سلسلهٔ ریاضیات معاصر

(۴)

جلد دوم

هندسهٔ تحویلی

در مستوی اقلیدسی

نگارش : پوهنمل محمد امان نادری

Italy ترییست ، ایتالیا Trieste

October ، 1974 ، اکتوبر

میزان ۱۳۵۳

شناسنامه:

نام کتاب: بسلسلهٔ ریاضیات معاصر
در چهار قسمت

نگارش: استاد محمد امان نادری
اکتوبر ۱۹۷۳، تیریست ایتالیا

دستنویس استاد نادری
در مرکز جهانی فزیک نظری، ایتالیا

چاپ الکتریکی: بنیاد شاهمامه، هالند
www.shahmama.com

فبروری ۲۰۱۳ مسیحی

این کتاب در ۵۲۳ صفحه آمادهٔ چاپ است.

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION

سلسلهٔ ریاضیات معاصر

در چهار قسمت

MODERN MATHEMATICS

روابط دوگانه‌ای
BINARY RELATIONS

عملیات دوگانه‌ای
BINARY OPERATIONS

گروه‌ها و ساحه‌ها
GROUPS & FIELDS

خودآموز ریاضی

PREPARED (in Dari) by MOHAMMED AMAN NADERI

AT THE
INTERNATIONAL CENTRE
FOR
THEORETICAL PHYSICS

Trieste, ITALY May 10, 1973

اهدا: به دانشجویان پوهنتون کابل

از قلم ناشر

اگر واژهٔ دانشمند، به کسی اطلاق شود که مغز و انگشتش به پژوهش آشنا باشد، اگر مقولهٔ دانشمند مُعرف کسی باشد که به تولید دانش دست برده است، درین صورت استاد محمد امان نادری یک دانشمند به تمام معناست.

استاد نادری با تولید دانش و تألیف کتاب ، با ریسرچ و نوشتن، خود را به حیث ریاضیدان پُرقریحه و پژوهشگرخلاق تثبیت کرده است.استاد نادری در جریان تحصیل و روند تدریس و مأموریت، همیشه مربی مؤفق و نویسنده یی با تفکر ملی بوده است.

از نوشته های استاد نادری، برق آگاهی و مسؤولیت پرتو میزند. او در مقدمهٔ کتاب « به سلسلهٔ ریاضیات معاصر» به مقولهٔ مدرن از دیدگاه یک دانشمند متفکر برخورد می کند. استاد میداند که مدرنیته چیست؟ میداند که مدرن یعنی تازه جویی ،مدرنیته یعنی تولید دانش و تولید فرهنگ.

نویسندهٔ افغان با درک اهمیت علوم مدرن، برای آنکه جامعهٔ افغانی را بسوی مدرنیته ببرد، به نوشتن و تألیف آثاری در حوزهٔ ریاضی دست میزند، تألیفاتی که استعداد جوانان افغان را به سوی خلاقیت و تولید دانش رهنمون میسازد.

دست اندرکاران بنیاد «شاهمامه» افتخار دارند که شماری از آثار چاپ نشدهٔ قلمی و چاپ شدهٔ استاد بزرگ نادری را در آرشیف خود دارند و در قدم نخست خواهیم کوشید تا بخش های هر یک را به شکل کتاب انترنتی روی صفحه بگذاریم. البته باید یادآور شویم که احتمال دارد آثار ریاضی دستنویس استاد نادری گاهی به تیراژ کم اقبال چاپ یافته باشد و در آرشیفی هم موجود باشد ولی از آنجاییکه در ین اثر نشانی از یادداشت های چاپ دیده نمیشود، ناگزیریم بپذیریم که این سلسه بچاپ نرسیده است.

استاد نادری عضویت انجمن ساینسدان های جهان را داشت که مرکز آن در شهر تیریست ایتالیا بوده است و نادری بار ها در کنفرانس های علمی آن اشتراک کرده است. در دو کنار صفحه دوم کتاب نشان های دو سازمان بانام جهان یعنی **یونسکو** و **سازمان جهانی انرژی اتومی** دیده میشود و گمان میرودکه برنامه ها و کنفرانس های علمی انجمن ساینسدان های جهان از طریق این دو نهاد معتبر جهانی حمایت و تمویل میشد و به این لحاظ نشانهای ایشان در کتاب درج اند و به ارزش علمی این اثر می افزایند و تشخیص میشود که نادری از جملهٔ دانشمندان پذیرفته شده ایشان بوده و احتمال دارد کاپی این اثر نیز در نهاد ایشان درج باشد.

گرچه بنیاد «شاهمامه» امکانات تایپ و دیزاین هرگونه کتاب در هر زبان و علم را دارد ولی با نشر نسخه های اصلی این سلسله آگاهانه میخواهیم از ارزش علمی و تاریخی این سلسله نکاهیم، چه دقت و روش کار استاد نادری، دستنویس زیبا و پر کشش شان ما را بیشتر انگیزه میدهد تا آنچه هست امانتدارانه به شما پیشکش گردد.

در برگ دوم «بسلسلهٔ ریاضیات معاصر» - جلد دوم، میبینیم که این اثر به دانشجویان پوهنتون کابل اهدا شده است. بنیاد «شاهمامه» از تمام مراکز علمی و دانشکده های علوم طبیعی کشور که ضرورت آرشیف سازی و تدریس آثاری از این دست را دارند، تمنا میکند تا در تکثیر و نشر کتب استاد نادری با ما همکاری کنند، و زمینه استفادهٔ این آثار را به نیازمندان فراهم سازند چه این یک دین ما و امانت مردم افغانستان نزد ما میباشد و نمیدانیم که بعد از این همه چند دهه جنگ و چپاول در افغانستان، آیا اثری از استاد نادری در آرشیفی و یا دانشکده یی موجود خواهد بود یا خیر.

به آرزوی اینکه زمان و زمینه میسر گردد تا بنیاد شاهمامه آثار دیگر استاد نادری را نیز آمادهٔ چاپ و پیشکش علاقمندان و خوانداگانش دارد، صفحاتی چند این کتاب را طور معرفی به دسترس قرار میدهیم.

به امید یک فردای روشن برای نسل جوان کشور

منیژه نادری

مسؤول بنیاد شاهمامه

۹ مارچ ۲۰۱۳، هالند

مقدمه

Preface

در عصری که ما بسر می بریم گفته میتوانیم که یک عصر تحول و انقلاب است. این تحول و انقلاب در شقوق مختلف علوم و تکنالوجی بصورت برازنده بمشاهده میرسد. ریاضیات نیز در قسمت خود در تشکیل این تحول سهم کافی داشته، و حتی در تحول و پیشرفت علوم طبیعی و علوم اجتماعی رول مرکزی را بعهده دار میباشد. درعین حال ارزش تحول و انقلاب بدرون خود علم ریاضی از اهمیت که ریاضیات در تحول و انکشاف علوم دیگر دارد، کمتر نمیباشد. چون در ممالک انکشاف یافته، معلمان و متخصصان علم ریاضی به اهمیت تشریح تحولات ریاضی پی برده اند، بدینمنظور در طی این چند سال آخر دانشمندان این علم یک تجدید نظر عمومی را در متن پروگرام شاخه های مختلف ریاضیات: الجبر، هندسه، مثلثات، مشتقات ضرور چند رشته و حتی تغییرات بزرگ را در آن وارد نموده اند. چنانچه در ایالات متحده امریکا پروگرامهای ریاضیات مرتب پروگرامهای ریاضیات از قبیل: SMSG:

School Mathematics Study Group و همچنین

هیئت CMCEEB: Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board

و همین قسم هیئت UICSM: University of Illinois Committee on School Mathematics,

و امثال آن که شرح در این مختصر است. موازی با آن در یورپ نیز پیدایش مکتب بوربکی Nicolas BOURBAKI در فرانسه و از پاپی Papee در بلجیم و دسته که ی علمای ریاضی ما که در ممالک مترقی دیگر تغییرات را لازمه در پروگرام ریاضی و متن پروگرامهای درسی خویش وارد نموده.

در نتیجه این پیشرفت‌های زیاد کتب در زمینه تجربیات دانشگاه‌های مختلفه از صنوف مکاتب ابتدایی الی کورس‌های post graduates مورد تطبیق قرار گرفت.

زمانیکه راجع به ریاضیات معاصر صحبت میشود، یکعده سوالات از قبیل: ریاضیات معاصر چیست؟ ریاضیات معاصر از ریاضیات سابق (عنعنوی) چه فرق دارد؟ ما چرا ریاضیات معاصر را تعقیب کنیم؟ و از ریاضیات چه فایده حاصل میشود؟ این نوع سوالات معمولاً از طرف معلمان و دانشجویان ریاضیات سابق (عنعنوی) پرسیده میشود. واقعاً که ایشان مستحق گرفتن جواب قانع کننده و توضیحات لازمه میباشند. اما ناگفته نماند که جواب موجز، خلص و قانع کننده همه سوالات بشکل عمومی کار سهل و آسان نیست، بلکه یک سلسله تتبعات و مباحثات دامنه‌داری را ایجاب میکند.

بجز از یک قسمت کمی ریاضیات معاصر (جدید) که درین چند سال اخیر انکشاف یافته است، بقیه حصص زیاد آن از سال‌ها خیلی سابق موجود بوده است. در حقیقت مفکوره‌های مهم ریاضیات از قبیل: مفکوره ست، مفکوره روابط، مفکوره تابع از مبادی تاریخ بشر - قدامت تاریخی دارد.(1) علاوه بر آن انکشاف و تعارف رسمی بسیاری از مفکوره‌های ریاضی که درین دو قرن اخیر (قرون نزده و بیست) صورت گرفته است، نتیجه تتبعات و تشریح تقریباً بیشتر از شصت سال قبل است. حالانکه نزد یک انسان (که معمولاً بیشتر از صد سال عمر ندارد) چطور اصطلاح کلمه معاصر یا «Modern» به یک مفکوره که تقریباً چهار صد سال و یا یک صد سال و حتی دو صد سال از آن گذشته، بسیار قابل قبول است!

---

(1) Boyd Earl, William Moore, W. I. Smith; Groups And Fields, McGraw-Hill Book Comp. Inc., N.Y., 1963.

ریاضیات جدید از لحاظ اینکه ریاضیدانان درین عصر به وسعت واقعی آن پی برده و به آن عمومیت بخشیده اند «معاصر» گفته میشود. اهمیت بارز ریاضیات «جدید» و شناخت عمومی آن بنابر دو دلیل ذیل متکی است:

(1) . با شناخت نتایج تشریح و تتبعات متعددیکه درین قرن در ساحهٔ عموم ریاضیات صورت گرفته است.

(2) . بنابر انقلاب و انکشاف تکنالوجی، که بصورت متقابل با ریاضیات تحول و انکشاف یکدیگر را ایجاب نموده و مینماید.

وظیفهٔ مهم و بزرگ یک عالم و علاقمند ریاضی اکثراً دریافتن قضایا و صورت اثبات آن است. حالانکه در تشریح و تتبعات در ریاضیات برای اینکه بتوانند اصطلاحات «terms» را بصورت موجز و متکمل تعریف کنند بداشتن یک زبان موجز و خاص ضرورت محسوس میشود. برای برآوردن این منظور در اواخر به اهمیت شناختن منطق رسمی Formal logic در ریاضیات پی برده شده است. پس بجا و برد روش استعمال اصول اولیات و متعارفات axiomes محض به هندسهٔ اقلیدسی Euclid's Geometry منحصر نمانده بلکه در تمام شقوق ریاضیات بکار برده شده است.

این توسعه و پیروی از روش سیستم منطقی در الجبره بصورت خاص مفید ثابت گردیده است، زیرا متعارف این شیوه در الجبره باعث شده که توجه را بیشتر در طرز تشکل ساختمان جبری جلب نموده ضمناً تا اندازه از تکرار زیاد حل معادلات و استعمال محض اعداد کاسته است. ناگفته نماند که این کاهش حل معادلات جبری معنی این را ندارد که این طرز برخورد ریاضیات بحل معادلات و عبارات داشتن به استعمال اعداد ارزشی را قایل نباشد. بلکه با دقت

بحل معادلات جبری و مهارت بیشتر: استعمال اعداد ارزش و اهمیت فراوانی را قبول دار است، نه مشروط براینکه این حل معادلات و استعمال اعداد با شناسائی دانش و پی بردن به حقایق که زیربنای آنرا تشکیل داده اند متکی باشد. چه بدون دانستن حقایق زیربنا مسائل - حل محض آنها با شناسائی مهارت با استعمال اعداد علم ریاضی را بحیث یک صندوقچهٔ چال و tricks تلقی میکنند. حالانکه اهمیت اکتشاف ریاضی که اساسات انقلاب در اکتشاف تکنالوجی را زیربنا تشکیل داده و تولید نتایج سودمند آن شد بوجود آمدن مفکوره کمپیوتر نتیجهٔ چال و tricks ریاضیات سابقه بوده نمیتواند. بهمین قسم توسعهٔ روز افزون علم ریاضی در قلمرو علوم مختلفهٔ دیگر از قبیل فزیک(1)، کیمیا، بیولوژی، اقتصاد، سوسیالوجی، سایکالوجی وغیره ثمرهٔ انتقال چال های سابق در تشکل نوع مفکوره های جدید شده نمیتواند.

: دریافت‌های مفکوره‌های زیاد بصورت فاصل اکتشاف یافته و در انقلاب کمپیوتر از آن بحث شده در معرض تطبیق قرار گرفته اند. چنانچه W. W. Sayer در کتاب: Prelude to Mathematics بیان نموده: " زمانی ریاضیدانان حس میکردند که گروه (group) کلید راز کائنات است. و این مشکل است که آنرا ثابت کنیم. "

Evariste Galois، ریاضیدان جوان فرانسوی، برای اولین بار در سال 1832 کار زیاد که در قسمت گروه Group نموده بودند، راپور داد. موصوف بحل مسئله ای، یعنی جستجوی طریقهٔ حل معادله درجه پنجم، که دانشمندان ریاضی را برای مدت تقریباً سه صد سال

---

(1). در قسمت اخیر کتاب بعنوان "درخت لرزانهٔ فردا" مختصراً از تطبیقات مهم گروه در ساختمانهای فزیک مأخذ داده شده است.

معروف نگهداشته بود علاقمند گشته و بالاخره توانست تا زمان
دهد که حل معمو مسایل یک گروه Group تعلق میگیرد که از
اثر بررسی آن گروه این حقیقت: "که آیا یک معادلهٔ درجهٔ پنج جبری
بیک شکل ساده‌تری در آورده شده میتواند ویا خیر؟" فهمیده
شده میتواند. اگرچه تعداد فرضیات و assuptions که
درین حل حصه میگیرند محدود و کم بوده اما نتایج آنکه تا چه اندازه قضایا
با شامل این فرضیات در ریاضیات اقامه یافته اند - و ضمناً دامنهٔ
پهنائی و وسعتی را که این نظریه theory رشد در عالم ریاضیات
اشغال نموده است شگفت آور است.

در تدوین و ترتیب این پروگرام بیشتر از اشتغال این نوع
ساختمانهای جبری algebraic structures که ممکن خواننده به آنها از سابق
آشنا باشد، کار گرفته شده است. مثلاً بیشتر از سیستم
اعداد تام integers، که واضحاً خواننده با آن سروکار و تجارب بیشتر
دارد، صحبت میشود. بنابرین توقع میرود که تعقیب کنندهٔ این
پروگرام به مشکلات کمتر مواجه گردد. ممکن بسیاری از عناوین دیگری
ریاضیات معاصر نزد شاگردان کم مفاد تلقی شوند، اما بخاطر
باید گرفت که مفکوره‌های مانند: Set، گروه Group،
حلقه Ring، ساحه Field یک رول برازنده را
در تنویر و اتحاد بسیاری از عناوین ریاضیات سابق "عنعنوی"
بازی میکنند. بطور مثال تنها مفکورهٔ Group در تنویر و ایجاد
روابط که در بین الجبره و هندسه موجود است خیلی مفید ثابت میشود.
حالانکه بدون اشتغال مفکوره گروه Group روابط بین هندسه و
الجبره از هم منفصل و بعید دیده میشود. علاوه بران باید که
این مفکوره‌ها جزء زبان علم ریاضی که برای حل مسایل روزافزون

علوم مختلف شمول: social sciences و psychology بکار برده میشود، پنداشته شود.

درینجا وجیبه ام میدانم که از ذوات محترم و مؤسسات که در تهیه و تدارک این زحمت به من منت گذاشته و کمک نموده اند در ذیل نام برده و ابراز قدر دانی کنم:

1. پروفیسور عبدالسلام، مدیر، Professor Abdus Salam
Director, International Centre for Theoretical Physics,

2. پروفیسور پی. بودینی، معاون، Professor P. Budini
Deputy Director, International Centre for Theoretical Physics,

که بدون ارشادات مفید، تشویق و کمک های ارزنده این دو ذوات محترم این رساله به شکل کنونی بوجود آمده نمیتوانست.

3. پروفیسور ای. کستلر، مدیر کورس، Professor A. Kastler
Director, Winter College on Atoms, Molecules, & Lasers,

و

4. داکتر ای. ام. حامند، امر اداری، Dr. A.M. Hamende
Administrative and Scientific Information Officer

که نظریات و تصمیم ایشان را راجع به تهیه و نشر Matrices این کتاب توسط دستگاه طباعتی Publications Office, ICTP ابراز فرموده اند قدردانی مینمایم.

بهمین قسم از مؤسسه IAEA :
International Atomic Energy Agency
که در تهیه این فرصت و فیلوشیپ بمن مساعدت نموده اند،
اظهار امتنان میکنم.

در اخیر تذکر باید داد از اینکه تهیه و ترتیب این کتاب پنجصد صفحه ای در چهار قسمت در طول مدت کمتر از یک ماه صورت گرفته است پس توقع میرود که عدم وقت کافی و عجله و تهرش در تکمیل آن باعث بروز بعضی شکسته اغلاط چه در ربط جملات و الفاظ – و چه در ادای توضیح مفاهیم و مذکوره گردیده باشد، لذا از ذوات محترم که این اثر را میخوانند خواهشمندم که از تذکر اشتباهات وارده باینجانب منت گذارند، تا در صورت امکان در چاپ بعدی این رساله از وقوع تکرار همچو اشتباهات جلوگیری بعمل آید.

پوهنمل: محمد امان نادری — Mohammed Aman Naderi

ترایست، ایتالیا — TRIESTE, ITALY

ثور، 1352 — May 6, 1973

داشتن معلومات لازمه : Prerequisites

برای اینکه خواننده از مطالعه این کتاب بحد کافی بهره برده بتواند ضرورشیت که باندازه یک سال از تعقیب پروگرام ریاضیات معاصر بسویه مکاتب ثانوی بهره مند باشد. بالعباره دیگر برای تعقیب مفید این پروگرام مرتبه خواننده باید راجع به مفکوره های بسیط: ست ها، وروابط بین آن ها، و عملیات ابتدائی بین ست ها و استعمال علایم مشخصات داشته باشد.

صورت استعمال این کتاب : How to Use This Book

مواد شامل این کتاب بشکل یک پروگرام خود آموز ریاضی ترتیب و تقدیم گردیده است. موضوعات محتوی این پروگرام بقسم واحد های کوچک بصورت ماده وار تقسیم گردیده است. هر ماده در داخل چوکات یک مسأله افاده و توضیح میشود. مطالعه جداگانه چوکات هر مسأله و تهیه جواب مطلوب هر مرحلهٔ آن در آموزش موضوع سودمند واقع میشود.

مواد این پروگرام طبق امثال ذیل ترتیب یافته است:

۱. اگر احمد برادر محمود باشد، پس محمود نیز ——— احمد میشود.

حل :- برادر

2. برای اینکه یک دانشجو در آموختن کافی ریاضی کمک شده بتواند پروگرام خود آموز ریاضی را بصورت معلومات جدید را در چوکات جداگانه تقدیم میکند. ضمناً این معلومات را در چوکات های جداگانه مسایل تقسیم میکند، و چوکات جوابات هر مسأله در ______ آن موضوع شهوت پیش میکند.

حل : آموختن (یا آموزش) یا (فراگرفتن) یا (دانستن)

3. درینصورت هر ماده پروگرام دیا ______ معلومات جدید را که باید بدقت مطالعه و جواب تحریری داده شود تقدیم میکند. بعد از ان جواب خویش را با جواب که در چوکات مسأله داده شده است مقایسه کنید.

حل : چوکات مسأله

ممکن خواننده طریقهٔ موثر مطالعه و تعقیب شود مثلاً این پروگرام خود آموز ریاضی شکلی به پیروی از روش ذیل دریافت خواهد شود: طوریکه چوکات جواب مسأله مورد مطالعه با یک ورقه کاغذ ویا مقوا پوشیده شود. بعد از مطالعه عمیق مسأله جواب مطلوب آن بیک پارچه علحیده کاغذ تحریر شود، سپس پارچه کاغذ را بلند باید چوکات جوابات دور کرده و جواب خویش را با جواب داده شده مسأله مقایسه کنند. از اینکه در تهیه مواد مرتبه این پروگرام ترتیب مراعات گردیده یعنی هر عنوان باید با شامل عنوان

ما قبل معرفی شده است . پس با این اساس در صورت جواب غلط بهتر است که دوباره مواد مربوطه همان شاخه را تکرار نموده و پس از اصلاح جواب غلط بمطالعهٔ خویش ادامه دهید .

ضمناً بهتر خواهد بود که تعریفات و فارمولهای مربوطه یک موضوع را شناخته بصورت عمیق مطالعه کنید ، تا با شناسایی آن ~~تجارب~~ معلومات جدید را که توسط این پروگرام خود آموز تقدیم میشود قدم بقدم فراگرفته بتوانید.

یادداشت مهم : Important Things to Remember

1. همیشه حرکات خود مسأله را بدقت مطالعه نمائید.
2. جواب تکمیل خود را در صفحه کاغذ علاحده تحریر بدارید.
3. جواب خویش را با جواب داده شده همان مسأله مقایسه کنید.
4. درصورت غلطی قبل ازانکه بمطالعهٔ مسأله حرکات بعدی رهنمون شوید اشتباه خویش را تصحیح نمائید.
5. ازانکه آموزش با شناسایی اجرای عمل و کردن کار صورت میگیرد ، پس باید شما کار را اجرا و عملیه ای را انجام دهید ، یا بالفاظ دیگر قبل ازانکه شما به مطالعه مرحلهٔ تنبیه شده حرکات جواب یک مسأله بپردازید ، ضرورت است تا خود تان به مسأله مورد بحث جواب تحریر کنید .

تکرار و یا گردان : Review

برای اینکه در فراگرفتن مواد این پروگرام به خواننده بیشتر کمک شده بتواند نکات ذیل مدنظر گرفته شده است :

1. در هر فاصلهٔ قانونی به تهیه حرکات مسائل معیاری توضیح یک مفکوره پرداخته شده است. این مسائل توسط علامه ستاره "*" که بالای شماره مسائل مربوط گذاشته شده نشانی گردیده اند. درصورتیکه خواننده از دادن جواب درست و مکمل این معیاری عاجز آید، توصیه میشود که مسائل ماقبل این حرکات معیاری را بدقت مطالعه نموده و اشتباه خود را تصحیح نماید.

2. یک عده امتحانات که تا خواننده بتواند توسط آن ها اندازهٔ معلومات فرا گرفته خود را آزمایش نماید تهیه و به قسمت ها مناسب تقدیم شده، و جوابات مربوطه این امتحانات در قسمت اخیر کتاب داده شده، درصورتیکه خواننده از حل عده از مسائل این امتحانات عاجز آید ضرور است که قبل از شروع بحث ملاحظه مابعد هر امتحان اول محتویات مسائل را که جواب داده نتوانسته است تکرار و گردان کند.

جداول مندرج Panels

در چندین نقاط این کتاب شما به استعمال یکی از جداول مندرج یا Panels رجوع ساخته میشوید. تعداد این جدول ها به سیزده رسیده و در اخیر کتاب موجود اند. این Panel ها حاوی حقایق که در حل مسائل بکار برده میشوند، میباشند. برای سهولت کار بهتر است که Panel مورد بحث را به صفحه عیارکننده کاغذ کاپی نموده و عندالزوم از آن استفاده نمائید.

اصطلاحات (Terminologies) واستعمال انها

اصطلاح TERM	درین کتاب	در کتب دیگر	اصطلاح TERM	درین کتاب	در کتب دیگر
Algebraic Solution	حل جبری (الجبری)	حل جبری (الجبری)	Binary	دوگانه ای دوتائی	دوتائی
Algebraic Structure	ساختمان جبری	سازمان جبری	Binary Operation	عملیه دوگانه ای	عملیه دوتائی
Algeraic System	سیستم جبری	دستگاه جبری	Binary relation	رابطه دوگانه ای	رابطه دوتائی
Associative	انجمنی	اتحادی یک جائی تجمیعی	Cartesian (Cross) Products	حاصلضرب کارتی	کمیات وضعیه
			Codomain	کودومین	—
Associative binary operation	عملیه دوگانه ای انجمنی	عملیه دوتائی اتحادی یا یک جائی	Commutative	تبدیلی	جابجائی
			Commutative binary operation	عملیه دوگانه ای تبدیلی	عملیه دوتائی جابجائی
Associative Law	قانون انجمنی	قانون اتحادی ویکجائی	Commutative Groups	گروه های تبدیلی	گروه های جابجائی
Associative Property	خاصیت انجمنی	خاصیت یکجائی ویا اتحادی			
Associativity	انجمنیت	اتحادی بودن	Commutative Law	قانون تبدیلی	قانون جابجائی

ادامه اصطلاحات

اصطلاح TERM	در این کتاب	در کتب دیگر	اصطلاح TERM	در این کتاب	در کتب دیگر
Commutative property	خاصیت تبدیلی	خاصیت جابجائی	Domain	دومین	دومنه
Commutativity	تبادل (تبدیلیت)	جابجا	Element	عنصر	عنصر اعضا
Complement	تکمیل		Empty sets	ست خالی	مجموعه خالی
Complementary	متممه	متمم	Equality	مساوات تساوی	مساوات تساوی
Coordinate	مختصات	کمیات وضعیه	Equality of sets	مساوات ست ها	تساوی مجموعه ها
Coordinate System	سیستم کمیات وضعیه	دستگاه کمیات وضعیه	Equivalence	متعادل	معادل
			Equ.-Calasses	صنوف متعادل	
			Equ.-relations	روابط متعادل	
Demorgan Law	قانون دیمورگن	قانون دیمورگن	Field	ساحه	میدان
Disjoint sets	ست های غیر متقاطع		Fields	ساحه ها (ساحات)	میدان ها
Distributive	توزیعی	توزیعی	First Coordinate	کاردینیت اول	عنصر اول جوره مرتب
Distributive	توزیعی	توزیعی	Frame	چوکات ساز	
-Law	قانون —	قانون —	Function(s)	تابع (توابع)	تابع (توابع)
- property	خاصیت —	خاصیت —			
Distributivity	توزیع		Group(s)	گروه (ها)	گروه (ها)

ادامهٔ اصطلاحات

اصطلاح TERM	درین کتاب	درکتب دیگر	اصطلاح TERM	درین کتاب	درکتب دیگر
Identity	عینیت	وحدت	One-to-one Correspondence	مطابقت یک بیک	مطابقت یک بیک
- Element	عنصر عینیت	عنصر خنثی عنصر بی اثر			
Image	تصویر	تصویر	One-to-one mapping	تابع یک بیک	
Images	تصادیر	تصویرها			
			Panel	جدول منزوی	
Intersection	تقاطع	تقاطع	Partition	انقسام	
			- of set	انقسام ستها	
Inverse	معکوس	معکوس			
- Element	عنصر معکوس	عنصر معکوس	Permutation	پرموتیشن	
- function	تابع معکوس	تابع معکوس	- of degree n	پرموتیشن درجه n ام	
- operation	عملیه معکوس	عملیه معکوس	- multiplication	ضرب پرموتیشن	
Mapping	تابع (میپنگ)		Property	خاصیت	خاصیت
- from S into T	از S در T				
- from S onto T	از S بر T		Proper Subset	Subset [illegible] Subset مناسب	ست فرعی مناسب
- one-to-one	یک بیک				
			Range	رینج	دامنهٔ تحول
Member	اعضا	اجزا			
			Ring	حلقه	
Mutually exclusive sets	ست های که متقابلاً غیر متقاطع اند		Reflexive	انعکاسی	انعکاسی
			- property	خاصیت انعکاسی	خاصیت انعکاسی
Ordered pairs	جوره های مرتب		reflexivity	انعکاسیت (انعکاسیت)	

ادامهٔ اصطلاحات

اصطلاح TERM	درین کتاب	در کتب دیگر	اصطلاح TERM	درین کتاب	در کتب دیگر
Roster	روشتر	—	Natural Numbers	اعداد طبیعی	اعداد طبیعی
sets	شت ها Sets	مجموعه ها	Positive Integers	اعداد تام مثبت	اعداد تام مثبت
		مجموعه ها	Negative Integers	اعداد تام منفی	اعداد تام منفی
subsets	شت جزئی subsets	شت فرعی	Integers	اعداد تام	اعداد تام
superset	شت کلی	شت فوقانی	Nonzero Integers	اعداد تام بدون صفر	
Symmetric property	تناظری خاصیت تناظری	تناظر خاصیت تناظر	Rationals No.	اعداد نسبتی	اعداد گویا
			Irrational No. Numbers	اعداد غیر نسبتی	اعداد گنگ
Transformation groups	انتقال گروه های انتقال	انتقال	Real Numbers	اعداد حقیقی	اعداد حقیقی
Transformations	انتقالات	انتقالات			
			Complex Numbers	اعداد مختلط	اعداد مرکب
Transitive property	انتقالی خاصیت انتقالی	انتقال خاصیت انتقال			
Transitivity	انتقالیت	—	Imaginary Numbers	اعداد موهومی	اعداد غیرحقیقی
Triplet	شه گانه ای	سه تایی			
Union of sets	اتحاد اتحاد Sets ها	اتحاد اتحاد ست ها			
Well-defined binary operation	عملیه دوگانهٔ خوب تعریف شده	— —			

استعمال علایم و سمبولهای معمول این کتاب :

سمبول	صورت افاده آن	سمبول	صورت افاده آن
$\forall$	برای تمام (کمیت مقداری)	$=$	مساوات را افاده میکند.
$\forall x$	برای تمام x ها	$\neq$	عدم مساوات را افاده میکند.
$\forall x, y$	برای تمام x ها و y ها	$\cong$	انطباقات (انطباق پذیری)
$\exists$	موجود است (موجودیت)	$\ncong$	عدم انطباق پذیری را ارائه میکند
$\exists x$	یک x موجود است	$\perp$	عمودیت را افاده میکند،
$\nexists$	موجود نیست	$\not\perp$	عمود نیست
$\ni$	طوریکه (شرطیه)	$\parallel$	موازات را بیان میکند.
$\in$	عضویت را بیان میکند	$\nparallel$	موازی نیست .
$x \in A$	x عضو A است	$\simeq$	شباهت را نشان میدهد
$y \notin A$	y عضو set B نیست	$\not\simeq$	شبیه نیست
$\subset$	رابطه set و subset	$a \mid b$	a قاسم b است
$A \subset B$	A یک set جزئی B است	$b \nmid a$	b قاسم a نیست ،
$B \not\subset A$	B یک set جزئی A نیست	$[a, b]$	انتروال بسته a و b .
$A \subseteq B$	A یک set جزئی ویا مساوی B است	$\langle a, b \rangle$	انتروال باز a و b .
$C \not\subseteq B$	C یک set جزئی ناموزون B نیست	$f(x)$	تابع x وهم چنان f(x)
$<$	ترتیب را افاده میکند	$fg(x)$	تابع مرکب ، fg(x)
$a < b$	a کوچکتر از b است	(a, b)	جوره مرتب a و b
$b \nless a$	b کوچکتر از a نیست	ϕ	set خالی
$c \leq d$	c کوچکتر ویا مساوی d است .	$\{a\}$	یک set که عنصر آن a است .
$e \nleq c$	e کوچکتر ویا مساوی c نیست	$x \Rightarrow y$	x موجودیت y را ایجاب میکند
$\cup$	اتحاد را افاده میکند	$x \Leftrightarrow y$	x موجودیت y و y موجودیت x را ایجاب میکند
$A \cup B$	A اتحاد B	dom R	domain R
$\cap$	تقاطع را افاده میکند	ran R	range R
$C \cap D$	C تقاطع D	$x R y$	x رابطه y ویا (x,y)

فهرست عناوین

CONTENTS

ادامهٔ فهرست عناوین

ادامهٔ: فهرست مضامین

قسمت اول

روابط دوگانه ای

Binary Relations

از مشغولیتیکه از مطالعه ریاضیات اندوخته اید اگر بیانیه های معمول ریاضی را بخاطر بیاورید بزودی درک خواهید نمود که کدام بیانیهٔ ریاضی را که محض یک شی را توضیح کند پیدا کرده نمیتوانید. بصورت عموم بیانیه ها و افاده های مرتبط ریاضی شرایط conditions ، روابط Relations که بین دو شی ، ویا یک شی با خودش موجود باشد (ویا موجود نباشد) بیان میکنند.

بطور مثال بیانیه های ذیل را از نظر بگذرانید :-

1 . خط $\overleftrightarrow{m}$ عمود بر خط $\overleftrightarrow{n}$ است .

2 . $2x = 4$.

3 . $a < b$.

4 . $A \not\subset B$.

5 . خطوط $\overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{n}$ و $\overleftrightarrow{p}$ باهم موازی اند .

از مطالعه امثال فوق به آسانی فهمیده میشود که :

مثال 1 . رابطهٔ عمودیت perpendicularity را بین دو خط $\overleftrightarrow{m}$ و $\overleftrightarrow{n}$ ، طوریکه در مثال مذکور توضیح یافته است ، بیان میکند .

مثال 2 . شرط ، رابطهٔ «مساوات» equality را که بین $2x$ و 4 موجود است توضیح میکند .

مثال 3 . موجودیت شرط : «کوچکتر است از ..» "less than" ، طوریکه در مثال ایضاح شده بیان میکند .

مثال 4. شرط شمول inclusion را که بین دو ست set A و B موجودیت افاده میکند.

مثال 5. وجود شرط موازات parallelism را بین سه خط $\overleftrightarrow{m}$، $\overleftrightarrow{n}$ و $\overleftrightarrow{p}$ نشان میدهد.

حتی ساده ترین بیانیه ریاضی که در مثال 6 ذیل ذکر میشود، یک رابطه دوگانهٔ binary relation را توضیح میکند.

مثال 6. یک مثلث $\triangle ABC$ متساوی الساقین است.

اگرچه در نگاه اول تصور میشود که بیانیهٔ مثال (6) فوق محض یک شی یعنی مثلث ABC را توضیح میدارد، امّا درحقیقت چنان نیست، چه کلمهٔ متساوی الساقین در اینجا معادل بیانیهٔ است که وجود رابطهٔ تساوی را بین طول دو ضلع مثلث ABC افاده میکند. و بهمین قسم:

مثال 7. بیانیهٔ: "8 یک عدد جفت تام است." معادل بیانیهٔ است که افادهٔ: "2 قاسم 8 است." را بیان میکند و چه کلمهٔ جفت درین رابطهٔ قاسم بودن بین دو عدد تام 2 و 8 را توضیح مینماید.

ساده ترین روابط relations در ریاضیات عبارت از آن روابط اند که در بین دو شی و یا دو عنصر elements موجود میشوند. چنانچه نمونهٔ عدهٔ ازین relations در امثال فوق نشان داده شده.

اکنون تشابهات و عدم تشابهات relations بین اشیا را در مثال ذیل نشان میدهیم. درین مثال ملاحظه خواهید کرد که گر استوار دو رابطهٔ: $\leq$ و $\subset$ در بین عناصر elements ست اعداد حقیقی real numbers، $\mathbb{R}$؛ و ست های جزئی subsets یک ست S علی الترتیب مدنظر گرفته شود، دیده خواهد شد که این دو رابطهٔ مذکور باهم تشابهت دارند. امّا اگر موضوع عمیق مطالعه شود، بملاحظه میرسد که برعلاوه این تشابهات، در بین این دو رابطه عدم تشابهات و فرق نیز موجود است.

I. استقرار رابطهٔ ≤ در R set	II. استقرار رابطهٔ ⊂ در S set
در set اعداد حقیقی R رابطهٔ: «کمتر یا مساوی» ≤ را مدنظر بگیرید و حالات ذیل را مطالعه کنید:-	در set تمام subsets های یک S set رابطهٔ: "subset" بودن یعنی ⊂ را مدنظر بگیرید و حالات ذیل را مطالعه کنید:-
a. اگر a یک عنصر R set است. پس $a \le a$ است.	a. اگر A یک subset S set است، پس $A \subset A$ است.
b. اگر a، b و c عناصر R بوده در صورتیکه دارای روابط: $a \le b$ و $b \le c$ موجود باشد، پس $a \le c$ است.	b. اگر A، B و C subsets S set بوده در صورتیکه دارای روابط: $A \subset B$ و $B \subset C$ موجود باشد، پس $A \subset C$ است.
c. اگر a و b عناصر ست R بوده در صورتیکه دارای روابط: $a \le b$ و $b \le a$ موجود باشد، پس $a = b$ است.	c. اگر A و B subsets یک set S بوده در صورتیکه دارای روابط: $A \subset B$ و $B \subset A$ موجود باشد، پس $A = B$ است.

ما می‌بینیم که در قسمت II مثال فوق یک set خاصی بنام ست خالی empty set (که معمولاً به ϕ ارائه میشود) موجود است طوریکه برای هر subset A ست S یعنی $A \subset S$ پس $\phi \subset A$ میباشد. حالانکه کدام عنصر x در ست R موجود نیست طوریکه برای هر عنصر a ست R رابطهٔ: $x \le a$ همیشه دارای حقیقت باشد.

در قسمت اول این (پروگرام) کتاب ما مفکورهٔ تعین رابطه بین دو عنصر را بصورت موجز بررسی کرده و بعضی خواص properties مهمی را

که ممکن روابط مورد بحث ما دارا بوده ویا نداشته باشند از نظر میگذرانیم. درنتیجه با کشف خواص ممیزه هر class مهمی روابط بین دو عنصر، با الحاق آن class که روابط مانند: مساوات اعداد equality of numbers ، تشابه مثلثات Similarity of triangles و انطباق مثلثات Congruency of triangles و ... را دارا باشد، موفق خواهیم شد.

۱. ست ها و جوره های مرتب 1. Sets And Ordered Pairs

۱-a. مفکوره های اساسی 1-a. Basic Notions

کلمهٔ set در ریاضی یک اصطلاح غیرقابل تعریف undefined term قبول شده و بواسطهٔ کلمات متعادل آن مانند مجموعه، collection، دسته وامثال آن تعبیر شده میتواند. اشیایی که یک set را تشکیل میدهند بنام عناصر elements های set یاد میشوند. درین کتاب ما set ها را توسط حروف کلان لاتین از قبیل: A، B، G، I، R، S، T وغیره نشان میدهیم: اینک در ذیل بعضی set های اعداد را توسط حروف کلان نشان میدهیم:

۱. set اعداد مثبت تام Positive Integers یعنی: 1, 2, 3, ... را به P نمایش داده ونامگذاری میکنیم.

۲. set اعداد غیرمنفی تام Non negative Integers یعنی: 0, 1, 2, ... را به N ارائه میکنیم.

۳. set اعداد تام Integers را به: I نشان میدهیم.

۴. set اعداد نسبتی (گویا) Rationals را به Q ارائه میکنیم.

5. set اعداد حقیقی Real Numbers را به R نشان داده و بهمین قسم :

6. set اعداد مختلط Complex Numbers را در موقع استعمال آن به C ارائه مینمائیم .

تذکر باید داد که در موقع استعمال این شش حروف ذکرشده set های مربوط آنها نیز بصورت علنی و واضح ~~[illegible]~~ نام برده خواهد شد. چنانچه اگر هدف ما از استعمال R نشان دادن set Real Numbers باشد، درینصورت از set مذکور بصورت واضح نام خواهیم برد والا ضروری نیست که همیشه در هر موقع R بحیث set Real Numbers تلقی و تعبیر شود.

عناصر یک set elements را توسط حروف خورد لاتین مانند a ، b ، c وغیره نشان میدهیم. توسط علامهٔ :
"$s \in S$" مفهوم : " s یک عنصر set S است." ویا :
" s شامل set S است" را افاده خواهیم کرد. که بصورت خاص :
$2 \in P$ مفهوم : " 2 یک عنصر set P است." را بیان میکند.
بهمین قسم توسط استعمال علامه : "$s \notin T$" مفکوره : " s عنصر set T نیست."
ویا : " s شامل set T نیست ." را توضیح میکنیم.
بطور مثال افاده "$-2 \notin P$" بیان میکند که -2 عنصر P نیست.
ویا -2 شامل P نمیباشد. درین مثال غرض ما از P عبارت از set Positive Int. است.

در افاده set ها عبارت : " set که عناصر آن عبارت است از . . . " توسط علامه قوسین کلان Braces ارائه میشود.
چنانچه افاده : $\{1, 2\}$ set ای را که عناصر آن عبارت از 1 و 2 است نشان میدهد. بهمین قسم افاده و علامهٔ :

38. اگر $S=\{0,1,2,3\}$ و
$R=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3)\}$ باشند:

(1). آیا R انعکاسی است؟ اگر نیست چرا؟
(2). آیا R تناظری است؟ اگر نیست چرا؟
(3). آیا R انتقالی است؟ اگر نیست چرا؟
(4). آیا R یک رابطه معادل شمرده میشود؟

39. یک رابطه معادل R در یک set که elements را به subset هایی که متقابلاً غیرمتقاطع یا mutually disjoint اند تقسیم میکند، (که این subset ها بنام صنوف معادل یا equivalence classes یاد میشوند.) طوریکه اتحاد union آن ها عبارت از set میباشد. بنابرین،

(1). اگر x و y عناصر عین صنف متعادل باشند، پس درین صورت xRy میباشد.
(2). اگر x و y عناصر صنوف متعادل متفاوت باشند، پس درین صورت xRy نمیباشد.

فرضاً $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c)\}$ باشند: صنوف متعادل که را که توسط R تعیین میشوند تشخیص کنید.

40. برعکس مسئله فوق: توسط انقسام یک set که S، یک رابطه binary relation تعریف شده میتواند، طوریکه صنوف متعادل درآن subset هایی که S را انقسام مجزا اند تشکیل میدهند. بطور مثال، اگر $S=\{1,2,3,4\}$ بوده و $S_1=\{1,3\}$ و $S_2=\{2\}$ و $S_3=\{4\}$ انقسام هایی S باشند، یک رابطه binary relation، R را که S_1، S_2 و S_3 صنوف معادل درآن تشکیل دهند، ترتیب کنید.

قسمت دوم

Part Two

عملیات دوگانه‌ای در یک سِت

Binary Operations on A Set

در قسمت اول ما مفکورهٔ یک رابطهٔ دوگانه‌ای (دوتائی) binary relation را در یک set بصورت عام مطالعه نموده و بعداً یک نوع خاص binary relation را که بنام رابطهٔ معادل equivalence relation یاد میشود مورد بررسی بیشتر قرار دادیم. دیده شد بعضی از روابط که ما به آنها از سابق آشنائی داریم مانند: رابطهٔ مساوات: "=" در set اعداد و رابطهٔ انطباق پذیری: "≅" در set مثلث‌ها، روابط معادل equivalence relations را تشکیل میدهند. ضمناً یکی از خواص مهم یک رابطهٔ معادل را در یک set که S، یا انقسام partition، S set مذکور مورد بررسی قرار دادیم. در نتیجه دیده شد (و ثابت شده) که هر رابطهٔ معادل در یک set که S، با یک انقسام مشخص همان set که S مطابقت میکند. (که در نتیجه subsets های حاصله set که S را بنام صنوف معادل equivalence classes یاد میکنند.) و بالعکس هر انقسام partition، S یک رابطهٔ معادل مشخص در S مطابقت مینماید.

در اینجا ممکن ما یک نوع دیگر رابطه binary relation را —

1068 . اگر T_s ، ست تمام انتقالات قابل تحویل یک ست غیرخالی S باشد پس عملیه ضرب انتقالات "·" یک عملیه binary در T_s میباشد. علاوه برون ما نشان دادیم که عملیه ضرب انتقالات که انجمنی است Associative . وضمناً ما دیدیم که یک انتقال قابل تحویل I در T_s موجود است طوریکه برای $\forall\alpha\in T_s$ صحت رابطهٔ: ______ را تحقیق میکند.

حل: $I\cdot\alpha=\alpha\cdot I=\alpha$

1069 . بالاخره ما دیدیم که اگر $\alpha\in T_s$ باشد . یک انتقال قابل تحویل α^{-1} در T_s موجود شده میتواند طوریکه صحت رابطهٔ: ______ را تحقیق مینماید.

حل: $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\cdot\alpha=I$

1070 . بحث صورهٔ پیشین: اگر T_s ، ست تمام انتقالات قابل تحویل یک ست S باشد، پس عملیه ضرب انتقالات در T_s یک عملیه binary بوده و علاوه برآن:

(1) . برای تمام $\alpha,\beta,\gamma\in T_s$ ما داریم: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=$ ______ ،

(2) . یک انتقال قابل تحویل I در T_s موجود است طوریکه: ______ میشود،

(3) . برای هر $\alpha\in T_s$ یک $\alpha^{-1}\in T_s$ موجود است طوریکه: ______ میشود.

(4) . بنابرآن T_s یک ______ را تحت عملیه ضرب انتقالات تشکیل میدهد.

حل: (1) . $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ ، (2) . $\alpha\cdot I=I\cdot\alpha=\alpha$
(3) . $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\cdot\alpha=I$ ، (4) . Group

1071 . تعریف: اگر ست G تحت عملیه binary "*" یک Group باشد، در صورتیکه عملیه "*" تبدیلی Commutative نیز باشد، پس G

پس G بنام گروه تبدیلی Commutative Group ویا گروه آبلیین Abelian Group یاد میشود. آیا گروه انتقالات یک کد set تبدیلی Commutative میباشد ______ ؟

حل: نخیر! زیرا: ما دیدیم که عملیه ضرب انتقالات «°» تبدیلی نیست.

1072 . اگر S، کد set اعداد تام باشد، که تحت عملیه جمع «+» یک Group را تشکیل میدهد، طوریکه: برای $\forall a, b \in S$ رابطهٔ: $a+b=b+a$ همیشه دارای حقیقت است. پس کد تحت عملیه «+» یک گروه ______ ویا ______ را تشکیل میدهد.

حل: تبدیلی (Commutative) ویا Abelian Group

1073. تا به این قسمت پروگرام، ما گروه انتقال یکعده set کد های مشخص را مطالعه نموده ایم. اگر به Panel-7 مراجعه شود دیده میشود که: $S=\{1,2,3\}$ کد توجه و هر پرمیوتیشن (Permutation) درجه 4 یک انتقال قابل تحویل در کد است. از طرف دیگر ما ثابت نمودیم که یک set T_S انتقالات قابل تحویل تحت عملیه ضرب انتقالات «°» یک Group را میسازد. ازین فوراً نتیجه شده میتوانند که تمام set، پرمیوتیشن های درجه 4 تحت عملیه ضرب پرمیوتیشن S permutation multiplicat. نیز Group را تشکیل میدهند.

بملاحظه از Panel-7: (1). کدام پرمیوتیشن انتقال عینیت Identity را تحت عملیه ضرب پرمیوتیشن ها بوجود می آورد؟

در (2). کدام پرمیوتیشن عبارت از b^{-1} میشود؟

حل: (1). a ، (2). c

VI. امتحان وتکرار قسمت سوم:

Review Test for Part Three

1. اگر تحت عملیهٔ binary "$*$" ، G یک Group بوده در صورتیکه $a, b \in G$ باشد، پس ثابت کنید که معادله: $a * x = b$ دارای یک حل یگانه در G میباشد.

2. اگر G تحت عملیهٔ binary "$*$" یک Group را تشکیل دهد، در صورتیکه $a, b \in G$ باشد، ثابت کنید که معکوس (inverse) $a * b$ عبارت از: $b^{-1} * a^{-1}$ [نه: $(a*b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$] میباشد.

3. اگر $T = \{A, B, C, D\}$ بوده در حالیکه $A = \{0, 1\}$ و $B = \{0\}$ و $C = \{1\}$ و $D = \phi$ باشد، (که درینصورت T عبارت از مجموعهٔ کلی تمام subsetهای $A = \{0, 1\}$ میباشد.) در صورتیکه $R, S \in T$ باشند و $R - S$ را توسط افاده ذیل تعریف کنیم:

$$R - S = \{x \mid x \in R \text{ و } x \notin S\}$$

تصور کنید که عملیهٔ "$-$" یک عملیهٔ binary در T میباشد؛ اما ثابت کنید که عملیهٔ "$-$" خاصیت تبدیلی commutative نیست.

4. در یک Group G اگر $x * a = x * b$ باشد، ثابت کنید که $a = b$ است.

5. اگر $S = \{5, 6, 7, 8\}$ بوده و عملیهٔ "$\odot$" binary مربوطهٔ آن طبق جدول مقابل تعریف شده است.

$\odot$	5	6	7	8
5	8	5	6	7
6	5	6	7	8
7	6	7	8	5
8	7	8	5	6

(ا). فرضاً "$\odot$" ، انجمنی associative باشد، آیا G تحت "$\odot$" یک Group را تشکیل داده میتواند؟ دلیل چه؟

(2). عنصر عینیت identity درین مسأله کدام است؟

(3). عنصر γ^{-1} درین جدول کدام است؟

6. فرضاً N عبارت از ست اعداد تام مثبت باشد، و $\alpha: N \to N$ یک mapping است که قرار ذیل تعریف گردیده است:-

برای تمام $n \in N$، چنین که :- $(n)\alpha = 3n$ است.

(1). آیا حقیقتاً α یک mapping از N into N بوده میتواند؟
اگر نمیتواند چرا؟

(2). آیا α یک mapping از N onto N بوده میتواند؟
اگر نمیتواند چرا؟

(3). آیا α یک mapping 1-1 از N به N میباشد؟ اگر نمیباشد چرا؟

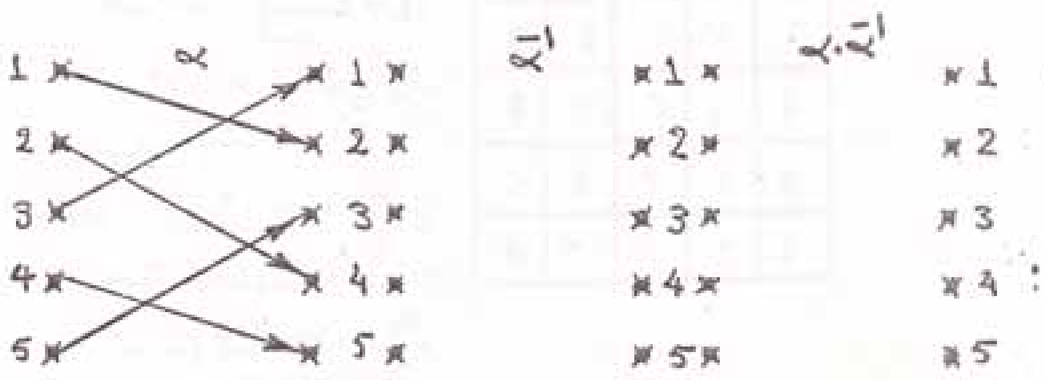
7. فرضاً $S=\{1, 2, 3, 4\}$ و $\alpha=\{(1,2),(2,2),(3,4),(4,4)\}$
و $\beta=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$
و $\gamma=\{(1,1),(2,3),(3,4),(4,2)\}$

انتقالات S باشند طوریکه mapping آن بقسم جوره مرتب ارائه شده است. بطور مثال: $(3)\gamma = 4$ و $(1)\alpha = 2$ وغیره...

(1). کدام ازین mapping ها قابل تحویل reversible است؟

(2). درصورت موجودیت β^{-1} را تعیین کنید.

8. فرضاً α یک انتقال قابل تحویل reversible transformation باشد پس درینصورت α^{-1} نیز یک انتقال قابل تحویل میباشد. تیوری با قیاس دیاگرام ذیل را تکمیل کنید:-



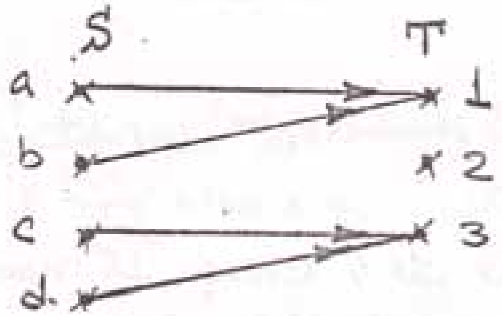
۹. فرضاً S، ست اعداد تام بوده و
$\alpha: x \to 2x+3$ و $\beta: x \to x-4$ برای تمام $x \in S$
دو انتقالات S باشند. بالفرض $\alpha \circ \beta$ و $\beta \circ \alpha$ نیز
انتقالات S باشند:

(1). $\alpha \circ \beta (4)$ را بدست آرید.

(2). $\beta \circ \alpha (4)$ را بدست آرید.

(3). با شناس دو جواب دو جز فوق راجع به حاصل ضرب انتقال چه فکر میکنید؟

10. اگر یک mapping α طبق دیاگرام ذیل تعریف شود:



(1). آیا α یک mapping از S در T میباشد؟
آیا α یک mapping از S به T میباشد؟

(2). آیا α یک mapping "1-1" شده میتواند؟

(3). آیا α^{-1} یک mapping از S در T شده میتواند؟
اگر شده نمیتواند چرا؟

قسمت چهارم

Part Four

ساحه ها

Fields

ما میدانیم که set اعداد حقیقی Real Numbers تحت عملیه جمع معمولی "+" یک Group را تشکیل داده و نیز set اعداد حقیقی غیر صفر nonzero real numbers یک Group را تحت عملیه ضرب معمولی "·" بوجود می آورد. ازین معلوم میشود که set اعداد حقیقی Reals در ساختمان جبری خویش نظر به یک set ای که محض تحت یک عملیه binary یک Group را میسازد بمراتب غنی تر است. زیرا set اعداد حقیقی تقریباً تحت دو عملیه binary یک Group را تشکیل داده میتواند. مطالعه هر کتاب الجبره بسیط واضح میسازد که حل عده زیاد مسائل اشتمال هر دو عملیه را ایجاب میکند. علاوه بران شما خواهید دید که در set اعداد حقیقی Reals درین دو عملیه روابط داخلی internal relations موجود است.

درین قسمت کتاب ما یک ساختمان جبری را که بنام ساحه "Field" موسوم است مورد مطالعه قرار میدهیم. ساختمان جبری ساحه "Field" دارای دو عملیه binary بوده و یک set اصول متعارفات

References مآخذها:

1. Adler, Irving: The New Methematics, The John Day Company, Inc., New York, 1958.

2. Allendoerfer, C. B., and C. O. Oakly: Principles of Mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.

3. Andree, R. V.: Selections from Modern Abstract Algebra, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1958.

4. Baumlag, B., and B. Chandler: Theory And Problems of Group Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1968.

5. Earl, B., J. William Moore, and W. I. Smith: Groups And Fields A Programmed Unit in Modern Mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.

6. Eves, Howard, and C. V. New Som: An Introduction to The Foundations And Fundamental Concepts of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1958.

ادامه ماخذها:

7. Felix, Lucien: The Modern Aspects of Mathematics, Basic Books, Inc., New York, 1960.

8. School Mathematics Study Group: Mathematics for High School: Intermediate Mathematics Part II, rev. ed. Yale University Press, New Haven, Conn., 1961.

9. Stoll, R. R.: Sets, Logic, and Axiomatic Theories, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1961.

10. Weiss, Marie: Higher Algebra for the Undergraduate, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

Additional References for Some of The Major Applications of Theory of Groups And Fields

مأخذهای :- تطبیقات مهم گروه‌ها در فزیک

A. CRYSTALLOGRAPHY AND SOLID STATE PHYSICS:

Crystals are classified according to their symmetries which are properly described in the language of Group Theory. Groups relevant to crystallography (point groups) are discrete.

References:

1. Lax, Melvin: Symmetry Principles in Solid State Physics, (Revised ed.), Murray Hill, Bell-Telephone, Labs. Inc., New Jersey, 1967.

2. Hammermesh, Morton: Group Theory And Its Application to Physical Problems, Addison-Wesley, Reading Mass, 1962.

3. Murnaghan: Theory of Group Representations, Dover, New York, 1963.

4. Weyl, Hermenn : Symmetry, University Press, New Jersey, 1952.

B. MECHANICS AND RELATIVITY:

The fundamental principle of Relativity is formulated in terms of the Lorentz and the Poincaré groups.

References:

1. Aharoni, J. : The Special Theory of Relativity, Clarendon Press, Oxford, 1959.

2. De Witt, Bryce : Relativity, Groups, And Topology, Gordon & Breach, New York, 1964.

3. Gel'Fand, Minlos, and Z. Ya Shapiro: Representation of Rotation And Lorentz Groups And Their Applications Pergamon, Oxford, 1963.

4. Naimark, M.: Linear Representitions of The Lorentz Group, Pergamon, London, 1964.

C. QUANTUM MECHANICS & SPECTROSCOPY:

An invariance principle in Quantum Mechanics demands that the physical states should transform according to the irreducible representations of the corresponding transformation group. So the Group Theory is essential in classifying the states and spectroscopic energy levels.

References:

1. Eyring, Walter, and Kimball: Quantum Chemistry, Wiley, New York, 1963.

2. Mackey, G. W.: Induced Representations of Groups And Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1968.

3. Tinkham, Michael: Group Theory And Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1964.

4. Weyl, Hermann: The Theory of Groups & Quantum Mechanics, Dover, New York, 1950.

5. Wigner, E. P.: Group Theory And Its Application to The Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press, New York, 1959.

6. Ziman, J. F.: Elements of Advanced Quantum Theory, The University Press, Cambridge, 1969.

D. PARTICLE PHYSICS:

The higher symmetry approach can be formulated only through theory of groups. The most successful application is the SU(3) theory. Use of higher groups has followed.

" Group theory has found extremely important applications in modern physics. In the Theory of Relativity the Lorentz group and the Poincaré group have played the fundamental role. Most recently attempts have been made to study the General Theory of Relativity as a gauge invariant field theory bringing out the SL(2C) gauge invariance as earilier shown by Weyl and generalising it to invariance under SL(6C). In this way through group theoretic studies the language of General Relativity has been made familiar to particle physicists."*

* Professor Abdus Salam, IC/73/28

References:

1. Barut, A. O.: The Theory of The Scattering Matrix, The Macmillan Company, New York, 1967.

2. Dyson, F. J.: Symmetry Groups in Nuclear & Particle Physics, Benjamin, New York, 1966.

3. Gell-Mann, M., and Y. Neeman: The Eightfold Way, Benjamin, New York, 1964.

E. FOR APPLICATIONS OF THE THEORY OF ALGEBRS & FIELDS:

References:

1. Emch : The Algebraic Methods in Statistical Mechanics And Quantum Theory, Intersciences, (Wiley) New York, 1972.

2. Mackey, G. W. : Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1963.

3. Varadarajan, V. : The Geometry of Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1963.

4. Wigner, Eugene : The Application of Group Theory to The Special Functions of Mathematical Physics, Princeton University, New Jersey, 1955.

5. Leech, J. W., and D. J. Newman : How to use Groups, Methuen and Co LTD, London, 1969.