ریاضیات معاصر

جلد دوم

منظومه ها و ساختمان های ریاضی

مؤلفین

دیپلوم تخصص ریاضیات
پوهنیار محمد امان نادری
اکادمی تربیه معلم

و

دیپلوم تخصص پیداگوژی
اتیان تریال
لیسه عالی استقلال

قوس سال ۱۳۵۵
کابل

از نشرات اکادمی تربیه معلم

1976

شناسنامه

به سلسلهٔ ریاضیات معاصر

جلد سوم

منظومه ها و ساختمان های ریاضی

مطابق مفردات پروگرام صنوف چهاردهٔ موسسات عالی تربیهٔ معلم

مؤلفان

پوهنمل محمد امان نادری

دیپارتمنت ریاضیات اکادمی تربیهٔ معلم

و

ایتیان ژیل

دیپارتمنت پیداکوژی لیسهٔ عالی استقلال

از نشرات اکادمی تربیهٔ معلم

1976 مسیحی برابر به قوس ۱۳۵۵ خورشیدی، کابل

نشر الکتریکی: بنیاد شاهمامه

www.shahmama.com

جولای ۲۰۱۶، هالند

پیشـــــــــگفتـــار

« زندگی جلوه ناموس تحـول باشــــد »
« هرکجا نیست تحول عدمش نام کنیــم »

عصـریکه ما در آن بسر می بریم عصر انقـلاب ساینس و تکنالوجی اســت • هر ملت در توسعه این انقـلاب باندازهٔ توانائی خویش سهیم اســت ۰ آنانیکـــه با این جریان براه نمی افتند انقلاقات تمدن ایشانرا نابود میسازد • سرعت انقلابات ساینس و تکنالوجی فوق العاده سریع است و بعقیده بعضـــی از دانشمندان سرعت انکشاف و توسعه علوم طوریست که در طی مدت کمتر از ده سال حجم کنونی علوم مضاعف میشود • ساینس زنده است ، بسرعت سرسام آوری در حالت نموه و انکشاف است • از یکطرف بطرف عالم بی نهایت بزرگ (کیهان) شاخ و پنجـه کشیده و از طرف دیگر بداخل عالم بی نهایت کوچک (ذره) ریشـه میدواند • هر آن رنگا رنگ جوانه زده مفاهیم و مفکوره های نوینی ثمر میدهد • توضیح و تشریح این مفاهیم و مفکوره های نوین بوجود یکزبان خیلی مؤجز و دقیق نیاز مند بوده و بهمین قسم تصنیف و دسته بندی آنها طرز تفکـــر مستدل و منطقی ایرا ایجاب میکند • حالانکـه یگانه زبانی که توسط آن مفاهیم قدیم و نوین ساینس تشریح وتفسیر شود و همچنان یگانه طریق مستدل و منطقی ایکـه با ساس آن این مفاهیم و مفکوره ها تصنیف و کلاسیفای و مودل بندی شده بتواند علم ریاضیات اســـت •

ریاضیات یکعلم زنده بوده و مانند ساینس در حالت نموه و انکشاف است • سرعت توسعه و انکشاف عالم ریاضیات از سرعت انکشاف ساینس سریعتر است • چون علم ریاضی در نموه و انکشاف علوم دیگر بحیث مادر مصروف خدمت است پس غرض

انکشافات داخلی خویش ازیکطرف و برای توسعه وانکشاف دیگرعلوم ازجانب دیگر به نموه سریعتر نیاز مند است . متکی با ین حقیقت در قرن بیست قلمرو ریاضیات از مفکوره های توانا و شگفت آور جدید غنی شده . این مفکوره های نوین نه محض غرض تخلیق و تقویه تصورات مورد علاقه واقع میشوند بلکه این مفکوره ها در رشته های ساینس (علوم) وتکنالوجی حتی در مطالعات علوم بشری HUMANISTIC STUDIES نیز مورد استفاده قرار گرفته اند . دامنه تطبیق ریاضیات معاصر با منطق ریاضی نه محض ساحات مختلفه فزیک وانجنیری را احتوا کرده بلکه مطالعات رشته های علوم دیگر از قبیل : پلان گذاری ، صنایع ، علم طب ، کیمیای مولیکولی ، فزیک حیاتی و سوسیولوجی SOCIOLOGY را نیز تحت الشعاع قرار داده وحتی در بررسی مسایل فلسفه و زبانشناسی نیز مورد استفاده قرار گرفته است .

ریاضیات نه محض طریقهٔ بررسی تیوری ونظریات شعبات مختلفه علوم دیگر بوده بلکه دانشمندان ریاضی درقلمرو خود ریاضیات نیز شعب جدید کشف و آنها را بسط وانکشاف داده اند که از آنجمله :

"AXIOMATIC ALGEBRA: ABSTRACT ALGEBRA; INCLUDING THE THEORY OF GROUPS, RINGS, FIELDS, AND VECTOR SPACES; COMBINATORIAL TOPOLOGY AND ALGEBRAIC TOPOLOGY; LATTICE THEORY; GENERAL THEORY OF SETS; THEORY OF LINEAR SPACES; TENSOR CALCULUS; AND EVEN METAMATHEMATICS"*

قابل تذکر است که من جمله شعبه آخیر الذکر آن مطالعات درباره علم ریاضیات بوده نه در داخل خود ریاضیات .

چون مفکوره های نوین وجدید غرفه ریاضیات عنعنوی را که در آن حساب الجبر وهندسه گنجانیده شده درهم شکسته است بنا بر آن طریقه بررسی کلاسیک ریاضیات رفته رفته عتیقه شده و از ارزش می افتند .

طوریکه یک فرد آگاه ویا یک معلم خوب بدانستن تحولات اجتماعی وروابط کلتوری خویش چه در سیاست و اقتصاد چه در آرت و هنر

---

* Lucienne Felix: THE MODERN ASPECTS OF MATHEMATICS, Science Editions, New York, 1961.

وجه در طرز تعبیر انسان از دنیای ماحولش نیازمند است ؛ بهمان قسم ضروریست
تا موصوف از تحولات و انکشافات مهمی که در علوم (ساینس) بوجود می آید
بی خبر نبوده و باید که با تعقیب آنها همیشه تماس فکری داشته باشد .
دوره های آینده اقوامی دنیا را رهبری خواهند کرد که اوشان در تعبیر ساینس
ودر استعمال آن از دیگران سبقت کنند . حالانکه اساس تمام علوم (ساینس) را ریاضیات
منبسط و انکشاف یافته تشکیل میدهد ؛ چه بسا تحقیق وتدقیق درعالم مجهولات
باساس مودل های ریاضی رهبری میشود .

چون در ممالک پیشرفته پیشرفت علوم وتکنالوجی اکثراً توسط موسسات خاص
رهبری شده ولی در ممالک رو به انکشاف مهد انکشاف وپرورش علوم آغوش معارف
آنهاست . متکی باین حقیقت دولت جمهوری افغانستان که یکی از مرامهای عالی آن
پخش وگسترش دانش درکشور است وجود یک ریفورم عمیق و بنیادی ایرا که در پرتو آن
فرزندان معارف از دانش معاصر امروزی برخوردار بوده وضمناً از تطبیق موثر ساینس در
بهبود صنعت وحرفه درکشور بوجه احسن استفاده شده بتواند ؛ درمعارف لازمی
پنداشت . ریاضیات نیز مانند دیگر مضامین از تاثیر تحول این ریفورم بی بهره
نمانده چنانچه درسال گذشته مجلس متشکل از متخصصین داخلی وخارجی علم ریاضی
ویکعده از روٌسای محترم معارف تحت ریاست شاغلی محترم میرعبد الفتاح صدیق
معین اول دائر ودر آن تصمیم اتخاذ شد تا ریاضیات معاصر در پروگرام جدید معارف
شامل گردد . باثر هدایت شاغلی محترم صاحب معین اول معارف اینجانب وپروفیسور ایتیان ژیل
امر دفتر پیداگوژی واستاد ریاضیات لیسه عالی استقلال موظف شدیم تا درزمینه
یک سلسله کتب تحریر ودسترس شایقان علم ومعرفت قرار دهیم .

مسرت دارم که به تعقیب جلد اول کتب سلسله ریاضیات معاصر آنسه برای بار
اول درسال گذشته توسط دستگاه نشراتی لیسه عالی استقلال تحت عنوان

ستها و استعمال آنها ، بطبع رسیده است) اینک فرصت یافتیم تا جلد سوم آنرا نیز تحت عنوان : منظومه ها و ساختمان های ریاضی ، تکمیل و برای بار اول بدستگاه نشراتی موسسه عالی اکادمی تربیه معلم به نشر میسپاریم .

این کتاب در چهار فصل ترتیب و محتویات آنرا موضوعات معاصر : عملیات دوگانه ای - عملیات داخلی - گروه ها - حلقه ها - ساحه ها - مشکلی ها فضای وکتوری ترکیبات و تطبیقات خطی که مطابق مفردات پروگرام صنوف چهارده موسسات عالی تربیه معلم بود تشکیل میدهد درنگارش آن سعی شده تا موضوعات بعبارات سلیس و روان توضیح شود . تعریفات مجرد چوکات گرفته شده ، در افاده یک موضوع بزبان ریاضی از استعمال علایم و سمبولهای که بیشتر معمول اند استفاده شده و لست آنها در ورق جداگانه تحریر و در صفحه (۱۲۸) کتاب جا داده شده است . غرض پیدا کردن یک موضوع و جلوگیری از ضیاع وقت فهرست عناوین در ابتدای کتاب قرار داده شده است . علاوه بر آن لغات انگلیسی و فرانسوی که درین اثر بحیث اصطلاحات علمی بکار رفته با معنی دری آنها در اوراق جداگانه تنظیم و به صفحات (۱۲۹ و ۱۳۰) در اخیر کتاب جا داده شده است .

درینجا وظیفه خود میدانیم تا از تمام ذوات محترمیکه مارا درین زمینه تشویق و مساعدت نموده اند بصورت عام و از شاغلی محترم میرعبدالفتاح صدیق معین صاحب اول معارف که بدون هدایت شان این اثر بوجود آمده نمیتوانست بصورت خاص اظهار امتنان نمایم .

همچنان از شاغلی محترم پاینده محمد رئیس موسسات عالی تربیه معلم و شاغلی محترم امین الله امین مدیر اکادمی تربیه معلم که در چاپ این اثر مساعدت نموده اند اظهار شکران مینمایم . بهمین قسم همکاریهای اعضای محترم شعبه نشراتی

اکادمی را که درزمینه مساعدت نموده اند بنگاه قدر نگریسته وازشاغلی محترم عبدالقهار تابیست وهمچنان از شاغلی محترم محمد نذیراستاد ریاضی عزیزالرحمن ومحمدظاهر همکاران شعبه ریاضیات اکادمی تربیه معلم که درپروف خوانی این اثر کمك نموده اند سپاسگذاریم .

بپاس اینکه پاره از وجیبه ملی ومسلکی خویش را ادا کرده این اثر را تحریر و امید وارم که مطالعه آن بحال طالبان علم ومعرفت مفید ثابت گردد .

درا خیر ازخوانندگان محترم خواهشمندیم تا مارا به اشتباهات و اغلاطی که حین مطالعه این اثر با آنها مواجه میشوند مطلع ساخته وممنون فرمایند ، تا درچاپ دوم از شیوع همچو اغلاط جلوگیری گردد .

پوهنمل محمد امان نادری
آمر دیپارتمنت ریاضیات موسسه عالی اکادمی تربیه معلم

کابل ــ قوس ۱۳۵۵

فهرست عناوین

عنوان	صفحه

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه

صفحه	عنوان

فصـــــل اول

عملیـات دوگانـــه ای

Binary Operations

۱ـ۱ • ارائـه عملیـات دوگانـــه ای

شما با چند ین عملیه ریاضی ازقبیـل : جمع (+) تفریـق (−) ضرب (·) وتقسیم (÷) آشنائی داریـد ، اکنون خواص بعضـــی ازین عملیات را درسِت (مجموعه) اعداد مطالعه مینمائیم •

مثـال اول • اگرعملیه جمع درست اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) مد نظرگرفته شـــود دیده میشود که حاصل جمع هردوعدد طبیعی یکعدد طبیعـــی اســـت • مثـــلاً : $2+5=7$ میشود • ازینجا بملاحظه میرسد که به دوعدد طبیعـــی 2 و 5 یکعدد طبیعی 7 مطابقت دارد • ازین نتیجه میشود که عملیـــه جمع در $\mathbb{N}$ یکرابطـه را بوجود می آورد ؛ طوریکه دران رابطه تصویر هران دوعدد طبیعی یکعدد طبیعی است • ما این رابطه را بشکل : $7 \xleftarrow{+} \widetilde{(2,5)}$ ارائـــه مینمائیـــم •

ازمثال فوق دیده میشود که $2 \in \mathbb{N}$ وهم $5 \in \mathbb{N}$ است ، ازینکـــه حاصل جمع انها یعنی $7 \in \mathbb{N}$ است بناً گفته میتوانیم کـــه : $(2,5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ اســـت •

با استفاده ازتعریف مطابقت عملیه جمع را در $\mathbb{N}$ طبق ذیل ارائه کرده میتوانیم :

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$$
$$(2,5) \xmapsto{+} 7$$
$$(x,y) \xmapsto{+} x+y$$

مثال دوم: اگرعملیه تفریق (−) را در $\mathbb{N}$ مد نظر بگیریم بملاحظه میرسد کهدر بعضی حالات حاصل تفریق دوعدد طبیعی یکعدد طبیعی نیست.

مثلاً : $2-5=-3$ میشود . درین مثال اگرچه $2\in\mathbb{N}$ وهم $5\in\mathbb{N}$ بوده ولی فرق انها یعنی $-3\notin\mathbb{N}$ میباشد .

پس دراینصورت میگوئیم که عملیه تفریق در $\mathbb{N}$ یک مطابقت را بوجود نمی آورد . ازینکه حاصل تفریق هرآن دوعدد طبیعی ($\mathbb{N}$) یکعدد تام ($\mathbb{I}$) میباشد پس ما میتوانیم بنویسیم :

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{-} \mathbb{I}$$
$$(2,5) \xmapsto{-} -3$$
$$(x;y) \xmapsto{-} x-y$$

اگر دقت شود دیده میشود که بنا بر عملیه تفریق تما ویر (x, y) و (y, x) ازهم متفاوت است و ازین نتیجه میشود که ترتیب مرکبه ها در جوره های : (x, y) و (y, x) حایز اهمیت است ۰ ازینرو توضیح مفکوره مطابقت فوق را با اساس مفکوره جوره مرتب (Ordered pairs) ارائه نمودیم ۰ نه اینکه با سایر مفکوره جوره بدون ترتیب ۰

مثال سوم : حال اگر اوسط گرفتن (اوسط گیری) حسابی را در $\mathbb{N}$ بحیث عملیه مورد مطالعه قرار دهیم دیده میشود که اوسط هر ان دو عدد سیت $\mathbb{N}$ یکعدد مربوط ست $\mathbb{N}$ نمیباشد ۰

مثلاً : اوسط دوعدد 4 و 5 طبیعی که عبارت از :

$\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$ میشود یکعدد طبیعی نیست ۰

یعنی : $\frac{9}{2} \notin \mathbb{N}$ میشود ۰ ازین نتیجه میشود که اوسط گیری در ست $\mathbb{N}$ یک مطابقت را بوجود نمی آورد ۰ اما اگر عملیه اوسط گیری در ست اعداد نسبتی ($\mathbb{Q}$) مورد مطالعه قرار داده شود دیده میشود که اوسط حسابی هر دو عدد نسبتی یکعدد نسبتی است ۰ یا بعبارت دیگر برای هر دو عدد a و b عنصر $\mathbb{Q}$ ، $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ میباشد ۰

پس ما مینویسیم :

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{اوسط گیری}} \mathbb{Q}$$

$$(4, 5) \xrightarrow{\text{اوسط گیری}} \frac{4+5}{2}$$

$$(x, y) \xrightarrow{\text{اوسط گیری}} \frac{x+y}{2}$$

درین مثال ترتیب جاهای مرکبه ها در داخل جوره مرتب شرط نیست چرا ؟

مثال چهارم ۰ اگر یک طول در یک عدد حقیقی ضرب شود یک طول حاصل میشود ۰

مثلاً : اگر یک طول ℓ را در 4 ضرب نمائیم یک طول 4ℓ حاصل میشود ۰

ازین نتیجه میشود که عملیه ضرب یک طول در ست اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) یک مطابقت را تولید مینمائید که ما انرا قرار ذیل نمایش داده میتوانیم :

برای هر عدد حقیقی a شامل $\mathbb{R}$ و هر طول ℓ شامل ست طول ها یعنی $\mathbb{L}$ ما داریم :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{L} \xrightarrow{\text{ضرب}} \mathbb{L}$$

$$(a, \ell) \longmapsto^{\text{ضرب}} a \cdot \ell$$

$$(4, 3\,Cm) \longmapsto^{\text{ضرب}} 12\,Cm$$

رابطه فوق توضیح مینمائید که اگر هر طول به هر عدد حقیقی ضرب شود در نتیجه یک طول حاصل میشود ۰

درصورتیکه ℓ یک طول مفروض باشد، آیا تصویر ($\sqrt{2}$ ، ℓ) یا $\sqrt{2}\cdot\ell$ را بدست آورده میتوانید ؟

مثال پنجم ۰ اگر عملیه ضرب در ست طول های یعنی $\mathbb{L}$ مد نظر گرفته شود دیده میشود که حاصلضرب دو طول یک طول نبوده بلکه یک مساحت است ۰

مثلاً : $3\,Cm$ ضرب $7\,Cm$ مساوی به $21\,Cm^2$ میشود ۰ درین صورت اگر ست مساحت ها را به $\mathbb{S}$ ارائه نمائیم ما میتوانیم بنویسیم :

$$\mathbb{L} \times \mathbb{L} \xrightarrow{\text{ضرب}} \mathbb{S}$$

$$(a, b) \longmapsto^{\text{ضرب}} a \times b$$

$$(3\,m, 5\,Cm) \longmapsto^{\text{ضرب}} 3\,m \times 5\,Cm = 300\,Cm \times 5\,Cm$$

$$= 1500\,Cm^2$$

از مطالعه امثال فوق عملیه دوگانه‌ای [1] را قرار ذیل بیان مینمائیم :

تعریف [1] : عملیه دوگانه‌ای عبارت ازیك مطابقت است طوریکه برای هر $a \in \mathbb{E}$ هر $b \in \mathbb{F}$ وهر $c \in \mathbb{G}$ رابطه :

$$\mathbb{E} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G}$$
$$(a, b) \longmapsto c$$

موجود گردد .

عملیه دوگانه‌ای را بنام قانون ترکیبیز یاد میکنند :

تعریف [2] : بنا بر تعریف اول درحالت خاص اگر $\mathbb{E} = \mathbb{F} = \mathbb{G}$ گردد عملیه مذکور بنام عملیه داخلی یاد میشود .

از مطالعه امثال فوق نتیجه میشود که عملیه جمع ($+$) در $\mathbb{N}$ (درمثال اول) یك عملیه داخلی بوده حالانکه عملیه تفریق در $\mathbb{N}$ (درمثال دوم) یك عملیه داخلی نیست ولی عملیه تفریق در $\mathbb{Z}$ یك عملیه داخلی است. همچنان ازمطالعه مثال سوم فهمیده میشود که عملیه اوسط‌گیری در $\mathbb{N}$ داخلی نبوده ولی در $\mathbb{Q}$ یك عملیه داخلی است. از بررسی مثال چهارم نتیجه میشود که عملیه ضرب دربین عناصر ستهای $\mathbb{R}$ و $\mathbb{L}$ یك عملیه داخلی نبوده بلکه یك عملیه خارجی است .

---

(1) . بعد ازین غرض اختصار ما بعوض کلمه ((عملیه دوگانه ای)) محض کلمه : ((عملیه)) را بکار می بریم .

اکنون ما در موقفی قرار داریم تا به تعریف عملیه خارجی طبق ذیل بپردازیم :

تعریف: یک عملیه وقتی خارجی گفته میشود که مطابقت : $E \times F \longrightarrow F$ را بوجود آورد ·

در ریاضیات ست E مطابقت فوق را بصورت معمول ست اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) تشکیل میدهد ·

از مطالعه مثال چهارم برمی آید که عملیه ضرب طول در عدد حقیقی یک عملیه خارجی است · عملیه ضرب در مثال پنجم وهمچنان عملیه تفریق در مثال دوم نه عملیه داخلی است ونه عملیه خارجی ·

مثال ششم · اگر عملیه $*$ را در هندسه تعین نقطه وسطی دو نقطه تعریف کنیم در ینصورت $A * B$ نقطه وسطی A و B را ارائه میکند ·

چون هر نقطه ست A و B نقاط فضا دارای یک نقطه وسطی است بنا بران گفته میتوانیم که عملیه $*$ در ست نقاط فضا یک عملیه داخلی است ·

2-1. خواص عملیه داخلی

اول خاصیت انجمنی (اشتراکی Associativity)

تعریف 4: یک عملیه داخلی $*$ در یک ست E از خاصیت انجمنی پیروی میکند در صورتیکه برای تمام a شامل E برای تمام b شامل E و $\forall c \in E$ رابطه: $(a * b) * c = a * (b * c)$ را تحقیق کند.

مثال اول. اگر عملیه جمع در ست اعداد $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته شود دیده میشود که عملیه جمع در $\mathbb{R}$ یک عملیه داخلی بوده (شرکت پذیری) پیروی می کند.

زیرا: برای هر عدد a، b و c مربوط $\mathbb{R}$ رابطه: $(a+b)+c = a+(b+c)$ همیشه حقیقت دارد.

آیا فهمیده می توانید که عملیه جمع در ست های فرعی $\mathbb{R}$ یعنی: در $\mathbb{N}$، $\mathbb{I}$ و $\mathbb{Q}$ نیز یک عملیه داخلی بوده و از خاصیت انجمنی پیروی میکند؟

مثال دوم: اگرعملیه تفریق (−) درست $\mathbb{Z}$ مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که عملیه تفریق درست $\mathbb{Z}$ داخلی بوده ولی از خاصیت انجمنی پیروی نمیکند.

زیرا : برای هرعدد a ، b و c شامل ست $\mathbb{Z}$ را بطه : $(a-b)-c=a-(b-c)$ همیشه تحقیق پذیر نیست.

را جع به عملیه تفریق در $\mathbb{N}$ چه فکر میکنید؟

مثال سوم: اگرعملیه ضرب (.) درست $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته شود بملاحظه میرسد که عملیه ضرب در $\mathbb{R}$ داخلی بوده وازخاصیت انجمنی نیز پیروی می نماید.

زیرا : برای هرعدد a ، b و c شامل $\mathbb{R}$ را بطه : $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ همیشه حقیقت دارد. شما را جع به عملیه ضرب (.) درست های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ چه فکر میکنید؟

مثال چهارم: اگرعملیه تقسیم (÷) در $\mathbb{R}$ مورد مطالعه قرارداده شود مشاهده شود که (÷) در $\mathbb{R}$ یک عملیه داخلی نیست چرا؟
ولی اگر عملیه تقسیم در $\mathbb{R}_* = \mathbb{R}-\{0\}$ مورد بررسی قرارگیرد دیده میشود که عملیه تقسیم (÷) در $\mathbb{R}_*$ یک عملیه داخلی بوده ولی از خاصیت انجمنی پیروی نمیکند.

زیرا : برای هرعدد a ، b و c شامل $\mathbb{R}_*$ را بطه : $(a\div b)\div c = a\div(b\div c)$ همیشه جایز حقیقت نیست.

شما راجع به عملیه تقسیم ($\div$) در ست های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{I}$ و $\mathbb{Q}$ چه فکر میکنید ؟

مثال پنجم • اگر اوسط گیری را به $\oplus$ نشان داده و انرا در ست $\mathbb{R}$ مورد مطالعه قرار دهیم دیده میشود که $\oplus$ در $\mathbb{R}$ یك عملیه داخلی بوده و از خاصیت انجمنی پیروی نمیکند •

زیرا : برای تمام اعداد a ، b و c شامل $\mathbb{R}$ را بطه :

$(a \oplus b) \oplus c^{(1)} = a \oplus (b \oplus c)$ همیشه جایز حقیقت نیست •

بطور مثال • $(4 \oplus 6) \oplus 8 \neq 4 \oplus (6 \oplus 8)$ •

زیرا :

$$\begin{aligned}(4 \oplus 6) \oplus 8 &= \frac{4+6}{2} \oplus 8 \\ &= 5 \oplus 8 \\ &= \frac{5+8}{2} = 6,5\end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned}4 \oplus (6 \oplus 8) &= 4 \oplus \frac{6+8}{2} \\ &= 4 \oplus 7 \\ &= \frac{4+7}{2} \\ &= 5,5\end{aligned}$$

لذا :

مثال ششم • اگر بزرگترین قاسم مشترك دو عدد a و b را به $a \wedge b$

---

(۱) چنین خوانده میشود که a اوسط گیری b سپس نتیجه ان اوسط گیری با c .

نوت : برای استفاده مو ثر بهتر است که مثال هفتم قبل ازمثال ششم خوانده شود •

ارائـــه نمائیم در ینصورت بملاحظه میرسد که عملیه در یافتن بزرگترین قاسم مشتـــر ک

در $\mathbb{N}$ یک عملیه داخلی بوده وازخاصیت انجمنی نیز پیروی میکند ٠

زیـــرا : میدانیم که ست قاسم های مشترک دوعدد a و b عبارت است از :

$$D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$$

بطـــور مثـــال ٠ بزرگترین قاسم مشترک دوعدد 12 و 18 عبارت از 6 میباشد ٠

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$
$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
$$D_{18} \cap D_{12} = \{1, 2, 3, 6\}$$
$$= D_6$$

پس $$D_{18} \cap D_{12} = D_{18 \wedge 12}$$

اکنون ثبوت می نمائیم که برای هرعدد a ، b و c شامل $\mathbb{N}$ را بطـــــه:

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ همیشه صایز حقیقت اســـت ٠

فرض رسیدن باین هدف ست قاسم های $(a \wedge b) \wedge c$ و ست های قاسم های $a \wedge (b \wedge c)$

را باهم مقایسه مینمائیـــــم ٠

ما داریـــم :

$$D_{(a \wedge b) \wedge c} = D_{(a \wedge b)} \cap D_c$$
$$= (D_a \cap D_b) \cap D_c$$
$$= D_a \cap (D_b \cap D_c) \quad \text{- - -} \quad (\text{قرار مثال مقدم})$$
$$= D_a \cap (D_{b \wedge c})$$
$$= D_{a \wedge (b \wedge c)}$$

ویا $$D_{(a \wedge b) \wedge c} = D_{a \wedge (b \wedge c)} \quad \text{- - - -}$$

پس $$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

نشان دهید که عملیه گرفتن کوچکترین ضرب مشترک دو عدد a و b (که آنرا به $a \vee b$ ارائه مینمائیم) ، در ست $\mathbb{N}$ یک عملیه داخلی بوده واز خاصیت انجمنی نیزپیروی میکند ٠

مثال هفتم ٠ عملیه تقاطع « $\cap$ » در ست تمام ستهای فرعی یک ست E داخلی بوده واز خاصیت انجمنی نیزپیروی مینماید ٠ ثبوت این حقیقت در صفحه (۷٦) جلد اول کتاب ریاضیات معاصر ارائه شده است ٠

بهمین قسم در صفحه (٦٢) کتاب مذکور نشان داده شده است که عملیه اتحاد « $\cup$ » نیز در بین ستهای فرعی یک ست یک عملیه داخلی بوده واز خاصیت انجمنی پیروی میکند ٠

دوم ٠ خاصیت موجودیت عنصر بی تاثیر (عینیت) Identity Element

یک ست E ویک عملیه داخلی $*$ را در E مد نظر گرفته یک عنصر e شامل E عنصر بی تاثیر (عینیت) نامیده میشود در صورتیکه برای هر عنصر a شامل E رابطه : $a * e = e * a = a$ همیشه حایز حقیقت است ٠

مثال اول ٠ $0 \in \mathbb{Z}$ عنصر بی تاثیر عملیه « $+$ » در $\mathbb{Z}$ است ٠

زیرا برای هر عدد a شامل $\mathbb{Z}$ رابطه : $a + 0 = 0 + a = a$ همیشه حقیقت دارد ٠

$0 \in \mathbb{Z}$ عنصر بی تاثیر عملیه « $-$ » در $\mathbb{Z}$ نیست چرا ؟

مثال دوم • $1 \in \mathbb{I}$ عنصر بی تاثیرعملیه « • » در $\mathbb{I}$ است •

زیرا : برای هرعدد a شامل $\mathbb{I}$ را بطه :

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ همیشه حقیقت دارد •

$1 \in \mathbb{I}$ عنصر بی تاثیرعملیه « ÷ » در $\mathbb{I}$ نمیبا شد چرا ؟

مثال سوم • اگرعملیه اوسط گیری را درست $\mathbb{R}$ مدنظر گرفته وانرا به $\oplus$ نشان دهیم درینصورت یك عنصر ثابت $e \in \mathbb{R}$ را پیدا کرده نمیتوانیم که برای هرعدد a شامل $\mathbb{R}$ را بطه :

$a \oplus e = e \oplus a = a$ همیشه حایز حقیقت با شد •

بنا برآن کدام یك عنصر بی تاثیر نظار به عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}$ موجود نیست •

مثال چهارم • ست خالی ϕ عنصر بی تاثیرعملیه « $\cup$ » دربین ست های فرعی یك ست E است •

زیرا : برای هرست A ست فرعی E را بطه :

$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ همیشه دارای حقیقت است •

مثال پنجم • ست E عنصر بی تاثیرعملیه « $\cap$ » دربین ست های فرعی خودش (ست E) است • زیرا برای هر ست B ست فرعی E را بطه :

$B \cap E = E \cap B = B$ همیشه حقیقت دارد •

مثـــال ششم . عنصـــر بی تاثیر عملیه دریافت بزرگترین قاسم مشترک $\wedge$ درست $\mathbb{N}$ موجود نیســـت .

زیـــرا : مایك عدد ثابت e شامل $\mathbb{N}$ را پیدا کرده نمیتـوا نیـم که بـرای هرعدد a شامل $\mathbb{N}$ رابطـــه : $a \wedge e = e \wedge a = a$ همیشه حقیقت داشته باشـــد .

اما عدد $1 \in \mathbb{N}$ عنصـــر بی تا ثیرعملیه دریافت کوچکترین مضرب مشترک $\vee$ درست $\mathbb{N}$ میبا شـــد .

زیـــرا : برای و عدد a شامل $\mathbb{N}$ رابطـــــــــه :

$a \vee 1 = 1 \vee a = a$ همیشه حقیقـــت دارد .

موضوع را بررســـی کنیــــــد .

قضیـــه : <u>یگا نه گـــی عنصــــر بی تا ثیـــــر</u> :

نظر به یك عملیه داخلی دریك ست بیشتر از یك عنصربی تا ثیر موجود شـــده نمیتوانـــــد .

ثبـــوت : یك ست E ویك عملیه داخلی $*$ را در E مد نظرمیگیریم .

فرضاً نظر به عملیه $*$ دوعنصربی تا ثیر e و e' در E موجود گردند .

در ینصورت ما داریـــم : $e * e' = e' * e = e$

زیـــرا ، e' عنصربی تاثیردر E است .

همچنا ن : $e' * e = e * e' = e'$

زیـــرا : e عنصـر بی تا ثیـراسـت در E

بنا بران $e = e'$

مساوات اخیرارا ئه میکند که دوعنصر بی تا ثیر مختلف نظر به یك عملیـه داخلـی $*$ در E موجود شده نمیتوانـنـد .

سوم . خاصیت موجودیت عنا صـر تضـا د :

تعریف : یك ست E ویك عملیه داخلی $*$ را كه حاوی یك عنصر بـی تا ثیر e در E است مد نظرمی گیریم . اگـر برای دوعنصر $\acute{a}$ و a در E را بطـــــه :

$a * \acute{a} = \acute{a} * a = e$ موجـود گردد $\acute{a}$ و a

عناصرتضاد (Invers Element) یك دیگر نامیده میشوند كه درین صورت a تضاد $\acute{a}$ و $\acute{a}$ تضاد a نظـر به عملیـه $*$ در سـت E گفتـه میشـود .

مثال اول . اگرعملیه جمع (+) را درست $\mathbb{Z}$ مد نظربگیریم میدانیـم كه عملیه جمع در $\mathbb{Z}$ داخلی بوده فرضاً عنصر $0 \in \mathbb{Z}$ صفر عنصربی تا ثیر عملیـه جمـع در $\mathbb{Z}$ می باشـد . برای یك عدد فرضاً $5 \in \mathbb{Z}$ یك عدد -5 در $\mathbb{Z}$ موجود اسـت طـوریكـه :

$5 + (-5) = (-5) + 5 = 0$ میشـود .

درین مثال 5 و (-5) عناصرتضاد یك دیگرنظربه عملیه جمع در $\mathbb{Z}$ گفتـه میشود بصورت عموم برای هر عدد $a \in \mathbb{Z}$ یك عدد $-a$ در $\mathbb{Z}$ موجود اسـت

طوریکه را بطه : $a+(-a)=(-a)+a=0$ راتحقیق کند .
که درین صورت a و $(-a)$ عناصر تضاد یك دیگر نظر به عملیه جمع گفته میشود .
آیا گفته می توانید که عناصر تضاد صفر در $\mathbb{Z}$ کدام است .

مثال دوم . اگر در ست $\mathbb{Q}$ عملیه ضرب $(\cdot)$ را مد نظر گیریم به ملاحظه میرسد که ست $\mathbb{Q}$ دارای عنصر بی تاثیر عملیه ضرب $(\cdot)$ یعنی 1 بوده و ضمناً عملیه ضرب در $\mathbb{Q}$ یك عملیه داخلی است . برای یك عدد فرضاً 4 شامل $\mathbb{Q}$ یکعدد $\frac{1}{4}$ در $\mathbb{Q}$ موجود است طوریکه را بطه :

$$4\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

را همیشه صدق می کند پس 4 و $\frac{1}{4}$ تضاد (معکوس یکدیگر) نظر به عملیه ضرب $(\cdot)$ در $\mathbb{Q}$ میبا شد .

آیا میدانید که برای عنصر صفر شامل $\mathbb{Q}$ نظر به عملیه ضرب $(\cdot)$ عنصر تضاد آن در $\mathbb{Q}$ موجود نیست چرا ؟

مثال سوم . اگر عملیه اوسط گیری $(\oplus)$ در ست $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته شود دیده میشود که برای عملیه $(\oplus)$ در $\mathbb{R}$ تضاد برای کدام یك عنصر $\mathbb{R}$ موجود نیست . زیرا که برای عملیه $(\oplus)$ در $\mathbb{R}$ عنصر بی تاثیر وجود ندارد .

مثال چهارم : اگر $E=\{a,b,c,d,e\}$ وعملیه تقاطع دربین ست های فرعی E مد نظر گرفته شود میدانیم که E عنصر بی تاثیر عملیه تقاطع میباشد حال میخواهیم تضاد ست عنصر بی تاثیر عملیه $\cap$ میبا شد .

حال میخواهیم تضاد : $A' = \{a, b, c\}$ در بین ستهای فرعی E جستجو نموده وانرا به A' ارائه مینمائیم . درصورت موجودیت A' باید که $A \cap A' = A' \cap A = E$ گردد .

ولی ما کدام ست A' راکه ست فرعی E نیز باشد پیدا کرده نمیتوانیم که را بقطه فوق را تحقیق کند . بناً گفته میتوانیم که A دارای تضاد نظر به عملیه $\cap$ در E نمیباشد .

ازینکه هرست ، ست فرعی خود ش میباشد .

پس را بطه : $E \cap E = E$ همیشه دارای حقیقت است

درینصورت گفته میتوانیم که تضاد E نظر به عملیه $\cap$ عبارت از خود E میباشد .

مثال پنجم . اگرعملیه اتحاد ($\cup$) در بین ستهای فرعی E درمثال فوق مد نظر گرفته شود بملاحظه میرسد که Φ عنصر بی تاثیر عملیه $\cup$ است .

حال $A = \{a, b, c\}$ را مد نظر گرفته عنصر تضاد A را در ستهای فرعی E نظربه عملیه $\cup$ مطالعه نمائید .

علاوه بران نشان دهید که Φ تضاد Φ نظر به عملیه $\cup$ است

چهارم ・ خاصیت تبدیلی (تبادلوی) Commutativity

تعریف : یک عملیه داخلی $*$ در یک ست E دارای خاصیت تبدیلی (تبادلوی) گفته میشود در صورتیکه برای هر عنصر a ، b شامل E را بطه : $a * b = b * a$ همیشه تحقیق پذیر باشد ・

مثال اول ・ شما میدانید که :

عملیه جمع ($+$) در $\mathbb{R}$ دارای خاصیت تبدیلی است ・ هم چنان عملیه ضرب(・) در $\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند ・

مثال دوم ・ اگرعملیه تفریق ($-$) وتقسیم ($\div$) در $\mathbb{R}$ مد نظرگرفته شود دیده میشود که(a) عملیه تفریق در $\mathbb{R}$ ازخاصیت تبدیلی پیروی نمیکند ・

b) هم چنان عملیه تقسیم ($\div$) در $\mathbb{R}$ ازخاصیت تبدیلی پیروی نمیکند چرا ؟

مثال سوم ・ درصفحه (٦٣) جلد اول بملاحظه رسید که عملیه اتحاد ($\cup$) در بین ست های فرعی یک ست ازخاصیت تبدیلی پیروی میکند ・ وهم چنان درصفحه (٧٧) آن کتاب نشان داده شده است که عملیه تقاطع ($\cap$) در بین ستهای فرعی یک ست از خاصیت تبدیلی پیروی میکند ・

مثال چهارم・ اگرعملیه $*$ در $\mathbb{R}$ طوری تسریف شود که رابطه : $a * b = a^2 + ab + b^2$ را صدق کند

اکنون میخواهیم بدانیم که آیا عملیه $*$ در $\mathbb{R}$ دارای خاصیت تبدیلی میباشد ویا خیر؟

موضوع را برای قیمت های $a = 5$ و $b = 3$ مطالعه مینمائیم:

$$5 * 3 = 5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2 = 49$$

$$3 * 5 = 3^2 + 3 \cdot 5 + 5^2 = 49$$

بنا بران $5 * 3 = 3 * 5$ است .

درینجا ما از حل مثال فوق ادعا کرده نمیتوانیم که عملیه $*$
در $\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .
زیرا به قیمت های خصوصی a و b صحت را بطه فوق
نشان داده شده است .

برای عمومیت دادن حقیقت فوق ضرور است تا حالت عمومی را مطالعه
نمائیم : درینصورت ما داریم :

$$a * b = a^2 + ab + b^2$$
$$b * a = b^2 + ba + a^2$$

چون برای هر قیمت a و b شامل $\mathbb{R}$ رابطه :

$a^2 + ab + b^2 = b^2 + ba + a^2$ همیشه دارای حقیقت است .

لذا گفته میتوانیم که عملیه $*$ در $\mathbb{R}$ از خاصیت
تبدیلی پیروی میکند .

تا ثیـــــر خاصیت تبدیلـــی بالای خواص دیگر

هرگاه یک عملیه در یک ست دارای خاصیت تبدیلی باشد مطالعه روابـــط مربوط و جود عنصر بی تا ثیر و هم چنان مطالعه وجود عناصر تضاد دران آسانتـــر صورت میگیرد. مثلاً برای مطالعه صفر 0، بحیث عنصر بی تا ثیر عملیه جمـــع در $\mathbb{I}$ ازینکه عملیه جمع در $\mathbb{I}$ تبدیلی است پس کافیست که برای هر عـدد a شامل $\mathbb{I}$ صحت رابطه: $a+0=a$ را ایضاح نمائیـــم.

بصورت عموم اگر عملیه $*$ در ست E تبدیلی باشد e یکعنصر بی تاثیر این عملیه در E میباشد مشروط بر اینکه برای هر عنصـــر a شـامل E را بطـــه: $a*e=a$ را صدق کند.

هم چنان a و a' شامل E نظریه عملیه $*$ تضاد یکدیگر گفته میشوـــد درصورتیکه رابطــــه: $a*a'=e$ را صدق کند.

۳-۱. جـــدول عملیـــات

هر عملیه دریک شــی که عدد عناصـــر آن بی نهایت نباشـــد توسط یک جدول ارائـــه شده میتوانـــد.

بطــــور مثـــال: اگر در ســـت $E=\{-1,0,1\}$ عملیه ضرب $(\cdot)$ مد نظـــر گرفته شود، جـــدول عملیـــه ضـــرب

در ست E طبق ذیل ارائه شده میتوانند :

جدول اول

(۱)

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

مثال دوم . اگر در ست $F = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ عطیه بدست آوردن بزرگترین قاسم مشترک دو عدد را به $\wedge$ ارائه نمائیم ، درینصورت نتایج عطیه $\wedge$ در F توسط جدول ذیل توضیح شده میتواند :

جدول دوم ویا جدول عطیه $\wedge$ در ست F

$\wedge$	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	1	6	6
12	1	2	3	4	6	12

---

(۱) سمت تیر مخصوص راکه عطیه از ست عناصر مربوط ستون بالای ست عناصر مربوط سطر اجراء شده است نشان میدهد .

مثـــال سوم • اگرعملیه تقاطع ($\cap$) در بین ستهای فرعی ست $A=\{a,b\}$ مد نظر گرفته شود نتایج عملیه $\cap$ طبق جدول ذیل ارائـه شده میتواند :

جدول سوم یا جدول عملیه $\cap$ در

(d)

$\cap$	$\{a\}$	$\{b\}$	A	ϕ
$\{a\}$	$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$	ϕ
$\{b\}$	ϕ	$\{b\}$	$\{b\}$	ϕ
A	$\{a\}$	$\{b\}$	A	ϕ
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ

اکنون اگردر جدول مثال سوم فوق عمیق شویم بملاحظه میرسد که نتایج ـ عملیه $\cap$ درجدول نظربه قطراساسی آن (خط d) متناظراً قرار دارنـد واین بنا بردلیلی استکه عملیـه $\cap$ ازخاصیت تبدیلی پیروی میکنـــد •

این خاصیت را درمثال اول وهم چنان درمثال سوم فوق مـــــورد بررسی قرارد هیـــد •

تمــــــرینـــــات

۰۱ اگر یك عملیه $*$ دریك ست E دارای خاصیت انجمنی باشـــد ثبوت کنید که یکعنصـر a شامل E بیشتـــر از یك نظــــــیر ا د نمیـــداشته باشـــد •

۰۲ هرگاه یک مستوی P را بحیث ست نقاط و یک عملیه $*$ در مستوی P مد نظر گرفته شود طوریکه برای دو نقطه A و B شامل مستوی P؛ $A * B$ نقطه وسطی قطعه خط $\overline{AB}$ را ارائه کند نشان دهید که این عملیه :

(a) ۰ داخلی است۰

(b) ۰ از خاصیت انجمنی پیروی نمیکند ۰

(c) ۰ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند ۰

(d) ۰ عنصر بی تاثیر عملیه $*$ در P موجود نیست۰

۰۳ ست: $E = \{0, 1\}$ را با عملیه ضرب $(\cdot)$ در E مد نظر بگیرید

(a) ۰ بگوئید که آیا عملیه ضرب در E داخلی است؟ ویا خیر؟

(b) ۰ آیا عملیه $(\cdot)$ در E از خاصیت انجمنی پیروی میکند؟

(c) ۰ آیا عملیه $(\cdot)$ در E از خاصیت تبدیلی پیروی دارد؟

(d) ۰ آیا هر عنصر ست E دارای تضاد شده میتواند؟

تضاد صفر نظر به عملیه ضرب در E چیست؟

(e) ۰ جدول عملیه ضرب را در E ترتیب کنید ۰

۰۴ (a) ۰ آیا عملیه جمع درست اعداد تام جفت داخلی است؟ ویا خیر؟

(b) خواص : انجمنی، تبدیلی، موجودیت عنصر بی تاثیر موجود

عنصر تضاد هر عنصر این ست را نظر به عملیه جمع مطالعه کنید ۰

۰۵ اگر در ست $E = \{2, 4, 5, 6, 12\}$ عملیه گرفتن کوچکترین مضرب مشترک را به $\vee$ نشان دهیم در ینصورت :

(a). جدول عملیه $\vee$ را تشکیل دهید.

(b). آیا عملیه $\vee$ در E داخلی است و یا خیر؟ توضیح نمائید.

(c). اگر عملیه $\vee$ در E داخلی نباشد کدام عنصر از ست E حذف شود تا عملیه $\vee$ در E داخلی گردد.

۶. (a). جدول عملیه اتحاد را در بین ست های فرعی ست: $A = \{a, b, c\}$ تشکیل دهید.

(b) با ساس جدول بگوئید که:

(i) آیا عملیه $\cup$ در بین ست های فرعی A داخلی است و یا خیر؟

(ii) عنصر بی تاثیر عملیه $\cup$ کدام است؟

(iii) آیا عملیه $\cup$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند؟

(iv) آیا هر عنصر (ست فرعی A) دارای یک عنصر تناظر شده میتوانند؟

(v) برای تحقق خاصیت انجمنی عملیه $\cup$ بکمک جدول مرتبه مراجعه باید نمود.

۷. اگر در ست $\mathbb{R}$ عملیه $*$ توسط افاده: $a * b = a + b + ab$ تعریف شود.

(a). آیا عملیه $*$ در $\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند؟

(b). آیا عملیه $*$ در $\mathbb{R}$ از خاصیت انجمنی پیروی میکند؟

(c). عنصر بی تاثیر عملیه $*$ در $\mathbb{R}$ کدام است؟

(d). تضاد عدد 5 را نظر به $*$ در $\mathbb{R}$ دریافت کنید.

(e). کدام عدد حقیقی دارا عنصر تضاد عملیه $*$ در $\mathbb{R}$ نمیباشد.

۸. اگر در ست $\mathbb{N}$ عملیه $*$ توسط افاده :

$a * b = (a+2b)b$ تعریف شود.

(a). $1 * 2$ و هم چنان $2 * 3$ هکذا $3 * 2$ را حساب کند.

(b). آیا عملیه $*$ در $\mathbb{N}$ داخلی است و یا خیر؟

(c). آیا عملیه $*$ در $\mathbb{N}$:

(i). از خاصیت تبدیلی پیروی میکند؟

(ii). از خاصیت انجمنی پیروی میکند؟

(iii). دارای عنصر بی تاثیر میباشد و یا خیر؟

۹. اگر رابطه مطابقت یک یک (بایجکسیون) از E بطرف E در حالیکه $E=\{a, b\}$ است به B ارائه شده و عملیه ترکیب این روابط را به $\odot$ نشان دهیم در ینصورت :

(a). نتایج عملیه ترکیب $\odot$ را به اساس جدول ارائه نمائید.

(b). ایضاح نمائید که آیا عملیه $\odot$ در B داخلی است و یا خیر؟

(c)• بادر نظـــرداشت عطبـــه ⊙ خـــواص :

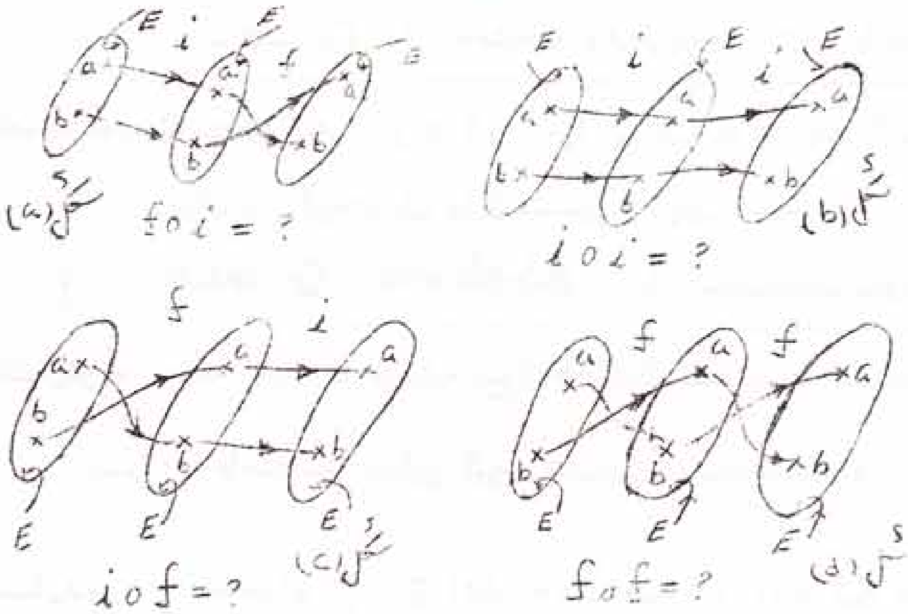
(i) انجمـــــــــی

(ii) تبدیلــــــــی

(iii) وجود عنصر بی تاثیر

(iv) وموجود یت عنصـــر تضاد هر عنصر را بررسی کنیـد •

کمك : ست B محض دارای دو عنصر بوده که این دو عنصـــر طبق اشکال ذیـــل ترکیب میشـــــود :



"At one time mathematicians felt groups were the key to secret of the universe, one can hardly blame them." W. W. Sawyer

فصل دوم

گروه . Group

2-1. تعریف : یک ست G نظر بیک عملیه $*$ گروه گفته میشود درصورتیکه :

1 . عملیه $*$ در G داخلی باشد .

2 . عملیه $*$ در G ازخاصیت انجمنی (اشتراکی) پیروی کند .

3 . G نظر به عملیه $*$ دارای یک عنصر بی تاثیر باشد .

و 4 . هر عنصر G نظر به عملیه $*$ دارای یک عنصر تناظر باشد .

تعریف : اگر یک عملیه $*$ در یک گروه G تبدیلی هم باشد گروه مذکور بنام گروه تبدیلی ویا گروه ابیلین Abelian Group یاد میشود .

مثال اول . ست $\mathbb{N}$ نظر به عملیه جمع ($+$) یک گروه نیست .

زیرا : خاصیت سوم ، چهارم گروه راتقض میکنند .

مثال دوم . ست اعداد تام ($\mathbb{Z}$) نظر به عملیه جمع ($+$) یک گروه تبدیلی است ولی نظر به عملیه ضرب ($\cdot$) یک گروه نیست چرا ؟ توضیح دهید .

مثال سوم . ست اعداد نسبتی $\mathbb{Q}$ نظر به عملیه جمع ($+$) یک گروه تبدیلی است موضوع را بررسی نمائید .

مثال چهارم • اگر ساختمان ست $\mathbb{Q}$ را نظر به عملیه ضرب (•) مطالعه نمائیم، بملاحظه میرسد که عنصر صفر شامل $\mathbb{Q}$ دارای عنصر تضاد (معکوس) عملیه ضرب نیست، بناءً $\mathbb{Q}$ نظر به عملیه ضرب یک ساختمان گروه را تشکیل نمیکند • ولی اگر عنصر صفر از $\mathbb{Q}$ حذف شود درینصورت: $\mathbb{Q}_* = \mathbb{Q} - \{0\}$ نظر به عملیه ضرب یک گروه تبدیلی میشود •

مثال پنجم • ست اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) نظر به عملیه جمع یک گروه است • بهمین قسم ست : $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} - \{0\}$ نظر به عملیه ضرب یک گروه نیز میشود • موضوع را بررسی نمائید •

مثال ششم • اگر عملیه ضرب (•) در ست $A = \{-1 , 1\}$ مد نظر گرفته شود دیده میشود که A نظر به عملیه ضرب یک گروه تبدیلی است •

زیرا : (1) عملیه ضرب در A داخلی است.

(2) عملیه ضرب در A از خاصیت انجمنی پیروی میکند •

(3) • 1 عنصر بی تاثیر عملیه ضرب در A است •

(4) هر عنصر 1 و -1 ست A دارای تضاد (معکوس) است •

(5) • عملیه ضرب در A از خاصیت تبدیلی پیروی میکند •

بناً ست A نظر به عملیه ضرب (·) یك گروه تبدیلی است .

اینك غرض سهولت مطالعه خواص فوق جدول ضرب در A را ذیلاً مینویسیم :

↗	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

مثال هفتم . هرگاه یك مثلث متساوي الاضلاع بدور نقطه تقاطع میانه هاي ان بیك جهت باندازه : 120°، 240°، 360° دوردادهشود واجرای این عملیه دوران توسط افاده $x \oplus y$ که تاثیر دوران x توسط دوران y تعقیب میشود ارائه گردد . درینصورت نتیجه دوران مثلث طبق جدول ذیل ارائه میشود :

↗ ⊕	120°	240°	360°
120°	240°	360°	120°
240°	360°	120°	240°
360°	120°	240°	360°

از مطالعه جدول فوق نتیجه میشود که عملیه دوران مثلث مذکور طبق شرایط فوق یك گروه تبدیلی است . موضوع را بررسی نمائید .

2.3. خواص گروه ها Properties of Groups

خاصیت اول . جزء (a) . عنصر بی تاثیر در یك گروه یگانه است

جزء (b) . هر عنصر کیفی یك گروه محض داراي یك عنصر تضاد میباشد وبس .

ثبوت : جز(a) را در صفحه ( ) مطالعه فرمائید .

جز(b) فرضاً یک عنصر x شامل گروه G نظر به عملیه $*$ دارای دو عنصر تضاد x' و x'' باشد . درینصورت ما داریم :

$$(x' * x) * x'' = x' * (x * x'')$$

ویا ..

$$e * x'' = x' * e$$

درنتیجه

$$x'' = x'$$

بنا براین هیچکدام یک عنصر x شامل گروه G دارای بیشتر ازیک تضاد شده نمیتواند .

<u>خاصیت دوم</u> . ویا خاصیت ساده ساختن : برای هرعنصر a، b و c شامل گروه G معادله : $a * b = a * c$ بشکل : $b = c$ ساده شده میتواند

ثبوت : چون هرعنصر a شامل گروه G دارای یک عنصر تضاد در G میباشد . پس اگر تضاد a را در G به a' نشان دهیم درینصورت ما داریم :

چون $a * b = a * c$

پس $a' * (a * b) = a' * (a * c)$

ویا $(a' * a) * b = (a' * a) *$ چرا ؟

ویا $e * b = e * c$ چرا ؟

درنتیجه $a * b = a * c \Rightarrow b = c$

تطبیق این خاصیت در الجبره :

(۱) ・ با اثر این خاصیت گروه افاده های جبری عملیه جمع ・

مانند : $a+x=a+y$

را بشکل : $x=y$ ساده کرده میتوانیم

(۲) ・ بنا براین خاصیت گروه افاده های جبری عملیه ضرب را در $\mathbb{R}_*$

از شکل : $a \cdot x = a \cdot y$

شکل : $x=y$ ساده نموده میتوانیم ・

خاصیت سوم ・ معادلات درجه اول (خطی) که شکل عمومی انها $a * x = b$

است در گروه دارای حل یگانه میباشد ・

ثبوت : چون هرعنصر گروه G دارای محض یک تضاد است پس

اگر عنصر تضاد a را به a' نمایش دهیم در صورت موجودیت x

میتوانیم بنویسیم که :

چون $a * x = b$

پس $a' * (a * x) = a' * b$

ویا $(a' * a) * x = a' * b$ (چرا ・)

ویا $e * x = a' * b$ (چرا ・)

ویا $x = a' * b$ (چرا ・)

چون a در G دارای محض یک تضاد (a') است

پس $a' * b$ یگانه است ・

اکنون نشان باید داد که $a'*b$ حل معادله مفروض است.

مادارم :
$$a*x=b$$

$$a*(a'*b)=(a'*a)*b$$

$$.....=e*b$$
چرا

$$.....=b$$
چرا

ازین نتیجه میشود که به قیمت x مساوی به $a'*b$ ، x موجود بوده و $a'*b$ یگانه حل معادله $a*x=b$ است.

تطبیق خاصیت سوم . با ستفاده ازین خاصیت گروه معادلات درجه اول (خطی) شکل (۱) $a+x=b$ را در $\mathbb{R}$ بشکل : $x=-a+b$ حل کرده میتوانیم . که درینجا $-a$ تضاد a بنابر عملیه جمع در $\mathbb{R}$ است .

بهمین قسم معادله (۲) $ax=b$ را با ثر تطبیق این خاصیت گروه در $\mathbb{R}_*$ بشکل : $x=\frac{1}{a}\cdot b$ حل کرده میتوانیم :
که درینجا $\frac{1}{a}$ تضاد (معکوس) a بنابرعملیه ضرب در $\mathbb{R}_*$ است.

تبصره : هر گاه یك ست بنا برعملیه دارای ساختمان گروه نباشد درینصورت معادلات درجه اول بشکل : $a*x=b$ درست مذکور یا دارای هیچ حل نبوده ویا دارای چندین حله شده میتوانند .

مثال اول ۰ اگر در ست $F = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ عملیه گرفتن بزرگترین قاسم مشترک دو عدد مورد مطالعه قرار داده شود در آن صورت

معادلهٔ : $6 \wedge x = 12$ دارای هیچکدام یک حل نبوده حالانکه

معادلهٔ : $6 \wedge x = 1$ دارای دو حل بوده و هم چنان

معادلهٔ : $1 \wedge x = 1$ دارای شش حل میباشد ۰

برای حل این مثال از جدول شماره (دوم) صفحه (۲۰) استفاده شود ۰

مثال دوم ۰ اگر عملیه تقاطع ($\cap$) در ست : $E=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\phi\}$ مد نظر گرفته شود، دیده میشود که E بنا بر عملیه $\cap$ یک گروه نیست ۰

زیرا : معادله : $\{b\}\cap X = \{a,b\}$ در E دارای حل نبوده ۰

وحالانکه معادله : $\{b\}\cap X = \phi$ دارای دو حل میباشد ۰

برای شرح این شکل از جدول شماره (سوم) صفحه (۲۱) استفاده گردد ۰

تمرینات :

۱۰ ثبوت کنید که تنها [illegible] یک عنصر در یک گروه خود همان عنصر است ۰

۲۰ ثبوت کنید که معادله : $x * a = b$ در یک گروه [illegible] یگانه است ۰

2-3 ۰ گروه های فرعی Subgroups

مثال اول ۰ اگر ست اعداد تام جفت را به $\mathbb{E}=\{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}$ نشان دهیم دیده میشود که ست $\mathbb{E}$ بنا بر عملیه جمع یک گروه را بوجود می آورد ۰

زیرا : (1) ۰ حاصل جمع هر دو عدد تام جفت یک عدد تام جفت است ۰

(2) ۰ برای هر عدد تام جفت a ، b و c رابطهٔ : $(a+b)+c = a+(b+c)$ همیشه حقیقت دارد ۰

(3) ۰ صفر (0) عنصر بی تاثیر عملیه جمع در $\mathbb{E}$ موجود است ۰

(4) ۰ برای هرعدد a شامل $\mathbb{E}$ یکعدد $-a$ در $\mathbb{E}$ وجود دارد که رابطه : $a+(-a)=(-a)+a=0$ را تحقیق کند ۰

پس $\mathbb{E}$ نظر به عملیه جمع یك گروه است ۰

از طرف دیگر ما میدانیم که ست اعداد تام ($\mathbb{Z}$) بنابر عملیه جمع (+) نیز یك گروه است ، ازینکه $\mathbb{E}$ یك ست فرعی $\mathbb{Z}$ است پس میگوئیم که گروه $\mathbb{E}$ گروه فرعی $\mathbb{Z}$ بنا برعملیه جمع است ۰

> **تعریف:** دوسیت S و T را مد نظر بگیرید طوریکه هردوسیت مذکور نظر به یك عملیه $*$ گروه ها بوده T گروه فرعی S نامیده میشود درصورتیکه سیت T سیت فرعی S باشد ۰

مثال دوم ۰ ست Q_* یك گروه فرعی ست $\mathbb{R}_*$ نظر به عملیه ضرب میباشد ۰

زیرا : (1) ۰ Q_* نظر به عملیه ضرب یك گروه است ۰

همچنان (2) ۰ $\mathbb{R}_*$ نظر به عملیه ضرب یك گروه است ۰

چون (3) ۰ $Q_* \subset \mathbb{R}_*$ است ۰

بنابران (4) ۰ Q_* یك گروه فرعی $\mathbb{R}_*$ است ۰

مثال سوم ۰ ست ضربهای 5 بنابر عملیه جمع یك گروه فرعی ست $\mathbb{Z}$ است ۰

زیرا : (1) ۰ اگرست ضربهای 5 را به $5\mathbb{Z}$ ارائه کنیم ثبوت میشود که $5\mathbb{Z}$ بنابرعملیه جمع یك گروه است :

(a) ۰ حاصل جمع هر دو عدد ضربهای 5 یکعدد ضرب 5 است ۰

بطـــــور مثال ، برای هر ان دو عدد a و b شامل $5\mathbb{Z}$ نوشته میتوانیم :

$$a = 5x$$
$$b = 5y$$

درحالیکـــه x و y شامل $\mathbb{Z}$ اند ، ازینجا ما داریــــم :

$$a + b = 5x + 5y$$
$$= 5(x + y)$$

ازینکه $x + y$ شامل $\mathbb{Z}$ است ، بنابراین $5(x+y)$ شامل $5\mathbb{Z}$ میبا شـــد .

(b). برای هر عدد a ، b و c شامل $5\mathbb{Z}$ را بطـــه :

$(a+b)+c = a+(b+c)$ همیشه دارای حقیقت است .

زیرا ازینکه را بطه فوق برای تمام عناصر ست $\mathbb{Z}$ حقیقت پذیر است ، پس بالضرور

برای ان عناصر $\mathbb{Z}$ که مضرب های 5 اند نیز دارای حقیقت میبا شـــــد .

(c). چون صفر (0) مضرب 5 بوده یعنی : $5 \cdot 0 = 0$ میشود ،

، پس ست $5\mathbb{Z}$ دارای عنصر بی تاثیر عملیه جمع نیز میبا شـــــد .

(d). برای هر عدد a شامل $5\mathbb{Z}$ یک عدد $-a$ شامل $5\mathbb{Z}$ موجود است طوریکه

صحت را بطــــه : $a + (-a) = (-a) + a = 0$ را تحقیق کند .

بنابران $5\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع یک گروه اســـــت .

(2) . ما میدانیم که ست $\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع یک گروه اســـت .

(3) . ازینکه $5\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ اســـت ،

(4) . بنا بران $5\mathbb{Z}$ یک گــــروه فرعـــــی $\mathbb{Z}$

نظر به عملیه جمـــع اســــــت .

تبصره : برای تشخیص وجود گروه فرعی یک گروه/جمعنجوئی در حود بیست سه خاصیت ذیل لازم است :

اول .	باید که عملیه مربوط در همان ست فرعی گروه داخلی باشد .
دوم .	باید که عنصر بی تاثیر شامل همان ست فرعی گروه باشد .
سوم .	تضاد هر عنصر ست فرعی گروه درخود ان ست موجود گردد .

بنابر تحقیق سه شرط در فوق این ست فرعی گروه مورد نظر یک گروه فرعی آن میباشد .

درینجا ضرور نیست که حقیقت خاصیت انجمنی در گروه فرعی مورد بررسی قرار داده شود .

زیرا : خاصیت انجمنی در سر تا سر ست گروه اصلی تحقیق پذیر بوده .

پس بصورت خود بخودی در ست فرعی آن نیز حکمفرما است .

بهمین قسم ضرور نیست که موجودیت عنصر بی تاثیر وهم چنان وجود عنصر تضاد یک عنصر ست مربوط گروه فرعی بررسی شود ، ولی لازم است که موقعیت انها در داخل گروه فرعی مورد تحقیق قرار داده شود .

تمرینات :

(1) . جدول عملیه * در $A=\{a, b, c\}$ ذیلاً داده شده است ، باساس جدول نشان دیده که A بنابر عملیه * یک گروه نیست .

*	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	c	a	b

۰ (2) اگر ازتاثیر عملیه $*$ در ست B جدول ذیل نتیجه شود نشان دهید که B نظر به عملیه $*$ یک گروه ابلیین است. (کمک: غرض سهولت حل مساله قبول شود که عملیه $*$ در B از خاصیت انجمنی پیروی میکند.)

$B=\{a,b,e\}$

$*$	a	b	e
a	b	e	a
b	e	a	b
e	a	b	e

۰ (3) جدول ذیل ازتاثیر عملیه $\odot$ در $R=\{R_0,R_1,R_2,R_3\}$ تشکیل گردیده است.

۰ (a) آیا R نظر به عملیه یک گروه میباشد؟ و یا خیر. توضیح نمائید.

$\odot$	R_0	R_1	R_2	R_3
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2

۰ (b) ثبوت کنید که $A=\{R_0,R_2\}$ یک گروه فرعی R است.

۰ (c) اگر R_1 دوران باندازهٔ 90 درجه به اطراف یک نقطه را ارائه کند، اندازه دوران های R_2، R_3 و R_0 را تعین کنید.

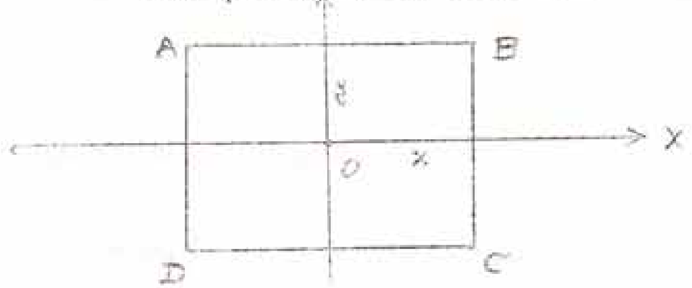
۰ (4) اگر از تاثیر عملیه $\otimes$ در $B=\{i,j,k,\ell\}$ جدول ذیل تاسیس شود، و با فرض عملیه $\otimes$ در B از خاصیت انجمنی پیروی کند درینصورت:

(a) نشان دهید که B بنابر عملیه $\otimes$ یک گروه تبدیلی (ابیلین) است.

$\otimes$	i	j	k	ℓ
i	i	j	k	ℓ
j	j	i	ℓ	k
k	k	ℓ	i	j
ℓ	ℓ	k	j	i

(b) . آن ست فرعی B را بدست آورید که بنا برعملیه $\odot$ یك گروه فرعی B باشد .

(c) . اگر در مستطیل $ABCD$ مانند شکل ذیل خط $\overleftrightarrow{X}$ و خط $\overleftrightarrow{Y}$ محورهای تناظر آن باشد ، درصورتیکه تاثیر f_1 تناظر را نظر به محور $\overleftrightarrow{Y}$ و تاثیر f_2 تناظر را نظر به محور $\overleftrightarrow{X}$ ارائه کند تاثیر f را معلوم کنید .



(d) . با درنظرداشت جزء (c) درفوق ساختمان جدول را بررسی کنید .

(5) . با ساس توضیح مثال سوم (اخیر الذکر) نشان دهید که برای هرعدد n شامل IN ست $\mathbb{I}_n$ یك گروه فرعی $\mathbb{I}$ نظر به عملیه جمع (+) است .

(6) . آیا ست اعداد تام طاق یك گروه فرعی $\mathbb{I}$ نظر به عملیه جمع شده میتوانند ؟ ویا خیر ؟ موضوع را بررسی کنید .

(7) . آیا ست $\mathbb{I}$ نظر به عملیه ضرب (٠) یك گروه فرعی Q^* میباشد ؟ ویا چطور ؟ موضوع را بررسی کنید .

(8) ایا ست $\mathbb{R}^{+}_{*}$ (ست اعداد حقیقی مثبت) نظر به عملیه ضرب یک گروه فرعی $\mathbb{R}_{*}$ میباشد ؟ ویا خیر؟ موضوع را تحقیق کنید .

(9) نشان دهید که $\mathbb{R}^{+}$ (ست اعداد حقیقی مثبت بشمول صفر) نظر به عملیه جمع یک گروه فرعی $\mathbb{R}$ نمیباشد .

(10) نشان دهید که ست $A=\{x \mid x=10^{n},\ n\in \mathbb{Z}\}$ یک گروه فرعی $\mathbb{R}_{*}$ نظر به عملیه ضرب میباشد .

(11) ایا ست $\{1,-1\}$ نظر به عملیه ضرب : (a) یک گروه فرعی $\mathbb{Q}_{*}$ شده میتواند ویاخیر (b) یک گروه فرعی $\mathbb{Z}$ شده میتواند ویاخیر؟

موضوع را تحقیق کنید .

(12) نشان دهید که $\{0\}$ نظر به عملیه جمع یک گروه فرعی $\mathbb{Z}$ است .

4-2. گروه وکتور های هندسی .

4-2-a. دونقطه ای ها

تعریف : اگر دونقطه A و B در فضاء مدنظر گرفته شود جوره مرتب A و B یعنی (A, B) را بنام دونقطه ای یاد میکنیم .

ازین معلوم میشود که اگر $A \neq B$ باشد ، $(A,B) \neq (B,A)$ میباشد .

برای اینکه ترتیب موقعیت A و B مراعات شود مادو نقطه ای A و B را توسط یک تیر طبق شکل (2-4-1) ارائه مینمائیم .

شکل (2-4-1)

تذکر باید نمود که تیر از A تا به B فاصله بین دو نقطه A و B را ارائه نکرده بلکه ترتیب موقعیت آنها را نشان میدهد .

اگر دو نقطه متمایز A و B را در فضا مدنظر بگیریم درینصورت چار جوره مرتب: (A , A) ، (A , B) ، (B , A) و (B , B) مختلف را تشکیل کرده میتوانیم . آیا میدانید که از سه نقطه متمایز A ، B و C فضا چند جوره مرتب تشکیل شده میتواند ؟ همه آنها را بنویسید .

تعریف: دو جوره مرتب (A , B) اگر A = B باشد دو نقطه ای A و B بنام دو نقطه ای صفری یا null یاد میشود .

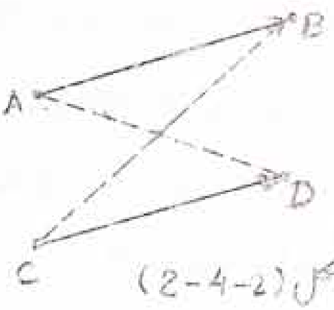
ط - 4 - 2 . دو نقطه ای های همطنند و یا معادل Equipollent

تعریف: دو دو نقطه ای (A , B) و (C , D) همطنند(1) Equipollent (معادل) گفته میشوند در صورتیکه قطعه خط های $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ مربوط (1) یک دیگر را تنصیف کنند .

یا بعبارت دیگر دو دو نقطه ای (A , B) و (C , D) اگر نقاط A و D را

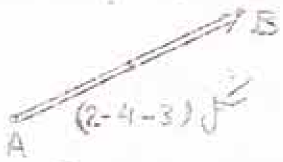
(1) . در اثر ان طبع ایران [illegible] اضافه شده

بحیث طرفین ؛ و نقاط B و C را بحیث و سطین مد نظر بگیریم در دونقطه‌ای
جسماً بی همانند قطعه خط های مربوط نقاط طرفین و وسطین یکدیگر را تنصیف میکند .
حقیقت این موضوع توسط شکل (2 - 4 - 2)
توضیح شده میتواند :
همانند بودن دو دو نقطه‌ای (A , B)
و (C , D) را چنین :
$(A,B) \upuparrows (C,D)$ ارائه مینمایند .

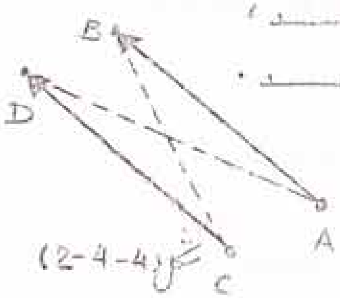

شکل (2-4-2)

2 - 4 - c . خواص رابطه همانندی بین دونقطه‌ای ها .

اول . خاصیت انعکاسی . هر دونقطه‌ای (A , B) همانند خود ش است .
یعنی : $(A,B) \upuparrows (A,B)$ است .
زیرا : نقطه وسطی قطعه خط $\overline{AB}$
و نقطه وسطی قطعه خط $\overline{BA}$
عین نقطه است .


شکل (2-4-3)

دوم . خاصیت تناظری . اگر دونقطه‌ای (A , B) همانند به دونقطه‌ای
(C , D) باشد دونقطه‌ای (C , D) نیز همانند دونقطه‌ای
(A , B) میباشد .
یعنی اگر $(A,B) \upuparrows (C,D)$ باشد ،
پس $(C,D) \upuparrows (A,B)$ میباشد .


شکل (2-4-4)

زیرا : اگر $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ یکدیگر را تنصیف کنند
پس $\overline{DA}$ و $\overline{CB}$ یکدیگر را نیز تنصیف
میکنند .

سوم • خاصیت انتقالی • قبول مینمائیم که دونقطه ایهای همانند خاصیت انتقالی راتعقیب مینمایند :

یعنی اگر: $(A, B) \,/\!/\, (C, D)$

و $(C, D) \,/\!/\, (E, F)$ باشد ،

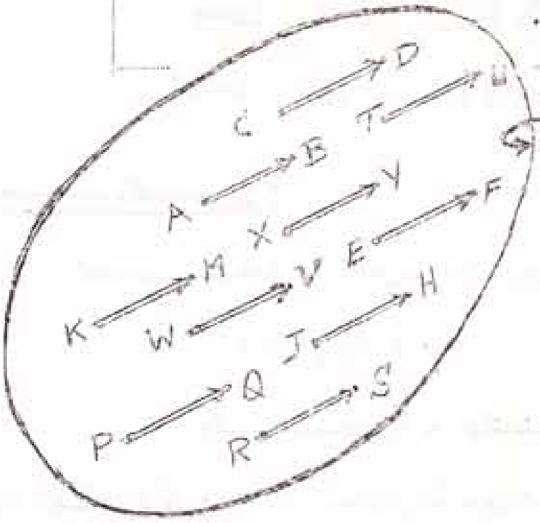
پس $(A, B) \,/\!/\, (E, F)$ میباشد •

خواننده میتواند که حقیقت اینموضوع را توسط کشیدن یك رسم مطالعه نمائید •

ازبررسی هرسه خاصیت فوق نتیجه میشود که رابطهٔ همانندی (همسنگی) درست دونقطه ای ها یك رابطهٔ معادل است •

2-4.d • وکتور هندسی

تعریف : تمام دونقطه ایها یکه به (A, B) همانند اند بنام وکتور هندسی دونقطه ای A, B یاد میشود وآنرا به $\overrightarrow{AB}$ ارائه می نمایند •



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}$

شکل (2-4-5) کلاس (صنف) معادل وکتورهای همانند (A, B) •

شکل (2-4-5) •

هریك ازدونقطه های همانند (A , B) نماینده صنف معادل $\overrightarrow{AB}$ شده میتواند، و ما میتوانیم که آنرا توسط $\overrightarrow{V}$ نیز نشان دهیم .

وکتورهای مربوط دو نقطه ایهای همانند عین وکتور است • چنانچه در شکل (5 - 4 - 2) فوق بمشاهده میرسد که :

ازینکه : ... $(A, B) \uparrow\uparrow (C, D) \uparrow\uparrow (P, Q)$ ..... است ،

پس دراینصورت : ... $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PQ}$ میشود •

<u>قضیه اول:</u> تمام دونقطه ای ها ئیکه مرکبه اول ودوم آنها باهم مساوی اند - همانند اند •

ثبوت : برای اثبات این حقیقت دونقطه کیفی A و B فضا را مد نظر گرفته ونشان باید داد که (A , A) و (B , B) همانند اند •

چون $\overline{BA}$ و $\overline{AB}$ .. دارای همین نقطه وسطی است،

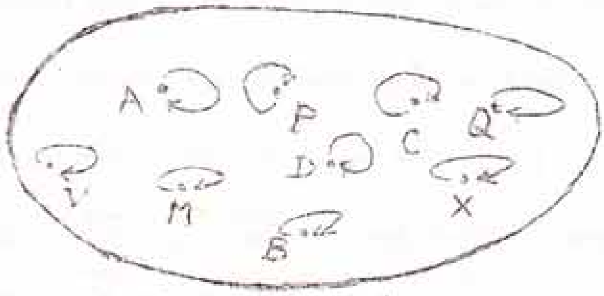
پس $(A, A) \uparrow\uparrow (B, B)$ میباشد •

<u>صفر وکتور :</u>

تعریف: کلاس معادل دونقطه ای همای : (A , A) . (B , B) ..... (X , X) را بنام صفر وکتور یاد میکنند •

یا با الفاظ دیگر: کلاس معادل تمام دونقطه ایها ئیکه مرکبه های اول ودوم آنها با هم مساوی اند بنام صفر وکتور یاد میشود •

صفــــر وکتور را طبق شکل (6 - 4 - 2) ارائه مینمایند •



شکـــل (6 - 4 - 2)

ازینکه یك وکتور کلاسر (صنف) معادل دونقطه ایهای ممط تند را ارا ئـــه میکند • پس گفته میتوانیم که به خلاف دونقطه ای ها وکتور ها دارای مبدا – انجــام و نقطه وسطی شده نمیتواند • این یکی از خواص مهم وکتور ها بوده و ازین خاصیت ــ وکتور ها در اجرای عملیه جمع وکتوری استفاده مینمائیـــم •

<u>قضیــــه دوم</u> ویا قضیــــه تبدیـــل وسطیـــن :

اگــر . . . . . $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ باشــد ،

پــس . . . . $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ میباشـــد •

ثبـــوت : چون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ اســت ••• (قرار مفروض)

پــس $(A,B) \uparrow\uparrow (C,D)$ اســت ••• (قرار تعریـــف)

درینصورت $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ یکدیگر را تنصیف میکند •• (چــرا؟)

ویا اینکــه $\overline{AD}$ و $\overline{CB}$ یکدیگر را تنصیف میکند •• (چرا؟)

پس گفته میتوانیم که $(A,C) \uparrow\uparrow (B,D)$ است •• (چـــــــرا؟)

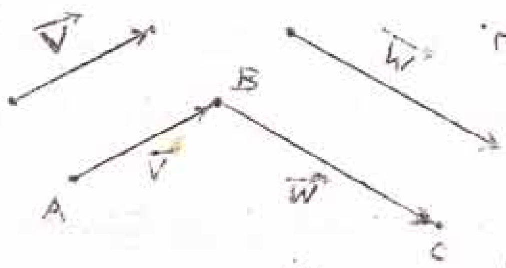
ویا اینکــه $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ میباشـــد •

Q . E . D .

5 - 2 . جمع وکتورها :

از اینکه دو نقطه ای ها در فضا جا های ثابت را اشغال میکنند ویا نمیتوانیم که محل انها تغیر دهیم درینصورت ما نمیتوانیم که دو دو نقطه ای را باهم جمع کنیم .
ولی ما میتوانیم که دو وکتور را قرار ذیل جمع نمائیم :

دو وکتور $\vec{V}$ و $\vec{W}$ مفروض است ، میخواهیم که حاصل جمع دو وکتور $\vec{V}$ و $\vec{W}$ را بدست آریم . برای رسیدن باین هدف یك نمایندهٔ کیفی وکتور $\vec{V}$ را که عبارت از (A , B) مد نظر میگیریم . و بهمین قسم یك نماینده وکتور $\vec{W}$ را طوری انتخاب مینمائیم که مرتبه اول ان B بوده وآنرا به (B , C) ارائه میدانیم .



شکل (7-4-2)

اینك وکتور $\vec{AC}$ را حاصل جمع وکتور های $\vec{V}$ و $\vec{W}$ میدانیم .

حال نشان باید داد که تعریف فوق مربوط بانتخاب نقطهٔ A نیست .

زیرا اگر عوض نقطه A کدام نقطه کیفی A' را انتخاب نموده هم چنان و بعوض دو نقطه (A , B) یك دو نقطه نمایندهٔ دیگر وکتور $\vec{V}$ فرضاً (A', B') را انتخاب نمائیم ، درینصورت ما میتوانیم که بعوض نماینده وکتور $\vec{W}$ یعنی (B' , C') را انتخاب نمائیم . درینجااست ما داریم :

$$\vec{AB} = \vec{A'B'} = \vec{V}$$

از ینجا نظر به قضیه تبدیل وسایط مانوشته میتوانیم :

$$\vec{AA'} = \vec{BB'} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

وهم چنان چون

$$\vec{BC} = \vec{B'C'} = \vec{W}$$

ونظـــر به قضیـــه فوق الذکـــر ما داریـــم :

$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}\ldots\ldots\ (2)$$

ازمقایسه روابط (۱) و (2) فوق میتوان نوشـــــت :

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$$

ویا .... $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$ . . . . . (چـرا؟)

درنتیجه .... $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$ . . . (چرا؟)

ازین ثابت میشود که حاصل جمع دو وکتور $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{W}$ مربوط به انتخاب نقطه A نبوده بناً گفته میتوانیم که تعریف فوق حاصل جمع دو وکتور یک تعریف قابل قبول اســـــت.

6-2. خواص عملیـــــه جمـع وکتـور هـــا :

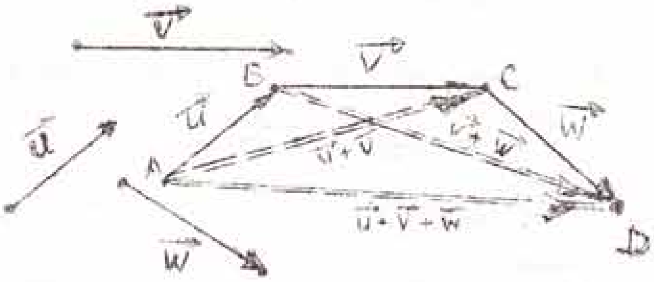
اول . خاصیت (بسته گـــی) داخلی : عملیه جمع درست وکتور ها یك عملیه داخلی است . زیـــرا : قرار تعریف حاصل جمع هر دو وکتـــــور یك وکتور اســـــت.

دوم . خاصیت انجمنی : عملیه جمع درست وکتور انجمنی (شرکت پذیر) است .

ثبـوت : سه وکتور کیفی $\overrightarrow{U}$ ، $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{W}$ ستوکتور ها را مدّ نظـــر میگیـــریـــم .

اکنون ســـه نماینده وکتـــور های $\overrightarrow{U}$ ، $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{W}$ را طـــوری

انتخـــاب مینط ئیم که یکدیگر را تعقیب نمایند ٠ مانند شکل (8-4-2) ذیل :



شکـــل (8-4-2)

حال حاصل جمع ‎$(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}$‎ . . . . . . را بدست می آوریم

درینجا است ما داریم :

$$\vec{U}+\vec{V} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{AC}$$
$$(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{AD} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

بهمین قسم حاصل جمع ‎$\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})$‎ را بدست می آوریـــم ٠

درینحالت

$$\vec{V}+\vec{W} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{BD}$$
$$\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{AD} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

از مقایســـه مساوات های (1) و (2) ما داریـم کـــه :

$$(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W} = \vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})$$

بناً گفته میتوانیم که عملیه جمع درست وکتورها از خاصیت انجمنـــــــــی پیـــروی میکنـــد ٠

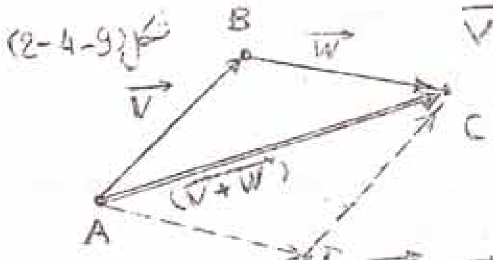
سوم خاصیت تبدیلی (تبادلی) . عملیه جمع در ست وکتورها

از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .

ثبوت : دو وکتور کیفی $\vec{V}$ و $\vec{W}$ ست وکتورها را مد نظار میگیریم .

اگر (A, B) نماینده وکتور $\vec{V}$ و (B, C) نماینده وکتور

$\vec{W}$ مد نظر گرفته شود درینصورت طبق شکل $(2-4-9)$ میتوان نوشت :



$$\vec{V}+\vec{W} = \vec{AB}+\vec{BC}$$
$$= \vec{AC}$$

اکنون حاصل جمع : . . . . $\vec{W}+\vec{V}$ را بدست می آوریم .

برای رسیدن باین هدف (A, D) نماینده $\vec{W}$ را طبق شکل

$(2-4-9)$ مد نظر میگیریم .

درینصورت ما داریم : . . . $\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{W}$

نظر به قضیه تغیر و سطین : . . . . $\vec{AB} = \vec{DC}$ میشود .

از ینجا نتیجه میشود : . . . . . $\vec{DC} = \vec{V}$

پس . . . . $\vec{W}+\vec{V} = \vec{AD}+\vec{DC}$

$$= \vec{AC} \ \cdots\cdots\cdots \ (2)$$

از مقایسه مساواتهای (1) و (2) نتیجه میشود که :

$$\vec{V}+\vec{W} = \vec{W}+\vec{V}$$

چهارم خاصیت وجود عنصر بی تاثیر . صفر وکتور عنصر بی تاثیر عملیه جمع

در ست وکتور ها ست.

ثبوت : اگر $\vec{V}$ یك وکتور کیفی ست وکتورها مد نظر گرفته شود ، که یك نماینده آنرا به (A, B) نشان دهیم . اگر (B, B) نماینده صفر وکتور انتخاب شود درینصورت ما داریم :

$$\vec{V} + \vec{O} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB}$$
$$= \overrightarrow{AB}$$
$$= \vec{V}$$

چون عملیه جمع در ست وکتور ها از خاصیت تبدیلی نیز پیروی میکند . بناءً میتوان نوشت :

$$\vec{V} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{V} = \vec{V}$$

پس گفته میتوانیم که صفر وکتور عنصر بی تاثیر عملیه جمع در ست وکتور ها ست .

پنجم خاصیت وجود وکتور تضاد یك وکتور : نظر به عملیه جمع هر وکتور

دارای یك وکتور تضاد در ست وکتور ها ست.

ثبوت : اگر $\vec{V}$ یك وکتور کیفی ست وکتور ها (A, B) یا نماینده آن مد نظر گرفته شود درینصورت یك وکتور $\overrightarrow{BA}$ در ست وکتور ها $(\overrightarrow{V'})$ موجود است

که تضاد $\vec{V}$ باشد . زیرا :-

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$
$$= \vec{O}$$

بناءً گفته میتوانیم که $\overrightarrow{BA}$ تضاد $\overrightarrow{AB}$ یعنی $\vec{V}$ است. معمولاً وکتور تضاد $\vec{V}$ را به $-\vec{V}$ نشان میدهند . ازینجا نتیجه میشود که :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$ است.

از توضیحات فوق نتیجه میشود که عملیه جمع در ست وکتور ها داخلی بوده از خاصیت (آن) انجمنی و تبدیلی پیروی نموده و عنصر بی تاثیر عملیه جمع در ست وکتور ها موجود بوده و هر وکتور دارای یک وکتور متضاد نظر به عملیه جمع در ست وکتور هاست. بنا ادعا مینمائیم که ست وکتور ها بنا بر عملیه جمع یک گروه تبدیلی (ابلیین) است .

تمرینات :

۰۱ اگر کلاس معادل دو نقطه ای های مما نند یک مستوی را بنام وکتور همان مستوی یاد کنیم . درین صورت نشان دهید که گروه وکتور های مستوی نظر به عملیه جمع یک گروه فرعی وکتور های فضاء است .

۰۲ اگر دو نقطه ای های مما نند بالای یک خط مد نظر گرفته بود ثبوت کنید که ست وکتورهای مربوط این دو نقطه ای ها نظر به عملیه جمع یک گروه است .

۰۳ سه نقطه ثابت A ، B و C یک مستوی را مد نظر گیرید .

در گروه وکتور های این مستوی معادلات ذیل را برای $\vec{X}$ حل کنید :

$$\overrightarrow{AB} + \vec{X} = \overrightarrow{AB} \quad \cdots\cdots\ a$$

$$\overrightarrow{AB} + \vec{X} = \overrightarrow{AC} \quad \cdots\cdots\ b$$

$$\overrightarrow{AB} + \vec{X} = \overrightarrow{BC} \quad \cdots\cdots\ c$$

$$\overrightarrow{AB} + \vec{X} = \overrightarrow{BA} \quad \cdots\cdots\ d$$

$$\overrightarrow{AB} + \vec{X} = \vec{0} \quad \cdots\cdots\ e$$

۴. از چهار نقطه ثابت فضا فرضاً : A ، B ، C و D فضا چند دونقطه‌ای بوجود آمده میتواند ؟ آنها را بنویسید .

۵. یک ست E را بدست آرید طوریکه وکتور داده شده $\vec{V}$ در آن موجود بوده وعملیه جمع در E داخلی باشـــــد .

کمک : چون $\vec{V} \in E$ است وهم چنان عملیه جمع در آن داخلی است.

پس $\vec{V}+\vec{V} \in E$ است وعلـــــی القیـــاس ..... ـ .

۶. اگر $\vec{V}$ یک وکتور مفروض ، و

$$1 \times \vec{V} = \vec{V}$$

$$2 \times \vec{V} = \vec{V} + \vec{V}$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots$$

$$n \times \vec{V} = \underbrace{\vec{V} + \vec{V} + \vec{V} + \cdots + \vec{V}}_{n \text{ مرتبه}}$$ تعریف شود .

آیا ست : $\{ n\vec{V} \mid n \in \mathbb{N} \}$ نظر به عملیه جمع یک گروه میشود ؟ و یا خیـــــر ؟ حقیقت این موضوع را بررسی کنید .

۷. اگر $\vec{V}$ یک وکتور معلوم بوده

$$0 \times \vec{V} = \vec{0}$$

$$-1 \times \vec{V} = -\vec{V}$$

$$-2 \times \vec{V} = -\vec{V} + (-\vec{V})$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots$$

$$-n \times \vec{V} = \underbrace{-\vec{V} + (-\vec{V}) + (-\vec{V}) + \cdots + (-\vec{V})}_{n \text{ مرتبه}}$$ (در حالیکه $n \in \mathbb{N}$ است) تعریف شود .

ثبوت کنید که دریصورت : $\{ n \times \vec{V} \mid n \in \mathbb{Z} \}$ نظر به عملیـــــه جمع (+) یک گروه اســــت .

فصل سوم

حلقه ها و ساحه ها

Fields and Rings

Corps Anneau

3-1. خاصیت توزیعی : Distributive Property

تا اکنون (درین کتاب) تاثیر وخواص یك عملیه را دریك ست مطالعه نمودیم . حال میخواهیم که تاثیر دوعملیه را همزمان درین ست مورد بررسی قرارد هیم . برای توضیح مطلب دوعملیه $*$ و $\odot$ را دریك ست E مد نظر میگیریم ، میگوئیم که عملیه $*$ بالای عملیه $\odot$ ازخاصیت توزیعی پیروی میکند در صورتیکه برای تمام عناصر a ، b ، c شامل ست E رابطه :

$a * (b \odot c) = (a * b) \odot (a * c)$ همیشه حقیقت داشته باشد .

رابطه فوق را بنام خاصیت توزیعی طرف چپ و رابطه :

$(b \odot c) * a = (b * a) \odot (c * a)$ را بنام خاصیت توزیعی طرف راست یاد میکنند .

مثال اول . اگر عملیه ضرب (.) وعملیه جمع (+) در ست اعداد حقیقی مورد نظر گرفته شود ، دیده میشود که برای تمام اعداد حقیقی a ، b و c رابطه :

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ همیشه حقیقت دارد .

را بطـه فوق خاصیت توزیعـــی عملیه ضرب ($\cdot$) را بالای عملیـــه جمع (+)
توضیـــح مینما ئیـــد ٠

a ٠ آیا عملیـــه ضرب بالای جمع در $\mathbb{R}$ از خاصیت توزیعـــی طرف راست
نیـــز پیروی میکند ؟

b ٠ راجع به خاصیت توزیعـــی عملیـــه ضرب ($\cdot$) بالای جمع (+)
در ست $\mathbb{Z}$ چه فکر میکنید ؟

c ٠ راجع به خاصیت توزیعـی عملیـــه ضرب بالای جمـــع در ســـت $\mathbb{N}$
چه فکر میکنیـــد ؟

d ٠ آیا عملیه جمع بالای ضرب در کدام یك از ستهای فوق از خاصیـــــت
توزیعـــی پیروی میکنـــد ؟

مثـــال دوم ٠ اگر عملیات اتحاد ($\cup$) و تقاطع ($\cap$) در بین ستهای فرعی
یك ست مد نظـــر گرفته شود ، دیده میشود که عملیـــه اتحاد ($\cup$) بالای
تقاطع ($\cap$) از خاصیت توزیعی پیروی میکند ٠
همچنان عملیه تقاطع ($\cap$) بالای عملیه اتحاد ($\cup$) از خاصیت توزیعی پیروی میکند ٠
ثبوت هرد و حقیقت فوق در جدول حقیقت مربوط صفحه (۹۳) کتاب: ستها واستفاده از آن جبا
توضیح یا فتـــه است ٠

2-3 ٠ حلقـــه ها ٠

تعـــریـــف : یك ست A نظر بد و عملیه $*$ و $\odot$ حلقه گفته شود
درصورتیکه ست A نظر به عملیه $*$ یك گروه ابلین بوده و عملیه $\odot$
در A : (1) داخلی بوده (2) از خاصیت اتجمنی پیـــروی
کرده و ثانیاً عملیه $\odot$ بالای عملیه $*$ از خاصیـــت توزیعـــی
چپ و راســـــت پیـــروی کنـــد ٠

مثال اول • اگرعملیه (+) وعملیه ضرب (•) درست اعداد تام (I) مدنظر گرفته شود ، بملاحظه میرسد که : اول ست I نظار به عملیه جمع یک گروه تبدیلی است • دوم • عملیه ضرب در I داخلی بوده وازخاصیت انجمنی نیز پیروی میکند • علاوه بران عملیه ضرب (•) در I بالای عملیه جمع (+) ازخاصیت توزیعی چپ وراست پیروی میکند • بنا بران I نظر به (+) و (•) یک حلقه است •

مثال دوم • اگرعملیه جمع (+) وعملیه ضرب (•) درست پولینوم ها (چند حدیها) مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که : ست پولینوم ها نظار به عملیه + یک گروه تبدیلی است • ضمنا" عملیه ضرب (•) در ست پولینوم ها داخلی بوده وازخاصیت انجمنی نیز پیروی میکند • همچنان دیده میشود که عملیه (•) بالای عملیه (+) در ست پولینوم ها ازخاصیت توزیعی پیروی چپ وراست میکند • بنا" گفته میتوانیم که ست پولینوم ها نظر به عملیات جمع (+) وضرب (•) یک حلقه است

خواننده میتواند که حقیقت موضوع فوق را جهت تمرین بررسی کند •

کمک : پولینوم صفر عنصر بی تاثیر عملیه (+) در ست پولینوم ها است •

مثال سوم ، اگر ست پولینوم های درجه دوم ویا کمتر از دو را به P_2 ارائه کنیم ، بملاحظه میرسد که ست P_2 نظر به عملیه جمع یک گروه ابلین بوده ولی نظر به هردو عملیه جمع و ضرب یک حلقه نیست.

زیرا : (1) عملیه جمع در P_2 داخلی است ، یعنی حاصل جمع هردو پولینوم درجه دوم ویا کمتر از دو یک پولینوم درجه دوم ویا کمتر از دو است.

(2) عملیهٔ جمع در P_2 از خاصیت انجمنی پیروی میکند ،

(3) پولینوم صفر که عنصر بی تاثیر عملیه جمع در ست پولینوم ها ست شامل P_2 است.

(4) برای هر پولینوم درجه دوم ویا کمتر از دو یک پولینوم درجه دوم ویا کمتر از دو در P_2 موجود است که حاصل جمع هردوی آنها مساوی صفر میشود ،

(5) عملیه جمع در P_2 از خاصیت تبدیلی نیز پیروی میکند ،

بموجب پنج خاصیت فوق گفته میتوانیم که P_2 نظر به عملیه جمع یک گروه تبدیلی است.

(6) ازینکه عملیه ضرب در P_2 داخلی نیست ،

چنانچه حاصلضرب دو پولینوم درجه دوم یک پولینوم درجه چهارم میشود که شامل P_2 نیست ، پس درینصورت گفته میتوانیم که P_2 نظر به هردو عملیه جمع و ضرب یک حلقه نمیباشد ،

تبصره : دوحلقه ای که در مثال اول ودوم فوق توضیح شد دارای عنصر بی تاثیر عملیه دوم نیز میباشند . موجودیت این عنصر بی تاثیر عملیه دوم باین دوحلقه ساختمان خصوصی داده و اینگونه حلقه ها را بنام حلقه ای حاوی عنصر بی تاثیر عملیه دوم ویا یونیتار unitar یا unitere (حلقه واحدی) یاد میکنند . ازینکه در هردو مثال فوق عملیه دوم از خاصیت تبدیلی نیز پیروی میکند ، پس اینگونه حلقه ها را بنام حلقه های تبدیلی نیز یاد میکنند .

ضرور نیست که هر حلقه دارای عنصر بی تاثیر عملیه دوم بوده و یا اینکه عملیه دوم دران از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .

شما راجع به وجود عنصر بی تاثیر عملیه اول در حلقه ها چه فکر میکنید ؟

3-3. خواص حلقه ها

<u>خاصیت اول</u> : در هر حلقه A اگر عنصر بی تاثیر عملیه اول ($*$) را به 0 ارائه کنیم درینصورت برای هر a شامل A رابطه $a \odot 0 = 0$ حقیقت دارد، که درینجا $\odot$ عملیه دوم را افاده میکند .

ثبوت : ما داریم : $0 = 0 * 0$ (زیرا 0 عنصر بی تاثیر $*$ است)

$a \odot 0 = a \odot (0 * 0)$

$a \odot 0 = (a \odot 0) * (a \odot 0)$ (خاصیت توزیعی در حلقه ها)

$\therefore 0 = (a \odot 0)$ (خاصیت اختصار در گروه ها

لهذا : $\therefore a \odot 0 = 0$ میشود .

Q.E.D.

خاصیت دوم: در یك حلقه اگر تضاد ط نظر به عملیه ※ به ط - نشان داده شود درینصورت: . . . $a \odot (-b) = -(a \odot b)$ میشود.

ثبوت: نظر به تعریف میدانیم که :- $(a \odot b)$-تضاد $(a \odot b)$ است.

یعنی درینصورت:

$$(a \odot b) * [-(a \odot b)] = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$ میشود.

اکنون ثابت میکنیم که: $a \odot (-b)$ نیز تضاد $(a \odot b)$ است.

زیرا:

$$a \odot (-b) * a \odot b = a \odot [b * (-b)]$$
$$= a \odot (0)$$
$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

ازمقایسه روابط (1) و (2) و متکی به حقیقتی که تضاد یك عنصر در یك گروه یگانه است ما داریم:

$$a \odot (-b) = -(a \odot b)$$

Q.E.D.

تمرینات:

1. اگر عملیات جمع (+) و ضرب (.) در $\mathbb{N}$ مد نظر گرفته شود، آیا $\mathbb{N}$ نظر به هردو عملیه جمع و ضرب یك حلقه شده میتواند؟ چــــــرا؟ موضوع را بررسی کنید.

2. دریك حلقه $\mathbb{A}$ ثابت کنید که: $0 \odot a = 0$ میشود. درحالیکه 0 عنصر بی تاثیر عملیه $*$ درحلقه $\mathbb{A}$ است. (0 راجع با ینکه آیا عملیه $\odot$ در $\mathbb{A}$ تبدیلی است ویا خیر! چیزی نمیدانیم.)

3. دریک حلقه $\mathbb{A}$ نشان دهید که :

$(-a)\odot b = -(a\odot b)$ ... میشود درحالیکه $-a$ تضاد a نظر به عملیه $*$ است.

4. خاصیت اول و دوم حلقه را نظر به عملیات جمع (+) وضرب (•) در $\mathbb{Z}$ بررسی کنید.

5. با ستفاده ازخواص عملیات جمع (+) وضرب (•) در $\mathbb{R}$ افاده : ... $(a*b)\odot(c*d)$ رادریک حلقه $\mathbb{A}$ انکشاف دهید.

6. اگردریک حلقه فرضاً $\mathbb{A}$ علامه گذاری ذیل :

$$a\odot a = a^2$$

$a*a=2a$ را قبولدار شویم.

درینصورت : (a). $(a*b)^2$ را انکشاف دهید.

(b). اگرعملیه $\odot$ در $\mathbb{A}$ تبدیلی باشد،

نشان دهید که :

$(a*b)^2 = a^2 * 2(a\odot b) * b^2$ میشود.

(c). همچنان افاده :

$(a*b)\odot[a*(-b)]$ را انکشاف دهید.

(d). از بررسی دو جز (b) و (c) استنتاج نمائید که دریک حلقه تبدیلی روابط عینیت ها و یا مطابقت ها حقیقت دارد.

۴-۳. حلقه های دورانی

مثال . ما تمام اعداد تام $\mathbb{Z}$ را نظر به باقیماندهٔ شان که به 4 تقسیم شوند به چهار صنف ذیل تصنیف کرده میتوانیم :

اول . صنف صفر ($\dot{0}$) : عناصر این صنف را آن اعداد تامی تشکیل میدهند که به 4 پوره تقسیم میشوند . یعنی ضرب های 4 اند .

ما این صنف را قرار ذیل ارائه میکنیم :

$$\dot{0} = \{ \cdots , -8 , -4 , 0 , 4 , 8 , 12 , \cdots \}$$

دوم . صنف یک ($\dot{1}$) : عناصر این صنف را آن اعداد تام تشکیل میدهند که اگر به 4 تقسیم شوند باقیماندهٔ شان $1+$ باشد ، ما این صنف را چنین نشان میدهیم :

$$\dot{1} = \{ \cdots , -7 , -3 , 1 , 5 , 9 , 13 , \cdots \}$$

سوم . صنف دو ($\dot{2}$) : عناصر این صنف را آن اعداد تام تشکیل میدهند که اگر به 4 تقسیم شوند ، درنتیجه $2+$ باقی بماند . این صنف عبارت است از :

$$\dot{2} = \{ \cdots , -6 , -2 , 2 , 6 , 10 , \cdots \}$$

چهارم . صنف سه ($\dot{3}$) : عناصر این صنف را آن اعداد تام تشکیل میدهند که اگر به 4 تقسیم شوند با قیماندهٔ شان $3+$ گردد . این صنف عبارت است از :

$$\dot{3} = \{ \cdots , -5 , -1 , 3 , 7 , 11 , 15 , \cdots \}$$

اکنون ست E را درصورتیکه $E = \{ \dot{0} , \dot{1} , \dot{2} , \dot{3} \}$: باشد مد نظر گرفته ودران عملیه $\oplus$ را طبق ذیل تعریف نمائیم :

حاصل جمع دو صنف ما وابسته به صنف حاصل جمع دو عدد کیفی آن ها .

بطور مثال :
$$\dot{2} \oplus \dot{3} = \widehat{6+15} = \dot{9}$$
$$= \dot{1}$$

که درینجا $\dot{9}$ صنفی را ارائه که 9 درآن شامل است.

همچنان :
$$\dot{3} \oplus \dot{3} = \widehat{7+3} = \dot{10}$$
$$= \dot{2}$$

بصورت عمومی :
$$\dot{a} \oplus \dot{b} = (\widehat{a+b})$$

که درینجا $(\widehat{a+b})$ صنفی را نشان میدهد که درآن $a+b$ شامل است.

اینک جدول عملیه $\oplus$ را در E طبق ذیل تشکیل میتوان کرد :

$\oplus$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$

اکنون نشان باید داد که E نظر به $\oplus$ یك گروه تبدیلی است.

زیرا :- عملیه $\oplus$ درست E داخلی است .

- عملیه $\oplus$ در E ازخاصیت انجمنی پیروی میکند .

زیرا عملیه جمع $(+)$ در $\mathbb{Z}$ انجمنی است .

- صنف $\dot{0}$ عنصر بی تاثیر عملیه $\oplus$ بوده ودر E موجود است .

– ازجدول بملاحظه میرسد که تضاد $\dot{0}$ خود $\dot{0}$ –

تضاد $\dot{1}$ ، $\dot{3}$ ، تضاد $\dot{2}$ خود $\dot{2}$

و تضاد $\dot{3}$ عبارت از $\dot{1}$ میباشد.

– چون ساختمان جدول نظر بقطر اساسی آن متناظر است، پس ⊕ در E ازخاصیت تبدیلی نیز پیروی میکند.

اکنون یك عملیه ⊙ را در E قرار ذیل تعریف میکنیم :

حاصل ضرب دو صنف مساویست به حاصل ضرب دو عدد کیفی آنها .

بطور مثال :

$$\dot{2}\odot\dot{3} = (\dot{\widehat{2\cdot 7}}) = \dot{14}$$
$$= \dot{2}$$

همچنان :

$$\dot{0}\odot\dot{2} = (\dot{\widehat{(-4)\cdot(-6)}}) = \dot{24}$$
$$= \dot{0}$$

بصورت عموم :

$$\dot{a}\odot\dot{b} = (\dot{\widehat{a\cdot b}})$$

درینجا $(\dot{\widehat{a\cdot b}})$ صنفی را ارائه میکند که $(a\cdot b)$ درآن شامل است.

اینك جدول عملیه ⊙ را در E طبق ذیل تاسیس میتوان کرد :

⊙	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

بمشاهده میرسد که E نظربه ⊙ یك گروه نیست.

زیرا : ازجدول دیده میشود که عملیه ⊙ در E داخلی و مشمول انجمنی

بوده وعلاوه بران $\dot{1}$ عنصر بی تاثیر عملیه ⊙ در E است،

ولی $\dot{2}$ در E نظربه ⊙ تضاد ندارد.

یعنی ما کدام عنصری مانند α را در E پیدا کرده نمیتوانیم که را بطه ای : $\dot{2} \odot \alpha = \alpha \odot \dot{2} = \dot{1}$ را تحقیق کند ؟

بنا گفته میتوانیم که E نظر به عملیه $\odot$ یک گروه نیست .

اکنون نشان باید داد که عملیه $\odot$ بالای $\oplus$ از خاصیت توزیعی پیروی میکند .

اگر سه عنصر کیفی : $\dot{a}$ ، $\dot{b}$ و $\dot{c}$ ست E را نظر بگیریم ، (درحالیکه a ، b و c شامل $\mathbb{Z}$ اند) ، دراینصورت میتوان نوشت :

$$\dot{a} \odot (\dot{b} \oplus \dot{c}) = \dot{a} \odot (\widehat{b+c}) \quad \cdots \quad (\text{نظر به تعریف جمع } \oplus)$$

$$= \widehat{a\cdot(b+c)} \quad \cdots \quad (\text{چرا ؟})$$

$$= \widehat{(a\cdot b)+(a\cdot c)} \quad \cdots \quad (\text{چرا ؟})$$

$$= (\widehat{a\cdot b}) \oplus (\widehat{a\cdot c}) \quad \cdots \quad (\text{چرا ؟})$$

$$= (\dot{a} \odot \dot{b}) \oplus (\dot{a} \odot \dot{c}) \quad \cdots \quad (\text{چرا ؟})$$

لـذا $\dot{a} \odot (\dot{b} \oplus \dot{c}) = (\dot{a} \odot \dot{b}) \oplus (\dot{a} \odot \dot{c})$

Q . E . D .

الحال توضیحات فوق را طی ذیل خلاصه نتیجه گیری مینمائیم :

1. E نظر به $\oplus$ یک گروه ابیلین است .

2. عملیه $\odot$ در E :

(a) داخلی است ،

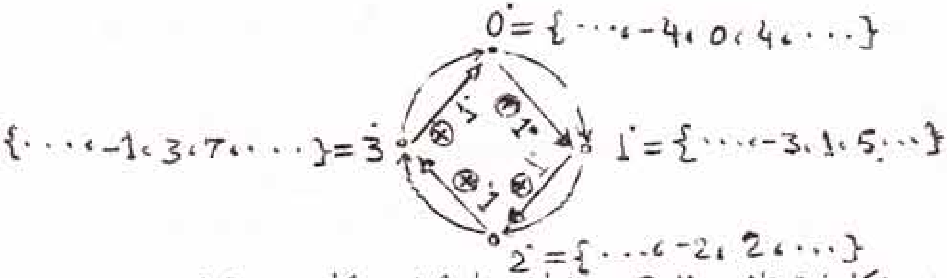
(b) اتحادی است ،

(c) بالای $\oplus$ توزیعی است .

لذا E نظر به عرد و عملیه $\oplus$ و $\odot$ یك حلقه است •

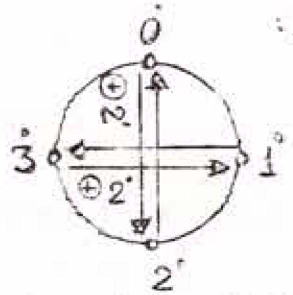
علاوه بر آن چون عملیه $\odot$ در E تبدیلی بوده و $\dot{1}$ عنصر بی تاثیر عملیه $\odot$ در E است ، بناءً گفته میتوانیم که E نظر به عرد و عملیه مذکور یك حلقه تبدیلی واحدی Uniter است•

حلقه فوق را توسط اشکال ذیل نمایش میتوان داد :



در شکل فوق تاثیر $\oplus\dot{1}$ نشان داده شده است •

اکنون شکل ذیل را مطالعه کنید :



در شکل فوق تاثیر $\oplus\dot{2}$ ارائه شده است•

بررسی تاثیر $\oplus\dot{0}$ و همچنان تاثیر $\oplus\dot{3}$ را توسط اشکال را بحیث تمرین برای خوانده واگذار میشویم •

متکی بحقیقت مربوط اشکال فوق ماحلقهٔ E را بنام حلقه دورانی مودول چهار مینامیم •

تمرینات

1. باساس جدول عملیه $\oplus$ در صفحه (۵۹) معادلات ذیل را حل کنید:

a. $\dot{1} \oplus \dot{x} = \dot{3}$

b. $\dot{x} \oplus \dot{3} = \dot{1}$

c. $\dot{x} \oplus \dot{2} = \dot{0}$

d. $\dot{x} \oplus \dot{x} = \dot{0}$

e. $\dot{2} \oplus \dot{x} = \dot{1}$

f. . . . . . . معادله مربوط d چند حله دارد؟

g. . . . . . . ازکجا میدانید که معادلات مربوط a ، b ، c ، d دارای یك یك حل اند؟

2. باساس جدول عملیه $\odot$ در فوق ۷ صفحه (۶۰) معادلات ذیل راحل کنید:

a. $\dot{1} \odot \dot{x} = \dot{3}$

b. $\dot{x} \odot \dot{3} = \dot{1}$

c. $\dot{x} \odot \dot{2} = \dot{0}$

d. $\dot{x} \odot \dot{x} = \dot{0}$

e. . . . . . . هر کدام از معادلات فوق دارای چند حل میباشند؟

3. باساس جدول های عملیه $\oplus$ وعملیه $\odot$ درفوق قیمت $\dot{x}$ را در هریك از معادلات ذیل بدست آرید:

a. $(\dot{2} \odot \dot{x}) \oplus \dot{1} = \dot{0}$

b. $(\dot{x} \odot \dot{3}) \oplus \dot{2} = \dot{1}$

c. $(\dot{x} \oplus \dot{1}) \odot \dot{3} = \dot{2}$

d. $(\dot{x} \oplus \dot{2}) \odot \dot{2} = \dot{2}$

e. . . . تعداد حله هر یك ازمعادلات فوق را بررسی کنید.

4 . کدام عناصر ست E فوق دارای تضاد عملیه $\odot$ میباشند ؟

5 . آیا ست $E_* = E - \{\dot{0}\}$ نظر به عملیه $\odot$ یک گروه شده میتوانند ؟ چرا ؟ موضوع را بررسی کنید .

6 . اگر عملیه تقسیم درست اعداد تام $\mathbb{Z}$ مد نظر گرفته شود ، تمام اعداد تام را بااساس باقیماندهٔ آنها (که یا 0 ، یا 1 ، ویا 2 است) به سه صنف $\acute{0}$ ، $\acute{1}$ و $\acute{2}$ دسته بندی کرده میتوانیم . ست صنوف $\dot{0}$ ، $\dot{1}$ و $\dot{2}$ بنام ست اعداد تام دورانی مودولیو 3 یاد میشود وآنرا به $\mathbb{Z}/(3)$ نشان میدهند .

a . نشان دهید که ست $\mathbb{Z}/(3)$ نظر به عملیه جمع $(+)$ وضرب یک حلقه است .

b . ~~ست~~ $(\mathbb{Z}/(3))_* = \mathbb{Z}/(3) - \{0\}$ نظر به عملیه ضرب کدام ساختمان جبری را تاسیس میکند ؟

c . جدول عملیه $\odot$ در $(\mathbb{Z}/(3))_* = \{\dot{1}, \dot{2}\}$ هم چنان جدول عملیه ضرب $(\cdot)$ در $A = \{-1 , 1\}$ تاسیس وباهم مقایسه کنید .

5-3 . ساحه ها Fields

مثال اول . اگر عملیه های جمع $(+)$ وضرب $(\cdot)$ درست $\mathbb{Q}$ مد نظر گرفته شوند دیده میشود که $\mathbb{Q}$ نظر به دو عملیه جمع $(+)$ وضرب $(\cdot)$ یک حلقه واحدی است . علاوه بران اگر عنصر بی تاثیر عملیه جمع $(+)$ یعنی 0 از $\mathbb{Q}$ حذف شود دیده میشود که $\mathbb{Q}_* = \mathbb{Q} - \{0\}$ نظر به عملیه ضرب $(\cdot)$ نیز یک گروه است . ساختمان جبری که $\mathbb{Q}$ نظر به هردو عملیه جمع $(+)$ وضرب $(\cdot)$ طبق فوق بوجود آورده است بنام ساحه یا Field یاد میشود .

تعریف: ساختمان جبری ای که نظر به عملیه $*$ و $\odot$ یک حلقه واحدی بوده و هر عنصر این حلقه بدون عنصر بی تاثیر عملیه $*$ دارای عنصر تضاد عملیه $\odot$ باشد بنام ساحه یا Field یاد میشود.

تبصره: معمولاً عملیه اول ($*$) یک ساحه $\mathbb{F}$ را عملیه جمع ($+$) که عنصر بی تاثیر آن صفر است تشکیل داده و بعمین عملیه دوم $\odot$ آنرا عملیه ضرب ($\cdot$) تشکیل میدهند.

لیمّا: دریک ساحه حاصلضرب هردو عدد خلاف صفر یکعدد خلاف صفر است.

ثبوت: دو عدد a و b طوریکه $a \neq 0$ و $b \neq 0$ شامل ساحه $\mathbb{F}$ را مد نظر بگیریم درینصورت: $a \cdot b \neq 0$ میشود.

زیرا: اگر $a \cdot b = 0$ گردد، چون $\mathbb{F}$ یک ساحه است پس در آن a^{-1} یعنی تضاد a موجود است.

درینصورت ما داریم:

$$a \cdot b = 0$$

$$a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0$$

$$1 \cdot b = 0$$ زیرکه درینجا 1 عنصر بی تاثیر عملیه ضرب است.

$$b = 0$$

ازینجا . . . . $b = 0$ میشود.

حالانکه نتیجه اخیر خلاف فرضیه ماکه $b \neq 0$ است میباشد.

بنا بران . . . $a \cdot b \neq 0$ میشود.

نتیجه: دریک ساحه $\mathbb{F}$ اگر $a \cdot b = 0$ باشد، با لضروره $a = 0$ یا $b = 0$ ویا هردو یعنی a و b صفر میباشد.

قضیـــــــــه ۹ـ اگر $\mathbb{F}$ نظر به دو عملیه جمع $(+)$ و ضرب $(\cdot)$ یک ساحه باشد درینصورت: $\mathbb{F}_* = \mathbb{F} - \{0\}$ نظر به عملیه ضرب نیز یک گروه اســـت.

ثبـــوت: ازینکه $\mathbb{F}$ نظر بهر دو عملیه جمع $(+)$ وضرب $(\cdot)$ یک ساحه است پس عملیه ضرب $(\cdot)$ در $\mathbb{F}$ داخلی است.

زیـــرا: حاصلضرب هر دو عدد $\mathbb{F}_*$ خلاف صفر بوده و یک عنصر $\mathbb{F}_*$ اســـت.

و همچنان عملیه ضرب در $\mathbb{F}_*$ انجمنی بوده و 1 عنصر بی تاثیر عملیه ضرب در $\mathbb{F}_*$ موجود است/ و برای هر عنصر $a \in \mathbb{F}_*$ یک عنصر a^{-1} تضــاد در $\mathbb{F}_*$ موجود است طوریکه رابطـــه:

$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ را صدق میکند.

بنابرآن $\mathbb{F}_*$ نظر به عملیه ضرب $(\cdot)$ نیز یک گروه اســـت.

Q.E.D.

مثال دوم. اگر ست اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ نظر به دو عملیه جمع و ضرب مد نظـــر گرفته شود، دیده میشود که $\mathbb{R}$ نظر به عملیه جمع یک گروه تبدیلی اســت.

همچنان اگر ست $\mathbb{R}$ نظر به عملیه ضرب مورد بررسی قرار داده شود، بملاحظـــه میرسد کـــه:

– عملیه ضرب در $\mathbb{R}$ داخلی بوده و از خاصیت انجمنی پیروی میکند.

– عدد 1 عنصر بی تاثیر عملیه ضرب در $\mathbb{R}$ موجـــود اســـت.

– پس $\mathbb{R}$ نظر به هر دو عملیه جمع و ضرب یک حلقه واحدی است.

علاوه برآن برای هر عدد a شامل $\mathbb{R}$ (در صورتیکـــه $a \neq 0$)

یکعدد تضاد a یعنی $\bar{a}^1$ در $\mathbb{R}$ موجود است طوریکه رابطه :

$a \cdot \bar{a}^1 = \bar{a}^1 \cdot a = 1$ را تحقیق میکند .

بنابران $\mathbb{R}$ نظر به هردو عملیه جمع $(+)$ وضرب $(\cdot)$ یک ساحه است .

ازینکه عملیه ضرب $(\cdot)$ در $\mathbb{R}$ ازخاصیت تبدیلی نیزپیروی میکند ، پس میگوئیم که $\mathbb{R}$ نظر به هردوعملیه جمع وضرب یک ساحه تبدیلی است .

تبصره : درین کتاب ساختمان ساحه هاي اي راکه تبدیلی میباشند مورد مطالعه قرار میدهیم . ثبوت شده میتواند که هرساحه متناهی (قابل شمار) تبدیلی است . ولی ساحه هاي موجود است که نا متناهی (غیرقابل شمار) بوده وتبدیلی نیستند .

مثال سوم . اگرحلقه دورانی موډلیو 3 یعنی $A = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ را نظر به عملیات جمع $(+)$ وضرب $(\cdot)$ مد نظر بگیریم ، درینصورت A نظر به هردو عملیه $(+)$ و $(\cdot)$ یک ساحه تبدیلی است .

زیرا : اگرچه دول عملیه ضرب در A طبق شکل ذیل تا سیس شود ، دیده میشود که $\dot{1}$ عنصر بی تاثیر عملیه ضرب در A موجود است ، علاوه برآن تضاد $\dot{1}$ نظر به عملیه ضرب $(\cdot)$ در A خود $\dot{1}$ وهم چنان تضاد $\dot{2}$ در A خود $\dot{2}$ میباشد . پس گفته میتوانیم که هرعنصر a شامل A بدون $\dot{0}$ دارای یک تضاد میباشد .

$\cdot$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

بنا بران $\mathbb{A}$ نظر به هردو عملیه جمع $(+)$ وضرب $(\cdot)$ یک ساحه است.

ازینکه جذر ول عملیه ضرب در $\mathbb{A}$ نظر به قطر اساسی تناظری است/ بنا" ادعا میتوان کرد که $\mathbb{A}$ یک ساحه تبدیلی است.

تمرینات

1. ثابت کنید که دریک ساحه $\mathbb{F}$ تضاد هر عنصر $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} - \{0\}$ به عملیه ضرب $(\cdot)$ خلاف ضر است.

2. نشان دهید که ساختمان حلقه پولینوم نظر به عملیات: جمع وضرب یک ساحه شده میتوانند.

3. ثبوت کنید که ساختمان مت کسری پولینوم ها نظر به عملیات: جمع وضرب یک ساحه تبدیلی است.

4. ثابت کنید که ساختمان حلقه دورانی مودولو 4 نظر به عملیات: جمع وضرب یک ساحه شده میتوانند.

5. ثابت کنید کو ساختمان حلقه دورانی مودلو 5 نظر به عملیات: جمع وضرب یک ساحه است.

6 . یک حلقه دورانی رده‌ای n را نظر به عملیات جمع وضرب در صورتیکه n یک عدد اولیه نباشد در نظر بگیرید :

a . ثابت کنید که دو صنف غیر صفر درین حلقه موجود شده میتوانند طوریکه حاصلضرب انها مساوی به صنف صفر گردد .

b . ازین استنتاج نمائید که ساختمان این حلقه یک ساحه نیست :

کمک : چون n یک عدد غیراولیه است پس $n = p.q$ گردیده که درینصورت p و q خلاف n میباشد .

3-6 . همشکلی Isomorphism

3-6.a . همشکلی دو گروه

مثال اول . اگر از تاثیر عملیه $\oplus$ در $A=\{0,1\}$ جدول ذیل تاسیس گردد از جدول بملاحظه میرسد که A نظر به عملیه $\oplus$ یك گروه است . همچنان اگر از تاثیر عملیه ضرب (.) درست : $B=\{-1,1\}$ جدول ذیل تاسیس شود، از جدول نتیجه میشود که B نظر به عملیه ضرب (.) نیز یك گروه است . از مقایسهٔ هردو جدول نتیجه میشود که اگر بعوض 0 در جدول (I) 1 و به عوض 1 آن -1 وضع شود ، جدول II حاصل میشود . باین اساس یك مطابقت یك به یك (تقابل) ویا (Bijection) f را بین این دو گروه را طبق ذیل تعریف میکنیم :

جدول (I)

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

جدول (II)

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

$$f:\begin{cases} \begin{array}{ccc} A & & B \\ 0 & \longleftrightarrow & 1 \\ 1 & \longleftrightarrow & -1 \end{array} \end{cases}$$

متکی باین مطابقت برای هرعنصر a و b شامل گروه A رابطه ذیل حقیقت پذیراست :

$$f(a\oplus b) = f(a)\cdot f(b)$$

زیرا : درحالت اول : برای $a=0$ و $b=0$.

درینصورت ما داریم :

$$\begin{aligned} f(a\oplus b) &= f(0\oplus 0) \\ &= f(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(a\oplus b) = 1 \quad \ldots\ldots (1)$$

از طرف دیگر : $f(a).f(b) = f(0).f(0)$

$$= 1 . 1 = 1$$

$$\therefore \quad f(a).f(b) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ازمقایسه دو مساوات فوق مادا ریم :

$$f(a \oplus b) = f(a).f(b)$$

درحالت دوم ، فرضاً $a = 1$ و $b = 0$ باشد ،

درینصورت ما داریم :

$$f(a \oplus b) = f(1 \oplus 0)$$

$$= f(1)$$

$$= -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

از طرف دیگر : $f(a).f(b) = f(0).f(1)$

$$= 1 . (-1)$$

$$= -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ازمقایسه مساوات های (3) و (4) نتیجه میشود :

$$f(a \oplus b) = f(a).f(b)$$

حل حالت سوم : $a = 1$ و $b = 1$ بوده ، وهمچنان

حل حالت چهارم : $a = 0$ و $b = 1$ باشد بحیث تمرین

برای خواننده گذاشته شده است .

مثال دوم . اگرعملیه ضرب (.) درست :

$\mathbb{P} = \{x \mid x = 10^n , n \in \mathbb{Z}\}$ مد نظر گرفته شود دیده

میشود که $\mathbb{P} = \{\ldots, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10}, 1, 10, 10^2, \ldots\}$ نظر به عملیه ضرب یک گروه

است . همچنان اگر در $\mathbb{Z}$ عملیه جمع (+) مد نظر گرفته شود ،

بملاحظه میرسد که $\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع (+) نیز یک گروه است .

اکنون ساختمان ایندو گروه $\mathbb{P}$ و $\mathbb{I}$ را طبق ذیل مقایسه میکنیم :

$$\mathbb{I} = (\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$$
$$\downarrow$$
$$\mathbb{P} = (\ldots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0}, 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}, 10^{4}, \ldots)$$

حال اگر دو عنصر a و b ست $\mathbb{I}$ را باهم جمع نمائیم ، تصویر حاصل جمع آنها 10^{a+b} در $\mathbb{P}$ بدست می آید ، که این تصویر عبارت از حاصل ضرب 10^a و 10^b میباشد . ازین نتیجه میشود که بین ایندو ست $\mathbb{I}$ و $\mathbb{P}$ یك مطابقت یك یك (تقابل) فرضاً f موجود است که دارای خاصیت ذیل است :

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$$

میگویم که ساختمان $\mathbb{I}$ نظر به عملیه جمع (+) با ساختمان $\mathbb{P}$ نظر به عملیه ضرب (.) همشکل اند . این مطابقت یك یك f بین ساختمان $\mathbb{I}$ و $\mathbb{P}$ را بنام همشکلی Isomorphism یاد میکنند .

تعریف : یك همشکلی از یك گروه G نظر به عملیه $*$ بطرف یك گروه G' نظر به عملیه $\odot$ عبارت از یك تقابل مطابقت یك یك f است که برای هر عنصر a و b شامل G رابطه : $f(a*b) = f(a) \odot f(b)$ حقیقت پذیر باشد .

مثال سوم ・ اگر گروه $\mathbb{R}_*^+$ نظر به عملیه ضرب (・) و گروه $\mathbb{R}$ نظر به عملیه جمع مد نظر گرفته شود این دو گروه همشکل اند ・

برای اثبات حقیقت فوق ضرورت است تا یک تقابل g را بدست آوریم ، طوریکه برای هر عنصر a و b رابطهٔ ذیل موجود گردد :

$$g(a \cdot b) = g(a) + g(b)$$

حال اگر مفکورهٔ لوگارتیم $\log$ را درست اعداد $\mathbb{R}_*^+$ مورد بررسی قرار دهیم درینصورت برای هر عدد a و b ست $\mathbb{R}_*^+$: ما داریم :

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

از رابطه اخیر بوضاحت معلوم میشود که این تقابل g مورد نظر عبارت از $\log$ است ・ درینصورت گفته میتوانیم که $\log$ یک همشکلی را در بین دو گروه $\mathbb{R}_*^+$ و $\mathbb{R}$ بوجود آورده است ・

・ 3-6.b خواص یک همشکلی

خاصیت اول ・ دریک همشکلی تصویر عنصر بی تاثیر گروه اول عبارت ازعنصر بی تاثیر گروه دوم است ・

ثبوت : اگر G نظر به عملیه $*$ یک گروه و e عنصر بی تاثیر عملیه $*$ در G بوده و f یک همشکلی بین این دو گروه G و G' باشد ثابت مینمائیم که $f(e)$ عنصر بی تاثیر گروه G' نظر به عملیه $\odot$ میبا شد ・

زیــــرا :ــ برای هرعنصر کیفی y از G' ما داریم :

$$f(e)\cdot y = f(e)\odot f(x)$$

چون f یک تقابل است پس اد عاکرده میتوانیم که y دارای یک منشا تصویر

فرضاً x در G میباشد .

از طرف دیگرچون : $f(e)\odot f(x) = f(e*x)$

$$= f(e) \quad \ldots\ldots\ldots \text{چرا؟}$$

$$= y$$

بنا بــران $\ldots\ldots$ $f(e)\odot y = y$ گردیـــده ،

ازین نتیجه میشود که $f(e)$ عنصر بی تاثیرگروه G' اســـــت .

Q . E . D .

خاصیــت دوم . دریک همشکلی تضاد تصویر دوعنصر تضاد در گروه اول

عبارت ازدوعنصر تضاد درگروه دوم اســت .

ثبــوت : فرضاً a و b دوعنصرتضاد یکدیگر درگروه G نظــر

به عملیه $*$ باشند ، درصورتیکه f یک همشکلی بیــن

دوگروه G و G' باشد ، دراینصورت $f(a)$ و $f(b)$

عناصر تضــاد یکدیگردرگروه G' بنا بر عملیه مربوط آن فرضاً

عملیه $\odot$ میباشـــند .

زیــرا :

$$a*b = e$$

$$f(a*b) = f(e)$$

$$f(a)\odot f(b) = f(e)$$

چون قرار خاصیت اول (م) f عنصر بی تأثیر گروه G' نظر به عملیه $\odot$ است

پس $f(a)$ و $f(b)$ تماد یکدیگر نظر به عملیه $\odot$ میباشند.

$$Q.E.D$$

خاصیت سوم . اگر f یك همشکلی ازگروه G بطرف گروه G'

باشد ، پس f^{-1} (معکوس f) یك همشکلی از G' بطرف

G میباشد.

ثبوت : برای اثبات حقیقت فوق تعقیب دو مرحله ذیل ضروریست .

اول : نشان باید داد که f^{-1} یك تقابل است .

دوم : نشان باید داد که برای هرعنصر a و b شامل G' رابطه :

$f^{-1}(a \odot b) = f^{-1}(a) * f^{-1}(b)$ همیشه حقیقت پذیراست.

مرحله اول بنابرحقیقتی که معکوس هر تقابل یك تقابل است ثابت شده میتواند .

مرحله دوم طبق ذیل باثبات رسیده میتوانــــد :

چون ... a و ... b شامل گروه G' بوده و f یـك

تقابل است ، پس بالضرور دو عنصر x و y در G موجــود

اند طوریکــــه :

$$f(x) = a$$

و همچنان ... $f(y) = b$ ... گــردد .

ازینجا ما داریم : $a \odot b = f(x) \odot f(y)$

$$= f(x * y)$$

$$f^{-1}(a \odot b) = x * y \quad \text{پس}$$

$$= f^{-1}(a) * f^{-1}(b) \quad \text{و یا}$$

درنتیجه $f^{-1}(a \odot b) = f^{-1}(a) * f^{-1}(b)$ میشود.

$$Q.E.D.$$

تمرینات

1. درسه مثال اول همشکلی ها :

(a) . خاصیت اول همشکلی را

(b) . خاصیت دوم همشکلی را و

(C) . خاصیت سوم همشکلی را مورد بررسی قرار دهید .

2 . نشان دهید که بین دوست : $\mathbb{Z}$ و $2\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع (+)

یک همشکلی موجود است.

3 - نشان دهید که بین $\mathbb{R}^+_*$ نظر به عملیه ضرب و $\mathbb{R}^+_*$ نظر

به همین عملیه ضرب مطابقت ذیل f :

طوریکه : $$f: \begin{vmatrix} \mathbb{R}^+_* \longmapsto \mathbb{R}^+_* \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{vmatrix}$$ است

یک همشکلی است .

4 . نشان دهید که مطابقت φ بین $\mathbb{R}_*$ وخود $\mathbb{R}_*$ نظر به عملیه

ضرب طوریکه :

$$\varphi: \begin{vmatrix} \mathbb{R}_* \longmapsto \mathbb{R}_* \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{vmatrix}$$ است

یک همشکلی است.

5 . دو جدول ذیل را مد نظر گرفته وبین ساختمان های مربوط اینده و

جدول یک همشکلی رامطالعه نمائید :

*	1	2
1	1	2
2	2	1

*	+	-
+	+	-
-	-	+

فصل چهارم

فضای وکتوری

Vector Space
Espace Vectoriel

4-1 . معرفی فضای وکتوری

در فصل دوم ما راجع به ست وکتورهای هندسی صحبت نمودیم . ضمنا در آن فصل عملیه جمع وکتورها را معرفی کردیم و بعلا حظه رسید که ست وکتورهای هندسی نظر به عملیه جمع وکتوری یک ساختمانی را که گروه تبدیلی است تشکیل نمود . ما میدانیم که اگر یک وکتور را در یک عدد حقیقی ضرب کنیم در نتیجه یک وکتور حاصل میشود . ولی این عملیه ضرب در ست وکتورها یک عملیه داخلی نیست . زیرا : این عملیه ضرب در ست وکتورها داخلی گفته میشد در صورتیکه وکتور ضرب در وکتور میگردید . قرار تعریف عملیه ضرب اعداد حقیقی را در یک وکتور بنام عملیه خارجی یاد میکنند .

عملیه ضرب اعداد حقیقی در ست V وکتورها دارای خواص ذیل است :

<u>خاصیت اول</u> . عدد 1 ضرب یک وکتور $\vec{u}$ عبارت از خود وکتور $\vec{u}$ است .

یعنی برای هر $\vec{u} \in V$ ما داریم :

$$1 \times \vec{u} = \vec{u}$$

خاصیت دوم : برای هر عدد حقیقی k و k' و هر وکتور $\vec{v}$

رابطهٔ : $(k \cdot k') \times \vec{v} = k \times (k' \times \vec{v})$ همیشه حقیقت دارد .

خاصیت سوم : برای هر عدد حقیقی k و k' و هر وکتور $\vec{v}$

رابطه : $(k + k') \times \vec{v} = k \times \vec{v} + k' \times \vec{v}$ همیشه حقیقتپذیر است .

خاصیت چهارم : برای هر عدد حقیقی k و هر وکتور $\vec{v}$ و $\vec{w}$

رابطه : $k \times (\vec{v} + \vec{w}) = k \times \vec{v} + k \times \vec{w}$ همیشه حقیقتپذیر است

تعریف : ساختمان هر گروه تبدیلی با عملیه ضرب در اعداد حقیقی که دارای هر چهار خاصیت فوق باشد یک فضای وکتوری را تاسیس میکند .

مثال اول : اگر در ست V وکتور های هندسی ، که نظر به عملیه جمع وکتوری یک گروه تبدیلی است ، عملیه ضرب در اعداد حقیقی مد نظر گرفته شود ــ ساختمان جدیدی که این گروه وکتور ها نظر به عملیه ضرب در اعداد حقیقی بوجود می آورد یک فضای وکتوری است . زیرا هر چهار خاصیت فوق در آن حقیقت پذیر است .

مثال دوم : اکنون اگر ساختمان حاصلضرب دکارتی اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را نظر به عملیه $\oplus$ که ذیلاً تعریف می شود مورد بررسی قرار دهیم در مرحله اول دیده میشود که این ساختمان یک گروه تبدیلی است . در مرحله دوم با در نظر داشت عملیه ضرب این گروه در $\mathbb{R}$

نشان باید داد که این ساختمان یک فضای وکتوری است .

در مرحله اول : ما میدانیم که :

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}\,,\,y\in\mathbb{R}\}\ .$$

اکنون عملیه $\oplus$ را در بین جوره های مرتب یعنی عناصر $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ طبق ذیل تعریف مینمائیم :

$$(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',\,y+y')$$

1 - از رابطهٔ فوق نتیجه میشود که عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ داخلی است .

زیرا حاصل جمع دو جورهٔ مرتب یک جوره مرتب است .

2 - عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ از خاصیت انجمنی پیروی میکند .

یا بعبارت دیگر برای جوره مرتب : (a,b) ، (c,d) و (x,y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ رابطه :

$$((a,b)\oplus(c,d))\oplus(x,y)=(a,b)\oplus((c,d)\oplus(x,y))$$

همیشه حقیقت دارد .

زیرا : حقیقت رابطه فوق - از تعقیب خاصیت انجمنی عملیه جمع $(+)$ در $\mathbb{R}$ بآسانی ثابت شده میتوانند .

3 - جورهٔ مرتب $(0,0)$ ، که در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ موجود است ، عنصر بی تاثیر عملیه $\oplus$ میباشد .

زیرا : برای هر جوره مرتب (x,y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ما داریم :

$$\begin{aligned}(x,y)\oplus(0,0)=(0,0)\oplus(x,y)&=(x+0,\,y+0)\\&=(x,y)\end{aligned}$$

۴ـ برای هرعنصر (x, y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یک عنصر $(-x, -y)$ نظیر به عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ موجود میشود طوریکه رابطه ذیـــل را تحقیق کنـــد :

$$(x, y) \oplus (-x, -y) = (-x, -y) \oplus (x, y) = (0, 0)$$

۵ـ عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ازخاصیت تبدیلی پیروی میکنـــد .

زیـــرا : برای هر (a, b) و (x, y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

را بطـه : $(x, y) \oplus (a, b) = (a, b) \oplus (x, y)$

همیشـه حقیقت پذیر اســت .

حقیقت رابطه فوق ازتعقیب خاصیت تبدیلی عملیه جمـــع (+) درسِت $\mathbb{R}$ بآسانی ثابت شده میتوانـــد .

بناءً برتوضیحات فوق ما ادعا کرده میتوانیم که ساختمان $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ نظر به عملیه $\oplus$ یکگروه تبدیلی اســت .

درمرحله دوم ساختمان جدیدی که ازضرب کردن عناصرگروه $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ در اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ بوجود می آید طبق ذیل مطالعه مینمائیم :

برای هرجوره مرتب (x, y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ وهر عددحقیقی k عملیه ضرب k در (x, y) را قرارآتی تعریف میکنیم :

$$k \times (x, y) = (k \cdot x, k \cdot y)$$

درینصورت ما داریـــم :

اول ـ برای هر جوره مرتب (x, y) :

$$1 \times (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$$

دوم . برای هر عدد k و k' شامل $\mathbb{R}$ وهر (x,y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

رابطه: $(k\cdot k')\times(x,y)=k\times(k'\times(x,y))$ همیشه حقیقت دارد

زیرا: $(k\cdot k')\times(x,y)=(k\cdot k'\cdot x,k\cdot k'\cdot y)$

$$=k\times(k'\cdot x,k'\cdot y)$$

$$=k\times(k'\times(x,y))$$

سوم . برای هر عدد k و k' شامل $\mathbb{R}$ و هر جوره مرتب (x,y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ رابطه:

$(k+k')\times(x,y)=k\times(x,y)+k'\times(x,y)$ همیشه حاوی حقیقت است

زیرا:

$$(k+k')\times(x,y)=((k+k')\times x,(k+k')\times y)$$

$$=(k\cdot x+k'\cdot x,k\cdot y+k'\cdot y)$$

$$=(k\cdot x,k\cdot y)+(k'\cdot x,k'\cdot y)$$

$$=k\times(x,y)+k'\times(x,y)$$

چهارم . برای هر عدد حقیقی $\mathbb{R}$ و هر جوره مرتب (x,y) و (a,b) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ رابطه:

$k\times((x,y)+(a,b))=k\times(x,y)+k\times(a,b)$ همیشه دارای حقیقت است

زیرا: $k\times((x,y)+(a,b))=k\times(x+a,y+b)$

$$=(k\cdot(x+a),k\cdot(y+b))$$

$$=(k\cdot x+k\cdot a,k\cdot y+k\cdot b)$$

$$=(k\cdot x,k\cdot y)+(k\cdot a,k\cdot b)$$

$$=k\times(x,y)+k\times(a,b)$$

بنا بر توضیحات فوق نتیجه میشود که با در نظر داشت عملیه ضرب گروه $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ ساختمان جدیدی (جمعی) که پیدا میشود یك فضای وکتوری است .

مثال سوم . اگر ست تمام پولینوم ها را به $\mathbb{P}$ نشان دهیم ما میدانیم که این ست $\mathbb{P}$ نظر به عملیه جمع (+) یك گروه (تبدیلی) است . اکنون با در نظر داشت عملیه ضرب (.) $\mathbb{P}$ در $\mathbb{R}$ ساختمان جدید یکه حادث میشود یك فضای وکتوری است .

زیرا :

1 – برای هر پولینوم p ما داریم :

$$1\times p = p$$

2 – برای هر پولینوم p و هر عدد حقیقی k و k' ما داریم :

$$(k\cdot k')\times p = k\times(k'\times p)$$

3 – همچنان برای هر پولینوم p و هر عدد حقیقی k و k' ما داریم :

$$(k+k')\times p = (k\times p)+(k'\times p)$$

4 – بالاخره برای هر پولینوم p و p' و هر عدد حقیقی k ما داریم .

$$k\times(p+p') = (k\times p)+(k\times p')$$

در نتیجه گفته میتوانیم که ست پولینوم ها یك فضای وکتوری است .

مثال چهارم . اگر ست تمام ترادف ها را به $\mathbb{S}$ ارائه کرده وعملیه جمع (+) را در ست $\mathbb{S}$ قرار ذیل تعریف نمائیم :

تعریف :

حاصل جمع دو ترادف عبارت از یک ترادف سومی است طوریکه حد n ام این ترادف از حاصل جمع حد n ام های هر دو ترادف اولی حاصل میگردد .

مثلا : حاصل جمع دو ترادف u و v را قرار ذیل بدست می آوریم :

اگر $u = (0, 3, 4, 7, 8, 10, \ldots)$
و $v = (1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$ باشد ،

پس در نتیجه $u+v = (1, 7, 11, 17, 21, 26, \ldots)$ میشود .

اینک نشان میدهیم که S نظر به عملیه جمع (+) یک گروه تبدیلی است .

زیرا :

1 - حاصل جمع هر ان دو ترادف یک ترادف است .

2 - عملیه جمع در ست ترادف ها از خاصیت انجمنی پیروی میکند .

3 - ترادف که تمام حدود آن از صفر ساخته شده باشد عنصر بی تاثیر عملیه جمع در ست ترادف ها است .

4 - برای هر ترادف یک ترادف در ست ترادف ها موجود شده میتواند طوریکه حاصل جمع این دو ترادف عنصر بی تاثیر عملیه جمع ست ترادف ها گردد .

5 - عملیه جمع در ست ترادف ها از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .

بنابران گفته میتوانیم که ساختمان جبری ست S ترادف ها نظر به عملیه جمع یک گروه تبدیلی است .

تبصـــــره :ــ از خاصیت عملیه جمع درست اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) هر پنج خاصیت فوق با ثبات رسیده میتوانـــــد .

حال اگر عملیه ضرب عناصر $\mathbb{S}$ را در $\mathbb{R}$ مد نظرگرفته وساختمان جدیدیکه پیدا میشود مورد مطالعه قرارد هیم دیده میشود کـه این ساختمان جدید جبری یک فضای وکتوری اســـت .

غرض وضاحت موضوع عملیه ضرب عناصر $\mathbb{S}$ را در $\mathbb{R}$ قرارذیل ــ تعریـــف میکنیم :

تعریف : اگـر تمام جملات یک ترادف را دریک عدد حقیقـی k ضرب نمائیم ترادف جدیدی که پیدا میشود عبارت ازحاصلضرب ترادف اولی درعدد k است .

بطور مثال : اگر $u = (0, 3, 4, 7, 8, 10, \dots)$ باشد ،
پس $k \times u = (0, 3k, 4k, 7k, 8k, 10k, \dots)$ میشود .

عملیـه ضرب اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) در عناصر $\mathbb{S}$ دارای خواص ذیل اســـت:

اول ــ برای هر تــــرادف $s \in \mathbb{S}$ ما داریـــم :

$$1 \times s = s$$

دوم ــ برای هر ترادف s و هرعدد حقیقی k و k' ما داریم :

$$(k \cdot k') \times s = k \times (k' \times s)$$

سوم :— همچنان برای هر ترادف S و دو عدد حقیقی k و k' ما داریم :

$$(k+k')\times S = (k\times S)+(k'\times S)$$

چهارم :— بالاخره برای هر ترادف S و S' و هر عدد حقیقی k ما داریم :

$$k\times(S+S') = (k\times S)+(k\times S')$$

بنا بر آن ادعا میتوان نمود که $\mathcal{S}$ یك فضای وکتوری است .

تبصره : از مطالعه امثال فوق نتیجه میشود، که ساختمان فضای وکتوری یکپایه اساسی ریاضیات را تشکیل داده و در شعب مختلفه ریاضیات : الجبره، هندسه و انالیز مورد استعمال زیاد دارد .

4-2 . علامه گذاری در یك فضای وکتوری :

در یك فضای وکتوری $\mathcal{V}$ علامه گذاری ذیل معمول است :

1- عناصر یك فضای وکتوری $\mathcal{V}$ را بنام وکتور یاد میکنند . چنانچه اگر عنصر x یك فضای وکتوری $\mathcal{V}$ باشد آنرا به $\vec{x}$ ارائه نموده وبنام وکتور x یاد مینمایند .

2- عملیه گروه ای مربوط فضای وکتوری را جمع نامیده و به علامه « + » ارائه میکنند .

3- اگر وکتور a یعنی $\vec{a}$ یکعنصر فضای وکتوری باشد ، تضاد آنرا به $-\vec{a}$ در $\mathcal{V}$ نشان میدهند .

4- عنصر (وکتور) بی تاثیر عملیه جمع فضای وکتوری $\mathcal{V}$ را صفر وکتور نامیده و به $\vec{0}$ ارائه میکنند .

5 . برای اینکه عملیه ضرب در یک فضای وکتوری $\mathbb{V}$ ازعملیه ضرب (.) در $\mathbb{R}$ (که داخلی است) تمیزشود درین کتاب ما عملیه ضرب یکعدد حقیقی k را در عناصر فضای وکتوری $\mathbb{V}$ توسط علامه « × » نشان میدهیم .

مثلاً : برای هرعدد حقیقی k و هر وکتور $\vec{x}$ فضای وکتوری $\mathbb{V}$ ما مینویسیم : $k \times \vec{x}$

4-3 . خواص اولیه فضای وکتوری

خاصیت اول . برای هرعدد حقیقی k ما داریم :

$$k \times \vec{0} = \vec{0}$$

ثبوت :

$$k \times \vec{0} = k \times (\vec{0} + \vec{0})$$

$$k \times \vec{0} = (k \times \vec{0}) + (k \times \vec{0})$$

چون فضای وکتوری یک گروه بوده وتمام خواص آنرا داراست پس دریک فضای وکتوری ما اختصار کرده میتوانیم .

حال اگر از اطراف مساوات فوق $k \times \vec{0}$ را طرح کنیم درنتیجه ما داریم :

$$\vec{0} = k \times \vec{0}$$

$$k \times \vec{0} = \vec{0} \quad \ldots\ldots \text{ویا}$$

Q. E. D.

خاصیت دوم . دریک فضای وکتوری $\mathbb{V}$ برای هر وکتور $\vec{x}$ ما داریم :

$$0 \times \vec{x} = \vec{0}$$

ثبوت :

$$0 \times \vec{x} = (0 + 0) \times \vec{x}$$

$$0 \times \vec{x} = (0 \times \vec{x}) + (0 \times \vec{x})$$

پس از اختصار ما داریم :

$$\vec{0} = 0 \times \vec{x}$$

ویا . . . . . $0 \times \vec{x} = \vec{0}$

$Q \cdot E \cdot D \cdot$

خاصیت سوم ، در یک فضای وکتوری V اگر $k \times \vec{x} = \vec{0}$ باشد ،

یا $k = 0$ ویا $\vec{x} = \vec{0}$ میباشد .

ثبوت: در صورتیکه $k = 0$ باشد درینصورت موضوع حل است.

اگر $k \neq 0$ باشد درینصورت ما اطراف معادله: $k \times \vec{x} = \vec{0}$

مفروض را به $\frac{1}{k}$ ضرب مینمائیم .

درینصورت ما داریم :

$$\frac{1}{k} \cdot (k \times \vec{x}) = \frac{1}{k} \times \vec{0}$$

چون . . . . $\left(\frac{1}{k} \cdot k\right) \times \vec{x} = \vec{0}$

$$1 \times \vec{x} = \vec{0}$$

پس . . . . $\vec{x} = \vec{0}$

تبصره : از بررسی این خواص بملاحظه میرسد که تبولی هر چهار خاصیت ضرب

یکعدد حقیقی k در عناصر یک فضای وکتوری V ضروریست . زیرا اگر

از تبولی کدام یک از خواص چهارگانه مذکور ابا ورزیده شود این خواص

فضای وکتوری ثابت شده نمیتوانند .

خاصیت چهارم ، برای هر وکتور $\vec{x}$ یک فضای وکتوری V

ما داریم :

$$(-1) \times \vec{x} = -\vec{x}$$

ثبوت: چون $\vec{x}$ - تضاد $\vec{x}$ در $\mathcal{V}$ بوده و یگانه است، درین جا نشان باید داد که $(-1)\times\vec{x}$ نیز تضاد $\vec{x}$ است.

ما داریم:

$$\vec{x}+(-1)\times\vec{x}=1\times\vec{x}+(-1)\times\vec{x}=(1+(-1))\times\vec{x}$$
$$=0\times\vec{x}$$
$$=\vec{0}$$

بنابران $(-1)\times\vec{x}=-\vec{x}$

Q. E. D.

تبصره: ما میدانیم که ساختمان یک فضای وکتوری باساس پنج اصل ساختمان گروه تبدیلی و چهار اصل ضرب عناصر فضای وکتوری در . . . . یکعدد حقیقی بناء یافته است. ولی قابل تذکر است که اصل تبدیلی گروه آن مستقل نبوده و از هشت اصل متباقی استخراج شده میتواند.

ثبوت: برای هر وکتور $\vec{x}$ و $\vec{y}$ یک فضای وکتوری $\mathcal{V}$ افاده: $(1+1)\times(\vec{x}+\vec{y})$ بدو طریقه ذیل محاسبه شده میتواند:

اول:
$$(1+1)\times(\vec{x}+\vec{y})=(1+1)\times\vec{x}+(1+1)\times\vec{y}$$
$$=1\times\vec{x}+1\times\vec{x}+1\times\vec{y}+1\times\vec{y}$$
$$=\vec{x}+\vec{x}+\vec{y}+\vec{y}\quad\ldots(1)$$

دوم:
$$=1\times(\vec{x}+\vec{y})+1\times(\vec{x}+\vec{y})$$
$$=1\times\vec{x}+1\times\vec{y}+1\times\vec{x}+1\times\vec{y}$$
$$=\vec{x}+\vec{y}+\vec{x}+\vec{y}\quad\ldots(2)$$

از مساوات های: (1) و (2) ما مینویسیم:

$$\cancel{\vec{x}}+\vec{x}+\vec{y}+\cancel{\vec{y}}=\cancel{\vec{x}}+\vec{y}+\vec{x}+\cancel{\vec{y}}$$

ویا . . . $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

ازمساوات اخیر نتیجه میشود که اصل تبدیلی دریك فضاي وکتوري مستقل نبوده و از دیگر اصول آن استحصال شده میتواند .

Q . E . D .

تمرینات

1 . ثابت کنید که ساختمان $\mathbb{R}$ یك فضاي وکتوري است .

2 . دررابطه : $k\times(k'\times\vec{x})=(k\cdot k')\times\vec{x}$ عملیه « × » ازخاصیت انجمنی پیروي نمیکند چرا ؟

3 . جدول : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ راکه درآن a، b، c و d شامل $\mathbb{R}$ بوده وبنام متریکس یاد میشود مد نظر بگیرید .

a . اگرعملیه جمع (+) را درین متریکس قرارذیل تعریف نمائیم که :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$$

ثابت نمائید که ساختمان این ست متریکس ها نظر به عملیه + یك گروه تبدیلی است .

b . اگر حاصل ضرب یك متریکس دریك عدد حقیقی k طبق ذیل تعریف شود :

$$k\times\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k\cdot a & k\cdot c \\ k\cdot b & k\cdot d \end{pmatrix}$$

ثابت کنید که ساختمان گروه متریکس ها یك فضاي وکتوري است .

4 . ثابت کنید که ساختمان ست تمام پولینوم هاي درجه دوم وکتر از دو یك فضاي وکتوري است .

۵. اگر ست تمام تطبیق ها را که او منبع (دومین) Dom $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ را به $\mathbb{A}$ ارائه کنیم وعملیه جمع را در $\mathbb{A}$ قرار ذیل تعریف کنیم : که برای هر تطبیق f و g شامل $\mathbb{A}$ ما داشته باشیم :

$$f+g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x)+g(x)$$ گردد .

مثلاً : برای هر عدد حقیقی x ما داشته باشیم :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt[3]{x}$$
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

که درینصورت :

$$f+g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt[3]{x}+|x|$$

a . نشان دهید که ست $\mathbb{A}$ نظر به این عملیه جمع یک گروه تبدیلی است .

b . اگر عملیه ضرب هر عدد حقیقی k را در هر تطبیق f شامل $\mathbb{A}$ طبق ذیل تعریف کنیم :

$$k \times f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto k \cdot f(x)$$

ثبوت کنید که ساختمان جبری $\mathbb{A}$ فضای وکتوری است .

۶ . ثبوت کنید که در هر فضای وکتوری $\mathbb{U}$ برای هر $\vec{a}$ شامل $\mathbb{U}$ رابطه : $2 \times \vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$ حقیقت دارد .

۷ . ثبوت کنید که در هر فضای وکتوری $\mathbb{U}$ حل معادله : $\vec{x} + \vec{x} = \vec{a}$ یگانه است .

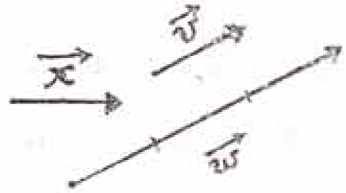
۸ . آیا حل معادله : $x + x = a$ در هر گروه یگانه است ؟

4-4 . ترکیبات خطی

4-4-a . ترکیبات خطی یک وکتور

تعریف: هر وکتوری که بشکل $k \times \vec{a}$ درآورده شده بتواند (درصورتیکه k یکعدد حقیقی است) بنام ترکیب خطی وکتور $\vec{a}$ یاد میشود.

مثال اول . نظر به شکل در فضای وکتوری وکتور هندسی $\vec{w}$ یک ترکیب خطی $\vec{v}$ بوده و $\vec{o}$ هم یک ترکیب خطی $\vec{v}$ میباشد.



زیرا: $\vec{w} = 3 \times \vec{v}$ میشود.

که درینجا $k = 3$ و $\vec{v} = \vec{a}$ است.

وهم $\vec{o} = 0 \times \vec{v}$

که درینجا $k = 0$ میباشد.

در شکل فوق $\vec{w}$ یک ترکیب خطی $\vec{x}$ نیست چرا؟

مثال دوم . در فضای وکتوری $\mathbb{R}^2 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ جوره مرتب $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ یک ترکیب خطی $(1,2)$ است.

زیرا: ... $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) = \sqrt{3} \times (1,2)$ میشود.

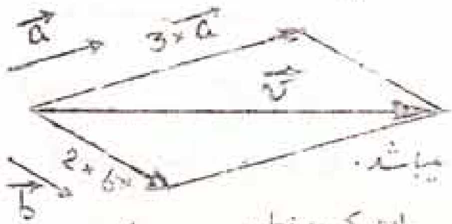
$(3,7)$ یک ترکیب خطی $(1,2)$ نیست. چرا؟

۶.۵.۲ ترکیب خطی دو وکتور $\vec{a}$ و $\vec{b}$

تعریف : هر وکتور $\vec{v}$ که بشکل : $k_1 \times \vec{a} + k_2 \times \vec{b}$ درحالیکه k_1 و k_2 اعداد حقیقی اند، تجزیه شده میتواند ، بنام ترکیب خطی دو وکتور $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یاد میشود .

مثال اول : نظر به شکل فــیل ، درفضای وکتوری وکتورهای هندسی، هر وکتور موازی مستوی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یک ترکیب خطی دو وکتور $\vec{a}$ و $\vec{b}$ میباشد .

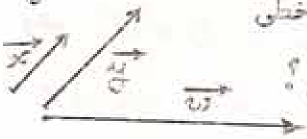
زیرا : نظر به شکل ما داریم :



$$\vec{v} = 3\times\vec{a} + 2\times\vec{b}$$

که درینجا $k_1 = 3$ و $k_2 = 2$ میباشد.

درشکل مقابل آیا وکتور $\vec{w}$ یک ترکیب خطی دو وکتور $\vec{x}$ و $\vec{y}$ شده میتوانــد ؟



مثال دوم : اگر فضای وکتوری پولینوم درجه دوم وکمتر از دو را به $\mathbb{P}_2$ ارائه کنیم دران دو وکتور $\vec{a}$ و $\vec{b}$ شامل $\mathbb{P}_2$ را ، درصورتیکه $\vec{a} = x^2 - 1$ و $\vec{b} = 2x+3$ باشند مد نظر بگیریم

پولینوم $\vec{v} = 2x^2 + 6x + 7$ یک ترکیب خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است .

زیرا :
$$\begin{aligned}\vec{v} = 2x^2 + 6x + 7 &= 2x^2 - 2 + 6x + 9 \\ &= 2(x^2-1) + 3(2x+3) \\ &= 2\times\vec{a} + 3\times\vec{b}\end{aligned}$$

پس ... $\vec{v} = 2\times\vec{a} + 3\times\vec{b}$

4-4-C . ترکیبخطی سه وکتور $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$

تعریف : هر وکتور $\vec{v}$ که به شکل :

$$\vec{v} = k_1 \times \vec{a} + k_2 \times \vec{b} + k_3 \times \vec{c}$$

درحالیکه k_1 ، k_2 و k_3 اعداد حقیقی اند ، تجزیه شده بتواند بنام ترکیب خطی هر سه وکتور $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ یاد میشود .

مثال اول . اگر ست متریکس ها (جدول ها) دودر دو به M_2 نشان داده شود درینصورت متریکس $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ یک ترکیبخطی سه متریکس : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ میباشد .

زیرا :

$$1 \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

میشود.

اما متریکس : $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ یک ترکیب خطی سه متریکس داده شده نمیباشد . چرا ؟ توضیح کنید .

مثال دوم . در فضای وکتوری $\mathbb{R}^3$ اگر $\vec{a} = (1, 0, 0)$ ، $\vec{b} = (0, 1, 0)$ و $\vec{c} = (0, 0, 1)$ مد نظر گرفته شود ، درینصورت $\vec{v} = (-3, 4, -5)$ یک ترکیبخطی هر سه وکتور $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ معروض است.

زیرا :

$$\begin{aligned} \vec{v} = (-3, 4, -5) &= (-3, 0, 0) + (0, 4, 0) + (0, 0, -5) \\ &= -3 \times (1, 0, 0) + 4 \times (0, 1, 0) + (-5) \times (0, 0, 1) \\ &= (-3) \times \vec{a} + 4 \times \vec{b} + (-5) \times \vec{c} \end{aligned}$$

پس

$$\vec{v} = (-3) \times \vec{a} + 4 \times \vec{b} + (-5) \times \vec{c}$$

ایا هرعنصر کیفی (x, y, z) فضای وکتوری $\mathbb{R}^3$ یك ترکیب

خطی سه وکتور $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مفروض شده میتواند ؟ چرا ؟

٤-٤.٤ . ترکیب خطی n وکتور :

تعریف : هر وکتور $\vec{v}$ ای که به شکل :

$$\vec{v} = k_n \times \vec{a}_n + k_{n-1} \times \vec{a}_{n-1} + k_{n-2} \times \vec{a}_{n-2} + \dots + k_2 \times \vec{a}_2 + k_1 \times \vec{a}_1$$

، درحالیکه k_1 ، k_2 ، . . . ، k_{n-1} ، k_n اعداد حقیقی اند ،

آورده شده بتواند بنام ترکیب خطی وکتور های :

$\vec{a}_1$ ، $\vec{a}_2$ ، $\vec{a}_3$ ، . . . ، $\vec{a}_{n-1}$ ، $\vec{a}_n$ یاد میشود .

وکتور $\vec{v}$ را به $\sum_{i=1}^{n} k_i \times \vec{a}_i$ نیزارائه میکنند .

بطور مثال :

اگرفضای وکتوری پولینوم های درجه n ام وکمتراز n را

به $\mathbb{P}_n$ ارائه کنیم درینصورت پولینوم : $\vec{X}$ درحالیکه

$$\vec{X} = k_n \times x^n + k_{n-1} \times x^{n-1} + k_{n-2} \times x^{n-2} + \dots + k_2 \times x^2 + k_1 \times x^1 + k_0 \times x^0$$

یك ترکیب خطی پولینوم های : x^n ، x^{n-1} ، x^{n-2} ، . . . ، x^0

میباشد . درینجا k_0 ، k_1 ، k_2 ، . . . ، k_n اعداد حقیقی

را ارائه میکنند .

تمرینات

1. ثبوت کنید که $(2,3)$ در $\mathbb{R}^2$ ترکیب خطی $(1,0)$ و $(0,1)$ است.

2. آیا یک پولینوم درجه سوم ترکیب خطی دو پولینوم درجه دوم شده میتوانند؟ ویا خیر؟ چرا؟

3. ثبوت کنید که پولینوم $x+1$ ترکیب خطی پولینوم های: x^2+x و x^2-1 میباشد.

4. ثبوت کنید که جوره مرتب $(2,2)$ یک ترکیب خطی $(2,2)$ در $\mathbb{R}^2$ است.

5. نشان دهید که متریکس: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ترکیب خطی متریکس های: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ است.

6. نشان دهید که متریکس: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ترکیب خطی متریکس های: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ شده نمیتواند.

7. ترادف ثابت: $(1,1,1,1,\ldots)$ را باترادف: $(0,1,2,3,4,\ldots)$ مدنظر بگیرید.

a. ثبوت کنید که هر ترادف ثابت: $(a,a,a,\ldots)$ یک ترکیب خطی ترادف ثابت فوق است.

b. نشان دهید که تصاعد حسابی که فرق مشترک شان 3 وحد اول آن 2 باشد یک ترکیب خطی هردو ترادف مفروض است.

c. ثبوت کنید که هر تصاعد حسابی یک ترکیب خطی هردو ترادف مفروض است.

5-4 . فضای وکتوری فرعی

> تعریف : S یک فضای وکتوری فرعی فضای وکتوری U گفته میشود در صورتیکه :
> اول . $S \subset U$ بوده و دوم . تحت عین عملیه ای که U یک فضای وکتوری است S نیزیک فضای وکتوری باشد .

تبصره : برای بررسی شرط دوم ضرورىست تا ده اصل فضای وکتوری بالای ست S تحقیق شود ، ولی ازینکه $S \subset U$ است درینصورت ان اصولی که برای تمام عناصر U قابل تصدیق است برای تمام عناصر S نیز قابل تصدیق میباشد .

درینصورت ما از بررسی اصول : انجمنی ، تبدیلی و چهار اصل ضرب یک عدد حقیقی در وکتور ها صرف نظر (میتوان نمود) . اینک در ذیل قضیه ائی را معرفی مینمائیم تا به کمک آن فضای فرعی بودن یک ست فرعی یک فضای وکتوری را بصورت آسان مورد مطالعه قرار داده بتوانیم :

> قضیه : اگر U یک فضای وکتوری و S یک ست فرعی غیر خالی U باشد برای اینکه S یک فضای وکتوری فرعی U ثابت شود — موجودیت دو حقیقت ذیل کافی است :
> اول . عملیه جمع در S داخلی باشد ،
> دوم . حاصلضرب هر وکتور کیفی شامل S در هر عدد حقیقی شامل S گردد .

ثبوت: قرار فرضیه $U \subset S$ است. اکنون ثابت باید کرد که S نیز یک فضای وکتوری نظر به عین عملیه U است.

در مرحلهٔ اول باید نشان داد که S یک گروه تبدیلی است، و این حقیقت دارد، زیرا:

1- عملیه جمع در S داخل است. (قرار فرضیه)

2- عملیه جمع در S از خاصیت اتحادی پیروی میکند. (قرار تبصره)

3- چون S یک ست فرعی غیرخالی U است پس اقلاً یک عنصر $\vec{a}$ در S شامل میباشد و در صورتیکه این $\vec{a}$ را در عدد حقیقی صفر ضرب کنیم، به اساس جزء دوم این فرضیه ما داریم:

$$0 \times \vec{a} \in S$$

$$\text{ویا} \quad \vec{0} \in S$$

ازین نتیجه میشود که عنصر بی تاثیر عملیه جمع یعنی $\vec{0}$ شامل S میباشد.

4- برای هر وکتور $\vec{b}$ شامل S نظر به جزء دوم فرضیه میتوان نوشت:

$$(-1) \times \vec{b} \in S \quad \text{بوده}$$

$$\text{زیرا} \quad (-1) \times \vec{b} = -\vec{b}$$

$$\text{پس} \quad -\vec{b} \in S \quad \text{است.}$$

ازین نتیجه میشود که هر عنصر کیفی S دارای یک تضاد در S میباشد.

5 - نظر به تبصره عملیه جمع در S تبدیلی است .

بناءً گفته میتوانیم که S نظر به عملیه جمع یک گروه تبدیلی است .

درمرحلهٔ دوم چون هر عنصر S ضرب هرعدد حقیقی شامل S است ونظر به تبصره این عملیه ضرب عناصر S در اعداد حقیقی هر چهار اصل اخیر فضای وکتوری را تحقیق میکند . بناءً ادعا میتوان نمود که S یک فضای وکتوری بوده ودرنتیجه یک فضای وکتوری فرعی V میباشد .

Q . E . D .

مثال اول : ست پولینوم های درجه دوم وکمتراز دو یک فضای وکتوری فرعی فضای وکتوری پولینوم هاست .

زیرا : اول : ست پولینوم های درجه دوم وکمتراز یک ست فرعی ست تمام پولینوم هاست .

دوم : ست پولینوم های درجه دوم وکمتراز دو تحت عین عملیه ای که ست پولینوم ها فضای وکتوری میشود نیز یک فضای وکتوری است .

بناءً بران ست پولینوم های درجه دوم وکمتراز دو یک فضای وکتوری فرعی فضای وکتوری پولینوم هاست .

مثال دوم : اگر ست تمام وکتور های که دارای عین استقامت (در هرد و جهت) $\vec{v}$ بوده (صفر وکتور یعنی $\vec{0}$ نیزدران شامل است) به B ارائه کنیم درینصورت B یک فضای وکتوری فرعی ست تمام وکتور های که درمستوی $\vec{v}$ واقع اند میباشد .

زیــرا : اگر ست تمام وکتور های را که در مستوی $\overrightarrow{\sigma}$ را قــسمت نشان دهیم چون V یک فضای وکتوری بوده و B یک ست فرعی V غیرخالی است ..

پس درینصورت غرض تثبیت فضای وکتوری بودن B بررسی و جـود دو حقیقت ذیل کا فــی اســت ؛

اول . نشان باید داد که عملیه جمع در B داخلـــی اســت .

دوم . نشان باید داد که حاصل ضرب هر وکتور کیفی شامل B در هر عدد حقیقی ، شامل B اســت .

اول . ما میدانیم که حاصل جمع هر دو وکتوری که دارای عین استقامت باشند عبارت از یک وکتوری است ، که دارای استقامت وکتور های مفروض میباشد .
یعنی عملیه جمع در B داخلـــی اســت .

دوم . ما میدانیم که از ضرب کردن یک وکتور در یک عدد حقیقی وکتور حاصلـــه
این حاصلضرب دارای عین استقامت وکتور اولی میباشد . یعنی حاصلضرب هر وکتور کیفی شامل B در یک عدد حقیقی یک وکتور شامل B است .

بناءً نظر به قضیه فوق ادعا کرده میتوانیم که B یک فضای وکتوری فرعی V است .

مثال سوم . ست : $D=\{(a,-a) \mid a\in\mathbb{R}\}$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ است .

زیــرا : برای هر عدد حقیقی $a\in\mathbb{R}$ داریم :

$$D\subset\mathbb{R}^2 \text{ بوده و } D\neq\Phi \,.$$

چون $\mathbb{R}^2$ یک فضای وکتوری است ، پس غرض تثبیت فضای وکتوری بودن D
کافیست تا نشان دهیم کــــه :

اول • عملیه جمع در D داخلـــی اســـت•

دوم • برای هر $(x,-x)$ شامل D و برای هر عدد حقیقی $k \in \mathbb{R}$،

$k \times (x,-x) \in D$ میباشـــد •

ما میگوئیم که ست D نظر به عملیه ضرب در یکعدد حقیقی مستقر (Stable) است

اول • برای هر دو عنصر کیفی : $(x,-x)$ و $(y,-y)$ شامـل D

ما داریم :

$$(x,-x)+(y,-y) = (x+y, -x-y)$$

$$= ((x+y), -(x+y))$$

ازین نتیجه میشود که عملیه جمع در D داخلی اســت•

دوم • برای هر $(x,-x) \in D$ وهر $k \in \mathbb{R}$ ما داریم :

$$k \times (x,-x) = (k \cdot x, k \cdot (-x))$$

$$= (k \cdot x, -k \cdot x)$$

ازین نتیجه میشود که $k \times (x,-x) \in D$ یعنی D نظار به عملیه ضرب

مستقـــر اســـت•

بنا برقضیه فوق ادعا میتوا نکرد که D یك فضای وکتوری فـــرعـــــــی

$\mathbb{R}^2$ اســـت•

مثـال چهارم • ست تمام متریکس های شکل : $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 0 \end{pmatrix}$ یك فضای وکتوری

فرعی ست متریکس های دو در دو M_2 است •

زیــرا : اگر ست تمام متریکس های شکل : $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 0 \end{pmatrix}$ را به A نشــان

دهیـــم ، درینصورت $A \subset M_2$ بوده $A \neq \phi$ است •

اکنون نشان باید داد که:

اول • عملیه جمع در A داخلی است •

دوم • ست A نظر به عملیه ضرب ستقیر است •

اول • اگر دو عنصر کیفی $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 0 \end{pmatrix}$ ست A را

در نظر بگیریم در ینصورت داریم :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 0 \end{pmatrix}$$

از رابطه فوق دیده میشود که عملیه جمع در A داخلی است •

دوم • برای هر عنصر کیفی $\begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$ شامل A و هر $k \in \mathbb{R}$ داریم :

$$k \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x & k \cdot y \\ 2k \cdot x & 0 \end{pmatrix}$$

از رابطه اخیر مشاهده میرسد که A نظر به عملیه ضرب در یک عدد حقیقی کیفی k مستقر است •

بنا بر آن گفته میتوانیم که A یک فضای وکتوری فرعی M_2 است •

مثال پنجم • ست تمام حله های (x, y) معادله : $2x + 3y = 0$

یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ است •

زیرا : اگر این ست حله های مورد نظر را به B نشان دهیم

در ینصورت $B \subset \mathbb{R}^2$ است •

چون معادله : $2x + 3y = 0$ لا اقل دارای یک حل

مثلاً : $(0, 0)$ میباشد •

پس B خالی نیست •

اکنون : اول • نشان میدهیم که عملیه جمع در B داخلی است •

زیرا ؛ اگر (a, b) و (c, d) دو حل کیفی معادلهٔ مفروض

مد نظر گرفته شود ما داریم :

$$2a + 3b = 0$$
$$2c + 3d = 0$$

ازجمع کردن این دو مساوات فوق حاصل میشود که ؛

$$2a + 2c + 3b + 3d = 0$$

ویا . . . $2(a+c) + 3(b+d) = 0$

ازین رابطه اخیر بمشاهده میرسد که عملیه جمع در B داخلی است•

دوم • نشان میدهیم که B نظر به عملیه ضرب در یک عدد حقیقی مستقر است•

زیرا ؛ برای هر حل کیفی : (p, q) معادله مفروض و هر عدد حقیقی

k ما داریم :

$$2p + 3q = 0$$

ویا . . . . $k \times (2p + 3q) = 0$

ویا . . . . $k \cdot 2p + k \cdot 3q = 0$

ویا . . . . $2(k \cdot p) + 3(k \cdot q) = 0$

ازین نتیجه میشود که $k \cdot p$ و $k \cdot q$ نیز یک حل معادله

مفروض بوده و ست B نظر به عملیه ضرب در یک عدد

حقیقی مستقر است •

بنا برآن B یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ است •

Q . E . D .

مثال ششم . ست : $F=\{(a,2a+1) \mid a\in\mathbb{R}\}$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ نمیباشد .

زیرا : برای هر $a\in\mathbb{R}$

نداریم : $(a,2a+1)\neq(0,0)$

پس . . . . $(0,0)\notin F$

بنابران گفته میتوانیم که F فضای وکتوری نیست .

Q.E.D.

مثال هفتم . ست حله های معادله : $2x+3y=1$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ نمیباشد .

زیرا : اگرست حله های معادله فوق را به A نشان دهیم ـ

درینصورت : $(0,0)\notin A$.

چون A دارای عنصر بی تاثیر عملیه جمع نمیباشد .

بنابران A یک فضای وکتوری نیست .

Q.E.D.

تمـــــرینـــــات

1. اگر ست پولینوم های درجه سوم وکمتر از سه را به P_3 و از درجه پنجم وکمتر از آن را به P_5 ارائه کنیم، نشان دهید که P_3 یک فضـــای وکتوری فرعی P_5 اســـت.

2. اگر ست تمام توابع را به $\mathbb{F}$ نشان داده وقبول کنیم که $\mathbb{F}$ یـــک فضای وکتوری است، نشان دهید که ست تمام توابع مشتق پذیـــر یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{F}$ اســـت.

3. نشان دهید که ست حله های معادله تفاضلی : $y''-y=0$ یک فضای وکتوری فرعی ست تمام توابع مشتق پذیر است.

4. ثبوت کنید که ست پولینوم درجه سوم یک فضای وکتـــــوری فرعی P_3 نیســـت.

5. ثبوت کنید که ست تمام آن متریکس های که ویتر منـــانت (دالــــــه) (Determinants) شـــان صفـــر باشـــد، یک فضـــای وکتوری فـــرعـــی $\mathbb{M}_2$ نیســـت.

6. نشان دهید که ست تمام توابع صعودی یک فضای وکتوری فرعـــــی ست تمام توابع نمیباشـــــد.

7. ثبوت کنید که ست ترادف های حسابی (ترادف‌هائی که فرق بیـــــن دو حد متوالـــی آن یک عـــدد ثابت اســـت) یـــک فضای وکتوری فرعی ست تمام ترادف ها اســـت.

۸. ثبوت کنید که ست ترادف‌های هندسی (ترادفی است که نسبت بین دو حد متوالی آن یک عدد ثابت است.) یک فضای وکتوری فرعی ست تمام ترادف‌ها نیست.

۹. ثبوت کنید که : (a). $\{(0,0,0)\}$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^3$ است.

همچنان (b). $\{(0,0)\}$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ است.

۱۰. نشان دهید که (a). $\mathbb{R}^+$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}$ نیست.

همچنان (b). $\mathbb{R}^-$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}$ نیست.

۱۱. نشان دهید که $\mathbb{R}$ صرف دارای دو فضای وکتوری فرعی؛ که آن هم عبارت از خود $\mathbb{R}$ و $\{0\}$ است میباشد.

۱۲. اگر V یک فضای وکتوری بوده S_1 و S_2 دو فضای وکتوری فرعی V باشند،

(a). نشان دهید که $S_1 \cap S_2$ نیز یک فضای وکتوری فرعی V است.

(b). راجع به $S_1 \cup S_2$ چه گفته میتوانید؟

4-6 . پایه و بعد

مثال اول . هر جوره مرتب (x, y) شامل $\mathbb{R}^2$ به دو جوره مرتب : $(0,1)$ و $(1,0)$ بصورت یگانه تجزیه شده میتواند .

یعنی : $(x, y) = x \times (1,0) + y \times (0,1)$.

جوره های مرتب : $(0,1)$ و $(1,0)$ را بنام پایه (قاعده) $\mathbb{R}^2$ میدانند .

مثال دوم . هر سه گانه ای مرتب (x, y, z) شامل $\mathbb{R}^3$ بدو سه گانه ای مرتب : $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ تجزیه شده نمیتواند .

یعنی برای هر قیمت x ، y و z اعداد حقیقی k_1 و k_2 را پیدا کرده نمیتوانیم تا بصورت عموم رابطه :

$$(x, y, z) = k_1 \times (1,0,0) + k_2 \times (0,1,0)$$

حقیقت داشته باشد .

مثلاً :

$(2,3,5) = k_1 \times (1,0,0) + k_2 \times (0,1,0)$ شده نمیتوانند .

درینصورت ما میگوئیم که محض دو سه گانه ای مرتب : $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ پایه $\mathbb{R}^3$ نمیباشند .

ولی اگر سه گانه ای : $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ در $\mathbb{R}^3$ در نظر گرفته شود ، دیده میشود که هر سه گانه ای (x, y, z) شامل $\mathbb{R}^3$ به هر سه سه گانهٔ مرتب مفروض بصورت یگانه تجزیه پذیر است .

یعنی: $(x,y,z)=x\times(1,0,0)+y\times(0,1,0)+z\times(0,0,1)$ میشود.

درینصورت سه گانه های مرتب: $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ را بنام پایه $\mathbb{R}^3$ یا Base یاد مینماییم.

مثال سوم. جوره های مرتب: $(1,2)$، $(2,2)$ و $(2,1)$ در $\mathbb{R}^2$ پایه نیست. زیرا اگر ما یکعنصر کیفی $\mathbb{R}^2$ فرضاً $(5,5)$ درنظر بگیریم، دیده میشود که $(5,5)$ بیش از یک صورت بالای جوره های مرتب مفروض تجزیه پذیر است.

چنانچه:

$$(5,5)=1\times(1,2)+1\times(2,2)+1\times(2,1)$$

$$(5,5)=2\times(1,2)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(2,2)+2\times(2,1)$$

$$(5,5)=0\times(1,2)+\frac{5}{2}\times(2,2)+0\times(2,1)$$

وعلی القیاس ....

تعریف: یک سیستم n وکتور: $(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\dots,\vec{\alpha}_n)$ شامل فضای وکتوری V پایه V نامیده میشود، در صورتیکه هرعنصر V بالای سیستم مذکور بصورت یگانه تجزیه پذیر باشد.

مثال چهارم. در فضای وکتوری $\mathbb{P}_3$ وکتورهای: $(x^3, x^2+1, x^2-1, 2x)$ یک پایه است.

زیــرا : برای هر پولینوم کیفی y شامل $\mathbb{P}_3$ فضاء : $y = ax^3+bx^2+cx+d$

ما باید که اعداد حقیقی k_1 ، k_2 ، k_3 و k_4 را پیدا نمائیم طوریکـه :

$$y = k_1\times(x^3)+k_2\times(x^2+1)+k_3\times(x^2-1)+k_4\times(2x)$$ گردد .

$$= k_1x^3+(k_2+k_3)x^2+2k_4x+k_2-k_3$$

ازینجا :

$$k_1 = a$$
$$k_2+k_3 = b$$
$$2k_4 = c$$
$$k_2-k_3 = d$$ میشود .

ازحل معادلات فوق نتیجه میشود کـــــه :

$k_1 = a$ ، $k_2 = \frac{b+d}{2}$ ، $k_3 = \frac{b-d}{2}$ و $k_4 = \frac{c}{2}$ میشود .

ازینکه قیمت های : k_1 ، k_2 ، k_3 و k_4 نظر به قیمت های معیـن a ، b ، c و d ضرب های پولینوم y یگانه اســـــت

بنا بران ادعا میتوان نمود که پولینوم y بالای وکتورهای :

$(x^3, x^2+1, x^2-1, 2x)$ بصورت یگانه قابل تجزیه است . ویا بعبارت دیگـــر

وکتورهای $(x^3 ، x^2+1 ، x^2-1 , 2x)$ پایه فضای وکتوری $\mathbb{P}_3$

اســـت .

مثال پنجم . درفضای وکتوری $\mathbb{R}^2$ وکتورهای : $(3,4)$ و $(6,8)$

پایه شده نمیتوا نـنـــد .

زیرا : اگر یك عنصر فضای $\mathbb{R}^2$ شامل $(3,5)$ را ما، نظر بگیریم

درینصورت ما دو عدد حقیقی k_1 و k_2 را بدست آورده نمیتوانیم

طوریکه : $(3,5)= k_1\times(3,4) + k_2\times(6,8) \ldots (1)$ گردد .

در صورتیکه رابطه فوق دارای حقیقت می بود بایست که :

$$(3,5)=(3k_1, 4k_1) + (6k_2, 8k_2)$$
$$=(3k_1+6k_2\,,\ 4k_1+8k_2)$$

ازینجا :
$$\begin{cases} 3 = 3k_1+6k_2 \\ 5 = 4k_1+8k_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12=12k_1+24k_2 \\ 15=12k_1+24k_2 \end{cases}$$

دیده میشود که سیستم فوق دارای حل نبوده وماقیمت های k_1 و k_2 را پیدا کرده نمیتوانیم که رابطه (1) را تحقیق نماید .

بنابران $(3,4)$ و $(6,8)$ پایه فضای وکتوری $\mathbb{R}^2$ شده نمیتواند .

Q. E. D.

خاصیت اساسی فضای وکتوری :

در یک فضای وکتوری V اگر یک پایه آن دارای n عنصر باشد پس تمام پایه های آن دارای n عنصر میباشند ، وگفته میشود که V دارای n بُعد است . (۱)

مثال ششم ، ست تمام وکتورهای هندسی ای که دارای عین استقامت $\vec{v}$ باشد دارای یک بُعد است .

زیرا : هر وکتوری که دارای عین استقامت وکتور داده شده $\vec{v}$ باشد بصورت یگانه بشکل $k \cdot \vec{v}$ تجزیه شده میتواند .

پس وکتور $\vec{v}$ پایه ست تمام وکتورهای هندسی مذکور است ، درینصورت میگوئیم که ست تمام وکتورهای هندسی عین استقامت $\vec{v}$ دارای یک بُعد است .

مثال هفتم ، از بررسی مثال اول دیده میشود که جوره های مرتب (۱،۰) و (۰،۱) پایه $\mathbb{R}^2$ بوده وچون این پایه حاوی دو عنصر است ، پس گفته میتوانیم که $\mathbb{R}^2$ یک فضای وکتوری دو بعدی است .

مثال هشتم ، فضای وکتوری پولینوم های درجه سوم وکمتر از سه ($\mathbb{P}_3$) یک فضای وکتوری چهار بعدی است .

---

(۱). حقیقت خاصیت فوق اثبات شده میتواند ولی اثبات آن از سویه این کتاب بالا است .

زیرا : در مثال چهارم فوق بشما عدده رسید که چهار وکتور :
$(x^3, x^2+1, x^2-1, 2x)$ پایه $\mathbb{P}_3$ را تشکیل نموده اند .
ازینکه پایه $\mathbb{P}_3$ دارای چهار عنصر است پس گفته میتوانیم که $\mathbb{P}_3$ یک فضای فضای وکتوری چهار بعدی است .

تبصره : زمانیکه ما میگوئیم که $\mathbb{P}_3$ یك فضای وکتوری چهار بعدی است ، این معنی را افاده نمیکند که $\mathbb{P}_3$ یک ساختمان فزیکی (که در ان طول ، عرض وضخامت بحیث ابعاد ثلاثه توضیح شده است ، بوده که درینصورت $\mathbb{P}_3$ برعلاوه ازابعاد ثلاثه حاوی یك بعد چهارم نیز میگردد) میباشد . درینجا زمانیکه ما میگوئیم $\mathbb{P}_3$ یك فضای وکتور چهار بعدی است مفهوم جبری را توضیح مینمائیم که هرعنصر ساختمان جبری $\mathbb{P}_3$ به چهار وکتوریکه که هر کدام آنها بحیث پایه ویا بعد $\mathbb{P}_3$ بکار رفته است بصورت یگانه تجزیه پذیر است .

مثال نهم . ست تمام تصاعدات حسابی شکل :

$$(a, a+k, a+2k, a+3k, \ldots, a+(n-1)k, a+nk, \ldots)$$

یك فضای وکتوری دو بعدی است .

زیرا : مامیدانیم که تصاعدات حسابی یك ست فرعی فضای وکتوری ترادافها است . ازطرف دیگر چون حاصل جمع هر دو تصاعد حسابی یك تصاعد حسابی بوده وهم هرتصاعد حسابی ضرب یك عدد حقیقی یك تصاعد حسابی است .

بنا• ادعا نموده میتوانیم که ست تصاعدات حسابی یك فضاي وکتوري فرعی

فضاي وکتوري ترادف ها است •

اینك پایه این فضاي وکتوري را طبق ذیل دریافت بنمائیم •

$$(a, a+k, a+2k, a+3k, \ldots, a+(n-1)k, \ldots)$$

$$=(a,a,a,\ldots,a,\ldots)+(0,k,2k,3k,\ldots,(n-1)k,\ldots)$$

$$=a\times(1,1,1,\ldots,1,\ldots)+k\times(0,1,2,3,\ldots,(n-1),\ldots)$$

ازین نتیجه میشود که هر تصاعد حسابی بالای ایندو تصاعد حسابی :

$(1,1,1,\ldots,1,\ldots)$

$(0,1,2,3,\ldots,(n-1),\ldots)$

بصورت یگانه تجزیه شده میتواند •

پس ایندو تصاعد حسابی : . . . .

$(1,1,1,\ldots,1,\ldots)$

$(0,1,2,3,\ldots,(n-1),\ldots)$

یکپایه دوعنصری فضاي وکتوري تصاعدات حسابی را تشکیل میدهد • ازینجا

گفته میتوانیم که فضاي وکتور تصاعدات حسابی دوبعدي است •

Q.E.D.

تمرینات

1- اگر ست اعداد مختلط Complex numbers را به $\mathbb{C}$ ارائه کنیم نشان دهید که $\mathbb{C}$ یك فضاي وکتوري دوبعدي است •

2• ثبوت کنید که سه گانه هاي مرتب: $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ پایه $\mathbb{R}^3$ است •

3 . ثبوت کنید که ست حله های معادله : $2x + 5y = 0$ . . . یک فضای وکتوری یک بعدی است .

4 . نشان دهید که ست M_2 متریکس ها یک فضای وکتوری چهار بعدی است .

5 . ثبوت کنید که ست متریکس های M_3 یعنی متریکس های سه در سه یک فضای وکتوری نُه بعدی است .

6 . ثبوت کنید که پولینوم های : $(x^4, x^3, x^2, x, 1)$ پایه ست تمام پولینوم ها نمیباشد .

7 . اگر P_2 سب‌فضای وکتوری پولینوم های درجه دوم وکمتر از دو را آرائه کند ، معلوم کنید که P_2 دارای چند بعد بوده و یک پایه آنرا بنویسید .

8 . ثبوت کنید که ست حله سه گانه ای های معادله : $2x + y - 3z = 0$ یک فضای وکتوری دو بعدی است .

کمک : (1) . درینصورت نشان دهید که $(0 , 1 , \frac{1}{3})$ یک حل معادله مذکور است .

(2) . درینصورت نشان دهد که $(1 , 0 , \frac{2}{3})$ نیزیک حل معادله مذکور است .

(3) . هرحل معادله مذکور بشکل : $(x, y, \frac{2x+y}{3})$ آرائه شده میتواند .

(4) . نشان دهید که هر حل کیفی معادله مذکور بصورت یگانه ترکیب خطی دوحله خصوصی (1) و (2) فوق است .

4-7 . مطابقت خطی Linear Application

4-7.a. تعریف: در دو فضای وکتوری $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$

(در حالت خاص $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ شده میتواند.)

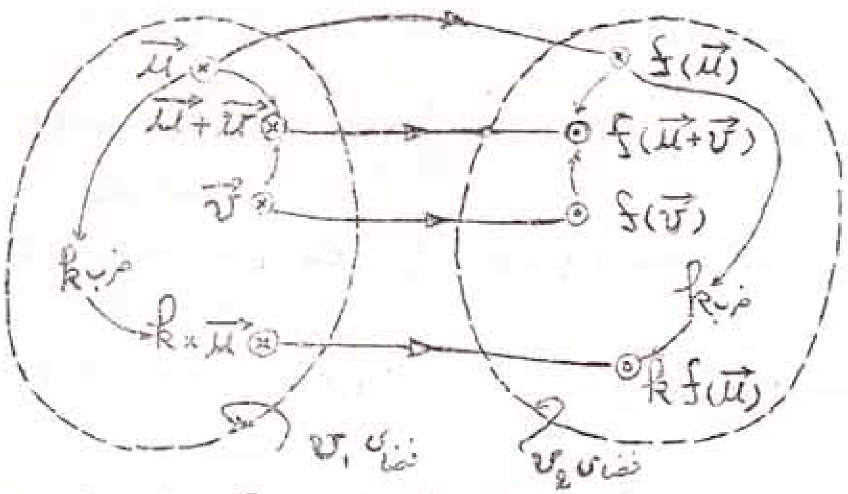
مطابقت f از $\mathcal{V}_1$ بطرف $\mathcal{V}_2$ یک مطابقت خطی گفته میشود در صورتیکه:

اول. برای $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}_1$ و $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}_2$:

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

دوم. برای $k \in \mathbb{R}$ و $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}_1$:

$$f(k\vec{u}) = k\, f(\vec{u})$$ باشد.



مثال اول. در فضای وکتوری $\mathbb{R}$ اگر مطابقت f طوری باشد که: $f: x \longmapsto 3x$ ..... گردد.

در ینصورت ثبوت مینمائیم که f از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ یک مطابقت خطی است.

زیرا : برای هرعنصر x و هرعنصر y شامل $\mathbb{R}$ ماداریم :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= 3(x+y) \\ &= 3x+3y \\ &= f(x)+f(y) \quad \cdots\cdots (1) \end{aligned}$$

وهم چنان برای هر $k \in \mathbb{R}$ میتوان نوشت :

$$\begin{aligned} f(kx) &= 3 \times kx \\ &= k \times 3x \\ &= k \times f(x) \end{aligned}$$

نظر به هر دو رابطه (1) و (2) فوق گفته میتوانیم که f یک مطابقت خطی از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ است .

Q.E.D.

مثال دوم • اگر g یك مطابقت از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ توسط افاده :

$g(x,y) \longmapsto (x,-y)$ ارائه شود •

نشان میدهیم که g یك مطابقت خطی از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ است •

زیرا : چون ماداریم که : $g(x,y) \longmapsto (x,-y)$

پس درینصورت برای هر جوره مرتب (x_1,y_1) و (x_2,y_2) میتوان نوشت :

$$\begin{aligned} g((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= (x_1+x_2\,,\ -y_1-y_2) \\ &= (x_1,-y_1)+(x_2,-y_2) \\ &= g(x_1,y_1)+g(x_2,y_2) \end{aligned}$$

وهم چنان برای هر k شامل $\mathbb{R}$ وهر (x,y) شامل $\mathbb{R}^2$ ماداریم :

$$\begin{aligned} g(k \times (x,y)) &= g(kx,ky) = (kx,-ky) \\ &= k(x,-y) = k \times g(x,y) \,. \end{aligned}$$

بنا بران ادعا میتوان نمود که g یك مطابقت خطی از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ میباشد .

Q. E. D.

مثال سوم . اگر F_1 فضای وکتوری تمام توابع مشتق پذیر و $\mathbb{F}$ فضای وکتوری تمام توابع را ارائه کنند ، مطابقت مشتق گرفتن یك مطابقت خطی از F_1 بطرف $\mathbb{F}$ است .

زیرا : اگر مطابقت مشتق گیری را به d ارائه کنیم درینصورت ما میدانیم که مشتق هر تابع یکتابع است . و آنرا چنین ارائه میتوان نمود :

$$d: \begin{vmatrix} F_1 \longrightarrow \mathbb{F} \\ f \longmapsto f' \end{vmatrix}$$

ازطرف دیگر ما میدانیم که مشتق یك حاصل جمع مساوی به حاصل جمع مشتق های اجزای آنست یعنی :

$$d(g+h) = d(g) + d(h) \quad \cdots \quad (1)$$

و هم چنان برای هر k شامل $\mathbb{R}$ و برای هر f شامل F_1 ما داریم که :

$$d(k \times f) = k \times d(f) \quad \cdots \quad (2)$$ میباشد .

بنابر حقیقت روابط (1) و (2) فوق ما گفته میتوانیم که مشتق گیری یك مطابقت خطی از F_1 بطرف $\mathbb{F}$ است .

Q. E. D.

مثال چهارم . اگر مطابقت f از فضای وکتوری $\mathbb{R}^3$ بطرف فضای وکتوری $\mathbb{R}^2$ توسط افاده :

$f:(x, y, z) \longmapsto (x+y \,,\, y+z)$ تعریف شود ، درینصورت f یك مطابقت خطی از $\mathbb{R}^3$ بطرف $\mathbb{R}^2$ است .

مثال چهارم . اگر مطابقت f از فضای وکتوری $\mathbb{R}^3$ بطرف فضای وکتوری $\mathbb{R}^2$ توسط افاده $f:(x,y,z)\longmapsto(x+y,\ y+z)$ تعریف شود ، درینصورت f یک مطابقت خطی از $\mathbb{R}^3$ بطرف $\mathbb{R}^2$ است .

زیرا : اول . برای هر (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2) شامل $\mathbb{R}^3$ داریم :

$$\begin{aligned} f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) &= f(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2,\ \ y_1+y_2+z_1+z_2) \\ &= (x_1+y_1+x_2+y_2,\ \ y_1+z_1+y_2+z_2) \\ &= (x_1+y_1,\ y_1+z_1)+(x_2+y_2,\ y_2+z_2) \\ &= f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2) \quad \cdots (1) \end{aligned}$$

دوم . برای هر عدد k شامل $\mathbb{R}$ وبرای هر (x,y,z) شامل $\mathbb{R}^3$ میتوان نوشت :

$$\begin{aligned} f(k\times(x,y,z)) &= f(kx,\ ky,\ kz) \\ &= (kx+ky,\ ky+kz) \\ &= k\times(x+y,\ \ y+z) \\ &= k\times f(x,y,z) \quad \cdots\cdots (2) \end{aligned}$$

از مطالعه روابط (1) و (2) نتیجه میشود که f یک مطابقت خطی از $\mathbb{R}^3$ بطرف $\mathbb{R}^2$ است .

حال اگر مطابقت g را توسط افاده $g:(x,y,z)\longmapsto(x+y,\ y+z+1)$:

تعریف کنیم دیده میشود که g یک مطابقت خطی از $\mathbb{R}^3$ بطرف $\mathbb{R}^2$ نیست.

زیرا : برای هر (x_1, y_1, z_1) وهر (x_2, y_2, z_2) شامل $\mathbb{R}^3$ ما داریم :

$$f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$

$$=(x_1+x_2+y_1+y_2,\ y_1+y_2+z_1+z_2+1) \cdot (1)$$

ازطرف دیگـــر :

$$f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2) = (x_1+y_1,\ y_1+z_1+1)+(x_2+y_2,\ y_2+z_2+1)$$

$$=(x_1+y_1+x_2+y_2,\ y_1+z_1+y_2+z_2+2) \cdots (2)$$

ازمقایسه روابط (1) و (2) فوق نتیجـه میشود کــه .

$$f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) \neq f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2) \cdot$$

بنا بر ان گفته میتوانیم که f یک مطابقت خطی از $\mathbb{R}^3$ بطرف $\mathbb{R}^2$ شده نمیتواند .

Q.E.D.

.4-7.b <u>خواص اولیه مطابقـت خطـی</u> :

<u>خاصیت اول</u> . اگر f یک مطابقت خطی ازیک فضای وکتوری V_1 بطرف فضای وکتوری V_2 باشـد ، تصویر وکتـورصفر $(\overrightarrow{O}_{V_1})$ شامل V_1 وکتورصفر $(\overrightarrow{O}_{V_2})$ شامل V_2 اســـت.

یعنــی : $f(\overrightarrow{O}_{V_1}) = \overrightarrow{O}_{V_2} \cdots\cdots$

زیـرا :

$$f(\overrightarrow{O}_{V_1}) = f(0 \times \overrightarrow{O}_{V_1})$$

$$= 0 \times f(\overrightarrow{O}_{V_1})$$

$$= \overrightarrow{O}_{V_2}$$

لـذا : $f(\overrightarrow{O}_{V_1}) = \overrightarrow{O}_{V_2}$

Q.E.D.

نتیجه : فهمیدن این خاصیت برای برای مطالعه خطی بودن یك مطابقت خیلی مهم است . زیرا بكمك این خاصیت عدم خطی بودن یك مطابقت را با آسانی فهمیده میتوانیم . اگر تصویر وكتور صفر در یك مطابقت وكتور صفر نباشد مطابقت مذكور خطی شده نمیتواند .

<u>خاصیت دوم</u> . اگر g یك مطابقت خطی از فضای وكتوری V_1 بطرف فضای وكتوری V_2 باشد ، درینصورت برای هر $\vec{x}$ شامل V_1 ما داریم :

$$f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$$

زیرا :

$$\begin{aligned} f(-\vec{x}) &= f((-1)\times\vec{x}) \\ &= (-1)\times f(\vec{x}) \\ &= -f(\vec{x}) \end{aligned}$$

لذا :

$$f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$$

Q.E.D.

<u>خاصیت سوم</u> . در یك مطابقت خطی تصویر هر عنصر V_1 را در V_2 شناخته میتوانیم درصورتیكه تصویر هر عنصر یكپایه فضای وكتوری V_1 را بشناسیم . چنانچه اگر V_1 یك فضای وكتوری سه بعدی كه یكپایه آن $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ بوده مد نظر گرفته شود ، درینصورت برای یك وكتور كیفی $\vec{v}_1$ فضای وكتوری V_1 ما داریم :

$$\vec{v}_1 = k_1\times\vec{a}_1 + k_2\times\vec{a}_2 + k_3\times\vec{a}_3$$

اگر f یک مطابقت خطی از V_1 بطرف V_2 باشد مانوشته میتوانیم :

برای هر $\vec{v}_1 \in V_1$ داریم :

$$f(\vec{v}_1) = f(k_1 \times \vec{a}_1 + k_2 \times \vec{a}_2 + k_3 \times \vec{a}_3)$$
$$= f(k_1 \times \vec{a}_1) + f(k_2 \times \vec{a}_2) + f(k_3 \times \vec{a}_3)$$
$$= k_1 \times f(\vec{a}_1) + k_2 \times f(\vec{a}_2) + k_3 \times f(\vec{a}_3)$$

چون k_1 ، k_2 و k_3 معلوم بوده وضمناً $f(\vec{a}_1)$ ، $f(\vec{a}_2)$ و $f(\vec{a}_3)$

رامیشناسیم ، بنابرآن $f(\vec{v}_1)$ را نیز شناخته میتوانیم .

مثال اول : درفضای وکتوری $\mathbb{R}^2$ پایه $(1,0)$ و $(0,1)$ را مد نظر

گرفته یک مطابقت خطی g را از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}$ طبق

افاده :

$$g(0,1) = 3 \quad \ldots\ldots$$

و $$g(1,0) = -2 \quad \ldots\ldots$$ تعریف مینمائیم .

حال یک جوره مرتب کیفی (x,y) شامل $\mathbb{R}^2$ راانتخاب نموده

و تصویر آنرا ذیلاً مطالعه مینمائیم :

$$g(x,y) = g(x \times (1,0) + y \times (0,1))$$
$$= g(x \times (1,0)) + g(y \times (0,1))$$
$$= x \times g(1,0) + y \times g(0,1)$$
$$= x \times (-2) + y \times (3)$$
$$= -2x + 3y$$

بنابران $$g(x,y) = -2x + 3y$$

Q. E. D.

۴-۸ . همشکلی ها در فضای وکتوری

تعریف : یک همشکلی بین دو فضای وکتوری V_1 و V_2 عبارت از یک تقابل (مطابقت یک بیک) خطی است .

مثال اول . یک مطابقت g بین دو فضای وکتوری $\mathbb{P}_3$ و $\mathbb{M}_2$ که طبق ذیل تعریف شده یک همشکلی در فضای وکتوری است .

$$g:\left|\begin{array}{l} \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{M}_2 \\ (ax^3+bx^2+cx+d) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

زیرا : اول چون برای هر متریکس دو در دو کیفی فقط و فقط یک پولینوم را بطه سوم ویا کمتر از سه در وجود کرده میتوانیم که منشاء تصویر متریکس مورد نظر باشد . پس درینصورت گفته میتوانیم که g یک تقابل است .

دوم . حال نشان میدهیم که g یک مطابقت خطی است .

زیرا : اگر P_1 و P_2 دو پولینوم شامل $\mathbb{P}_3$ طوریکه :

$$P_1 = (a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1)$$

$$P_2 = (a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2)$$

در نظر گرفته شوند .

درینصورت ما داریم :

$$g(P_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

و همینقسم :

$$g(P_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

از طرف دیگر:

$$P_1+P_2=((a_1+a_2)x^3+(b_1+b_2)x^2+(c_1+c_2)x+d_1+d_2)$$

لذا ،

$$g(P_1+P_2)=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$$

در نتیجه : $g(P_1+P_2)=g(P_1)+g(P_2)\ \ldots\ldots(1)$

اکنون ثابت باید نمود که برای هر عدد حقیقی k و هر p_1 شامل $\mathbb{P}_3$

رابطه : $g(k\times p_1)=k\times g(p_1)\ \ldots$ همیشه حایز حقیقت است.

ما داریم که :

$$k\times p_1=k\times(a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1)$$
$$=ka_1x^3+kb_1x^2+kc_1x+kd_1$$

$$g(k\times p_1)=\begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{pmatrix}$$
$$=k\times\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$
$$=k\times g(p_1)\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

با در نظر داشت روابط: (1) و (2) ادعا میتوان نمود که g یك مطابقت خطی بوده و یك همشکلی از $\mathbb{P}_3$ بطرف $\mathbb{M}_2$ میباشد .

Q.E.D.

مثال دوم • اگر مجموعه تمام وکتورهاي هندسی فضا را به $\tilde{\mathbb{V}}$ ارائه کنیم، میدانیم که $\mathbb{V}$ یك فضاي وکتوري است • بهمین قسم ما میدانیم که ساختمان جبري $\mathbb{R}^3$ نیز یك فضاي وکتوري است •

حال یك تقابل f بین $\mathbb{V}$ و $\mathbb{R}^3$ را طوري تعریف می نمائیم که هر وکتور $\vec{v}$ شامل $\mathbb{V}$ را به جوره مرتب مرکبه هاي ان/ نظر سیستم بیك محورات کمیات وضعیه ارتباط دهد • اینك نشان میدهیم که f یك مشاکلی از فضاي وکتوري $\mathbb{V}$ بطرف فضاي وکتوري $\mathbb{R}^3$ است •

زیرا : اگر دو وکتور کیفی $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ اي فضاي وکتوري $\mathbb{V}$ در نظر گرفته شود درینصورت مختصات هر یك از وکتورهاي $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را علی الترتیب به سه گانه اي هاي مرتب: (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) شامل $\mathbb{R}^3$ ارائه کرده میتوانیم : یعنی :

$$f(\vec{v}_1) = (x_1, y_1, z_1)$$

$$f(\vec{v}_2) = (x_2, y_2, z_2)$$

ما میدانیم که مختصات مجموع وکتورها مساوست به حاصل جمع مختصات انها •

بنا براین میتوانیم بنویسیم :

$$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) \quad \cdots\cdots (1)$$

از طرف دیگر میدانیم که برای هر عدد حقیقی k و هر وکتور $\vec{v}$ مختصات وکتور $k\times\vec{v}$ مساوی به k چند مختصات وکتور $\vec{v}$ است. بنا بر این حقیقت میتوان نوشت :

$$f(k\times v_1)=(kx_1, ky_1, kz_1)$$
$$=k\times(x_1, y_1, z_1)$$
$$=k\times f(\vec{v}_1) \quad \cdots\cdots (2)$$

با ساس حقیقت روابط: (1) و (2) فوق گفته میتوا نیم که تقابل f یک مطابقت خطی بوده ویک همشکلی از فضای وکتوری ست وکتور های فضا ^{3} بطرف $\mathbb{R}^3$ است.

Q.E.D.

تمرینات

1. اگر f یک مطابقت از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}$ تعریف شود طوریکه:

$$f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y)\longmapsto x+y\end{array}\right.$$

باشد.

ثابت کنید که: (a). f یک مطابقت خطی است.

(b). یک تقابل نیست.

(c). f یک همشکلی شده میتواند ویا خیر؟ چرا ؟

2 . اگر g یک مطابقت از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}^2$ تعریف شود طوریکه :

$$g:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto \left(x, \frac{x}{2}\right)\end{array}\right.$$

نشان دهید که : (a) . g یک مطابقت خطی است .

(b) . g یک تقابل نیست .

(c) . آیا g یک همشکلی از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}^2$ شده میتواند ؟

3 . اگر g یک مطابقت از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ طبق ذیل تعریف شود :

$$g:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x^3, y)\end{array}\right.$$

ثبوت کنید که : (a) . g یک مطابقت خطی نیست .

(b) . g یک تقابل است .

(c) . آیا g یک همشکلی از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ شده میتواند ؟

4 . اگر h یک مطابقت از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ چنین تعریف شود :

$$h:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (2x, x-y)\end{array}\right.$$

نشان دهید که : (a) . h یک مطابقت خطی است .

(b) . h یک تقابل است .

(c) . راجع به ... همشکلی بودن h از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ چه فکر میکنید ؟

۵. اگر d مطابقت مشتق گیری را از $\mathbb{P}_3$ بطرف $\mathbb{P}_2$ ارائه کند ،

(a) - آیا d یك مطابقت خطی است ؟

(b) - آیا d یك تقابل است ؟ یا خیر ؟

(c) - آیا d یك همشکلی از $\mathbb{P}_3$ بطرف $\mathbb{P}_2$ میباشد ؟ ویا خیر ؟

6 . بین دو فضای وکتوری $\mathbb{C}$ (Complex numbers) و $\mathbb{R}^2$ یك همشکلی راتشکیل دهید .

7 . اگر h یك مطابقت از ست $\mathbb{V}_2$ وکتور های هندسی یك مستوی به $\mathbb{V}_2$ طبق ذیل تعریف شود :

$$h: \left| \begin{array}{l} \mathbb{V}_2 \longrightarrow \mathbb{V}_2 \\ \vec{v} \longmapsto 3\vec{v} \end{array} \right.$$

نشان دهید که h یك همشکلی از $\mathbb{V}_2$ بطرف $\mathbb{V}_2$ است .

8 . اگر r یك مطابقت از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ چنین تعریف شود :

$$r: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array} \right.$$

نشان دهیدکه r یك همشکلی است .

9 . اگر V یك فضای وکتوری کیفی طوریکه $V \neq \{\vec{0}\}$ است مد نظر گرفته شود ومطابقت g درآن طبق ذیل تعریف شود :

$$g: \left| \begin{array}{l} V \longrightarrow V \\ \vec{v} \longmapsto \vec{0} \end{array} \right.$$

نشان دهید که g یک مطابقت خطی بوده ولی یک همشکلی نیست .

10. اگر f از یک فضای وکتوری دوبعدی V_1 بطرف یک فضای وکتوری V_2 یک همشکلی باشد ،

(a). نشان دهید که تصویر عناصر یکپایه V_1 عبارت از عناصر پایه V_2 است .

(b). راجع به بعد V_2 چه گفته میتوانید؟ یعنی V_2 چند بعدی است ؟

11. اگر g یک همشکلی از یک فضای وکتوری V_1 بطرف V_2 باشد ، نشان دهید g^{-1} (مطابقت معکوس g) نیز یک همشکلی از V_2 بطرف V_1 میباشد .

12. اگر i یک مطابقت از یک فضای وکتوری کیفی V بطرف V طبق ذیل تعریف شود :

$$i : \left| \begin{array}{l} V \longrightarrow V \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

نشان دهید که i یک همشکلی است .

علایم متداول این کتاب

$\mathbb{Q}_* = \mathbb{Q} - \{0\}$	ست اعداد نسبتی بدون صفر
$\mathbb{R}_* = \mathbb{R} - \{0\}$	ست اعداد حقیقی بدون صفر
$\mathbb{Q}^+$	ست اعداد نسبتی مثبت بدون صفر
$\mathbb{Q}^+_*$	ست اعداد نسبتی مثبت مع صفر
$\mathbb{R}^+_*$	ست اعداد حقیقی مثبت بدون صفر
$\mathbb{R}^+$	ست اعداد حقیقی مثبت با صفر
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$	حاصل ضرب دیکارتی
$\mathbb{R}^3$	حاصل ضرب دیکارتی $\mathbb{R}^2$ در $\mathbb{R}$
$\mathbb{P}$	ست پولینوم ها
$\mathbb{P}_1$	ست پولینوم های درجه اول و کمتر از آن
$\mathbb{P}_2$	ست پولینوم های درجه دوم و کمتر از آن
$\mathbb{P}_3$	ست پولینوم های درجه سوم و کمتر از آن
$\mathbb{P}_n$	ست پولینوم های درجه n ام و کمتر از آن
$\vec{O}$	وکتور صفر
$\mathbb{V}$	ست وکتورهای هندسی
$\vec{v}$	وکتور v
$\upuparrows$	وکتورهای هم سمت
a°	درجه (عرفی) متداول a
a^g	گراد سانتیسمال a
$\longleftrightarrow$	تقابل و یا مطابقت یک به یک
$\mathbb{V}_1$	فضای وکتوری یک بعدی
$\mathbb{V}_2$	فضای وکتوری دو بعدی
$\mathbb{V}_3$	فضای وکتوری سه بعدی
$=$	مساوی است به
$\neq$	مساوی نیست به
$b < a$	a بزرگتر است از b
$b \not> a$	و یا b خوردتر است از a، a خوردتر از b نیست.
$D \not\subset C$	D: ست D فرعی C نیست

$\longrightarrow$	تطبیق بین دو ست
$\longmapsto$	تطبیق بین عناصر
$\in$	شامل است
$\notin$	شامل نیست
$\forall$	برای تمام
$\cup$	اتحاد
$\cap$	تقاطع
$\phi = \{\ \}$	ست خالی
$\overleftrightarrow{X}$	خط X
$\overline{AB}$	قطعه خط AB
$\wedge$	بزرگترین قاسم مشترک
$\vee$	کوچکترین مضرب مشترک
$\mathbb{N}$	ست اعداد طبیعی
$\mathbb{I}$	ست اعداد تام
$\mathbb{Q}$	ست اعداد نسبتی
$\mathbb{R}$	ست اعداد حقیقی
C	تکمله
$C_B A$	تکمله ست A در B
$C_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$	تکمله ست $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ و یا ست اعداد غیر نسبتی.
$\mathbb{D}_a$	ست قاسم های a
$\mathbb{D}_{a \wedge b}$	ست قاسم های مشترک a و b
$d \vee c$: d و c	ست مضرب های مشترک
$A \subset B$	A ست فرعی B است

اصطلاحات علمی

ENGLISH	FRANCAIS	دري
Abelian Group	Groupe Abélien	گروه ابیلین ویا گروه تبدیلی
Application	Application	تطبیق (مطابقت)
Associative	Associatif	انجمنی (اشتراکی ـ شرکتپذیر)
Associativity	Associativité	خاصیت انجمنی
Bijection	Bijection	تقابل ویا مطابقت یك بیك
Binary	Binaire	دوگانه اي
Binary Operations	Opérations binaires	عملیات دوگانه اي
Commutative	Commutatif	تبدیلی (تبادلوي)
Commutativity	Commutativité	خاصیت تبدیلی
Complex Numbers	Nombres Complexes	اعداد مختلط
Determinant	Déterminant	دیترمینانت (دالمه)
Distributive	Distributif	توزیعی
Distributive Property	Distributivité	خاصیت توزیعی
Distributivity	"	خاصیت توزیعی
Element	Elément	عنصر
Equipollent	Equipollent	همانند (همسنگ)
Field	Corps	ساحه
Group	Groupe	گروه
Identity Element	Elément neutre	عنصر بی تاثیر (عینیت)
Inverse Element	Elément inverse	عنصر تضاد (معکوس)
Isomorphism	Isomorphisme	همشکلی
Linear	Linéaire	خطی
Linear Application	Application linéaire	مطابقت خطی

ENGLISH	FRANCAIS	دري
Null	Nul	صفري (خالی)
Null Vector	Vecteur nul	وکتور صفر
Operation	Opération	عملیه
Ordered Pair	Couplé	جوره مرتب
Property	Propriété	خاصیت
Properties of Groups	Propriétés des groupes	خواص گروه ها
Real Number	Nombre réel	عدد حقیقی
Reflexive	Réflexif	انعکاسی
Reflexivity	Réflexivité	خاصیت انعکاسی (انعکاسیت)
Ring	Anneau	حلقه
Subgroup	Sous Groupe	گروه فرعی
Triplet	Triplet	سه گانه ای
Unitar	Unitaire	واحدي
Vector	Vecteur	وکتور
Vector Space	Espace Vectoriel	فضای وکتوري