-8$ را به داخل قوسها طبق ذیل نوشته میتوانیم :

$$x^3-5x^2+7x-8=(x^3-5x^2)+(7x-8)$$

> هر گاه پیشروی قوسها علامه منفی نوشته شود در این صورت حد هایکه داخل قوسها برده میشود با تغییر علامه نوشته گردند .

مثال 2 . چند حدهٔ $a^4-3a^3+5a^2-8$ را طبق ذیل نیز نوشته میتوانیم :

$$a^4-3a^3+5a^2-8=a^4-(3a^3-5a^2+8)$$

سوالات

407 - چند حدهٔ $10x^3-5x^2y+6xy^2+y^3-10$ را به شکل مجموع دو قوس طوری بنویسید که در یکی از آنها متحول y نوشته نشود .

408 - چند حده $2a^4-3a^2b-a^3+b^2$ را به شکل تفاضل دو قوس طوری افاده کنید که در یکی از آنها متحول b نوشته نشود .

409 - هریک از حد های ذیلرا طبق دلخواه به شکل مجموع دو دو حده افاده کنید :

(a) $3x^3-2x^2-x+4$ ; (b) $-5y^4+4y^3+3y^2-2y$ ;

(c) $\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{3}b^2-\frac{1}{4}b-1$ ; (d) $a^2-3a^2b-3ab^2+b^3$.

410 - هریک از چند حد های ذیلرا به شکل تفاضل یک یک حده و یک سه حده افاده کنید .

(a) $x^3+2x^2-3x-5$ ;
(b) $-2y^4-3y^3+5y-8$ ;
(c) $0,3z^3-z^2-2z-1$ ; (d) $3a^4+2a^3+5a^2-4$ .



411 - اگر

$x=5a^2+6ab-b^2$ ، $y=-4a^2+2ab+3b^2$ و $z=9a^2+4ab$

باشند قیمت هر یک از سه حد های ذیلرا به اساس a و b حساب کنید :

(a) $x+z+y$ ; (b) $x-y-z$.

412 - هر یک از سه حد های ذیلرا به شکل مجموع دو دو حده بنویسید :

(a) $x^2+6x+1$ ; (b) $y^2-3y-7$ ;
(c) $a^2-a-z$ ; (d) $2b^2+7b-1$.

413 - هر یک از سه حد های ذیلرا به شکل تفاضل دو دو حده افاده کنید :

(a) $x^2+8x+7$ ; (b) $a^2-2a+3$ ;
(c) $2y^2-y-1$ ; (d) $b^2+b-10$.

414 - تابع $y=x^2+3$ را مدنظر گرفته وقیمت این تابع را به قیمتهای $x=0;x=-5$ و $x=4$ حساب کنید . آیا بکدام قیمت x تابع صفر شده میتواند ؟

415 - دو تابع : $y=\frac{x}{2-6x}$ و $y=\frac{x-5}{8x+4}$ (b) را مدنظر بگیرید. نظر به کدام قیمت یا قیمتهای x هریک از توابع غیر معین میشود ؟ ستها ییکه در آنها هریک از توابع مذکور معین میباشند کدام اند ؟

## 39 - حاصل ضرب یک حدهها در چند حدهها ( پولینومها )

به کمک قانون توزیعی عملیه ضرب بالای عملیه جمع ماحاصل ضرب

یك‌حده رادر یک چندحده‌طبق مثال ذیل حاصل کرده میتوانیم :

$9x^3 . (7x^2 - 3x + 4) = 9x^3 . 7x^2 + 9x^3 . (-3x) + 9x^3 . 4$
$= 63x^5 - 27x^4 + 36x^3$

از حل مثال فوق نتیجه ذیلرا بیان کرده میتوانیم :

« حاصل ضرب یک یک حده در یک چند حده عبارت از مجموع حاصل‌ضرب های‌آن یک‌حده درهریک از حدهای‌چند حدهٔ مذکورمیباشد . » یا به عبارت دیگر، برای بدست آوردن حاصل ضرب یك یك حده در یك چند حده کافیست تا یك حده مذکورا درهریك از حدهای چند حده‌مذکورضرب کرده‌ومجموع این حاصل ضربها را به‌دست آوریم .

از این خاصیت ضرب یك یك حده دریك چندحده ما درحل بعض معادلات مانند :

$\frac{2x-1}{9} - \frac{x+5}{6} = 2$ استفاده میکنیم .

هردوطرف‌معادله : $\frac{2x-1}{9} - \frac{x+5}{6} = 2$ رادر 18 که عبارت از کوچکترین مضرب‌و 6 و 9 است ضرب میکنیم .

$(\frac{2x-1}{9} - \frac{x+5}{6}).18 = 2 . 18$

$\frac{2x-1}{9} . 18 - \frac{x+5}{6} . 18 = 2 . 18$

$\frac{(2x-1).18}{9} - \frac{(x+5).18}{6} = 36$

$2.(2x-1) - 3.(x+5) = 36$ ; $2.(2x-1) - (x+5).3 = 36$ ; $(2x-1).2 - (x+5).3 = 36$

بعد از کشیدن از قوسها وجمع کردن حده های مشابه نتیجه میشود که 53 عبارت ازحل معادله‌مذکور است .



## سوالها :

416 ـ حاصل ضرب هریك ازافادههای ذیلرا به‌شکل چندحده بنویسید :

(a) $2x . (x^3 - 7x - 3)$ ; (b) $4d^2(5d^2 - 3d + 2)$ ;

(c) $-a^3)2a^2 - \frac{1}{3}ab + b^2)$ ; (d) $(y^2 - 2{,}4y + 6).1{,}5y$ ;

(e) $\frac{1}{6}ad(3ad + 12d^2)$ ; (f) $-(x - 2x^2 + 3x^3 - 4) . 0{,}5x$ .

417 ـ هریك‌ازافاده‌ذیلرا به‌شکل‌معیاری‌یك چندحده بنویسید :

(a) $3y^2 - 2y(5 + 1{,}3y)$; (b) $(\frac{2}{3}a^3)^2 - a^3(1 - \frac{5}{9}a)$ ;

(c) $6x^3 - 3x(2x - \frac{2}{3})$ ; (d) $(-\frac{1}{2}d)3 - d(1 - 2d - \frac{1}{8}d^2)$ ;

(e) $12_4(d - \frac{1}{2}a) - 4d(\frac{1}{2}d + 3a)$; (f) $(\frac{x^2}{4})^2 + \frac{1}{32}x(16x - 2x^3)$ .

418 ـ ساده کنید :

(a) $12x . \frac{x-1}{4} - 15\frac{x - x^2}{5}$ , (b) $48x . \frac{2x+5}{16} - 10\frac{3x - x^2}{2}$ .

419 ـ به قیمتهای مربوط متحولها قیمت هر یك ازافادههای ذیل را حساب کنید :

(a) برای $a = -0{,}6$ و $d = -0{,}75$ قیمت افاده $3a(a - 4d) - 4d(d - 5a)$ را

(b) برای $x = -\frac{2}{3}$ ، $y = \frac{1}{3}$ قیمت‌افاده $x(x - y + 1) - y(y + 1 - x)$ را

420 معادلات ذیلرا حل کنید :

(a) $5x(12 + 5) - 4x(15x - 11) = 30 + 29x$ ,

(b) $24x - 6x(13x - 9) = -13 - 13x(6x - 1)$ .

421 ـ نشان دهید که نتیجه هریك از افادههای ذیل مساوی به صفر است:

(a) $a\,(d-c)+d\,(c-a)+c\,(a-d)$

(b) $a\,(d+c-dc)-d\,(c+a-ac)+c(d-a)$

422ـ نشان دهید که قیمت افاده $x(2x+1)-x^2\,(x+2)+(x^3-x+3)$

به قیمتهای x وابسته نیست.

423. هریك از معادلات ذیل را حل کنید:

(a) $\frac{6x-5}{7}=\frac{2x-1}{3}+2$; (b) $\frac{5x-7}{12}-\frac{x-5}{8}=5$;

(c) $\frac{5-x}{2}+\frac{3x-1}{5}=4$; (d) $\frac{4y-11}{15}+\frac{13-7y}{20}=-2$.

424. یك مسافر فاصله بین دو شهر A و B را که عبارت از 110km است در سه روز طی کرده است. فاصله یی را که او در روز دوم طی نموده 5km کمتر از روز اول بوده و همچنان فاصله یی را که در روز سوم طی کرده $\frac{3}{7}$ حصه فاصله یی است که در روزهای اول و دوم طی کرده است. فاصله طی شدهٔ هریك از روزهای سفر او را حساب کنید.

425. یك نفر سیاح از شهر M به طرف شهر N با سرعت 15km/h روان شد. 16 دقیقه بعد، یك نفر سیاح دیگر به تعقیب او به سرعت 18km/h روانه شد. هردو نفر در یك وقت به شهر N رسیدند. فاصله بین شهرهای M و N را حساب کنید.

426. سه نفر کارگر مجموعاً 104 پرزه تیار کردند. اگر کارگر



اول 12 پرزه کمتر از دوم و کارگر سوم به اندازه $\frac{5}{8}$ حصه هردو نفر کارگر اول و دوم پرزه تیار کرده باشند، معلوم کنید که هر نفر از کارگران مذکور چند پرزه تیار کرده اند.

428. دو موتریکی سرویس و دیگری تیزرفتار از دو شهر A و B در یك وقت به مقابل یکدیگر حرکت میکنند. اگر سرعت موتر سرویس 75km/h و از تیزرفتار 90km/h باشد و بعد از 2 ساعت و 15 دقیقه با هم مقابل شوند فاصله بین شهرهای A و B را حساب کنید.

428. فاصله بین کابل و کندهار 482 کیلومتر است. یك موتر از کندهار به طرف کابل به سرعت متوسط 58km/h در ساعت 6 صبح به طرف کابل حرکت کرد. بعد از یك ساعت توقف در راه به ساعت 3 بعد از ظهر به شهر غزنی رسید. اگر بعد از یك ساعت توقف در غزنی به سرعت متوسط 67km/h به طرف کابل حرکت کند معلوم کنید که ساعت چند به کابل میرسد.

629 یك پیاده گرد از محل A به طرف B به سرعت 3,6km/h روان شد. یك ساعت و 15 دقیقه بعد از حرکت او یك پیاده گرد دیگر از B به طرف A به سرعت 4,8km/h به راه افتاد. هرگاه هردو پیاده گرد در یك وقت به انتهای سفر خود برسند فاصله بین هردو محل A و B را حساب کنید.

430 . توابعی که ذیلاً داده شده اند مدنظر بگیرید :

(a) $y=-x+1$; (b) $y=12x^2$; (c) $y=1,7x$ ;

(d) $y=\frac{3}{x}$ ; (e) $y=-2,5x^2$ ; (f) $y=\frac{x}{3}$ ;

(g) $y=\frac{1}{x}$ ; (h) $y=\frac{1}{3}x^0$ ;

گراف کدام ازاین توابع

( 1 )پرابولاست؟( 2 ) خط مستقیم است؟( 3 ) هایپربولاست؟

431 . گراف تابع $y=\frac{1}{2}x-3$ را رسم کرده وبگویید که به کدام قیمتهای x قیمت y

( a )مساوی به صفرمیشود ؟ ( b ) کمتراز صفرمیشود؟

( c )زیادتراز صفرمیشود ؟

( d ) آیا گراف تابع مذکور :

( 1 )گراف تابع $y=\frac{1}{2}x$ را قطع میکند ؟

( 2 ) گراف تابع $y=x$ را قطع میکند ؟

432 . نظر به بعض قیمتهای a و b قیمت افاده a—b مساوی به 9,15 میشود .

بنا برهمین قیمتهای a و b قیمت افاده های ذیلرا حساب کنید.

(a) b—a ; (b) $\frac{1}{b-a}$ ; (c) $(a-b)^2$;

(d) $(b-a)^2$ ; (e) $(a-b)^3$ (f) $(b-a)^3$ .



## 40- تجزیه چند حدها (پولینومها) به حاصلضرب قوسها

غرض ساده کردن مسایل وحل معادلات بعضی وقت ضرورت می افتد که یک چند حده ( پلینوم ) به شکل حاصل ضرب دوویا چند پلینوم ( ممکن بعضی ازاین عوامل ضربی یک حدهها باشند ) افاده گردد . چنانچه برای یافتن قیمت $a^2-3ab$ به قیمتهای $a=136$ و $b=42$ پولینوم مذکور را به شکل $a(a-3b)$ نوشته کرده میتوانیم . اکنون بنابر قیمتهای داده شده a و b قیمت افاده $a(a-3b)$ را به آسانی دریافت نموده میتوانیم :

$$a(a-3b)=136\,(136-3\,.\,42)=136\,(136-126)=136.10=1360$$

طریق فوق راکه به اساس آن پلینوم را به ضریبهای آن تجزیه نمودیم به نام ( تجزیه پولینوم ) یا « تبدیل کردن پولینوم به حاصل ضرب قوسها » یاد میکنند . اینک در ذیل حل چند مثال را ازنظر میگذرانیم :

مثال اول، میخواهیم که پولینوم $10ax^2-5x^3$ را به قوسها تجزیه کنیم .

حل: درهردوحد این پولینوم حد $5x^2$ مشترک است . اگر یک ازحدود پولینوم داده شده رابه $5x^2$ تقسیم کنیم خارج قسمت حد اول آن $2a$ و خارج قسمت حد دوم آن $x-$ حاصل میشود . پس درنتیجه دوحداول پولینوم داخل قوس $2a$ ودرحد دوم آن $x-$ نوشته کرده وپولینوم مذکور را طبق ذیل تجزیه کرده میتوانیم :

$10\,a\,x^2 - 5\,x^3 = 5\,x^2 \cdot 2a - 5\,x^2 \cdot x = 5\,x^2\,(2\,a - x)$ .

ما در مثال فوق $5x^2$ را به حیث ضریب مشترک بیرون قوس نوشته ولی ما میتوانیستیم که $x^2$ ; $-x^2$ ; $10x^2$ ; $-10x^2$ و x را نیز بیرون قوس بنویسیم : مثلاً اگر $-10x^2$ را خارج قوس بنویسیم در اینصورت ما خواهیم داشت :

$$10a\,x^2 - 5x^3 = -10x^2 \cdot (-a) + (-10x^2) \cdot \frac{1}{2}\,x = -10\,x^2\,(-a + \frac{1}{2}\,x)$$

به صورت عموم اگر همه ضریب های پولینوم اعداد تام باشند عددی را خارج قوس مینویسیم که هریک ازضریبهای پولینوم به آن عدد قابل تقسیم باشد ، و ازجمله متحولهای متجانس متحولی را خارج قوس مینویسند که دارای کمترین نما باشد .

مثال دوم - پولینوم ذیلرا به حاصل ضرب قوسها تجزیه کنید .

$$18\,a^4\,b^3 - 45\,a^2\,b^5 - 63\,a\,b^6$$

حل : بزرگترین قاسم مشترک ضریبهای این پولینوم عبارت از 9 است . ازجمله متحولهای a و $b^3$ در تمام حدها مشترک اند. پس درینصورت $9a\,b^3$ ضریب مشترک تمام حدهای پولینوم مذکور گردیده وما آنرا طبق ذیل تجزیه کرده میتوانیم :

$$18\,a^4\,b^3 - 45\,a^2\,b^5 - 63\,a\,b^6 = 9\,a\,b^3\,(2\,a^3 - 5\,a\,b^2 - 7\,b^3)$$

یا $18\,a^4\,b^3 - 45\,a^2\,b^5 - 63\,a\,b^6 = -9a\,b^3\,(-2\,a^3 + 5\,a\,b^2 + 7\,b^3)$

مثال سوم - میخواهیم که افاده $a\,(x-y) + b\,(y-x)$ را تجزیه کنیم .



حل : ما میدانیم که ضریبهای $x=y$ و $y-x$ افاد ههای متضاد میباشند یعنی $y-x=-(x-y)$

حاصل ضرب $b\,(y-x)$ را به افاده $-b\,(x-y)$ که مساوی آن است عوض میکنیم .

$$a\,(x-y) + b\,(y-x) = a\,(x-y) - b\,(x-y)$$

چون افاده $x-y$ در هردوحد مشترک است پس نوشته کرده میتوانیم که:

$$a\,(x-y) - b\,(x-y) = (x-y)\,(a-b)\ .$$

مثال چارم - کسر $\frac{a^2+ab}{3a+3b}$ را اختصار میکنیم .

حل صورت ومخرج کسررا تجزیه میکنیم $\frac{a^2+ab}{3a+3b} = \frac{a(a+b)}{3(a+b)}$

دوحد $a+b$ درصورت ومخرج مشترک است . کسر را به این دوحده اختصار کرده مینویسیم : $\frac{a^2+ab}{3a+3b} = \frac{a\,(a+b)}{3\,(a+b)} = \frac{a}{3}$

## سوالات

433 - ضریبهای مشترک افادههای ذیلرا خارج قوس بگذارید ( تجزیه کنید ) :

(a) $10ab+15bc$ ; (b) $x^3-2x^2$ .

434 - ضریبهای مشترک را خارج قوس بنویسید .

(a) $4a-4b$ ; (e) $22y-11xy$ ; (i) $3x+6x^2$ ;
(b) $12x+8y$ ; (f) $-15a-20b$; (j) $-5y^2+15y$ ;
(c) $7ax+7bx$ ; (g) $5mn-5n$ ; (k) $a^2-ab$,
(d) $3by-6b$ ; (h) $9ab+3a$ ; (l) $xy-y^2$ .

435 - قیمت افادههای ذیلرادریافت کنید :

(a) $35x + 35y$ (وقتیکه $x = 13,7$ و $y = 6,3$ باشد.)

(b) $168x - 168y$ (وقتیکه $x = 2,34$ و $y = 1,84$ باشد.)

(c) $3,28x - x^2$ (وقتیکه $x = 2,28$ باشد.)

(d) $a^2y - a^2$ (وقتیکه $a = -3,5$ و $y = 6,5$ باشد.)

436 - کسر های ذیلرا اختصار نمایید :

(a) $\frac{3a-6b}{2}$ ; (b) $\frac{5x-20y}{15}$ ; (c) $\frac{12}{4c-8}$ ; (d) $\frac{40}{7b+21}$

437 - تجزیه کنید :

(a) $y^4 - 2y^2$ ; (e) $x^3 - x^2$ ;

(b) $3x^5 - 5x^3$ ; (f) $10a + 15b - 20ab$ ;

(c) $8y^3 - 24y^2$ ; (g) $7x - 14y + 21x^2y$ ;

(d) $9a^3 + 6a^5$ ; (h) $4x^4 + 8x^3 - 2x^2$.

438 - به شکل حاصل‌ضرب بیاورید :

(a) $c^6 - 15c^3$ ; (c) $12a^2b - 18ab^2 - 30ab^5$;

(b) $x^3y^4 + x^6y^2$ (d) $20x^4 - 25x^2y^2 - 10x^3$.

438 - به شکل حاصل‌ضرب تبدیل کنید :

(a) $5a(x+c) + d(x+c)$ ; (d) $-35p(p+8) - 42(p+8)$ ;

(b) $x(y-1) - 3(y-1)$ ; (e) $(a+y)^2 - 2a(a+y)$ .

(c) $y(a+b) - (a+b)$ ;

449 - افاد ههای ذیلرا ساده‌ساخته‌قیمت آنهارادریافت کنید :

(a) $a(c-b) + d(b-c)$ ; (b) $x(y-5) - y(5-y)$ ;



(c) $3a(2x-7) + 5b(7-2x)$ ;

(d) $17p(3-p^2-g^2) - 2g(g^2-3p^2)$ ;

(e) $5k(b-c) + 3n(c-b) - m(b-c)$ ;

(f) $(a-3b) - 2x(3b-a) + 6y(3b-a)$.

440 - افاد ههای ذیلرا ساده ساخته قیمت آنهارا دریافت کنید:

(a) $x(b-c)+2(c-b)$ (وقتی که $x=2$ ، $b=1,007$ و $c=-0,006$ باشد)

(b) $2a(p-n)+(n-p)(a+b)$ وقتیکه $\begin{cases} p=24,6 ; Q=18,3 \\ n=10,6 ; b=-31,7 \end{cases}$ باشند

441 - اختصار کنید :

(a) $\frac{a(b-2)}{5(b-2)}$ ; (b) $\frac{3(x+4)}{c(x+4)}$ ; (c) $\frac{15a^2(a-b)}{20b(a-b)}$ ;

(d) $\frac{(x-y)^2}{2x-2y}$ ; (e) $\frac{3a+3b}{(a+b)^2}$ ; (f) $\frac{(b-3)^2}{15-5b}$ ;

(g) $\frac{3a+12b}{6ab}$ ; (h) $\frac{3x}{9x-6y}$ ; (i) $\frac{5y^2}{8xy-3y^2}$ .

442 - افاد ههای ذیلرا بسازید :

(a) $\frac{x^2-ax}{a^2} \cdot \frac{a}{ax-a^2}$ ; (d) $\frac{10a^4}{a^2-3ab} \div \frac{15a^3b}{a-3b}$ ; (f) $\frac{5x-10y}{2y} \div \frac{6y-3x}{8y^2}$

(b) $\frac{a-b}{4b^3} \cdot \frac{8b^4}{a^2-ab}$ ; (e) $\frac{5}{a-b} \cdot \frac{b-ba}{8}$

(c) $\frac{x-2}{3y} \frac{y^2}{3x-6} + \frac{3a-3b}{y3} \cdot \frac{3x^3}{3b-5a}$ ;

443 - قیمت کسرهای‌ذیل‌را در یافت کنید

(a) $\frac{15^2-15.7}{24.11-24}$ ; (b) $\frac{69^2+69.31}{25.11+38.5}$ .

444 - نشان دهید

(a) $48^7 - 48^6$ بر 47 قابل تقسیم است ؛

(b) $24^8 + 24^7$ بر 25 پوره تقسیم می‌شود ؛

(c) $5^{23} - 5^{21}$ بر 24 قابل تقسیم است ؛

(d) $25^7 + 5^{13}$ بر 30 قابل تقسیم است .

445 - افادههای ذیل را ساده بسازید:

(a) $\frac{a(b-x)+x(a+b)}{5a+5x}$ ; (c) $\frac{a(a-b)+2ab}{(a+b)c}$ ;

(b) $\frac{cy-2c+2(y+c)}{7(c+2)}$ ; (d) $\frac{x(1-x)+x(x^2-1)}{8x^2}$ .

446 - گراف تابع $y = \frac{1}{4}x^2$ را رسم کنید .

ست قیمتهای متحول x را دریافت کنید درصورتیکه قیمت y

(a) مساوی به 1 باشد .(b) از 1 کلانتر باشد .(c) از 1 خوردتر باشد.

(d) آیا گراف تابع مذکور از نقاط $A(-10;25)$ و $B(-0,2;-0,01)$ میگذرد؟

447 - یک نفر سیاح اگر فاصلهٔ جایش تا به ایستگاه راه آهن را به سرعت 4 km / h برود نیم ساعت ناوقت از حرکت ریل میرسد. و اگر به سرعت 5 km / h برود 6 دقیقه پیش از حرکت ریل میرسد. آیا میدانید که سیاح مذکور کدام مسافه را طی نموده است ؟

448 - معادلات ذیل را حل کنید :

(a) $\frac{3x-5}{2} + \frac{8x-12}{7} = 9$ ;

(b) $\frac{21-4x}{9} + \frac{8x-15}{3} = 2$ .



449 - گراف رابطه یکه توسط ست جور همای مرتب ذیل داده شده است بدست بیاورید :

(a) $\{(x;y) \mid x=2,$ y یک عدد دلخواه باشد$\}$ ;

(b) $\{(x;y) \mid y=3,$ و x یک عدد دلخواه باشد$\}$ .

کدام یک از روابط فوق تابع میباشد ؟

450 . اثبات کنید که افاده های ذیل باهم مساوی اند :

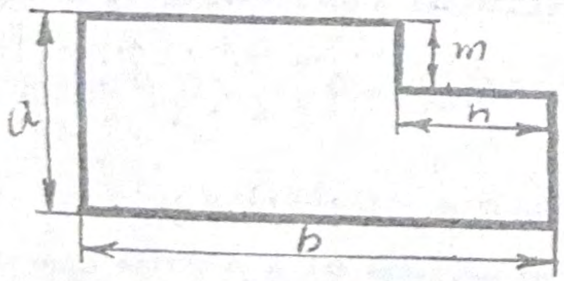
(a) $3(a+4)-12(a+1)$ و $-9a$ ;

(b) $6b^2+1$ و $3b(2b+1)-(3b-1)$. ;

(c) $5(2x+4y-1)$ و $10(x-0,5)+20y$;

(d) $3(a^2+b^2)-(4-a^2-b^2)$ و $4(a^2+b^2-1)$.

451 . برای به دست آوردن مساحت شکل (40) افاده یی ترتیب دهید اولاً شکل را به اساس مستطیل تکمیل کرده و بعداً آنرا به دو مستطیل جدا کنید. اثبات کنید که افادههای حاصل شده مطابقتها اند.




شکل 40

## 41. حل معادله‌ها توسط تجزیه

مثال اول . معادله (1).....$(2x+5)(6-x)=0$ را حل میکنیم.

حل : دیده میشود که بطرف چپ این معادله حاصلضرب دو قوس وطرف راست آن صفر است. ما میدانیم که حاصلضرب دو عدد وقتی صفر میشود که اقلاً یکی از این دو عدد صفر باشد یعنی $2x+5=0$ باشد یا $6-x=0$ باشد .

به‌عبارهٔ دیگر حلهٔ معادله $2x+5=0$ عبارت از حله معادله ( 1 ) است.

وهمچین حل معادله $6-x=0$ عبارت از حله معادله(1) است.

یعنی ست حله‌های معادله(1) عبارت از اتحاد ستهای حله‌های معادله‌های $2x+5=0$ و $6-x+0$ میباشند .

معادله اولرا حل میکنیم : $2x+5=0$

$2x=-5$

$x=-2,5.$

معادله دو مراحل میکنیم: $6-x=0$

$x=6.$

در نتیجه ست حله های معادله (1) عبارت است از $\{-2,5;6\}$ .

مثال دوم. میخواهیم معادله (2). . . . $5(x+2)^2-3(x+2)=0$ را حل کنیم .

حل : طرف چپ معادله فوقرا به حاصلضرب قوسها طبق ذیل تبدیل نموده ومینویسیم :



$(x+2)[5(x+2)-3]=0$

$(x+2)(5x+10-3)=0$ ..... با

$(x+2)(5x+7)=0$ ..... یا

$x+2=0$ $\qquad$ $5x+7=0$

$x=-2$ $\qquad$ $x=-1,4$

ست حله های معادله (2) عبارت است از $\{-2;-1,4\}$.

سوالات :

452 ـ معادلات ذیل را حل کنید :

(a) $(x-5)(x+8)=0$;
(b) $(y+6)(y-1,5)=0$;
(c) $5(x-8)(4x+3)=0$;
(d) $7(2x-10)(5x+0,3)=0$;
(e) $2x(3x+1)=0$;
(f) $(y-8)+(2y-4)=0$.

453 ـ معادلات یك مجمهوله یرا ترتیب نما یید که ست حله های هریك از آنها یکی ازستهای ذیل باشد :

(a) $\{-3;5\}$; (b); $\{0;4\}$; (c) $\{7\}$; (d) $\{-1;0,2\}$.

454 ـ معادلات ذیلرا حل کنید .

(a) $x^2-11x=0$;
(b) $y^2+5y=0$;
(c) $6z-5z^2=0$;
(c) $2x^2-3x=0$;
(e) $x^2=2x$;
(f) $y=-3y^2$

455 ـ مسافه معین هریك از افاد ههای ذیل را پیدا کنید :

(a) $\dfrac{1}{(x-2)(x-5)}$ ; (b) $\dfrac{3x+1}{(x+6)(2x+8)}$ .

456 - (a) تمام اعداددورقمی را ترتیب دهید که‌رقم‌دهمهایشان به‌ست $x = \{0 ; 2 ; 3 ; 5 ; 9\}$ دورقم یکهایشان به‌ست $Y=\{1;5 ; 6 ; 8\}$ متعلق باشند.

(b) چند عددورقمی را ترتیب داده میتوانید که‌در آنها رقم دهها عدد جفت و رقم یکها عدد طاق باشد ؟

457 ثبوت کنید که‌هریک‌از افادههای‌ذیل باهم یک‌مساوات عنیتی یامطابقت را میسازند :

(a) $(x-y)+(y-z)-(x-z)$ و $0$ ;

(b) $a(b-c)+b(a+c)+c(a+b)$ و $2ab$

## حاصل ضرب پولینومهای (یاچندحدهها)

### 42 - حاصل ضرب دو دو حده

مامیتوانیم که حاصل‌ضرب دودوحده دلخواه را به شکل یک پولینوم افاده کنیم .

مثلاً اگرما بخواهیم که حاصل‌ضرب $(a+b)$ و $(c+d)$ را به شکل پولینوم بیاوریم دوحده $a+b$ رابه حرف $x$ نشان میدهیم . پس حاصل‌ضرب $(a+b)(c+d)$ به‌شکل $x(c+d)$ نوشته شده میتوانند . $x$ را درقوس $(c+d)$ ضرب میکنیم ومطابقت ذیل حاصل میشود :



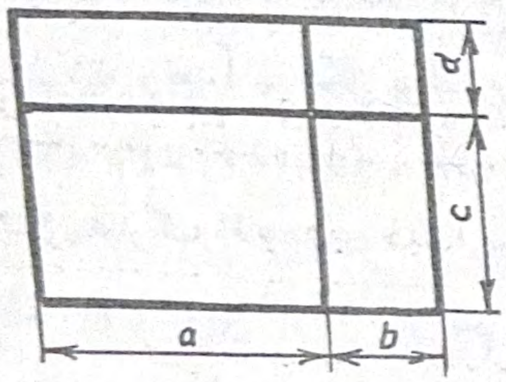
$$x.(c+d) = xc + xd \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اگر درمطابقت (1) دوباره عوض $x$ قیمت آنراکه $(a+b)$ است بگذاریم مطابقت جدید حاصل میشود ، یعنی :

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd \ldots\ldots\ldots (3)$$

در شکل (41) شکل هندسی رابطه (3) ترسیم شده‌است . مامیدانیم که حاصل‌ضرب دودوحده مساویست به مجموع حاصل ضربهای هریک از حد یک دوحده درهریک از حد دیگر . به همین ترتیب مامیتوانیم که‌حاصل‌ضرب‌دو پولینوم‌رانیز توسط مطابقتهانشان بدهیم.




شکل 41

حاصل ضرب دوپولینوم مساویست به مجموع حاصل ضربهای هریک از حد یک پولینوم درهریک از حدهای پولینوم دیگر . یا به عباره دیگر برای ضرب کردن یک‌پولینوم به پولینوم دیگرما هرحد یک پولینوم را ضرب تمام حدهای پولینوم دیگر نموده مجموع حاصل ضربها عبارت از حاصل ضرب دوپولینوم است .

مثلاً میخواهیم که پولینوم $5x^3+2x-3-x^2$ را در پولینوم $4x^2-x+2$ ضرب نماییم. $(5x^3-x^2+2x-3)(4x^2-x+2)$

$=20x^5-5x^4+10x^3-4x^4+x^3-2x^2+8x^3-2x^2+4x-12x^2+3x-6$

$=20x^5-9x^4+19x^3-16x^2+7x-6$.

سوالات

458 - به شکل پولینوم افاده نمائید :

(a) $(x+2)(y+3)$ ; (d) $(x+8)(y-1)$ ;

(b) $(4a^3-3a^2)(a-2)$; (e) $(b-3)(a-2)$ ;

(c) $(yp^2-2p)(8p-5)$ : (f) $(a^2-2a+3)(a-4)$;

459 - دو حدهای ذیلرا که به شکل مربع کامل اند اولاً به شکل حاصل ضرب نوشته و بعداً به شکل پولینوم تبدیل کنید .

(a) $(x+10)^2$ ; (b) $(1-y)^2$ ; (c) $(3a-1)^2$; (d) $(a^2-6a)^2$

460 - نشان دهید که افادههای ذیلرا به دوحدههای که به آنها مطابقت داشته باشد تبدیل کرده میتوانیم :

(a) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ; (c) $(a+b)(a^2-a^2b+ab^2-b^3)$ ;

(b) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ ; (d) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$ .

461 - به شکل پولینوم تبدیل کنید :

(a) $(x+1)(x+2)(x+3)$ ; (b) $(a-1)(a-4)(a+5)$ .

462 - افادههای ذیلرا ساده بسازید :

(a) $(3b-2)(5-2b)+6b^2$; (d) $x^3-(x^3-3x)(x+3)$ ;

(b) $(7y-4)(2y+3)-13y$ ; (e) $(a^2-7)(a+2)-(2a-1)(a-14)$ ;

(c) $5b^3-(a^2+5b)(ab-b^2)$ ; (f) $(2-b)(1+2b)+(1+b)(b^3-3b)$ .



463 - قیمت افادههای ذیلرا پیدا کنید :

(a) $(a-2b)(2a+b)-2a$ باشد $a=8$ و $b=-12$ وقتیکه

(b) $(p-3x)(p+2x)-p(p-x)$ باشند $p=2,718$ و $x=-\frac{1}{3}$ وقتیکه

464 - معادله های ذیلرا حل کنید :

(a) $5x^2(2x-3)(3x+2)=2$

(b) $(10x+9)x-(5x-1)(2x+3)=8$ ;

(c) $15-(x-5)(x-3)=0$ ;

(d) $12-(x+6)(x+2)=x(x-3)$ ;

(e) $x(x+1)(x+6)-x^3=5x$.

465 - نشان دهید که قیمت هریک از افادههای ذیل به قیمت متحول آن متعلق نیست :

(a) $(x-3)(x+7)-(x+5)(x-1)$ ;

(b) $y^4-(y^2-4)(y^2+4)$.

466 - (a) ثابت کنید که قیمت افاده $n(n+5)-(n-3)(n-2)$ برای تمام قیمتهای اعداد طبیعی n به 6 قابل تقسیم است .

(b) ثبوت کنید که قیمت افاده $(n-1)(n+1)-(n-7)(n-5)$ برای تمام قیمتهای اعداد طبیعی n که از 2 بزرگتر باشد به 12 قابل تقسیم است .

467 - چار عدد طبیعی مسلسل را دریافت کنید طوریکه فرق بین حاصل ضرب دوعدد بزرگ وحاصل ضرب دوعدد کوچک مساوی به 58 باشد .

468 - سه عدد جفت مسلسل را دریافت کنید درصورتیکه فرق بین حاصلضرب دوعدد بزرگ ومربع عددسومی مساوی به 188 شود.

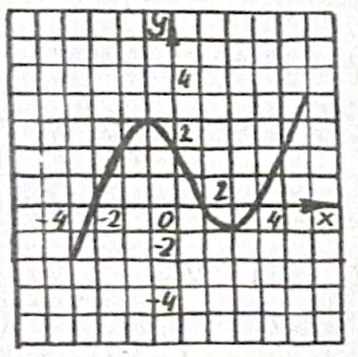
469 - محیط یک مستطیل مساوی به 60 cm است، اگر طول مستطیل را 10 cm زیاد وعرضش را 6 cm کم کنیم مساحت آن $32\,cm^2$ کم میشود. مساحت مستطیل مذکور را دریافت کنید.

470 - محیط هریک از دو مستطیلها مساوی به 122 cm است. طول مستطیل اولی از طول مستطیل دومی 5 cm زیادتر بوده ومساحت دومی از مساحت مستطیل اولی $120\,cm^2$ زیادتر است مساحت هردو مستطیل را دریافت کنید.

471 - اگر به a قیمتهای دلخواه داده شود، کدام یک افاده های ذیل قیمتهای غیرمنفی (مثبت ویا صفر) را به اختیار میکند:

$$3a\ ;\ 2a^2\ ;\ a+10\ ;\ a^2+5\ ;\ \frac{a^2}{7}\ ;\ a^3-1$$

472 - تابع g که دومین آن $[5\ ;\ 4-]$ است توسط گراف داده شده است شکل (42)، آنست قیمتهای متحول x را دریافت کنید، درصورتیکه $g(x)=0; g(x)<0$ و $g(x)>0$ باشد.




شکل(42)



473 - ثبوت کنید که هریک از مساواتهای ذیل یک عنیت است:

(a) $(-2x)^4 = 8x.\,2x^3$ ;

(b) $(-6a^2)^2a^3 = (2a^3)^3, 4, 5a$ ;

474 - معادلات ذیلرا حل کنید:

(a) $\frac{x-2}{5} + \frac{3x-2}{6} = \frac{2}{3}$ ;

(b) $\frac{2x-5}{4} - \frac{3x+1}{3} = 1$.

475 - درمطابقت $5x(2y-1) = 10xy-5x$ به عوض y قیمت $2a^2$ را بگذاریدو نشان دهید که مساوات حاصله نیز مطابقت است.

476 - درمطابقت $a(b+c) = ab+ac$ به عوض b افاده $m+n$ وبه عوض c افادهٔ $m-n$ را بنویسید. نشان دهید که مساوات حاصل شده نیزیک مطابقت است.

## 43. تبدیل نمودن پولینوم به حاصلضرب قوسها

حاصلضرب $(a-2)(b+3)$ را به شکل پلینوم افاده میکنیم.

$$(a-2)(b+3) = ab-2b+3a-6$$

جاهای اعضای طرف چپ وراست این مطابقت راعوض میکنیم.

$$ab-2b+3a-6 = (a-2)(b+3)$$

ازاین معلوم میشود که پولینوم $ab-2b+3a-6$ را به حاصلضرب قوسها تجزیه نموده میتوانیم. درمثال فوق هردو قوس پیش ازپیش به ما معلوم بود. اگر قوسها به ما معلوم نباشند به طور ذیل عمل مینمایم:

فرضاً پولینوم $ax+2ay-5x-10y$ داده شده و میخواهیم آنرا به حاصلضرب قوسها تجزیه کنیم. اولاً این پولینوم را به شکل حاصل جمع دودوحده مینویسیم:

$$ax+2ay-5x-10y=(ax-5x)+(2ay-10y)$$

در دو حده اول x و در دو حده دوم 2y را به حیث ضریب مشترك خارج قوس مینویسیم:

$$ax+2ay-5x-10y=x(a-5)+2y(a-5)$$ یعنی:

$$ax+2ay-5x-10y=(a-5)(x+2y)$$ از اینجا:

ما میتوانیم که پولینوم فوق یعنی پولینوم $ax+2ay-5x-10y$ را به طور دیگر نیز دسته بندی نموده و به حاصلضرب دو قوس تجزیه کنیم:

$$\begin{aligned}ax+2ay-5x-10y&=(ax+2ay)+(-5x-10y)\\&=a(x+2y)-5(x+2y)\\&=(x+2y)(a-5)\end{aligned}$$

حل یك مثال دیگر را از نظر میگذرانیم.

میخواهیم پولینوم: $a+8b-3ac+2ab-12c+4a$ را به حاصلضرب دو قوس تجزیه کنیم. ما میتوانیم این پولینوم را به شکل حاصل جمع دو سه حده و یا به شکل حاصل جمع سه دو حده و بر علاوه به طرز های مختلف دیگر دسته بندی نمایم.

مثلاً:

$$\begin{aligned}a^2+8b-3ac+2ab-12c+4a&=(a^2+4a)+(2ab+8b)+(-3ac-12c)\\&=a(a+4)+2b(a+4)-3c(a+4)\\&=(a+4)(a+2b-3c)\end{aligned}$$

اینرا درنظر داشته باشید که دسته بندی باید طوری صورت بگیرد تا در هر حدیك ضریب مشترك پیدا نماید. به خاطر باید داشت که هر دسته بندی بدون سنجش مسئله را حل نمی کند. مثلاً اگر همین پولینوم طور ذیل دسته بندی شود:



$$\begin{aligned}a^2+8b-3ac+2ab-12c+4a&=(a^2+2ab)+(8b-12c)+(4a-3ac)\\&=a(a+2b)+4(2b-3c)+a(4-3c)\end{aligned}$$

دیده میشود که هرسه قوس کدام ضریب مشترك ندارند. لذا این دسته بندی به حل سوال هیچ کمك شده نمی‌تواند.

همچنان پولینومهای وجود دارند که آنهارا به شکل حاصلضرب دو دو حده که طاقتهایشان از یك کمتر نباشد تبدیل نموده نمیتوانیم. مثلاً دو حده $x^2+1$ را به حاصلضرب دو قوس که درجه حده‌های آن از یك کمتر نباشد تبدیل نموده نمیتوانیم.

## سوالات:

477. افاده های ذیلرا به شکل پولینوم تبدیل کنید:

(a) $a(b+c)+3(b+c)$;
(b) $5(x-y)-y(x-y)$;
(c) $y(a-c)+5a-5c$;
(d) $a(c-d)+c-d$;
(e) $a(p-q)$;
(f) $n(c+p)+c+p$.

478. پولینومهای ذیلرا به شکل حاصلضرب قوسهای دو حده بنویسید:

(a) $mx+ny+10x+10y$;
(b) $9x+9y+ax+ay$;
(c) $7a-7b+an-bn$;
(d) $c+bc-2a-ab$;
(e) $a^2-ab-8a+8b$;
(f) $an^2+cn^2-ap+ap^2-cp+cp^2$;
(g) $ax^2+ayx^2-by^2+b-a$;
(h) $11x+11y-x^2-xy$.

679. قیمت افاده های ذیلرا پیدا کنید:

(a) $13,5.5,8-8,3.4,2-5,8.8,3+4,2.13,5$;
(b) $31.82+125.84+31-125.67$.

480. کسر های ذیلرا اختصار کنید :

(a) $\frac{ax+ay-x-y}{2a-2}$ ; (c) $\frac{xy+2y-2x-4}{(y-2)^2}$ ;

(b) $\frac{bx-b^2}{x^2-bx-x+b}$ ; (d) $\frac{(4-b)^2}{ab-4a+3b-12}$ .

481 ـ افاد ههای ذیلرا اولاً بهحاصلضوب تبدیل نموده وسپس قیمتهای عددی آنهارادریافت کنید .

(a) $a^2b-b+ab^2-a$ وقتیکه $a=-1\frac{5}{8}$ و $b=-\frac{8}{13}$ باشد،

(b) $p^2g^2+pg-g^3-p^3$ وقتیکه $g=-1,5$ و $p=-0,75$ باشد؛

(c) $2a+ac^2-ac^2-2c$ وقتیکه $a=-\frac{8}{21}$ و $c=-5\frac{1}{4}$ باشد؛

(d) $3x^3-6x^2y^2+xy$ وقتیکه $x=\frac{2}{5}$ و $y=-0,5$ باشد.

482 ـ معادلات ذیلرا حل کنید :

(a) $x(x-5)=4x-20$ ; (c) $3-5x2+x-5=0$ ;

(b) $y(y+6)-7y-42=0$ ;

483 ـ برروی گراف نقاطیر اتعیین نمایید که مختصات x و y آنها طور ذیل داده شده باشد :

(a) $2\leqslant x\leqslant 5$ عدد دلخواه باشد ; y

(b) $-1\leqslant y\leqslant 4$ . یك عدد دلخواه. x

484 ـ معادلات ذیلرا حل کنید :



(a) $x^2-15x=0$ ; (c) $2x^2=3x$ ;

(b) $y^2+4,5y=0$ ; (d) $y=8y^2$.

485 ـ سه حله دلخواه معادلات ذیلرا دریافت نمایید :

(a) $(x-2)(y-3)=0$ ; (b) $x(y-7)=0$ .

686 ـ اثبات کنید که به مساواتهای ذیل مطابقتها هستند :

(a) $(-0,25a^3)^3=-2a^6\cdot(-0,5)^5$ ;

(b) $(-0,125x^4)^4\cdot(-2x)^{15}=(-2x^2)^3\cdot(x^5)^5$.

## مطابقتهای مشهور

### 44 ـ حاصلضرب مجموع و تفاضل دو یك حده

حاصلضرب مجموع وتفاضل دومتحولرا به شکل پولینوم افاده کرده میتوانیم .

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

دراینصورت مطابقت ذیلرا به دست میاوریم :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

اگر درفارمول فوق به جای a و b افاد ههای مختلف گذاشته شوند مطابقتهای جدیدی حاصل میشوند که تعداد شان لایتناهی است .

مثلاً: اگر $a=5x^2y^5$ و $b=7$ فرض شود مطابقت (۱) بشکل ذیل نوشته میشود :

$$(5x^2y^5+7)(5x^2y^5-7)=(5x^2y^5)^2-7^2=25x^4y^{10}-49 .$$

از اینجا گفته میتوانیم که :

حاصلضرب مجموع و تفاضل دو افاده مساوی به تفاضل مربعات همان افاده ها میباشد.

سوالات

487 - حاصل ضرب های ذیلرا به شکل تفاضل مربعات دو یک حده افاده کنید :

(a) $(a+x)(a-x)$; (b) $(b+a)(b-a)$;

(c) $(p-7)(p+7)$; (g) $(-0,8b+1)(1+0,8b)$;

(d) $(2x-1)(2x+1)$; (h) $(0,2xy+5)(5-0,2xy)$;

(e) $(5y+4)(5y-4)$; (i) $(-ay^2+bx)(ay^2+bx)$;

(f) $(8c-3)(8c+3)$; (j) $(4-\frac{n^2}{2})(4+\frac{n^2}{2})$;

(k) $(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2})(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3})$.

488 - افادههای ذیلرا به شکل پولینوم تبدیل نمایید :

(a) $(2a^2+5a)(2a^2-5a)$;

(b) $(10x^3-1)(10x^3+1)$;

(c) $(0,2x^4+1)(0,2x^4-1)$;

(d) $(\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{2}a^3)(\frac{2}{3}d^2+\frac{1}{2}a^3)$;

(e) $(1\frac{1}{3}b-\frac{5}{6}b)(\frac{5}{6}a^4+1\frac{1}{3}b^3)$;

(f) $(1,2^2ab-3b^3)(1,2a^2b+3b^3)$.

489 - از روی حل مثال ذیل



$98 \cdot 102=(100-2)(100+2)=100^2-2^2=10000-4=9996$

حاصل ضربهای ذیلرا حساب کنید:

(a) $99 \cdot 101$; (c) $74 \cdot 66$; (e) $1002 \cdot 998$;

(b) $83 \cdot 77$; (d) $201 \cdot 199$; (f) $1,05 \cdot 0,95$.

490 - طول یک مستطیل از ضلع یک مربع 10 cm زیادتر است وعرض آن از ضلع مربع 10 cm کمتر است. مساحتهای مربع ومستطیل را مقایسه نمایید.

491 - افادههای ریاضی افاههای ذیل را بنویسید :

(a) حاصل ضرب مجموع و فرق اعداد 19 و 9 را؛

(b) مجموع مربعات اعداد 15 و 25 را؛

(c) مجموع مربعات b و c را؛

(d) تفاضل مکعبات اعداد 12 و 11 را؛

(e) تفاضل مکعبات a و b را.

492 - آیا نقاط $A(15;4,5)$ و $B(-2,05;-0,12)$ و $C(50;50)$ به گراف تابع : $y=0,02x^2$ تعلق دارند ؟

493 - آیا مساواتهای ذیل مطابقتها هستند ؟

(a) $6x(x-1)-2x(3x+2)=(15+x)-3(5-x)$;

(b) $12x(x-1)-4x(3x-5)-2=2(4x-1)$;

(c) $x^2+7x-x(x+1)=x$;

(d) $5(x+3)-2(3+x)-3x=9$.

494 - بدون ترسیم گراف کمیات وضعیه نقاط تقاطع مستقیمهای

ذیلرا با محورات کمیات وضعیه دریافت کنید :

(a) $2x-5y=2$ ; (b) $3x+4y=12$ .

495 ـ معادلات ذیلرا حل کنید :

(a) $6=\frac{3x-1}{2}$ .2,4 ; (b) $0,69=\frac{5-2y}{8}$ .13,8.

## مطابقت تفاضل مربعات (بررسی عکس موضوع مبحث44)

در درس قبلی ما حاصلضرب مجموع و تفاضل دویك حده را مطالعه کردیم. درنتیجه مطابقت $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ حاصل گردید. حال اگر جایهای اعضای طرفهای راست وچپ مساوات فوق را عوض کنیم ما خواهیم داشت :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

عینیت یا مطابقت فوق بیان میکند که :

> تفاضل مربعات دو افاده مساویست به حاصلضرب مجموع و تفاضل این افاده ها .

مثالهای ذیلرا از نظر بگذرانید :

مثال اول ـ دوحدهٔ $39x^2-16x^6$ را به حاصلضرب دوقوس تبدیل میکنیم .

حل : حدهای مفروق منه ومفروق را به شکل مربعات نوشته و به استفاده از مطابقت $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ما نوشته میتوانیم :

$$49x^2-16y^6=(7x)^2-(4y^3)^2=(7x+4y^3)(7x-4y^3) .$$

مثال دوم ـ قیمت افاده $64-992^2$ را حساب میکنیم :



حل :

$$992^2-64=992^2-8^2=(992-8)(992+8)\quad 984.1000=984000.$$

## سوالات

496 ـ افاده های ذیلرا به حاصلضرب قوسها تجزیه کنید :

(a) $x^2-y^2$ ; (d) $16-b^2$; (g) $q^2-\frac{4}{9}$ ;

(b) $c^2-z^2$ ; (e) $100-x^2$ ; (h) $y^2-0,09$ ;

(c) $a^2-25$ ; (f) $p^2-400$ ; (i) $1\frac{9}{16}-n^2$ ;

(j) $0,01q^2-0,25t^2$ ;

(k) $1,21-0,81y$ ; (l) $5\frac{1}{16}z^2-\frac{u^2}{9}$ .

497 ـ کسور ذیلرا اختصار کنید :

(a) $\frac{a^2-4}{a+2}$ ; (c) $\frac{5(b-c)}{b^2-c^2}$ ; (e) $\frac{4b-40}{b^2-100}$ ; (g) $\frac{c^2-7c}{c^2-49}$ ;

(b) $\frac{x+3}{x^2-9}$ ; (d) $\frac{a^2-49}{5(a-7)}$ ; (f) $\frac{9y^2-1}{9y+3}$ ; (h) $\frac{1-a^2}{a-1}$ .

498 ـ قیمت افاده های ذیلرا دریافت کنید :

(a) $47^2-37^2$ ; (c) (c) $126^2-74^2$ ;

(b) $53^2-63^2$ ; (d) $21,3^2-21,2^2$ ;

(e) $\frac{36}{13^2-11^2}$ ; (f) $\frac{79^2-65^2}{420}$ ; (g) $\frac{53^2-27^2}{79^2-51^2}$ ;

499 ـ معادله های ذیلرا به شکل $(x+a)(x-a)=0$ آورده جذور

انها را دریافت کنید :

(a) $x^2-9=0$ ; (c) (e) $x^3-100=0$ ; (e) $x^2=225$ ;

(d) $x-49=0$ ; (d) $x^3-144=0$ ; (f) $y^2=625$ .

500 ـ افاد ههای ذیلرا به‌شکل حاصلضرب قوسها بنویسید .

(a) $b^4-0{,}25$ ; (d) $0{,}64a^4-b^2c^2$ ;

(b) $x-9$ ; (e) $100x^{10}-1$ ;

(c) $16y^6-1$ ; (f) $0{,}64c^6-0{,}49$ ;

(g) $(x+3)^3-1$ ; (i) $(4a-3)^2-16$ ;

(h) $64-(b+1)^2$ ; (j) $25-(a+7)^2$ .

501 ـ اثبات کنید که به هرقیمت $n \in N$ قیمت افاده $(n+7)^3-n^3$ به 7 پوره تقسیم میشود همچنان افاده $(4n+5)^2-9$ به 4 پوره تقسیم میشود .

502 ـ افاد ههای ذیلرا به شکل حاصلضرب سه قوس بنویسید :

(a) $x^3-x$ ; (d) $16y-9y^5$ ; (g) $a^2(a-1)-9(9-1)$ ;

(b) $a^3-4a$ ; (e) $a^4-1$ ; (h) $x^2(2x-5)+4(5-2x)$ ;

(c) $b^2-9b^4$ ; (f) $81-b^4$ ; $a^2(a-3)-a+3$ .

503 ـ معادله های ذیلرا حل کنید :

(a) $4x^2-81=0$ (d) $25x^2-49=0$ ; (g) $x^3-16x=0$ ;

(b) $4x^2+81=0$ ; (e) $100x-1=0$; (h) $x-9x^3=0$ ;

(c) $9x^2=100$ ; (f) $64x^2+9=0$ ; (i) $25x^3+4x=0$ ;

504 ـ به شکل حاصلضرب تبدیل کنید :

(a) $x^3-y^3-2(x-y)$ ; (d) $a-4b^2-a-2b$ ;



(b) $x^2-a^2+5(x+a)$ ; (e) $a+5a+5b-b$ ;

(c) $4a^2-b^2-2a+b$ ; (f) $x-3x+3y-y^2$ .

505 ـ دومین تابع $y=\frac{x-25}{x-5}$ رادریافت نموده گراف آنرارسم کنید. گراف این تابع ازگراف تابع $y=x+5$ چی فرق دارد ؟

506 ـ گراف تابع $y=\frac{9-x^2}{x+3}$ را رسم کنید.

507 ـ کسرهای ذیلرا اختصار کنید :

(a) $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$ ;(b) $\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$ ; (c) $\frac{x^2-9}{(3-x)^2}$ ;(d) $\frac{1-x^2}{(x-1)^2}$ .

508 ـ افاد ههای ذیلرا ساده بسازید :

(a) $\frac{a^2-25}{7-a^3}\cdot\frac{21a^2}{2a-10}$ ;(c) $\frac{a^2-b^2}{2a-b}+\frac{b^2-ab}{4a-2b}$ .

(b) $\frac{6x^6}{9-x^2}-\frac{3x^3}{3y-xy}$ ;(d) $\frac{x-ax^2}{ax-2}\cdot\frac{2ax-4}{a^2x^2-1}$ .

509 ـ گراف توابع ذیلرا رسم کنید : (a) $y=\frac{1}{2}x$; (b) $y=-0{,}5x+1$

به کدام قیمتهای x قیمتها ی y (a) مساوی به صفر میشود (b) از صفر زیادتر میشود ; (c) ازصفر کمتر میشود .

510 ـ ازدوشهر A و B که بین شان 1020 km مسافه است دوموتر در یك وقت مقابل یك دیگر روان میشوند . سرعت یک موتر نظر به موتر دیگر 10 km/h زیادتراست. بعداز 8 ساعت معلوم شد که موترها از همدیگر 340 km دور شدند. سرعت هر دوموتررادر یافت کنید .

511 - ازایستگاههای M و N که بین شان 385km مسافه ، وجود

دارد ، دو موتر به یک وقت مقابل یکدیگر حرکت کردند . سرعت موتر که از ایستگاه M حرکت کرده نظر به سرعت موتر دیگر 5 km/h زیادتر است . بعد از 2 ساعت مسافه بین موترها 35 km مانند . سرعت هر دو موتر را دریافت کنید .

## 45 - مطابقت مربع یک مجموع یا تبدیل مربع یک مجموع به شکل پولینوم

برای اینکه مربع مجموع دوحده یعنی $(a+b)^2$ را به پولینوم تبدیل کنیم آنرا به شکل حاصل ضرب دوقوس مینویسم . یعنی

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$(a+b) = a + ab + ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

یا :

لذا گفته میتوانیم که

> مربع مجموع دوحده مساویست به مربع حد اول جمع دو چند حاصل ضرب حدههای اول و دوم جمع مربع حد دوم .

از روی مطابقت (1) که معمولاً به نام فارمول مجموع دوحده یاد میشود مامیتوانیم که مربع مجموع دو افاده رانیز دریافت کنیم .

مثال اول ـ افاده $(8x+3y)^2$ مربع تام مجموع دو یک حده های $8x$ و $3y$ میباشد. فارمول (1) را بالای آن تطبیق میکنیم .

$$(8x+3y) = (8x)^2 + 2.8x.3y + (3y)^2 = 64x^2 + 48xy + 9y^2$$

مثال دوم ـ افاده $(10a^3 - 7ab^2)$ عبارت ازمربع تام مجموع



دو یک حده های $10a^3$ و $-7ab^2$ میباشد. فارمول (1) را بالای آن تطبیق میکنیم :

$$(10a - 7ab^2)^2 = (10a^3)^2 + 2(10a^3).(-7ab^2) + (-7ab^2)^2$$
$$- 100a - 140a^4b^2 + 49a^2b^4$$

اگر بخواهیم که مربع تام مجموع سه حده را دریافت کنیم آنرا به شکل حاصل جمع دوجز جمع مینویسیم و بعداً فارمول (1) را بالای آن تطبیق میکنیم مثلاً :

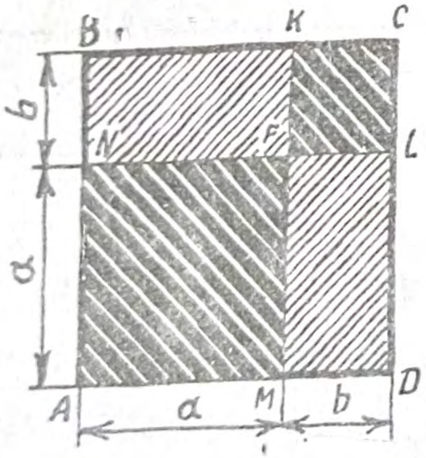
$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b).c + c^2 ;$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 ;$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc .$$

### سوالات

512 - بسط بدهید.

(a) $(x+y)^2$ ; (f) $(y-7)^2$ ;
(b) $(p-q)^2$ ; (g) $(7-y)^2$ ; (k) $(-n+4)^2$ ;
(c) $(b+3)^2$ ; (h) $(a+12)^2$ ; (l) $(-m-10)^2$ .
(d) $(a+5)^2$ ; (i) $(-x+5)^2$ ;
(e) $(10-c)^2$ ; (j) $(-z-2)^2$ ;

513 - تطبیق عینیت $(a+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ را در شکل ذیل شرح دهید .




شکل(43)

514 - نشان دهید که هر یک از مساواتهای ذیل یک مطابقت است :

(a) $(x-y)^2 = (y-x)^2$ ;
(b) $(-p-q) = (p+q)^2$.

515 - مربعات تام ذیلرا بسط و انکشاف بدهید :

(a) $(2x+3)^2$

(b) $(5x-2y)^2$ ; (c) $(-\frac{1}{5}k+10)^2$ ; (h) $(-1\frac{1}{3}p+6q)^2$ ;

(c) $(\frac{1}{2}y-6)^2$ ; (f) $(58y-0,23)$ ; (i) $(0,8x-0,5b)^2$ ;

(d) $(-7a+4b)^2$ ; (g) $(\frac{x}{2}-\frac{y}{3})^2$ ; (j) $(c,08a-50)^2$ ;

516 - قیمت افادههای ذیلرا در یافت کنید :

(a) $(100+1)^2$ ; (c) $61^2$ ; (e) $999^2$ ; (g) $9,9^2$ ;
(b) $(80-1)^2$ ; (d) $199$ ; (f) $702^2$ ; (h) $10,2^2$ ;

517 - افادههای ذیلرا ساده بسازید :

(a) $(x-3)^2 - x(x+9)$ ; (d) $a4+81-(a-9)^2$ ;
(b) $(2a+5)^2 - 5(4a+5)$ ; (e) $(x-8)(x-2)-(x+4)^2$ ;
(c) $b+49-(b-7)^2$ ; (f) $(y-6)(y-10)-(y-8)^2$.

518 - ثابت کنید که به هر قیمت a قیمت کسر $\frac{(a+3)+(a-3)^2}{a^2+9}$ مساویست به 2 و قیمت کسر $\frac{(2x+5)^2+(5x-2)^2}{x^2+1}$ مساوی به 29 میشود.

519 - انکشاف بدهید:

(a) $(x-3y)^2$ ; (d) $a(a+9b)^2$ ; (g) $(a+2)(a-1)^2$ ;
(b) $-3(5y-x)^2$ ; (e) $-b(b-6c)^2$ ; (h) $(x-4)(x+1)^2$ ;
(c) $7(4a-1)^2$ ; (f) $x(x^2+5x)^2$ ; (i) $(d-3)^2(p+3)^2$.



520 - اثبات کنید که به هر قیمت دلخواه $n \in N$ افاده

(a) $(n+2)^2-(n-2)^2$ به 8 قابل تقسیم است .

(b) $(n+7)^2-(n-5)^2$ به 24 قابل تقسیم است .

(c) $(n^3-n)$ به 6 قابل تقسیم است .

521 - قیمت افادههای ذیلرا دریافت کنید :

(a) $(x-10)^2-x(x+80)$ وقتیکه $x=0,07$ باشد؛

(b) $(2x+9)^2-x(4x+31)$ وقتیکه $x=-16,2$ باشد؛

(c) $(y+12)^2-(y+16)(y+4)$ وقتیکه $y=-17,75$ باشد.

522 - از مطابقت $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ و قاعده ضرب نمودن پولینومها استفاده نموده افادههای ذیلرا انکشاف بدهید :

(a) $(a+b)^3$ ; (b) $(a-b)^3$ ; (c) $(a+b)^4$ ; (d) $(a-b)^4$.

523 - نشان دهد که مساواتهای ذیل مطابقت اند :

(a) $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$ ;
(b) $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ ;
(c) $(x+y)^2-(x-y)^2 = 4xy$ ;
(d) $(2mn)^2+(m^2-n^2)^2 = (m^2+n^2)^2$ .

524 - جدول زیررا پر کنید :

| x | 0،20 | 0،50 | −0،06 | 0،08 |
|---|---|---|---|---|
| $(x+1)^2$ | | | | |
| $1+2x$ | | | | |

یعنی برای هر قیمت داده شده x قیمتهای مربوط $(1+x)^2$ و $1+2x$ را دریافت و درسطر مربوطهٔ آنها بنویسید .

525 - برای یافتن مربعات تقریبی اعداد که به واحد نزدیك باشند از فارمول $(1+a)^2 \approx 1+2a$ استفاده میشود. دراینجا قیمت a مثبت واز یك‌واحد کمتر گرفته‌شده‌است. از فارمول فوق‌استفاده کرده قیمتهای تقریبی افاده های ذیلرا دریافت کنید :

(a) $(1+0{,}01)^2$ ; (c) $(1{,}05)^2$ ; (e) $(1-0{,}03)^2$;
(b) $(1+0{,}02)^2$ ; (d) $(1{,}005)^2$ ; (f) $(0{,}999)^2$ .

526 - به کدام قیمت x :

(a) دوحدهٔ $x+1$ ازمربع دوحده $x-3$ به‌قدر 110 زیادتراست،

(b) دوچندحاصلضرب‌دو حدهٔ $x+2$ و $x-3$ از مجموع‌مربعات آنها به قدر 16 کمتر است ؟

527 - پولینوم $x^2-5x+8$ داده شده‌است . اگر $x=y+1$ باشد افاده که از جنس متحول y حاصل میشود آنرا ساده بسازید .

528 - معادلات ذیلرا حل کنید :

(a) $x^2-26=0$ ; (c) $121-a^2=0$ ; (e) $y^2=0{,}64$ ;
(b) $x^2-9x=0$ ; (d) $7a+a^2=0$ ; (f) $y^2=0{,}16y$ .

529 - برروی محورات کمیات وضعیه آن ست نقاطرا تعیین کنید که شرایط ذیلرا داشته باشد :

(a) $2<x<5$ ; $3<y<4$ ;
(b) $-4<x<-2$ ; $1<y<5$ ;

## تبدیل نمودن سه حده $a^2+2ab+b^2$ به شکل مجموع دوحده

## (عکس موضوع مبحث 45)

ازدروس پیشتر ما میدانیم که $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ است .



اکنون جاهای چپ وراست اعضای مساواتهای فوقرا تبدیل میکنیم : $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ؛ ازهمین شکل فارمول استفاده نموده سه‌راحده‌به شکل‌مربع تام دوحده تبدیل نموده میتوانیم .

مثال اول میخواهیم که سه حدهٔ $x^2+10x+25$ رابه شکل‌مربع مجموع دوحده بنویسیم .

حل : سه حدهٔ $x^2+10x+25$ رابه‌شکل $x^2+2x.5+5^2$ مینویسیم. دراینصورت سه حدهٔ حاصل شده که حد اول آن مربع متحول x یعنی $x^2$ دردوم آن دوچند حاصلضرب x در 5 یعنی $2.x.5$ و حد سوم آن مربع عدد 5 یعنی $5^2$ میباشد . بااستفاده ازفارمول $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ مانوشته کرده‌میتوانیم که:

$$x^2+10x+25=x^2+2.x.5+5^2$$
$$x^2+10x+25=(x+5)^2.$$

مثال دوم، سه حده $a^2-20ab^3+100b^6$ را به شکل $a^2+2.a(-10b^3)+(-10b^3)^2$ نوشته کرده میتوانیم . این سه حده به مربع مجموع دوحده $a-10b^3$ مطابقت دارد .یعنی:

$$a^2-20ab^3+100b^6=a+2.a.(-10b^3)+(-10b^3)^2$$
$$a^2-20ab^3+100b^6=(a-10b^3)^2$$

مثال سوم - ما سه حدهٔ $x^2+6^2x+10$ رابه شکل یك مربع تام دو

حده نوشته کرده نمیتوانیم. در اینجاسه حده یی است که حداول مربع x یعنی $x^2$ حد دومی آن دوچند 3x یعنی 2.3x وحد سوم آن که باید مربع 3 یعنی 9 میشود ، 10 میبا شد. پس معلوم شد که $x^2+6x+10$ به شکل یك مربع تام نوشته شد. نمیتوانند. ما این سه حده را به شکل مجموع مربع دوحدو یك عدد ا فاده کرده میتوانیم. یعنی :

$$x^2+6x+10=(x^2+2\cdot3\cdot x+3^2)=(x+3)^2+1$$

## سوالات

530 . سه حد ههای ذیلرا به شکل مربع مجموع دوحدبنویسید :

(a) $x^2+2xy+y^2$ ;
(b) $p^2-2pq+q^2$ ;
(c) $a^2+36+12a$ ;
(d) $64+16b+b^2$ ;
(e) $1-2z+z^2$ ;
(f) $n^2+4n+4$ .

531 . به جای ستاره ها یك حده ها یرا بنو یسید که به کمك آنها افاد ههای ذیل به مربع دوحده تبدیل شده بتواند :

(a) $b^2+20a+*$;
(b) $y^2-*+49$ ;
(c) $16x^2+24xy+*$;
(d) $*-42pq+49p^2$ .

532 . واضح نمایید که کدام یك از افاد ههای ذیل به شکل مربع تام دوحده تبدیل شده میتواند :

(a) $4x^2+12x+9$;
(b) $25a^2-30ab+9b^2$ ;
(c) $p+2p+4$ ;
(d) $100b^2+9c^2-60bc$ ;
(e) $49x^2+56xy+64y^2$ ;
(f) $81y^2+16z^2-72yz$ ?

533 . از مطابقت $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ استفاده نموده قیمت