ریاضیات معاصر

جلد اول

ستها و استعمال آنها

مؤلفین

دیپلوم تمنت ریاضیات
محمد امان نادری
مرکز ساینس معارف

و

دیپلوم تمنت پیداگوژی
ایتیان ژیل
لیسه استقلال

ثور سنه ۱۳۵۴

یادداشت انتشارات شاهمامه

به سلسلهٔ نشر آثار فراموش شدهٔ استاد محمدامان نادری، اینک به انتشار «**سلسلهٔ ریاضیات معاصر**» میپردازیم تا از یک سو مورد استفادهٔ علاقمندان قرار گیرد و از جانبی دستآورد های علمی این متفکر ریاضیات که عمری در راه معارف در بدترین وضعیت سیاسی و صحی، قلم زده است، یکبار دیگر روگشایی گردد. بدون شک استاد نادری یکی از انگشت شمارانِ کشور بود که آثار ارزشمند فراوانی در زمینهٔ ریاضیات به یادگار گذاشته است. او در حقیقت نخستین مفسر و معرف ریاضیات مدرن در افغانستان می باشد.
سه جلد این سلسله همراه با رهنمای خودآموز در دسترس ما قرار دارد که میکوشیم ثبت آرشیف «شاهمامه» و دیگر آرشیف های نشراتی گردد تا نسلهای بعد این خدمات را نادیده نگیرند و سهم اینگونه شخصیت های پویا و کوشا در رشد معارف کشور برازنده و جاودان ماند.

با سپاس،
منیژه نادری
مسؤول بنیاد شاهمامه

شناسنامه

سلسلهٔ ریاضیات معاصر
جلد اول
ستها و استعمال آنها
مؤلفان:
ایتیان ژیل، دفتر پیداکوژی، لیسهٔ استقلال
محمد امان نادری، دیپارتمنت ریاضیات، موسسهٔ عالی تربیه معلم روشان
قوس ۱۳۵٤ خورشیدی
نشر الکتریکی: بنیاد شاهمامه
www.shahmama.com
جون ۲۰۱٦، هالند

مقدمه

ریاضیات جدید

ترقیاتی که بعد از جنگ عمومی دوم در ساحه علم و تخنیک بعمل آمده از بدو خلقت بشر تاآنزمان باین مقدار تراکم نکرده بود . سرعت ترقیات علم سال بسال کسب شدت می نماید . کسانی که باین جریان براه نمی افتند امواج مدنیت آنهارامی بلعد . برای اشتراك باین جریان باید بوسایل نافع و موثر توصل جست . معمترین آن وضاحت بیان است . بیان است که انسان را من حیث حیوان ناطق اشرف مخلوقات گردانیده . هرقدر خاصیت نطق و بیان بشری انکشاف و دقیق میگردد و بیان صراحت می یابد و مفاهیم روشن میگردد ، بهمان اندازه معیارهای انسانیت بلند می رود . ریاضیات علاوه بر علم مشخص ترین گاه تعقل و صراحت بیان است . اعداد ، الگوریتم و فارمول های ریاضی برای افاده دقیق و صحیح مطلب طرح شده بشمول زبان ریاضی در حیات یکی از شاخص های مهم مدنیت است . منطق ریاضی و نظریات معاصر آن راجع

به اصول وتشکل این علم علاوه براین که فصول و ابواب آنرا مرتبط ومنسجم می سازد سایر علوم مثبته وحتی اجتماعیات وادبیات را ازطریق سیمانتیک وسیبرنتیک درحیطه قدرت خود درمی آورد . ریاضیات جدید باین امر کمک می کند . ودانش بشر راکه بشدت شاخ وپنجه می دواند بیک ساقه محکم استوار می سازد وآدمی را ازوقام حیرت و وحشت مقابل انفلاق دانش وامی رهاند . عصر ماعصر انفلاق دانش است که میتوان انـــــــرا باماته ماتیک بندی (Mathematisation) مهار کرد .

صراحتی که ریاضی جدید درتوضیح ودرجه بندی ودسته بندی موضوعات فاضر می آورد، نردبانی درآموختن ریاضی فراخور ذکای طلاب عادی عرضه میدارد . وچیزیکه ازآنها مطالبه می کند پیمودن قدمه های معین وحوصله افزائی شان درآموختن زبان واصطلاحات جدید ریاضی است که دربدو امر بی لزوم می نماید ومثل اموختن یک زبان تعجب انگیز می باشد ولی باپیشرفت این مفاهیم سیر و سفر راد رقلمرو ریاضی آشنا ن میسازد وشکل وخریطه آن راروشن می گرداند . ونمی گذارد مسافـــر درفرورهات گراه گردد . این بلدیت به راه وزبان مانند بلدیت سیاح

مسافرت را گوارا می سازد • جوانان ما باید اثینه ترقیات علم ومدنیت را

درنظرداشته با عزم راسخ ودلچسپی تحولی راکه ریاضیات جدید

بمیان آورده تعقیب نمایند وبه طرز زندگی درمحیط مستقبل

تکنوترونیک (technotronic) خویشتن راآماده سازند•

دوکتورمحمد انس

پیشگفتار

چندی قبل مجلسی در وزارت معارف تحت ریاست شاغلی محترم دوکتور میرعبدالفتاح صدیق، معین اول معارف، که در آن یکعده از روسای محترم وزارت معارف و دانشمندان محترم داخلی وخارجی علم ریاضیات سهم گرفته بودند دائر شد و باتفاق آرا تصمیم گرفته شد تا ریاضیات معاصر در سیستم نصاب تعلیمی مکاتب ثانوی افغانستان نیز شامل گردد. باآنهم یکعده سوالات ازقبیل:

۱. ریاضیات جدید ویامعاصر چیست؟

۲. ریاضیات جدید ویامعاصر باریاضیات عنعنوی ویاکلاسیک چه فرق دارد؟

۳. مابمطالعهٔ ریاضیات معاصر چه ضرورت داریم؟

۴. باریاضیات معاصر چه کرده میتوانیم؟ وساحهٔ تطبیق آن کجاست؟

واشال اینگونه سوالات ازطرف پیروان مکتب ریاضیات کلاسیك مطرح میشود • اگرچه پاسخ موجز ومنطقی بهمچوسوالات جامع وکلی آسان نیست ولی باآنهم سعی مینمائیم تایك اندازه معلومات که بحیث پاسخ سوالات فوق قناعت خواننده رافراهم کرده بتواند ذیــــلاً تقدیم نمائیم :

علم ریاضیات مانندعلوم سایئس یك علم زنده بوده و همیشه درحالت رشد وانکشاف است • سرعت تحولیکه در پیکر ریاضیات بروز کرده وبیکند نظریه علوم دیگر بیشتراست • زیراعلم ریاضیات فــرض توسعه وانکشاف داخلی خویش ازیکطرف/ وبرای فراهم ساختن زمینه‌ٔ رشد وانکشاف دیگرعلوم ازطرف دیگرنیازمند رشد وانکشاف سریعتر بوده ومیباشد • برای ترضیح این مطلب اگرنگاهی بتاریخ علوم بیافگنیم بمشاهده میرسد که تاچند قرن پیش معلومات انها رشده ای محتـــوی عناصراقلیدس(۱) (که دوهزاروسه صد سال قبل جمع آوری شده بــود)

---

(۱) • عناصراقلیدس ویا : Euclid's Elements ، نام کتاب ریاضیات که بنام: تحریر اقلیدس نیز موسوم است .

به حیث یگانه مودل حقیقت مطلق [۲] مورد استفاده قرار داشت .

ولی در طی قرن نهم میلادی محمد [۳] بن موسی خوارزمی جبر ومقابله

را پی ریزی نمود ، و در قرن دوازدهم میلادی شاعر معروف رباعیات

و دانشمند ریاضی عمرخیام [٤] انکشافاتی در ساحه هندسه بوجود آورد

و حقیقت اصل موازات (پنجم) اقلیدس را مورد پرسش قرار داد . در قرن

سیزدهم میلادی نصرالدین طوسی [٥] علاوه ازآنکه مثلثات را از نجوم

مجزا ساخت ، موصوف سعی نمود تا حقیقت اصل موضوعه موازات را نیز

به اثبات برساند . بعد از زمان رنسانس که پیشرفت علم را اروپائیان

عهده دار شدند دانشمندان اروپائی از یکطرف حقیقت موضوعات

سابق ریاضیات را مورد تجسس و بازپرس قرار دادند و از طرف دیگر

---

(۲). حقیقت مطلق Absolute Truth

(۳). محمد بن موسی Mohammed ibn Musa, Alkarismi

(٤). عمرخیام Omer Khayyam (1038/48-1123/24)

(٥). نصرالدین طوسی Nasir-eddin (1201-1274)

درتوسعه وانکشاف این علم بیك سلسله تحقیقات عمیق و تتبعات ذیثمر پرداختند • درنتیجه موضوعات سابق عمومیت یافت ، قضایای جدید بروزکرد ، و روش های نوین موثربوجود آمد • چنانچه نتیجه زحمات لامبرت [6] ولاجندر (لاژاندر) [7] وتلاش های ساکری [8] برآنشد تا جان بولیای [9] (هنگری) ، لباچوویسکی [10] (روســــــــس) ، وگوس [11] (جرمنی) طلسم اصل موازات اقلیدس رادرهم شکنند وباعث بوجود آوردن هندسه های دیگرغیراقلیدسی درداخل قلمرو خـــــود علـــــم ریاضیـــــات گـــــردنـــــد •

---

(٦) • لامبرت . . . . . . Lambert, J.H. (1728-1777)

(٧) • لاجندر (لاژاندر) . . . Legendre, A.M (1752-1833)

(٨) • ساکري لدرســال هـــا ي G. Saccheri (1700

(٩) • جان بولیای - - - - - - Bolyai, J. (1802-1860)

(١٠) • لباچوویسکی . . Lobachevsky, N.Z. (1793-1856)

(١١) • گـوس . . . Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)

بهمین قسم جارج کانتور[۱۲] نظریه ست[۱۳] را وگلواه[۱۴] نظریه گروه[۱۵] را در علم ریاضیات معرفی نمودند • چنانچه تاریخ شاهد است بنحویکه ریاضیات غرض حل مشکلات داخل ساحات خویش بیك تحول سریع نیازمند است بهمین نوع علم ریاضیات بحیث مادر، تمام رشد و نمو علوم دیگر نیز محتاج انکشاف بوده است • چنانچه زمانیکه اسحاق نیوتن[۱۶] بمطالعه فزیك میخانیك مصروف بود او نتوانست بدون بوجود آوردن مشتقات در ساحه ریاضیات بمطالعات خویش ادامه دهد •

بهرحال تحول سریع علم ریاضیات زاده د حقیقت است •

---

(۱۲)• جارج کانتور - - - - - Cantor, G. (1845-1918)

(۱۳)• نظریه ست . . . . Set Theory

(۱۴)• گلواه . . . . Galois E. (1811-1832)

(۱۵)• نظریه گروه - - - - - - - - - - - Group Theory

(۱۶)• اسحاق نیوتن . . Newton, Isaac (1642-1727)

یا بعبارت دیگر انکشاف ریاضیات قسما" ثمره تحقیقات و تتبعات مزید که پیرامون خود ریاضیات صورت گرفته است بوده وقسما" نتیجه" پیشرفت دیگر علوم و تحولات سریع تکنالوژی که بصورت سرسام آور در حالت توسعه وانکشاف است، پنداشته میشود.

ازینکه میگویند ریاضیات جدید ویامعاصر با ریاضیات سابق یاکلاسیک چه فرق دارد؟ با پاسخ گفته میشود : طوریکه تاریخ گواه است قسمت زیاد موضوعات ریاضیات معاصر بکلی نو نبوده بلکه یک قسمت کم آن درین اواخر بمیان آمده است. درحقیقت بسیاری ازمفکورههای مهم ریاضیات معاصر مانند مفاهیم : ست ، رابطه و تابع تامبدأ ثبت ریکارد توسط بشرقدامت تاریخی دارند. بررسی های دقیق وتعریفات رسمی وعمیق بسی ازمفاهیم ریاضیات که درقرن نزده و بیست بوجود آمده اند، نتائج تحقیقات و تتبعات است که درطی چند قرن پیشتر ازآنها صورت گرفته است. حالانکه ازنظر یک انسان فناپذیر کلمه" ((جدید)) ویا ((معاصر)) بهرآن کشف واختراعی که

درطی قرون شانزده ، هفده ، ویاهجده بوجود آمده باشد اطلاق شده نمیتواند [ازینکه بروسی های نوین و ((جدید)) موضوعات ریاضیات/((معاصر)) گفته میشود بنابر دلیل ایست که شناخت ارزش و اهمیت اینگونه بروسی ها توسط دانشمندان ریاضی تعاطی این عصر صورت گرفته است ۰

ریاضیات معاصر باریاضیات کلاسیک ازهم فرق نداشته و گفته میتوانیم که ریاضیات معاصر یک شکل عمومی و جامع تر ریاضیات بوده که توسط آن موضوعات درچوکات نسبتاً وسیع تر مطالعه شده میتوانند ۰ ریاضیات سابق ویا کلاسیک نه غلط است ونه فراموش شدنی است طوریکه میخانیک نسبی یک شکل انکشاف یافته میخانیک کلاسیک است بهمان طور ریاضیات معاصر یک شکل منبسط شده ریاضیات کلاسیک میباشد ۰

بجواب سوال اینکه : ((بریاضیات معاصر چه ضرورت داریم؟)) گفتار پروفیسور فهر (۱۷) دانشمند ریاضی و رهبر تعلیم وتربیه معاصر

---

(۱۷)۰ پروفیسور فهر Howard F. Fehr

توضیحات فوق علاوه ازآنکه بپاسخ سوال سوم بکار برده شده درضمن

به سوالات اینکه : ((با رضیات معاصر چه کرده میتوانیم ؛ ومحل تطبیق آن

درکجاســـــــــــــــــت ؟)) نیزجواب قناعت بخش میباشد .

باآنهم جهت اقناع بیشترخاطرشان درزمینه ادامه گفتار پروفیسور نهر را

نقل مینمائیم :

((.... مفکوره هاي جديد غرفه" رياضيات عنعنوي راكه درآن

حساب ، الجبر و هندسه گنجانیده شده درهم شکسته بنابرآن طریقه

بروسی كلاسيك رياضيات درمكاتب رفته رفته عتيقه شده وازارزش می افتد .

طوریکه یك فرد آگاه ویایك معلم خوب بدانستن تحـــولات

اجتماعی وروابط كلتوري خويش چه درسیاست اقتصادي چه درآرت و

هنر ، وچه درطرز تعبير انسان از دنياي ماحولش نیازمندي حس مینماید ،

بهمان قسم ضروریست تاموصوف از تحولات وانکشافات مهمی که درعلـوم

(ساینس) حکمفرماست بی خبر نبوده وباید که باتعقیب آنها همیشه تماس

فکري داشته باشد . درده هاي آینده اقوامی دنیارا رهبري خواهند کرد

رادیلا» نقل میکنیم : ((.... در قرن بیست ساحه ریاضیات از مفکوره های توانا وشگفت آور جدید غنی گردیده است ، این مفکوره های نوین نه تنها برای تخلیق و تقویه تصورات مورد علاقه واقع میشوند بلکه در رشته های مختلفه علوم (ساینس) و تکنالوجی و حتی در مطالعات علوم بشری نیز مورد استفاده قرارگرفته است . دامنه وسیع تطبیق ریاضیات معاصر بامنطق ریاضیات نه محض ساحات مختلفه فزیک وانجینیری را احتوا کرده بلکه مطالعات رشته های علوم دیگر از قبیل : پلان گذاری ، صنایع ، علوم طب ، کیمیای حیاتی ، کیمیای مولیکولی ، فزیک حیاتی ، و سوسیولوجی را نیز تحت شعاع قرارداده است . وحتی در بررسی مسایل فلسفه وزبان شناسی نیز مورد استفاده قرارگرفته است .)) (۱۸)

درطی شصت سال اخیر برعلاوه تنوع زیاد که در شعب مختلفه خود ریاضیات بمیان آمده نظریات و شعبات جدید در علوم مختلفه نیز بوجود آمده است که بررسی آنها نیز به متود و اصول ریاضیات منکشف یافته اتکا دارد . بنا وجود یک تحول متداوم در ریاضیات حتمی است .

---

(۱۸). Lucienne Félix: The Modern Aspects of Mathematics, N.Y.1961

که اذهان د رتعبیر ساینس رد را ستعمال ساینس ازدیگران سبقت نمـــوده باشند • حالانکه اساس تمام علوم (ساینس) را ریاضیات منبسط وانکشاف یافته تشکیل میدهد • چه بساتحقیق و تدقیق د رعالم مجهولات باساس رود لهای ریاضی رهبــری میشود •))

متکی باتوضیحات فوق اکثرممالك ریاضیات معاصر رابحیث عنصر اولی واساسی تعلیم وتربیه معاصر پنداشته ود رصدد آن شدند تاچه در طرز تدریس و چه د رمتن پروگرام های ریاضیات مکاتب خویش تجدید نظر نماینــــــــــد •

د رتطبیق ریاضیات معاصر بحیث پروگرام د رسی خویش بلجیـــم ازهمه پیش قدم بوده بعداً فرانسه د رتطبیق نظری آن بد رجه دوم وسپس یوگوسلاویا وانگلستان (ولی انگلستان د رتطبیق ساحات عملی آن اقدامات جدی نموده است)، آلمان ، ایتالیا و روسیه د رتطبیق ریاضیات معاصــر د رپروگرام مکاتب خویش از شیوه فرانسه پیروی نموده اند • بسیاری از ممالك فرانسوی زبان افریقای سیاه ، افریقای شمالی و ممالك شرق میانـــــه

بالخاصه لبنان و جمهوریت عربی متحد در تطبیق آن در مکاتب اقدامات نموده اند • ایران از ۱۹۷۴ باینطرف ریاضیات معاصر را در پروگرامهای درسی خویش جاگزین ساخته است • الجزائر بصورت محتاطانـــه آنرا پذیرفته ولی قبل ازانکه ریاضیات معاصر راشامل پروگرام درسی نمایـــد کوشیده تامعلمان را با ریاضیات معاصر آشنانموده و ضمناً تعقیب آنـــرا در پروگرام های پوهنتون خویش لازمی پنداشته است • گرچه تاحال درین زمینه ما به گردآورد ن معلومات موثق وجهان شمول موفق نشده ایم ولی باآنهم گفته میتوانیم که کانادا تاحدي اروپا تازونی و انگلستان پیروی نموده و اکثرممالك شرق دور وامریکاي لاتین درتطبیق ریاضیات معاصر یکعده پروگرام هاروي دست گرفته اند ، و هند نیز بصورت محتاطانـــه درتطبیق آن اقدام نموده است •

تطبیق ریاضیات معاصر در پروگرام معارف افغانستان بسویـــه ابتدائی از چند سال باینطرف مراحل تجربی خود راپیموده و ضمناً درمعرض تطبیق قرارگرفته است • بهمین قسم تعقیب آن بسویه پوهنتون مرعي الاجرا است • گرچه بسویه مکاتب ثانوي در یک و مکتب نیزمورد تجربه قرارگرفـــت

ولی بنابر عدم پرسونل کافی و ورزیده بعدم موفقیت مواجه شده .

روی این منظور بنابر هدایت معین صاحب اول معارف تصمیم گرفتیم تاقبل ازآنکه به پروگرام ریاضیات مکاتب ثانوی معارف تغییری وارد شود این کتاب را غرض آشنا ساختن معلمان بایکعده ازمفاهیم اساسی ریاضیات معاصر تالیف نمائیم . اکثرمحتویات این کتاب را یکعده موضوعات ریاضیات کلاسیک که درقالب معاصراند اخته شده انـد تشکیل میدهد . به پیروی ازهمین روش مجبورشدیم تایکعده ازموضوعات دیگر راکه صحبت ازآنها برای اکمال این کتاب ضروری پنداشته میشود ازنظر باندازیم . باید رنظرداشت آنکه کتاب مابکلی جامع وکامل نیست ولی باآنهم مطالعهٔ آن برای معلمان نه محض مفید بوده بلکه بصورت عموم دانستن مواد متن آن امریست ضروری . گرچه درمرحلهٔ اول هضم اکثر مواد متن این کتاب بخوانندهٔ ناآشنا مشکل تلقی خواهد شد ولـی حقیقت چنین نیست ، چه باکمی توجه وعادت گرفتن به علامه گذاری ونوشتن اینکتاب خواننده درك خواهد نمود که تسمتزیاد مواد آن ـ

موضوعاتی انتخاب شده که در دوره ثانوی قابل تدریس است . ضمناً

سعی نموده ایم تا توسط این کتاب نشان دهیم که ریاضیات معاصر قسمت

جداگانهٔ ریاضیات کلاسیک نبوده بلکه مطالعهٔ موضوعات ریاضی در پیمانهٔ

وسیعتر است . برای تثبیت ادعای خود یکعده مفاهیم مختلفهٔ مربوط

جبرو هندسه کلاسیک را انتخاب و بحیث مثال در فصل سوم این کتاب شامل

نموده آنها را بشکل معاصر توضیح و ارائه نموده ایم .

پروگرام مورد نظر ما مرکب از چند جلد کتاب است :

جلد اول : پروگرام مطروحهٔ ما منحصر به ست بوده که بصورت ابتدائی

ارائه شده (که خواننده به نگاه اول از آن میتواند صرف نظر نماید)

ولی قدم بقدم مشکل میشود .

جلد دوم : پروگرام ما را (که در سال 1976 به نشر آن اقدام خواهیم کرد)

موضوعات : روابط ، توابع ، مطابقت ها و موضوعات منطق ریاضی احتوا

خواهد کرد .

جلد سوم : منحصر به ساختمان ها و منظومه های اساسی ریاضیات است که

درزمینه از گروه ها ، ساحات و فضای وکتوری صحبت خواهد شد .

جلد چهارم : گرچه پروگرام مورد نظرما در سه جلد فوق باتمام میرسد ولی درصورت یافتن فرصت مناسب مابه نگاشتن جلد چهارم که موضوعات انرا انالیز معاصر و توپولوژی تشکیل میدهد اقدام خواهیم نمود .

تذکر باید داد که مواد متن این کتاب قسماً در سیمینارهای تربیتی مرکز ساینس معارف (که در مرکز وولایات کشور دایرشده) و قسماً در لیسه استقلال تدریس شده مراحل تجربوی خویش را سپری کرده است .

ناگفته نماند که این کتاب بدون همکاری مشترک مرکز پیداگوژی لیسه استقلال و مرکز ساینس معارف بوجود آمده نمیتوانست .

درینجا وجیبهٔ خویش میدانیم تا از ذوات محترمیکه مارا به تالیف این کتاب تشویق وهدایت نموده اند ابراز امتنان نموده وبهمین قسم از شاغلی لوران M. Laurent که درنشر این اثر مساعدت نموده اند تشکر نمائیم . بهمین قسم از شاغلی عبدالنبی مامورطباعتی مرکز ساینس معارف که در ترتیب مواد آن و از شاغلی اسلمی که در دیزاین پشتی آن و همچنان از شاغلو: شرزه ، عطاپور وعبدالعلیم اعضای علمی مرکز ساینس که در پروف خوانی این کتاب باما همکاری نموده اند اظهار قدردانی مینمائیم .

ازخوانندگان محترم خواهشمندیم تا مارا به اشتباهـــــات

غلاط که حین مطالعه کتاب بآنها مواجه میشوند مطلـــــع

شته وممنون سازند .

اېښتیان ژیل	پوهنمل محمد امان نادري
لیسه استقلال	مرکز ساینس معارف

کابل ـــ قوس ۱۳۵۴

فهرست مندرجات

عناوین	صفحه
فصل اول : ست	۱
1-1. معرفی ست	۱
1-2. عناصر یک ست	۳
1-3. رابطه شمول	۵
1-4. تشخیص یک ست	۷
(1) اعداد طبیعی	۱۱
(2) اعداد تام	۱۱
(3) ست اعداد نسبتی	۱۲
(4) ست اعداد غیرنسبتی	۱۲
(5) ست اعداد حقیقی	۱۳
1-5. تساوی دو ست	۱۸
1-6. ست های فرعی (یا ست های جزئی)	۲۱
1-7. خواص رابطه ((⊂)) در بین دو ست	۲۶

عناوین | صفحه

8-1. تعداد تمام ست های فرعی یک ست n عنصره ۴۰

9-1. مکمله یک ست ۴۵

ست کلی ۴۸

فصل دوم: عملیات در بین ست ها ۵۱

1-2. اتحاد ست ها ۵۱

2-2. خواص عملیه اتحاد ۵۸

خاصیت انجمنی ۶۲

خاصیت تبدیلی ۶۳

3-2. تقاطع ست ها ۶۵

4-2. خواص عملیه تقاطع ((∩)) ۷۲

خاصیت انجمنی ۷۶

خاصیت تبدیلی ۷۷

5-2. رابطه بین ((∪))، ((∩)) و ((⊂)) ۸۰

عنـــاويـــــن	صفحـــه

فصل سوم : استعمال ست ها 101
3-1 . استعمال ست ها در حساب 101
3-1.a . ست مضرب ها 101
3-1.b . ست مضرب هاي مشترك دو عدد .. 103
3-1.c . كوچكترين مضرب مشترك دو عدد .. 105
3-2 . ست قاسم ها 105
3-2.a . ست قاسم هاي مشترك دو عدد .. 106
3-2.b . بزرگترين قاسم مشترك دو عدد ... 107
3-3 . استعمال ست ها در حل معادلات 110
3-4 . استعمال ست ها در غير معادلات 115
3-4.a . ساحه ها 115
3-4.b . غير معادلات 117
3-5 . استعمال ست ها در ارائه مفاهيم هندسي .. 125

فصل اول

ســـت Set

1-1 • معرفی ست :

بعضی کلمات در علم ریاضی موجود است که معنی انها بدون تعریف قابل قبول است ، که یکی ازانجمله کلمه set ست است • بعبارت دیگر کلمه ست Set در ریاضی تعریف دقیق ندارد لیکن بمعنی ((مجموعه اشیا)) تعبیرشده میتواند • ازتوضیح امثال ذیل مفهوم کلمه ست رافهمیده میتوانیم :

1 • ست تمام شاگردان صنف اول مکتب شما •

2 • ست تمام حروف الفبای پشتو •

3 • ست تمام اعضای یک فامیل •

4 • ست رمه گوسفندان قره قل که پوست کبود چه دارند •

5 • ست تمام ولایات افغانستان •

6 • ست معلمان ریاضی مکتب شما •

7 • ست تمام صنوف مکتب شما •

در امثال فوق معنی کلمهٔ ست Set بمفهوم تمام شـــاگردان، تمام حروف الفبای پشتو، تمام اعضای یک فامیل، رمهٔ گوسفندان وغیـره استعمال شده است ٠

در علم ریاضی Set را معمولاً توسط علامهٔ قوسین مانند: { } نشان داده وآنرا به حروف کلان انگلیسی افاده میکنند مثلاً ست اعداد تام که از ۴ بزرگتر و از ۱۰ خوردتر اند اگر آنرا به A نشان دهیم طبق ذیـل ارائه شده میتواند :

$$A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

افادهٔ : . . . $B = \{\star, \circ, \triangle\}$ ستی را که از $\star$ ، $\circ$ و $\triangle$ تشکیل گردیده اســـت ارائـه میکند وما میتوانیم که انرا تـوسـط دیاگرام ون (*) !

(*) چون ارائه ونمایش ست ها به ذریعهٔ دیاگرام در مرحلـه اول توسط John Venn ریاضیدان انگلیسی صورت گرفته ازانجهت دیاگرام مذکور رابنام ون دیاگرام یاد میکنند ٠

همچنان Leonard Euler ریاضیدان سویسی (1707-1783) ست هارا بواسطه دیاگرام ارائه نموده وبنام اولر دیاگـــرام نیـز یاد میشود ٠

شکل (1 ـ 1) نمایش دهیم •

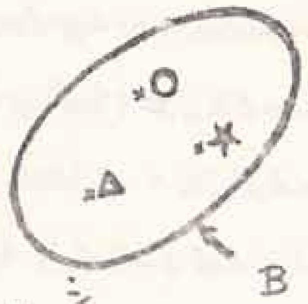
آیا گفته میتوانید که

اعداد : {15، 17، 19}

کدام ست راآرائه میکند ؟

انرا توسط شکل مانند دیاگرام

فوق ارائه کنید •



شکل (1-1)

2 ـ 1 • عناصر یک ست Elements of a set :

در امثال فوق دیده میشود که ست A از اعداد 5، 6، 7، 8 و 9 تشکیل گردیده این اعداد : 5، 6، 7، 8، و 9 را عناصر یا Elements ست A مینامند • عناصر یک ست توسط گذاشتن علامه کامه ویا زوگل ((،)) ازهم جدا میشوند و بهمین قسم ست B از اشکال ☆، ○ و △ بوجود آمده است که این اشکال ☆، ○ و △ را عناصر ست B میگویند •

زمانیکه راجع به مفهوم ست ازنقطهٔ نظر ریاضی صحبت میشود باید که عناصر آن ست بصورت موجز و دقیق معلوم باشد • بطورمثال اگرهدف ما از

یك ست C ست تمام شاگردان کلان یك صنف باشد درینصورت چون عناصرست C بصورت موجزو دقیق تعیین نشده پس ست C بصورت صحیح تعریف نشده است • زیرا کلمهٔ ((کلان)) که عناصرست C راتعریف میکند بصورت دقیق توضیح نشده است • حال اگرگفته شود که C ست تمام شاگردان کلان یك صنف را که بلندي قدشان از 150 سانتی متر تجاوز میکند نشان دهد، درینصورت C یك ست مشخص ریاضی راافاده میکند •

یك ست میتواند که داراي یکعده عناصرقابل شمار باشد مانند ست :

{امان ، سلیم ، اکرم، عثمان}

که محض داراي چهارعنصراست • بهمین قسم امکان دارد که تعداد عناصریک ست بی نهایت زیاد باشد • بطور مثال اگرست تمام اعداد کسري راکه از 1 بزرگتروا ز 2 خردتراند به E ارائه شود درینصورت عناصرست E بی نهایت زیاد بوده وغیرقابل شماراند •

بعضی اوقات مابیک گروه ستی که داراي هیچکدام یك عنصرنمیباشد برخورد میکنیم ، این ست رابنام ست خالی یاد میکنند ومعمولاً آنرا به علامهٔ { } ویا ϕ ارائه میکنند •

مثلاً : ست شاگردان صنف شماکه بلندي قدشان از 10 متربیشترباشد خالی است •

3-1 • رابطه شمول :

زمانیکه رابطه یك شی مشخص نظر بیك ست مشخص مورد مطالعه قرار گیرد درینصورت شی مذکور باست مورد نظر یکی از دو حالت را دارا میباشد : یااینکه شی مذکور شامل ست مورد نظر میباشد ویااینکه شی مذکور شامل آن ست نمیباشد • بطورمثال اگرحیوانات ونباتات رابحیث دوست اشیای ذیروح مد نظرگرفته و رابطه آهو را نظر باین دو ست مورد مطالعه قرار دهیم درینصورت ما میدانیم که آهو یك حیوان بوده و یك عنصر ست حیوانات میباشد و رابطه آنرا چنین ارائه مینمائیم :

$$\text{آهو} \in \{\text{حیوانات}\}$$

وچنین خوانده میشود : ((آهو یك عنصر ست حیوانات است •))

ویااینکه : ((آهو شامل ست حیوانات است •))

حالانکه آهو یك نبات نیست پس آهو یك عنصر ست نباتات نبوده ورابطه آهو راباست نبات چنین نشان میدهیم : $\text{آهو} \notin \{\text{نباتات}\}$ •

وچنین خوانده میشود : ((آهو یك عنصر ست نباتات نیست •))

ویااینکه : ((آهو شامل ست نباتات نیست •))

درینجا علامه ویا سمبول : (($\in$)) بمفهوم شامل اســـــــت

و بالعکس علامهٔ $\notin$ بمعنی شامل نیست استعمال میشود .

اگر D ست اسماي چهار حرفی اي راکه حرف اول شان با الف

شروع میشود نمایندگی کند یعنی :

$D = \{$ افضل ، اعظم ، اکرم ، امین ... (*) $\}$ باشد

درینصورت دیده میشود که :

خمید $\notin D$ ،

اما . . . . امان $\in D$ ،

همچنان . . . اکبر $\in D$ ،

درحالیکه . . افغانستان $\notin D$.

آیا افغان شامل ست D شده میتواند ویاخیر؟ چرا ؟

اگر ست اعداد تام جفت رابه E نشان دهیم ،

درینصورت باساني گفته میتوانیم که :

$2 \in E$ وهمچنان $4 \in E$ و $6 \in E$ است ،

(*) . درینجا سه نقطه ای که درداخل ست D نوشته شده این مفکوره راکه عناصر ست D هنوزهم ادامه دارد ارائه میکند .

درحالیکه : $3 \notin E$ وهکذا $5 \notin E$ و $7 \notin E$ چرا ؟

یاد رنظرداشت رابطه «$\in$» راجع با اعداد 19 ، 21 ، 24 ، 29 و 30 وست E چه فکرمیکنید ؟

وهمچنان اگرست اعداد طبیعی تاق به حرف O نشان داده شود آیاگفته میتوانید که کدام یك ازاعداد : 19 ، 21 ، 24 ، 29 و 30 شامل ست O بوده وکدام انها شامل ست O نمیباشد ؟

4 ـ 1 • تشخیص یك ست :

تشخیص یك ست باساس عناصرمربوطه ان بدوطریقه امکان پذیر است • یکی باساس لست کردن نام تمام عناصرمربوطه آن ، ودیگرباساس توضیح خواص مشترك عناصرآن . مثلاً اگرمطلب ماتشخیص $A = \{4, 6, 8\}$ باشد درینصورت ماگفته میتوانیم که A عبارت ازان ست است که عناصرآنرا اعداد : 4 ، 6 و 8 تشکیل داده اند که درینصورت ست A را باساس لست کردن عناصرآن تشخیص نموده ایم • بهمین قسم ما توانیم که ست A راباساس خواص مشترك عناصرآن طبق ذیل تشخیص کنیم :

((A عبارت ازان ستی است که عناصرآن رااعداد تام جفتی کــه از 2 بزرگتروازَ 10 کوچکتراند تشکیل میدهد •))

مذکوره تشخیص ست را توسط امثال ذیل توضیح نموده میتوانیم:

مثال اول: با استفاده از لست کردن عناصر یك ست ما میتوانیم که ست

اعداد طبیعی بین 15 و 26 را طبق ذیل ارائه نمائیم:

$A = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$

اکنون با استفاده از استعمال علایم جبری میتوانیم که ست A را

طبق ذیل نیز ارائه کنیم:

اگر ست تمام اعداد طبیعی $\mathbb{N}^{*}$ فرض شود درینصورت:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ 15 < x < 26\}^{\Psi}$

وچنین خوانده میشود: ((A عبارت از ست عناصر (x) است طوریکه x

شامل ست ان اعداد طبیعی (N) بوده که بین 15 و 26 واقع میباشند.))

مثال دوم: اگر ست اعداد اولیه Prime numbers را به

$\mathbb{P}$ نشان داده و $\mathbb{P}_1$ ست اعداد اولیه ایرا که خورد تر از 30 اند

نشان دهد درینصورت ست $\mathbb{P}_1$ را بطور طریق ذیل ارائه کرده میتوانیم:

(*). برای اینکه ست های اعداد مشخص از ست های کیفی فرق شود درین کتاب در پهلوی حروف که ست اعداد مشخص را ارائه میکنند یك خط کشیده شده است.

(Ψ). درینجا خط مرسومه عمودی ((|)) بمفهوم ((طوریکه)) ویا در ((حالیکه)) استعمال گردیده است.

اول باساس لست کردن عناصر P_1 :

$$P_1 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} .$$

دوم باساس توضیح خواص مشترک عناصر آن :

$$P_1 = \{x \mid x \in P ,\quad x < 30\} ،$$

31

وچنین خوانده میشود :

« P_1 عبارت از ست عناصر x است ، طوریکه x شامل ست اعداد اولیه بوده و خردتر از 30 میباشد .»

<u>مثال سوم</u> : اگرمطلب ما تشخیص ست اعداد طبیعی ایکه بزرگتر از 5 وخردتر از 7 است باشد. وآنرا به B نشان دهیم باساس لست کردن عناصر آن ، ست B را طبق ذیل نمایش داده میتوانیم :

$$B = \{6\}$$

باساس توضیح خواص مشترک عناصر آن ست B را قرار ذیل ارائه کرده میتوانیم :

$$B = \{y \mid y \in N ،\ 5 < y < 7\} .$$

آیاگفته میتوانید که ارائه کردن ست B بکدام یك ازدوطریق فوق آسانتراست ؟

مثال چهارم : اگرست ان اعداد طبیعی ایکه بین 7 و 8 قراردارند به C نشان داده شود درینصورت ست C باساس لست عناصرآن طبق ذیل ارائه شده میتواند :

$$C = \{ \ \}.$$

چون در بین 7 و 8 کدام عدد طبیعی دیگری موجود نیست بنا C ست خالی است . ست C راباساس خواص مشترك عناصرآن نیز قرارآتی نمایش داده میتوانیم :

$$C = \{ y \mid y \in \mathbb{N} , 7 < y < 8 \}.$$

مثال پنجم : اگر D ست اعداد کسریکه بین 7 و 8 قراردارند فرض شود ، درینصورت ارائه ست D باساس لست عناصرا نامکان پذیر نیست . زیرا دربین دوعدد 7 و 8 بی نهایت کسریکه از 7 بزرگتر و از 8 خورد تراند وجود دارند . درینصورت مانمیتوانیم که ست D راباساس لست عناصرآن بصورت

موجزارائه کنیم . اما باساس توضیح خواص مشترک عناصر ، میتوانیم که ست D را طبق ذیل نمایش دهیم :

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{Q},\ 7 < x < 8\} .$$

که دراینجا $\mathbb{Q}$ ست تمام کسور یعنی اعداد نسبتی راارائه میکند .

تبصره :

1 . اگر ست اعداد طبیعی * Natural Numbers

به $\mathbb{N}$ ارائه گردد ، درینصورت :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} .$$ میبود .

2 . اگر ست اعداد تام Integers

که عبارت از تمام اعداد مثبت تام و تمام اعداد منفی تام

(*) . بعضی نویسندگان عدد صفر را بحیث عدد طبیعی تعریف کرده و بالعکس بعضی ها آنرا عدد طبیعی تعریف نمیکنند .

(٢)
وصفرمیباشد، به $\mathbb{I}$ نشان داده شود، درینصورت:

$\mathbb{I} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ میشود.

3 . ست اعداد نسبتی Rational Numbers

ستی است که تمام عناصر آن بشکل $\frac{a}{b}$ درحالیکه a و b اعداد تام بوده و $b \neq 0$ باشد درآورده شده میتواند، ومعمولاً ست اعداد نسبتی را به $\mathbb{Q}$ نشان میدهند. و مامیتوانیم که ست $\mathbb{Q}$ را در ریاضی طبق ذیل افاده نمائیم:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{I},\ b \neq 0\}$$

یا بعبارت دیگر اعداد نسبتی اعدادی راگویند که شکل اعشاری انها محدود ویامتوالی (تکراری) باشد.

4 . ست اعداد غیرنسبتی Irrationals

ست اعدادی است که نه بشکل اعشاری محدود و نه بشکل اعشاری متوالی آورده شده میتواند. مثلاً: $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، π وغیره.

---

(٢). دربعضی کتب ست اعداد تام به $\mathbb{Z}$ نشان داده میشود.

که متشکل از تمام اعداد نسبتی و غیرنسبتی میباشد وآنرا

به $\mathbb{R}$ نشان میدهیم ۰

تمرینات

۱ ۰ ست $A = \{10, 11, 12, 13, 14\}$ رامدنظر بگیرید :

(a) ۰ ست A رابا ساس خواص مشترک عناصر مربوط آن توضیح نمائید ۰

(b) ۰ ایا $12\frac{1}{2}$ شامل ست A میباشد ؟

(c) ۰ عناصر ست A چند رقمی است ؟

(d) ۰ آیا 12 شامل ست A میباشد ؟

(e) ۰ آیا 5 شامل ست A میباشد ؟

(f) ۰ آیا $(10 + 11)$ شامل ست A میباشد ؟

۲ ۰ ست B = {ساق ، سیم ، سیب ، سنگ ، ۰۰۰} را مد نظر گرفته :

(a) ۰ کدام یکی از کلمات ذیل شامل ست B شده میتواند :

سبق ، ساکت ، سیر ، سبک ، سر ، ساده ، صبر ؟

(b) ـ آیا ست B را باساس خواص مشترک عناصر آن تشخیص کرده میتوانید ؟

(c) ـ آیا ست B را باساس لست عناصر مربوطه آن تشخیص کرده میتوانید ؟

3 ـ ست کلمات پشتو را که هر کلمهٔ آن متشکل از شش حرف بوده و به حرف (پ) شروع شود مد نظر گرفته :

(a) ـ آیا کلمهٔ (پښتانه) شامل این ست شده میتواند ؟

(b) ـ آیا کلمهٔ ((پسرلی)) عنصر این ست بوده میتواند ؟

(c) ـ آیا کلمهٔ ((پوهنتون)) عنصر این ست شده میتواند ؟

(d) ـ آیا کلمهٔ ((خندیدل)) عنصر این ست شده میتواند ؟

(e) ـ آیا کلمهٔ ((پیاوړی)) عنصر این ست شده میتواند ؟

4 ـ (a) ـ ست اعداد تام را که بین 10 و 30 واقع اند بنویسید .

(b) ـ ست تمام اعداد تام جفت را که بین 10 و 30 واقع اند بنویسید .

(c) ـ تعداد عناصر هر یک از دو ست فوق چند است ؟

5 ـ (a) ـ ست اعداد تام را که بین 4 و 6 واقع اند بنویسید .

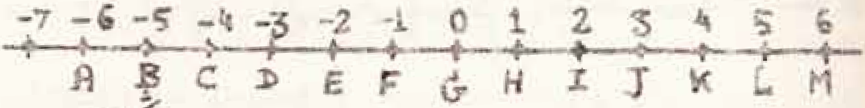
(b) ـ تعداد عناصر ست فوق الذکر چند است ؟

(c) • ست اعداد تام جفتی راکه بین 4 و 6 واقع اند بنویسید •

6 • (a) • ست آن اعداد تامی راکه بین 5 و 6 واقع اند بنویسید •

(b) • ست آن اعداد کسری راکه بین 5 و 6 واقع اند نوشته و راجع به تعداد عناصر این ست چه فکر میکنید ؟

7 • خط عدد را ذیلاً در نظر گرفته و با استفاده از شکل ذیل :



شکل (1-2)

(a) • ست اعداد تامیکه بین دو نقطه L و G واقع اند بنویسید •

(b) • ست نقاطیکه اعداد تام را نمایش داده و بین 3- و 5 واقع اند نوشته کنید •

(c) • ست اعداد کسریکه بین دو نقطه G و D واقع اند تشخیص کنید •

(d) • ست اعداد تامیکه بین نقاط A و B مطابقت دارند بنویسید •

(e) • ست اعداد کسریکه بین نقاط A و B مطابقت دارند بنویسید •

۷ • اگر {مثبت، شب، گرم، سیاه، کوتاه} = X باشد، ست Y را از لغات ذیل طوری تشکیل دهید که عناصر آن کلمات تضاد عناصر ست X باشند :

لغات : سنگ، سرد، آب، روز، کتاب، منفی، سفید، قلم، دراز.

۹ • ست : $E = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}, 6\}$ را مد نظر بگیرید • ست F را تشکیل دهید طوریکه :

(a) • عناصر ست F اعدادی باشند که اگر به عناصر ست E ضرب شوند حاصلضرب آنها مساوی بیک گردد •

(b) • عناصر ست F اعدادی باشند که اگر به عناصر ست E جمع شوند حاصل جمع آنها مساوی به صفر گردد •

(c) • عناصر ست F اعدادی باشند که اگر به عناصر ست E ضرب شود حاصلضرب آنها مساوی به صفر شود •

(d) • عناصر ست F اعدادی باشند که اگر به عناصر ست E ضرب شود حاصلضرب آنها مساوی به 2 گردد •

10 • هریك از ست هاي ذیل را به اساس لست عناصرشان تشخیص دهید :

$E=\{x \mid x \in N ، 3 \leq x < 7\}$ . . . . •(a)

$F=\{x \mid x \in N ،$ جفت $x ، -2 \leq x \leq 5\}$ . . •(b)

$G=\{y \mid y \in N ، y < 8\}$ . . . . •(c)

$H=\{y \mid y = 3x ، x \in N ، x < 9\}$ . . . •(d)

$L=\{y \mid y/2 \in N ، 3 \leq y \leq 10\}$ . . . •(e)

$M=\{x \mid x \in N ، x < 5 ، 5 < x\}$ . . •(f)

کمك : آیا در ست M کدام عنصر وجود دارد ؟

11 • هریك از ست هاي ذیل را به اساس خواص مشترك عناصر انها بنویسید :

$A=\{2 ، 4 ، 6 ، 8\}$ . . . . •(a)

$B=\{3 ، 5 ، 7 ، 9\}$ . . . . •(b)

$C=\{2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11\}$ . . . . . •(c)

$D=\{1 ، 2 ، 4 ، 8\}$ . . . . •(d)

$E=\{3 ، 6 ، 9 ، 12 ، 15\}$ . . . . . •(e)

$F=\{\ldots ، -2 ، 0 ، 2 ، 4 ، \ldots\}$ . . . •(f)

۴ ـ ۱ ـ تساوی دو ست :

تعریف : دو ست A و B باهم مساوی گفته میشود
درصورتیکه هردو ست A و B دارای عین عناصر
باشند . یا بعبارت دیگر دو ست A و B
باهم مساوی گفته میشود درصورتیکـــه
عین ســـت را ارائه کننـــــد .

مثال اول : اگر دو ست :

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{3, 5, 1, 9, 7\}$ مد نظر گرفته شوند .

ست
درینصورت چون A و B ستی راکه دارای عین عناصرا
ارائه میکنند پس نظر به تعریف گفته میتوانیم کـه :

$A = B$.

نتیجـــه : از تحلیل مثال فوق معلوم میشود که اگرجا های عناصـــر در
افـــاده یـــك ســـت تغیر داده شـــود
خود ست تغیر نمیکند .

مثال دوم: اگر دو ست: $E = \{5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30\}$

و $F = \{y \mid y = 5x , x \in N , x \leq 6\}$

مد نظر گرفته شود، دیده میشود که هر دو ست مذکور عین ست را ارائه میکند.

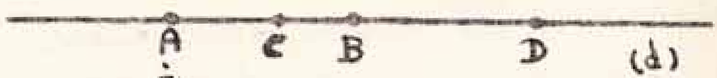
زیرا: برای قیمت های x درصورتیکه $x \in N$ بوده، و $x \leq 6$ مد نظر گرفته شود درینصورت واضح است که:

$$F = \{5\times1 , 5\times2 , 5\times3 , 5\times4 , 5\times5 , 5\times6\}$$

و یا $F = \{5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30\}$ میشود.

یعنی: . . . $E = F$ میباشد.

مثال سوم: اگر چهار نقطه A، B، C و D بالای خط مستقیم (d) قرار شکل (1-3) مد نظر گرفته شوند



شکل (1-3)

چون خط مستقیم $\overleftrightarrow{AB}$ وهم خط مستقیم $\overleftrightarrow{CD}$ ست تمام

نقاط خط (d) رانشان میدهند درینصورت مانوشته

میتوانیم : $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$.

رابطهٔ فوق افاده میکند که خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$

باهم منطبق اند .

<u>مثال چهارم</u> : اگر دو قطعه خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ طبق شکل (1-4)

مد نظر گرفته شوند طوریکه طول هرکدام انها مساوی به 4Cm

باشد ، درینصورت : . . . . $\overline{AB} \neq \overline{CD}$.

شکل (1-4)

زیرا : اگر کدام نقطهٔ مانند P بالای قطعه خط $\overline{AB}$

اخذ شود درینصورت $P \notin \overline{CD}$. چون یک عنصر

(نقطهٔ P) بالای قطعه خط $\overline{AB}$ موجود شده میتواند

که شامل قطعه خط $\overline{CD}$ نیست، بنابران نظر به تعریف

مساوات دو ست ادعا کرده میتوانیم که :

$$\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{CD} \;.$$

از تحلیل مثال فوق نتیجه میشود اگرچه هردو قطعه خط دارای طول مساوی میباشند ولی ازینکه هرکدام انها یك یك ست نقاط متفاوت را ارائه میکنند پس باهم مساوی نیستند .

6-1 . ست هاي فرعی (ویا ست هاي جزئی) Subsets :

مثال اول : دو ست A و B را طبق ذیل مد نظر گیرید :

$A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

$B=\{3, 4, 5\}$

بین دو ست A و B کدام رابطه موجود است ؟

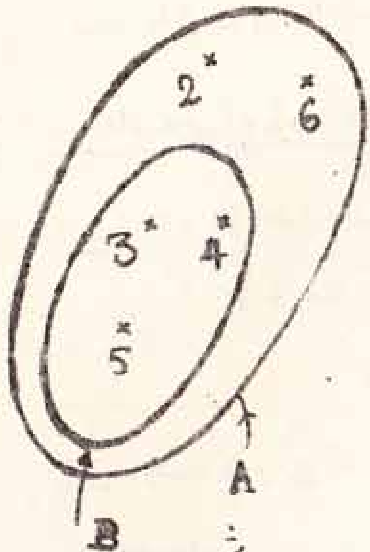
آیا تمام عناصر ست A شامل ست B میباشند ؟

آیا تمام عناصریکه در B شامل است شامل ست A شده میتواند ؟

در مثال فوق دیده میشود که تمام عناصرکه در B موجود است شامل ست A نیز میباشند ، اما هر عنصر ست A شامل ست B نمیباشد .

چنانچه دیده میشود که 6 شامل ست A بوده اما شامل ست B نمیباشد . بهمین قسم 2 شامل ست A است اما شامل ست B نیست .

وما میتوانیم که هردو ست A و B را توسط ون دیاگرام قرار شکل (1-5) ذیل نشان دهیم :



شکل (1-5)

درین مثال ست B رایک ست فرعی ست A مینامیم .

<u>تعریف</u> : یک ست S ست فرعی ست T گفته میشود در صورتیکه تمام عناصر ست S شامل ست T باشد . وآنرا قرار ذیل ارائه میکنند* :

$$S \subset T$$

وچنین خوانده میشود : « ست S فرعی T است . »

(*) . بعضی نویسنده گان بعوض علامه « $\subset$ » علامه : « $\subseteq$ » را نیز بکار می برند .

مثال دوم : دوست : $C=\{1, 4, 9, 16, 25\}$

و $D=\{25, 9, 1, 4, 16\}$ را مد نظر بگیرید :

(a) • آیا تمام عناصر ست D شامل ست C میباشد ؟

(b) • آیا تمام عناصر ست C شامل ست D میباشد؟

(c) • گفته میتوانید که آیا :

(i) • D یک ست فرعی C است ؟

(ii) • C یک ست فرعی D است ؟

در مثال فوق دیده میشود که تمام عناصر ست D شامل ست C است • پس نظر به تعریف ، D یک ست فرعی C است • وهمچنان چون تمام عناصریکه دو ست C وجود دارند شامل ست D نیز میباشند بنابران گفته میتوانیم که C یک ست فرعی ست D نیز میباشد •

وچنین ارائه میشود : $D \subset C$ ،

وهم $C \subset D$ •

مثال سوم : ست هاي : { گل ، بلبل ، ابشار ، باغ } = G

{ ستاره ، باغ ، گل ، مهتاب ، ابشار } = H رادرنظر

گرفته و به سوالات ذیل پاسخ دهید :

(a) • آیا هر (تمام) عنصر ست G شامل ست H میباشد؟

(b) • آیا هر عنصر ست H شامل ست G میباشد؟

(c) • آیا (i) • G ست فرعی H شده میتواند ؟

(ii) • H ست فرعی G شده میتواند؟

از تحلیل مثال فوق بمشاهده میرسد که یك عنصر G یعنی بلبل

درست H نیست • پس G ست فرعی H نمیباشد • بهمین

قسم درست H عناصر : ستاره و مهتاب وجود دارند که

شامل G نمیباشند • بنابران H ست فرعی G شده نمیتواند •

پس نه H ست فرعی G بوده و نه G ست فرعی H میباشد •

وچنین ارائه میشود : $G \not\subset H$ ،

وهمچنان : $H \not\subset G$ •

مثال چهارم: در شکل (1-6) ذیل $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو قطعه خطی را که روی خط (d) قرار دارند ارائه میکنند .

شکل (1-6)

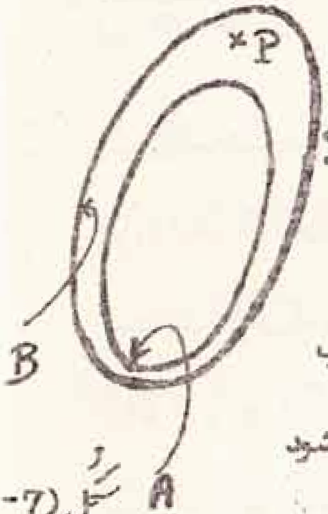
اگر $\overline{AB}$ بحیث ست تمام نقاطی که در بین نقاط A و B قرار دارند (بشمول نقاط A و B) وهم‌چنان $\overline{CD}$ بحیث ست تمام نقاطی که در بین C و D واقع اند (بشمول نقاط C و D) مد نظر گرفته شوند ، دیده میشود که هر نقطه مانند نقطه P قطعه خط $\overline{AB}$ بالای $\overline{CD}$ نیز واقع است . پس درینصورت گفته میتوانیم که $\overline{AB}$ یک ست فرعی $\overline{CD}$ است . وچنین مینویسیم :

$$\overline{AB} \subset \overline{CD} .$$

از طرف دیگر از شکل بمشاهده میرسد که هر نقطه $\overline{CD}$ بالای $\overline{AB}$ واقع نیست . مثلاً نقطه ای مانند M بالای $\overline{CD}$ وجود دارد که بالای $\overline{AB}$ واقع نمیباشد . پس

درینصورت گفته میتوانیم که $\overline{CD}$ یک ست فرعی $\overline{AB}$ نیست و چنین مینویسیم :

$$\overline{CD} \not\subset \overline{AB} \;.$$



شکل (7-1)

تعریف : ست A یک ست فرعی مناسب ست B نامیده میشود درصورتیکه :

$A \subset B$ بوده و $A \neq B$ باشد .

یا بعبارت دیگر : ست A یک ست فرعی مناسب Proper Subset ست B نامیده میشود

درصورتیکه : اولاً A یک ست فرعی B بوده

وثانیاً لااقل یک عنصر در B موجود باشد

که در A موجود نباشد .

1-7 • خواص رابطهٔ : (($\subset$)) دربین دو ست :

خاصیت اول : هرست ، ست فرعی خود ش میباشد

یابا افادهٔ ریاضی : $A \subset A$.

ثبوت : چون هر عنصر ست A شامل ست A است .

بنابر تعریف پس $A \subset A$.

خاصیت دوم : ست خالی ، ϕ ، ست فرعی هر ست است .

یا با افاده ریاضی با در نظر داشت هر ست کیفی A

$\phi \subset A$ است .

ثبوت : چون ست خالی دارای هیچکدام یک عنصر نمیباشد .

پس در ست خالی کدام عنصری موجود شده نمیتواند

که شامل ست A نباشد ؛ بنابران نظر به تعریف

گفته میتوانیم که : $\phi \subset A$.

خاصیت سوم : اگر A ست فرعی B و B ست فرعی A باشد پس ست های A و B باهم مساوی است .

یا با افاده ریاضی : اگر $A \subset B$

و $B \subset A$ باشد ،

پس $A = B$ میباشد .

ثبوت : ازینکه $A\subset B$ است ،

پس هرعنصریکه شامل ست A است همان عنصر

درست B نیزشامل است . بهمین قسم چون

$B\subset A$ است ، پس هرعنصریکه شامل B است

همان عنصر درست A نیز شامل است . درنتیجه

هیچکدام عنصری موجود شده نمیتواند که در A

شامل بوده و شامل B نباشد، وهمچنان هیچکدام

یک عنصری موجود شده نمیتواند که در B شامل باشد

ودر A شامل نباشد . بنابران هردوست A و B

دارای عین عنصربوده ، پس درنتیجه :

$$A=B \quad .$$

تبصره : خاصیت فوق در ریاضی مهم بوده و برای اثبات

تساوی دوست معمولاً ازان استفاده میشود .

خاصیت چهارم : اگر سه ست A ، B و C مد نظر گرفته شود طوریکه A ست فرعی B و B ست فرعی C باشد ، پس A ست فرعی C نیز میباشد .

یابافاده ریاضی : اگر $A \subset B$ ، و $B \subset C$ باشد ، پس $A \subset C$ میباشد.

ثبوت : ازینکه $A \subset B$ است ، پس هر عنصر ست A شامل ست B است . ازینکه $B \subset C$ است ، پس هر عنصر ست B شامل ست C است . در نتیجه هر عنصر ست A شامل ست C بوده پس ما گفته میتوانیم که A یك ست فرعی ست C است .

8 – 1 – تعداد تمام ست های فرعی یک ست n عنصره :

مثال اول : ست $A = \{2, 5\}$ رامد نظر گرفته میخواهیم تمام

ست های فرعی ست A را بدست آریم • دیده میشود که

ست های فرعی ست A عبارت اند از :

$1. \ldots \{2, 5\} \subset \{2, 5\}$

$2. \ldots \{2\} \subset \{2, 5\}$

$3. \ldots \{5\} \subset \{2, 5\}$

$4. \ldots \{\ \} \subset \{2, 5\}$

ازمثال فوق دیده میشود که ست A دارای دو عنصر بوده

اما تمام ست های فرعی آن به چهار میرسد •

مثال دوم : میخواهیم تعداد تمام ست های فرعی

ست :

$B = \{a, b, c\}$

رابدست آریم •

1- $\{a,b,c\} \subset \{a,b,c\}$	5. $\{a\} \subset \{a,b,c\}$
2. $\{a,b\} \subset \{a,b,c\}$	6. $\{b\} \subset \{a,b,c\}$
3. $\{a,c\} \subset \{a,b,c\}$	7. $\{c\} \subset \{a,b,c\}$
4. $\{b,c\} \subset \{a,b,c\}$	8. $\{\ \} \subset \{a,b,c\}$

از مثال فوق دیده میشود که اگر تعداد عناصر ست 3 باشد تعداد ست های فرعی آن به 8 میرسد . در مثال فوق بمشاهده میرسد که چهار ست فرعی ست B بدون عنصر c و چهار ست دیگر آن دارای عنصر c میباشد .

<u>مثال سوم</u> : اگر C یك ست چهار (4) عنصره فرضاً $C=\{a,b,c,d\}$ در نظر گرفته شود درینصورت تمام ست های فرعی ست C را طبق ذیل محاسبه کرده میتوانیم :

اگر یك ست سه عنصره ست C مثلاً : $S_1=\{a,b,c\}$ در نظر گرفته شود نظر به مثال دوم فرعی ست S_1 دارای 8 ست فرعی بوده که آنرا در ستون اول

جدول ذیل نشان میدهیم ؛

ستون اول	اگر عنصر d اضافه شود	ستون دوم
$S_1=\{a, b, c\}$	$\longrightarrow$	$S_9=\{a, b, c, d\}$
$S_2=\{a, b\}$	$\longrightarrow$	$S_{10}=\{a, b, d\}$
$S_3=\{a, c\}$	$\longrightarrow$	$S_{11}=\{a, c, d\}$
$S_4=\{b, c\}$	$\longrightarrow$	$S_{12}=\{b, c, d\}$
$S_5=\{a\}$	$\longrightarrow$	$S_{13}=\{a, d\}$
$S_6=\{b\}$	$\longrightarrow$	$S_{14}=\{b, d\}$
$S_7=\{c\}$	$\longrightarrow$	$S_{15}=\{c, d\}$
$S_8=\{\ \}$	$\longrightarrow$	$S_{16}=\{d\}$.

حالا اگر عنصر چهارم ست C یعنی ((d)) را به این

ست هاي فرعي ست C علاوه کنیم دربنصورت ۸ ست هاي فرعي

دیگر ست C قرار ستون در جد ول فوق حاصل میشود •

از مطالعه مثالهاي فوق جدول ذیل نتیجه میشود :

ست	تعداد عناصر	تعداد تمام ست هاي فرعي
A	2	$4 = 2^2$
B	3	$8 = 2^3$
C	4	$16 = 2^4$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n عنصر	n	2^n

از توضیحات فوق نتیجه ذیل حاصل میشود : هنگامیکه در یک

ست یك عنصر اضافه شود تعداد تمام ست هاي فرعي آن دو چند

تعداد تمام ست هاي فرعي ست اصلی آن میشود •

نـــشـــوت : اگر $n = 1$ باشد تعداد ست هاي فرعي آن

دو ($2^1 = 2$) ميشود ٠ مثلاً اگر $A = \{a\}$

باشد ست هاي فرعي آن خود ست A و ســـت

خالي ميباشد ٠ واگر $n = 0$ باشـــــد

ست مورد نظر داراي كدام عنصر نبوده يعني ست

خالي ϕ ميباشد / و ست خالي داراي يك ســـت

فرعي است كه ان عبارت از خودش ميباشد ٠

يعني : $\{\ \} \subset \{\ \}$ ٠

درنتيجه گفته ميتوانيم كه تعداد ست هاي فرعي ستي كه

عنصر ندارد يك ، يعني ($2^0 = 1$)

ميشـود ٠

تمرینات

1. ثبوت کنید که ست عوامل ضربی عدد 4 (*) یک ست فرعی ست عوامل ضربی 8 است.

2. اگر سه ست A، B و C موجود گردد طوریکه $A \subset B$ و $B \subset C$ و $C \subset A$ باشد، ثبوت کنید که ست های A، B و C مذکور باهم مساوی اند.

3. دو نقطه ثابت A و B مفروض اند. اگر P ست نقاطی راکه از A و B متساوی الفاصله اند تعریف کند و S ست نقاطی راکه بالای ناصفه عمودی $\overline{AB}$ قرار دارند نشان دهد باستفاده از خاصیت سوم ثابت کنید که:

$$S = P .$$

(*) یک عدد x عامل ضربی یک عدد y گفته میشود درصورتیکه y بالای x پوره تقسیم شود.

۰ اگر E ست حل (جوابات) معادله :

$$x^2 - x - 2 = 0$$

و F ست حل (جوابات) معادله :

$x^3 - x^2 - 2x = 0$ را ارائه کنند ،

نشان دهید که $E \subset F$ است ۰

۰ اگر A ست حل معادله :

$$x^5 + 4x^4 - 19x^3 + 2x - 3 = 0$$

و B ست حل معادله :

$x^6 + 4x^5 - 19x^4 + 2x^2 - 3x = 0$ باشد ،

بدون حل کردن معادلات مذکور نشان دهید که :

$A \subset B$ است ۰

۰ ثابت کنید که قطعه خط $\overline{AB}$ یك ست فرعی خط مستقیم $\overleftrightarrow{AB}$ است ۰

7 ۰ اگر C ست حلهٔ معادلهٔ:

$$x^2+4x-2 = 9x-12$$

و D ست حلهٔ معادلهٔ:

$(x^2+4x-2)^2 = (9x-12)^2$ را ارائه کنند

اولاً نشان دهید که: $C \subset D$ است ۰

ثانیاً آیا C و D باهم مساوی شده میتوانند؟

8 ۰ اگر Y ست تمام نقاط مستوی را که از یک نقطهٔ ثابت O که بفاصله 5 سانتی متر ویاکمتر ازآن موقعیت دارند ارائه کند، و همچنان X ست تمام نقاط مستوی را که ازهمان نقطهٔ ثابت O که بفاصلهٔ 3 سانتی متر ویاکمتر ازآن واقع اند، نشان دهد ثابت کنید که: $X \subset Y$ ۰

9 ۰ ست: $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ رامد نظرگرفته بگوئید

که آیا (a) ۰ A یک ست فرعی $\mathbb{N}$ میباشد ویاخیر؟

(b) ۰ A یک ست فرعی $\mathbb{Z}$ میباشد ویاخیر؟

10 ۰ ست های : $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{I}$ و $\mathbb{Q}$ را نظریه رابطه « $\subset$ »

ترتیب کنید ۰

11 ۰ اگر A ست اعداد تامی را که بین 1 و 100 واقع اند نشان دهد :

(a) ۰ آن ست فرعی ست A را که عناصر آن تمام اعداد اولیه ست

باشد بنویسید ۰

(b) ۰ آن ست فرعی ست A را که عناصر آنرا ضرب های 9 تشکیل

دهند بنویسید ۰

(c) ۰ آن ست فرعی ست A را که عناصر آنرا اعداد یکه مجموعه

ارقام شان مساوی به 10 گردد بنویسید ۰

12 ۰ اگر . . . $A = \{a , b , c , d\}$

و $B = \{a , b , a , c , d , b , a\}$ باشند :

(a) ۰ آیا ۰۰۰ $A \subset B$ شده میتواند ؟

(b) ۰ آیا ۰۰۰ $B \subset A$ شده میتواند ؟

(c) آیا ... $A = B$ میباشد (*)

13 • با درنظرداشت توضیحات یا ورق مربوط سؤال (12) فرق ست های حروف کلمهٔ : ((امان))

وکلمهٔ : ((منان)) را باهم مقایسه کنید .

14 • اگرست : {ن ، م ، ا} = E مدنظرگرفته شود یکعده کلمات را بنویسید طوریکه ست حروف مربوطه انها یك ست فرعی E باشد .

15 • (a) • ست حروف کلمهٔ : ((افغانستان)) را بنویسید .

(b) • آیاست حروف کلمهٔ : ((ستان)) یك ست فرعی ست حروف کلمهٔ ((افغانستان)) شده میتواند ؟

(c) • آیا حروف کلمهٔ : ((تخته)) یك ست فرعی ست حروف کلمهٔ ((افغانستان)) شده میتواند ؟

(d) • آیاست حروف جملهٔ : ((افغانستان جان افغانی است .)) یك ست فرعی ست حروف کلمه ((افغانستان)) شده میتواند ؟

(*) • تکراراً نوشتن عنصر یا عناصر یك ست در ست مذکور کدام تغیری وارد نمیکند .

16 • باد رنظر داشت هکوره که ترتیب وتکرار عناصر در ست مربوطه آن کدام تغییری وارد نمیکند •

(a) • نشان دهید که ست حروف کلمات : ((دام و دانه))

((باد و باران))

((روز و شام))

((زنان ومردان))

همه ست های فرعی ست حروف جملهٔ ((کشورما زنده باد))

میباشند •

(b) • یکعده جملاتی راکه حروف مربوطه آنها ست های فرعی ست

حروف جملهٔ ((کشورما زنده باد)) راتشکیل دهند بنویسید •

17 • اگر ست $S = \{a, b, c\}$: در نظر گرفته شود :

(a) • تمام ست های فرعی ست S رابنویسید •

(b) • آیا ست ϕ ست فرعی ست S شده میتواند ؟ چرا ؟

• اگر : $D = \{ x \mid x \in P$ و $x < 12 \}$ باشد ،

درحالیکه P دراخاذ مجموعه ست اعداد اولیه را ارائه میکند ○

تمام ست های فرعی ست D را بدست آرید ○

• یك نفر باد رنظرداشت پوشیدن کلاه ، بالاپوش ونقل دادن چتری ازخانه خود خارج میشود ○ تمام شرایط ممکنه ای راکه نفر مذکور تحت آن خانه راترك میکند جوړی کنید ○

• یك نفراز شرکت آریانا بایسکل خریداری میکند ○ بعضی اوقات نظر به پالیسی شرکت حین خرید بایسکل ممکن یك ویا چند ویا تمام اقلام سامان اضافی : زنج ، پلاس ، یکسرانه ، پمپ وقفل بخریدار نیز هدیه داده میشود :

(a) ○ تمام حالات ممکنه ای که تحت آن بایسکل های شرکت آریانا بفروش میرسد چند است ؟

(b) ○ تمام شرایط ممکنه ایکه تحت آن ها بایسکل های شرکت آریانا بدون پمپ ، بفروش میرسد چند است ؟

(c) • تمام شرایط ممکنه ایکه تحت آنها بایسکل های شرکت بدون پمپ وقفل بفروش میرسد چند است ؟

21 • ست ، $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ رامد نظر گیرید

(a) • آن ست های فرعی ست S راانتخاب نمائید که عناصر آنرا اعداد جفت ست S تشکیل دهند •

(b) • آن ست های فرعی ست S راانتخاب نمائید که عناصر آنرا اعداد تاق ست S تشکیل دهند •

(c) • آن ست های فرعی ست S راانتخاب نمائید که :

(i) • اگر به عناصر آن 5 جمع گردد نتیجه مساوی به 5 شود .

(ii) • اگر به عناصر آن 4 جمع گردد نتیجه آن مساوی به عددی گردد که شامل ست S نباشد •

(iii) • ضرب عناصر آن یك باشد •

(iv) • ضرب عناصر آن صفر باشد •

(d) ۰ آن ست های فرضی ست S را انتخاب نمائید که :

(i) ۰ اگر هر کدام از عناصر آن دو چند گردد نتیجهٔ حاصلضرب آنها عناصر ست S نباشد ۰

(ii) ۰ اگر هر کدام از عناصر آن ضرب صفر گردد حاصلضرب آنها عنصر ست S باشد ۰

(iii) ۰ اگر هر کدام از عناصر آن ضرب 3 گردد حاصلضرب آنها شامل ست S باشد ۰

(e) ۰ آن ست های فرضی ست S را انتخاب نمائید که اگر 5 بار چند هر یک از عناصر آن جمع شود نتیجه یک عنصر ست S باشد ۰

22 ۰ اگر Q عبارت از ست تمام چهار ضلعی های مربوط هندسه مسطحه باشد کدام یک از ست های ذیل، ست فرعی Q شده میتواند :

(a) ۰ {مربع ها}، (b) ۰ {مثلث ها}، (c) ۰ {ذوزنقه ها}،
(d) ۰ {مستطیل ها}، (e) ۰ {شش ضلعیها}، (f) ۰ {هشت ضلعیها}

(h) ۰ {منحرف ها} ، (i) ۰ {هفت ضلعیها}۰

(j) ۰ راجع به ست های مربوطه جزء (a) و (d) چه فکر میکنید ؟

کمک : ما میدانیم که شش ضلعیها ، ست فرعی Q شده نمیتوانند ۰ بعبارة

دیگر میتوانیم بنویسیم : $Q \not\subset$ {شش ضلعی ها} ۰

23 ۰ (a) ۰ تعداد تمام ست های فرعی ست حروف کلمه «جمهوریت»

به چند میرسد ؟

(b) ۰ تمام ست های فرعی ست حروف مشترک

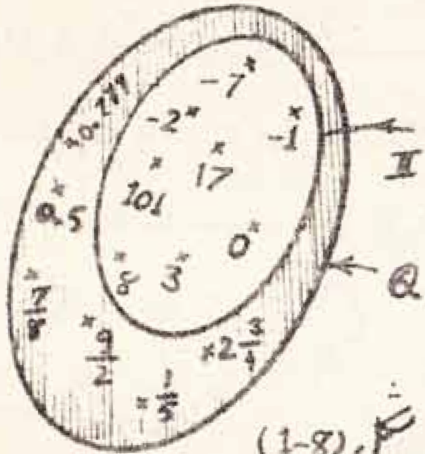
«توانا بود هرکه دانا بود»

را محاسبه کنید ۰

۹-۱ • مکمله یک ست The Complement Of A Set:

مثال اول: ما میدانیم که I (ست اعداد تام) یک ست فرعی Q (ست اعداد نسبتی) است •

یعنی: $I \subset Q$ •



شکل (1-8)

ما میدانیم که در Q برعلاوه تمام اعداد تام (I) دیگر اعداد کسری نیز موجود است.

ست این اعداد کسری ست مکمله I در Q گفته میشود • این ست در شکل (۸-۱) فوق بصورت مخطط آرائه شده است •

مثال دوم: اگر ست تمام اعداد جفت را به E نشان دهیم ما میدانیم که E یک ست فرعی I است • یعنی: $E \subset I$ •

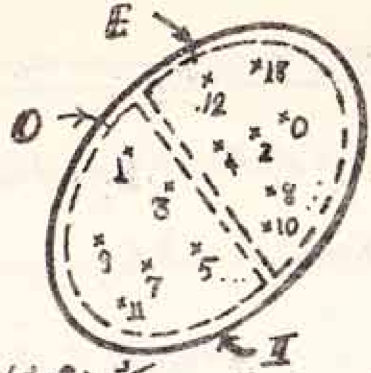
درینصورت اعداد تامی که جفت نیست (اعداد تاق است) شامل E نبوده یک ست فرعی دیگری I را بوجود می آورند •

این ست اعداد تاق ست مکمله E

در II گفته میشود . این ست مکمله

E در شکل (1 - 9) به حرف O

نشان داده شده است .



شکل (1-9)

<u>تعریف</u>: اگر A یک ست فرعی S باشد

مکمله ست A در S عبارت از ستی آن عناصر

S است که شامل A نمیباشند .

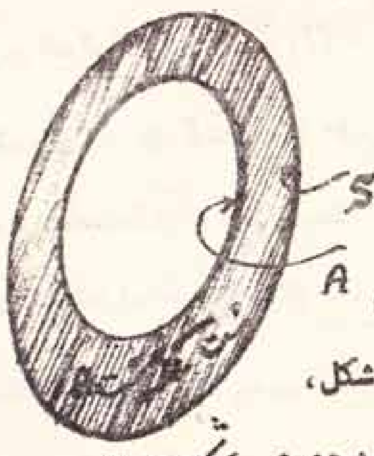
چنین ارائه میشود : C_S^A .

مکمله یک ست A را در S

درصورتیکه ست S واضح

باشد به «$\sim A$» نیز

نشان میدهند .



شکل (1-10)

در شکل (1 - 10) ون دیاگرام A

ذیل حصه مخطط شده شکل ،

ست مکمله A را در S نشان میدهد .

خاصیت اول: مکمله Φ در S عبارت از S است یعنی:

$$C_S^{\Phi} = S \ .$$

زیراست مکمله Φ در S ست آنعناصر S است که درست Φ شامل نیستند. چون Φ دارای — هیچکدام یك عنصر نیست. بنا" ست مکمله آن تمام عناصر S را در برمیگیرد. یا بعبارت دیگر مکمله Φ در S عبارت از خود S است.

خاصیت دوم: مکمله S در S عبارت از Φ است یعنی:

$$C_S^{S} = \Phi \ .$$

زیرا: چون هیچ یك عنصري موجود شده نمیتواند که در S هم موجود باشد وهم موجود نباشد بنابران مکمله ست S در S عبارت از ست خالی، Φ، است. یعنی:

$$C_S^{S} = \Phi \ .$$

خاصیت سوم : مکمله مکمله یک ست A در S عبارت از A ست است.

زیرا : آنعناصریکه درمکمله ست A در S

موجود نیستند درست A موجود اند، بنابران

مکمله مکمله A در S عبارت از A است .

تبصره : زمانیکه مطالعه مکمله یک ست A در S مورد بحث

باشد ست S بنام ست کلی

یاد میشود. Universal Set

نظر به موضوع هرست بحیث یک ست کلی قرار

داده شده میتواند .

تمرینات

1 . مکمله Q در $\mathbb{R}$ عبارت ازکدام ست است ؟

2 . مکمله ست تمام مثلث هاي متساوي الساقین را درست تمام مثلث هـا

نام بگیرید .

3 . ست : $A = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ رادرنظرگرفته ومکمله A

رادر $\mathbb{N}$ بدست آرید .

۴ • مکملهٔ $\mathbb{N}$ در $\mathbb{Z}$ کدام ست است ؟

۵ • $B = \{0 ، 1 ، 2 ، 3\}$

و $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} ، -2 \le x \le 5\}$ را مد نظر گرفته

مکملهٔ B را در C دریافت کنید .

۶ • مکمله نیم‌خط $\overrightarrow{AX}$ را در خط $\overleftrightarrow{XY}$ نشان دهید .

۷ • ست : $D = \{a ، b ، c\}$ را مد نظر گرفته ؛

(a) • تمام ست‌های فرعی D را بدست آرید .

(b) • مکملهٔ هریک از ست‌های فرعی D راکه درفوق حاصل کرده اید بدست آرید .

۸ • اگر A یک ست فرعی n عنصره در یک - ست m عنصرهٔ B مد نظر گرفته شود ست مکمله A در B چند عنصره است ؟

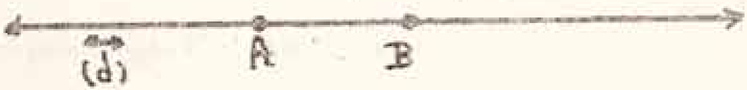
۹ • نشان دهید که مکملهٔ مکمله ، مکملهٔ A در S عبارت ازمکملهٔ A در S است .

10 • نشان بدهید که ست مکملهٔ ست حروف کلمهٔ ((لب)) در ست حروف کلمهٔ ((بلبل)) ست خالی است •

11 • ست مکملهٔ بچه های کامیاب شده در یک صنف عبارت از ست کدام بچه هاست ؟

12 • اگر ست مستطیل ها بحیث ست کلی در نظر گرفته شود ست مکملهٔ مربع ها کدام است ؟

13 • دو نقطهٔ ثابت A و B را بالای خط مستقیم ($\overleftrightarrow{d}$) مد نظر بگیرید •
ست مکملهٔ ست نقاط قطعه خط $\overline{AB}$ را نظر به خط ($\overleftrightarrow{d}$) به اساس شکل ذیل بدست آورده و آنرا مخطط کنید •



14 • (a) • ست مکملهٔ حروف کلمهٔ ((معلم)) را نظر به ست حروف کلمهٔ ((علما)) بدست آرید •

(b) • ست مکملهٔ ست حروف کلمهٔ ((افغان)) را نظر به ست حروف کلمهٔ ((افغانستان)) حاصل کنید •

فصل دوم

عملیات در بین ست ها

1-2 اتحاد ست ها Union Of Sets

مثال اول: دو ست $A=\{1,3,5,7,9\}$: و $B=\{2,4,6,8\}$ را در نظر گرفته میخواهیم که از یکجا کردن و یا اتحاد بخشیدن این دو ست یک ست سومی را بدست آریم، طوریکه این ست مورد نظر ما محض تمام عناصر ست A وهم تمام عناصر ست B را دارا باشد. درینصورت اگر ست مطلوب به C ارائه شود، با استفاده از استعمال علامهٔ اتحاد ((∪)) ست C را طبق ذیل حاصل نموده میتوانیم :

$$C = A \cup B$$

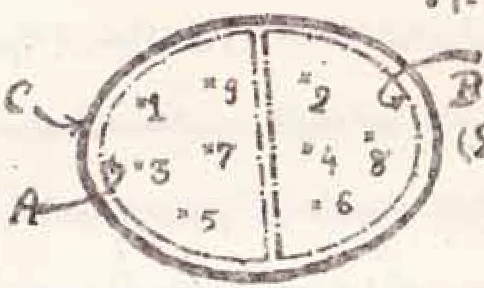
$$C = \{1,3,5,7,9\} \cup \{2,4,6,8\}$$

$$C = \{1,3,5,7,9,2,4,6,8\}$$

با استفاده از خاصیت اینکه ((مراعات ترتیب جا و مقام عناصر در یک ست شرط نیست ۰)) و ما میتوانیم که C را قرار ذیل نیز ارائه نمائیم :

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

مثال فوق را توسط وین دیاگرام (Venn Diagram) قرار آتی نمایش داده میتوانیم :



شکل (2-1)

<u>مثال دوم</u> : دو ست : $E = \{a, b, c, d, e\}$

و $F = \{d, e, f, g, h, i\}$ را در نظر گرفته

و میخواهیم که از اتحاد این دو ست ، یک ست G را حاصل نمائیم طوریکه ست G همهٔ عناصر ست E و هم همه عناصر ست F را دارا باشد ۰ با استفاده از استعمال علامهٔ اتحاد ((U))

ست G راطبق ذیل بدست آورده میتوانیم :

$$G = E \cup F$$

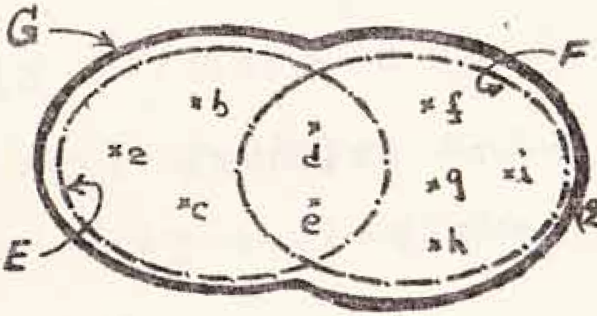
$$G = \{a, b, c, d, e\} \cup \{d, e, f, g, h, i\}$$

$$G = \{a, b, c, d, e, d, e, f, g, h, i\}$$

با استفاده از خاصیت : « نوشتن عناصر در یک ست بصورت تکرار شرط نیست . » ست G را قرار آتی ارائه نموده میتوانیم :

$$G = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}.$$

حل مثال فوق توسط وین دیاگرام طبق ذیل ارائه میشود :



شکل (2-2)

تعریف : اتحاد یا Union دو ست A و B عبارت از یک ست سومی است که تمام عناصر آنرا همهٔ عناصر ست A و همه عناصر ست B تشکیل میدهد .

مثال سوم : اگر ست های :

$$D=\{x \mid x\in \mathbb{I}،\ -2<x<4\}$$

$$E=\{x \mid x\in \mathbb{I}،\ -1<x<3\}$$ و

را مد نظر گرفته و اتحاد آنها را به F نشان دهیم

درینصورت : $F = D \cup E$ را قرار ذیل بدست

آورده میتوانیم :

چون $D=\{x \mid x\in \mathbb{I}،\ -2<x<4\}$ فرض است ،

پس ... $D=\{-1، 0، 1، 2، 3\}$ میباشد .

وهمچنان $E=\{x \mid x\in \mathbb{I}،\ -1<x<3\}$ فرض است

پس ... $E=\{0، 1، 2\}$ میباشد .

پس ما نوشته میتوانیم :

$$F=D\cup E$$

یا $F=\{-1، 0، 1، 2، 3\}\cup\{0، 1، 2\}$

یا $F=\{-1، 0، 2، 3، 0، 1، 2\}$

ازینکه: $D=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ مفروض است

بنابرآن $F = D \cup E = D$ میشود.

مثال چهارم: اگر ست های:

A = {★، 2، ⌓، 5، V}

B = {★، b، ⌓، ♣}

C = {★، c، 5، ♣}

مفروض بوده و اتحاد آنها مطلوب باشد، درینصورت

اگر اتحاد آنها را به T ارائه کنیم درینصورت:

$T = (A \cup B) \cup C$ میشود.

برای آسانی کار اگر اتحاد A و B را به D نشان دهیم پس:

$T = D \cup C$ میشود.

اما . . . . $D = A \cup B$

ویا D = {★، 2، ⌓، 5، V} ∪ {★، b، ⌓، ♣}

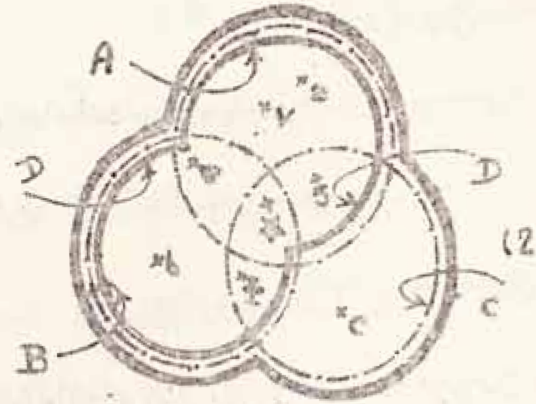
ویا . . D = {★، 2، ⌓، 5، V، b، ♣} میشود.

$T = D \cup C$ . . . . پس

$T = \{\star, 2, \blacktriangle, 5, v, b, \clubsuit\} \cup \{\star, \clubsuit, 5, c\}$

$T = \{\star, 2, \blacktriangle, 5, v, b, c, \clubsuit\}$.

حل مثال فوق توسط ون دیاگرام طبق ذیل ارائه شده میتواند:



شکل (2-3)

<u>مثال پنجم</u>: اگر ست های:

$U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 5 < x < 12\}$

و $V = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x < 10\}$ مفروض بوده.

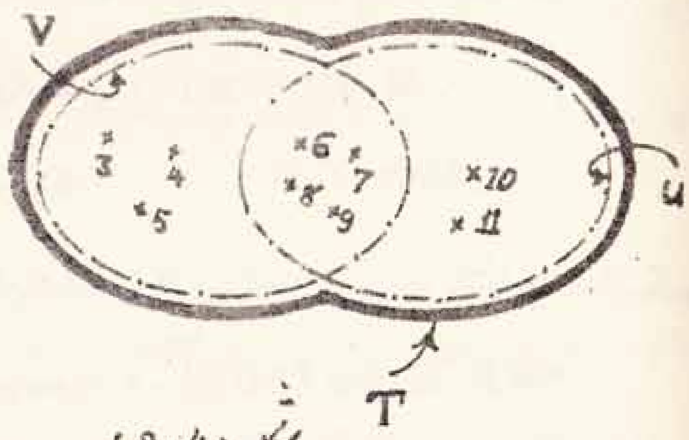
واگر ست اتحاد آنها به T ارائه شود درینصورت:

$T = U \cup V$

ویا $T = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x < 12\}$ میشود.

حل مثال فوق را بقسم تمرین میگذاریم . برای حل آن اولاً ست های U و V را توسط لست کردن عناصر مربوطهٔ شان تعین کرده و سپس اتحاد شان را بدست آرید . حال اگر این ست حاصل شدهٔ اتحاد را به اساس خواص مشترک عناصر آن افاده کنید جواب مطلوب فوق بدست می آید .

افادهٔ : $T = U \cup V$ توسط ون دیاگرام قرار ذیل ارائه شده میتواند :



شکل (2-4)

۲-۲۰ خواص عملیه اتحاد : Properties Of Union

خاصیت اول : (a) اگر . . . . $A \subset B$ باشد ،

درینصورت : $(A \cup B) = B$ میشود .

(b) وبالعکس اگر $(A \cup B) = B$ باشد ،

درینصورت . . . $A \subset B$ میشود .

ثبوت : (a) برای آنکه ثابت شود که $(A \cup B) = B$ است ،

باید که حقیقت دو رابطه ذیل را باثبات برسانیم :

اول اینکه : . $B \subset (A \cup B)$ ،

دوم اینکه : . . . $(A \cup B) \subset B$.

برای اثبات مرحله اول یک عنصر کیفی x را در B در نظر میگیریم :

درینصورت : $x \in B \overset{(*)}{\Rightarrow} x \in (A \cup B)$

ازین نتیجه میشود که : $B \subset (A \cup B)$ . . . (1)

(*) علامه " $\Rightarrow$ " بمعنی "ایجاب میکند که ..." استعمال میشود .

برای ثبوت مرحلهٔ دوم یک عنصر کیفی x را در AUB در نظر میگیریم:

در ینصورت: . . . $x \in (A \cup B)$ افاده میکند

که بالضرور خواه . . . $x \in A$ ،

ویا . . . $x \in B$ میباشد.

ازینکه . . . . $A \subset B$ است،

چون هر عنصر A شامل B است،

پس در هر حالت بالضرور $x \in B$ است.

وازین حاصل میشود که: $(A \cup B) \subset B \quad \cdots (2)$

از مقایسه روابط (1) و (2) نتیجه میشود که:

$$(A \cup B) = B.$$

(h) اگر $(A \cup B) = B$ باشد پس $A \subset B$ میشود.

برای اثبات این مطلب یک عنصر کیفی x ای A را در نظر میگیریم.

در ینصورت: $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$

چون . . . $(A \cup B) = B$ است ،

پس $x \in A \Rightarrow x \in B$ میباشد .

و ازین نتیجه میشود که $A \subset B$ است .

مثال : اگر درست : $A = \{2 ، 3 ، 5\}$

و $B = \{2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6\}$ را در نظر بگیریم

درینصورت بملاحظه میرسد که هر عنصر A شامل B نیز میباشد ،

پس . . . . $A \subset B$ است .

اکنون از اتحاد A و B دیده میشود :

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{2 ، 3 ، 5\} \cup \{2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6\} \\
&= \{2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6\} \\
&= B
\end{aligned}
$$

لذا . . . . $A \cup B = B$

حل مثال فوق را بنابر تطبیق نتیجه جز (۵) خاصیت فوق باسانی بدست آورده میتوانیم .

خاصیت دوم :(a) اتحاد هرست با ست خالی عبارت از خود همان ست است .

یعنی : $B\cup\Phi=B$.

(b) اتحاد هرست با خود ش عبارت از همان ست است .

یعنی : $A\cup A=A$

ثبوت : (a) : ما میدانیم که Φ ست فرعی هرست بوده یعنی :

$\Phi\subset B$ است .

بنابرنتیجه جزء (a) خاصیت اول اگر $A=\Phi$

درنظرگرفته شود درینصورت

حقیقت : $B\cup\Phi=B$ باثبات میرسد .

(b) : ازینکه هرست ، ست فرعی خود ش میباشد ،

درینصورت بنابرنتیجه جزء (a) خاصیت اول

اگر ... $A=B$ وضع شود ،

درینصورت حقیقت : $A\cup A=A$ حاصل میشود .

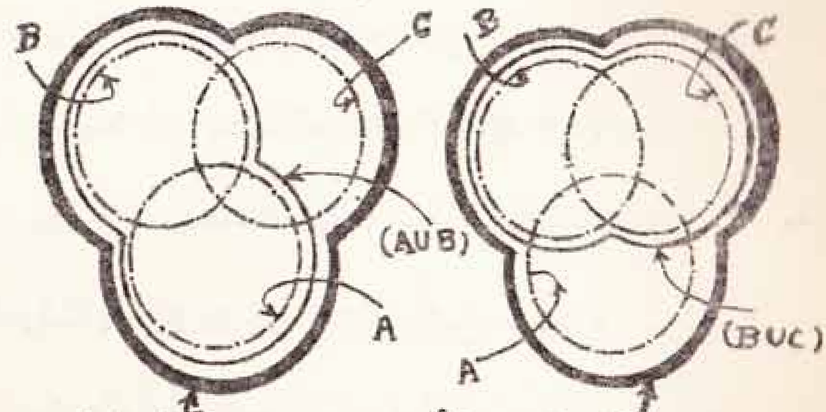
خاصیت سوم عملیه اتحاد ((U)) از خاصیت انجمنی

پیروی میکند یعنی رابطه : Associative Property

$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ همیشه دارای حقیقت است .

حقیقت این خاصیت را توسط ون دیاگرام قرار

شکل (2-5) ذیل ارائه کرده میتوانیم :



$(A\cup B)\cup C$ شکل (2-5) $A\cup(B\cup C)$

با استفاده از خاصیت سوم ما میتوانیم که عملیه اتحاد را

بدون استعمال قوسین اجرا نمائیم . یعنی :

$(A\cup B)\cup C = A\cup B\cup C$ نوشته میتوانیم .

خاصیت چهارم: عملیه اتحاد ازخاصیت تبدیلی

Commutative Property پیروی میکند .

یعنی رابطه : $A \cup B = B \cup A$

همیشه دارای حقیقت است .

زیرا : هرعنصرکیفی $x \in A$ یا $x \in B$

همان عنصر $x \in A \cup B$ بوده و همچنان همان

عنصر $x \in B \cup A$ میباشد .

بنابرآن $A \cup B = B \cup A$ است .

تمرینات

1. اگرست های : $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

و $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ مفروض باشد،

اتحاد A و B رابدست آرید .

2 ـ ستی که از اتحاد $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ حاصل میشود کدام است؟

3 ـ اگر $A \cup B = \Phi$ باشد راجع به A و B چه گفته میتوانید؟

4 ـ سه ست A ، B و C را مد نظر بگیرید طوریکه: $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد ، $A \cup B \cup C$ را بدست آرید.

5 ـ اگر . . . . $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} ، x < 5\}$

و . . . . $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} ، x < 7\}$ باشد

با استفاده از خواص فوق $A \cup B$ را بدست آرید.

6 ـ با در نظر داشت شکل ذیل:

(a). $\overleftrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BC}$ ، (b). $\overleftrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ را بدست آرید.

7 ـ (a) ـ اتحاد ست حروف کلمه ((استقلال)) و ((آزادی)) را بدست آرید.

(b) ـ پنج کلمه و یا جمله ای که ست حروف مربوطه آنها یک ست فرعی ست حروف جمله ((استقلال آزادی ماست.)) باشد بنویسید.

مثال اول: دو ست ... : $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

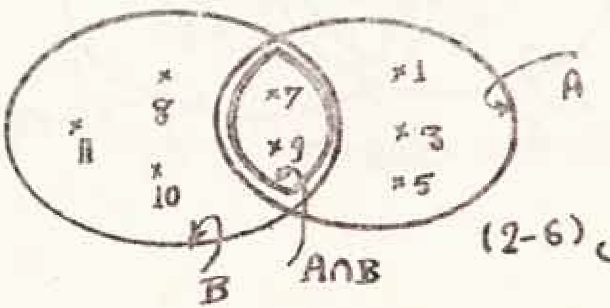
و ... $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ را در نظر

گرفته میخواهیم که از دو ست فوق یک ست سومی C را بدست آریم، طوریکه عناصر ست C را صرف عناصر مشترک A و B تشکیل نماید. اگر این عملیه را به « ∩ » ارائه نموده آنرا تقاطع بنامیم درینصورت ما نوشته میتوانیم:

$$\begin{aligned} C &= A \cap B \\ &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{7, 8, 9, 10, 11\} \\ &= \{7, 9\}. \end{aligned}$$

$$C = \{7, 9\}.$$

تقاطع هردو ست A و B توسط وین دیاگرام قرار ذیل ارائه میشود



شکل (2-6)

مثال دوم : دوست : . . . $S=\{a, b, c\}$

$R=\{c, d, e, f\}$ را مد نظر میگیریم.

میخواهیم که از تقاطع این دو ست ، ست T را مانند مثال

اول حاصل نمائیم . درینصورت ما نوشته میتوانیم :

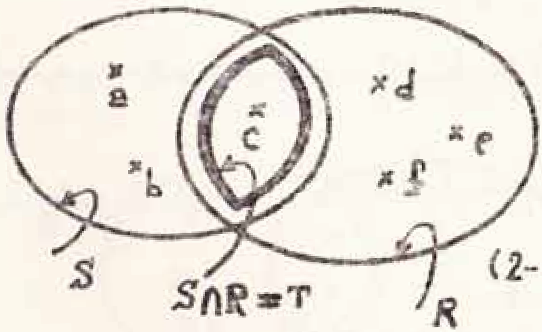
$T = R \cap S$

$T = \{c, d, e, f\} \cap \{a, b, c\}$.

$T = \{c\}$.

تقاطع ست های S و R روی ون دیاگرام طبق شکل

(2-7) نشان داده شده است .



شکل (2-7)

ازحل دومثال فوق تعریف ذیل نتیجه میشود :

تعریف : تقاطع ویا Intersection

دوست A و B عبارت از یک ستی

است که عناصرآنرا عناصرمشترک ست های

A و B تشکیل میدهد .

وچنین ارائه میشود :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\} .$$

مثال سوم : دوست $E = \{-3, -2, 0, 1, 3, 4\}$:

$F = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ رامد نظرگرفته

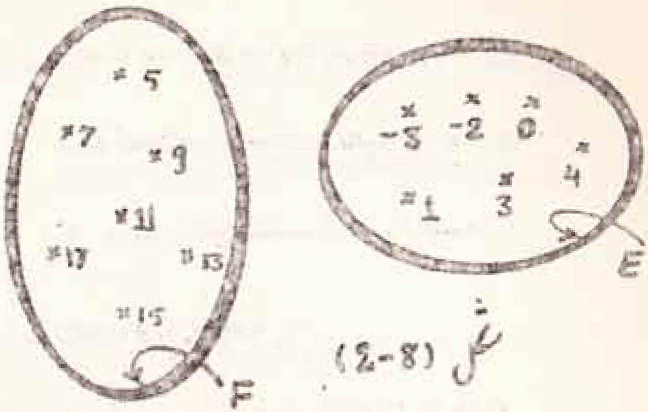
واگرتقاطع ستهای مذکور را به G ارائه کنیم آنرا قرار

ذیل بدست آورده میتوانیم :

$$\begin{aligned} G &= E \cap F \\ &= \{-3, -2, 0, 1, 3, 4\} \cap \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\} \\ &= \{\ \} \\ &= \phi . \end{aligned}$$

اینک حل مثال فرق توسط وین دیاگرام قرار شکل (8 ـ 2)

ذیل ارائه شده میتواند :



شکل (۲-۸)

مثال چهارم : ست های :

$$S = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{b, d, e, f\}$$

$T = \{c, d, f, h\}$ را درنظر

گرفته میخواهیم تقاطع ست های فرق را بدست آریم :

درمرحله اول تقاطع S و R را به D نشان داده وآنرا

قرار ذیل حاصل مینمایم :

$$D = S \cap R$$

$$D = \{a, b, c, d\} \cap \{b, d, e, g\}$$

$$D = \{b, d\}.$$

اکنون تقاطع ست های مذکور را طبق آتی بدست می آوریم :

$$(S \cap R) \cap T = D \cap T$$

$$= \{b, d\} \cap \{c, d, f, h\}$$

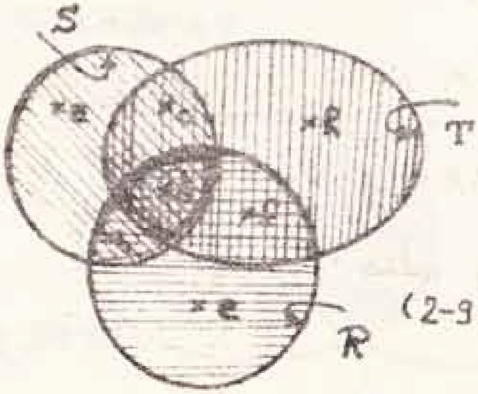
$$= \{d\}.$$

تقاطع ست های S ، R و T را بااساس ون دیاگرام قرار

شکل (2-9) نمایش داده میتوانیم ° آن ناحیه ای شکل

که بصورت افقی وهم بصورت عمودي وهم بصورت مایل خط

کشیده شده است تقاطع هر سه ست را ارائه میکند °



شکل (2-9)

مثال پنجم: دو ست $E=\{x|x\in \mathbb{I}\ ,\ 1<x<6\}$

و $F=\{x|x\in \mathbb{I}\ ,\ -3<x<4\}$ را مد نظر

گرفته میخواهیم تقاطع این دو ست E و F را بدست آریم.

درینصورت تقاطع دو ست E و F را به D ارائه نموده

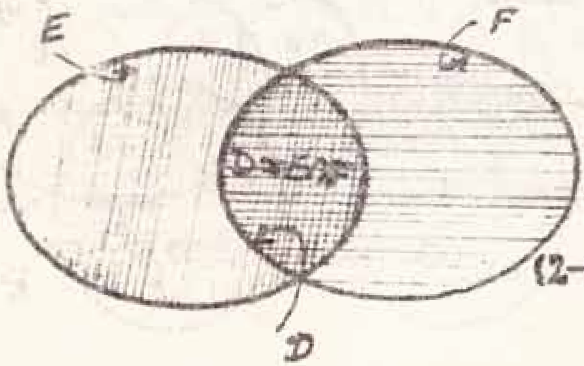
میتوانیم:

$$
\begin{aligned}
D &= E\cap F \\
&= \{x|x\in \mathbb{I}\ ,\ 1<x<6\}\cap\{x|x\in \mathbb{I}\ ,\ -3<x<4\} \\
&= \{x|x\in \mathbb{I}\ ,\ 1<x<4\}
\end{aligned}
$$

$$D=\{2,3\}$$

حل مثال فوق توسط ون دیاگرام قرار شکل (2-10) ذیل

ارائه شده میتواند:



شکل (2-10)

مثال ششم: ست های $A=\{x \mid x\in \mathbb{R} ، x^2=9\}$

$B=\{x \mid x\in \mathbb{R} ، x^2-4x+3=0\}$ را مد نظر گرفته

واگر تقاطع آن را به C ارائه نمایم آنرا طبق ذیل

بدست آورده میتوانیم:

$$C=A\cap B$$

$$C=\{x \mid x\in \mathbb{R} ، x^2=9\}\cap\{x \mid x\in \mathbb{R} ، x^2-4x+3=0\}$$

از طرف دیگر:

$$A=\{x \mid x\in \mathbb{R} ، x^2=9\}$$

$$A=\{-3 ، 3\} .$$

وهم چنان:

$$B=\{x \mid x\in \mathbb{R} ، x^2-4x+3=0\}$$

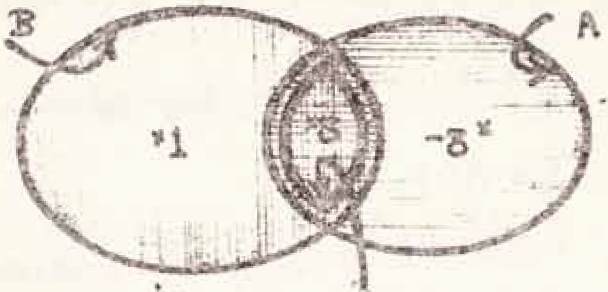
$$B=\{1 ، 3\}$$

پس . . . . . $C=\{-3 ، 3\}\cap\{1 ، 3\}$

بنابران . . . . . . $C=\{3\}$

حل این مثال با ساس ون دیاگرام قرار شکل (11 - 2)

ذیـــل آرائـــه شـــده کـــه حصهٔ عمودی وافقی .
مخطط شده جواب مسأله را افـــاده
میکند .



(2-11) شکل $(A \cap B) = C$

4 ـ 2 • خواص عملیهٔ تقاطع (∩) Properties Of Intersection:

خاصیت اول : (a) • اگر . . . . . $A \subset B$ باشد ،

درینصورت : $A = (A \cap B)$ میشود .

(b) • وبالعکس اگر . . . $A = (A \cap B)$ باشد ،

درینصورت :- $A \subset B$ میباشد .

ثبوت : برای اینکه ثابت شود که : $A = (A \cap B)$ است

باید حقیقت دو رابطه ذیل را باثبات برسانیم :

اول اینکه : . $A \subset (A \cap B)$.

دوم اینکه : . . . $(A \cap B) \subset A$.

برای اثبات مرحله اول یك عنصر کیفی x را در A مدنظرگرفته

وموجودیت آنرا در $(A \cap B)$ جستجو میکنیم .

برای هر عنصر $x \in A$ چون $A \subset B$ است پس

$x \in B$ نیز میباشد .

از اینکه $x \in A$ وهم $x \in B$ است ،

پس $x \in (A \cap B)$ است .

بصورت خلاصه : $x \in A \Rightarrow x \in (A \cap B)$

وازین نتیجه میشود که : $A \subset (A \cap B) \ldots (1)$

برای اثبات مرحله دوم یك عنصر کیفی x شامل $(A \cap B)$ را

مدنظرمیگیریم .

نظر به تعریف : $x \in A$ وهم $x \in B$ است ،

$$x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$$

وازین نتیجه میشود که : $(A \cap B) \subset A \quad \ldots (2)$

ازمقایسه روابط (1) و(2) فوق نتیجه میشود که ؛

$$A = (A \cap B) .$$

(ط) اگر $\ldots A = (A \cap B)$ باشد ،

پس . . . $A \subset B$ میباشد .

برای اثبات این حقیقت یك عنصرکیفی $x \in (A \cap B)$ رامد نظر

گرفته نظر به تعریف : $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in B$

پس . . . . . . $(A \cap B) \subset B$

ازطرف دیگر . . . $A = (A \cap B)$ داده شده است ،

بنابرآن . . . . . $A \subset B$ . . . میباشد .

مثال : اگر ست $A = \{a ، b ، c\}$

و $B = \{a ، b ، c ، d ، e\}$ را مدنظر بگیریم

درینصورت دیده میشود که همهٔ عناصر A شامل B بوده

یعنی . . . . $A \subset B$ است .

ازطرف دیگر :

$$A \cap B = \{a ، b ، c\} \cap \{a ، b ، c ، d ، e\}$$
$$= \{a ، b ، c\}$$
$$= A$$

پس . . . . $A \cap B = A$

خاصیت دوم : (a) . تقاطع هرست باست خالی ، ϕ ، عبارت از ϕ است .

یعنی : $B \cap \phi = \phi$.

(b) . تقاطع هرست با خود ش عبارت از خود همان ست است .

یعنی : $A \cap A = A$.

نوت : (a) . ما میدانیم که ست خالی ست فرعی هرست بوده .

یعنی : $\phi \subset B$.

بنابرنتیجهٔ جز (a) خاصیت اول اگر $A = \phi$ وضع شود ،

درینصورت حقیقت $\phi \cap B = \phi$ حاصل میشود.

(b). ازینکه هرست ست فرعی خودش میباشد.

بنابرنتیجه جز (b) خاصیت اول اگر $B = A$ فرض شود،

درینصورت حقیقت: $A = (A \cap A)$ حاصل میشود.

<u>خاصیت سوم</u>: عملیه تقاطع (($\cap$)) از خاصیـــــت انجمنـــی

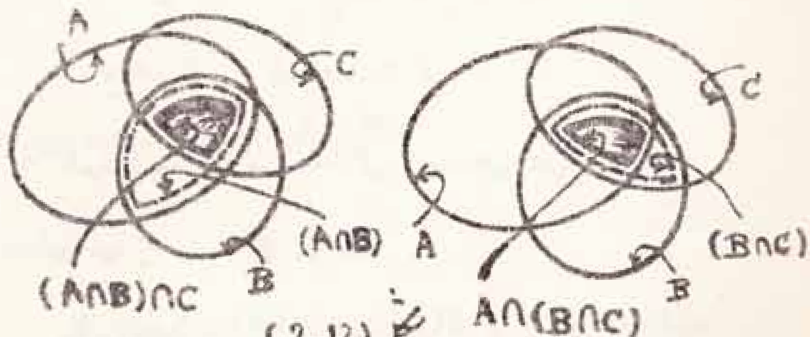
Associative Property پیروی میکنـــد.

یعنی رابطه: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ همیشه

حـایـــزحقیقـــت اســــت.

حقیقت این خاصیت را توسط ون دیاگرام قرار شکل (2-12)

ذیل نشان داده میتوانیم:



شکل (2-12)

باستفاده از خاصیت انجمنی عملیه تقاطع ما میتوانیم که

عملیه تقاطع "$\cap$" را بدون استعمال قوسین اجرا نمائیم .

یعنی : $(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ نوشته میتوانیم .

<u>خاصیت چهارم</u>: عملیه تقاطع از خاصیت تبدیلی

Commutative Property پیروی میکند .

یعنی : ... $A \cap B = B \cap A$.

ثبوت : $A \cap B$ عبارت از ستی است که عناصر آنرا عناصر مشترک A و B

تشکیل میدهد .

وهمچنان $B \cap A$ عبارت از ستی است که عناصر آنرا عناصر

مشترک B و A تشکیل میدهد .

چون عناصر هردو ست ($A \cap B$) و ($B \cap A$) را عناصر

مشترک A و B تشکیل میدهد ، مراعات ورترتیب عناصر

درست شرط نیست .

بنابران ... $A \cap B = B \cap A$ میشود .

تمرینات

۱ • ست های : $A=\{a, b, c, d, e\}$

$B=\{d, e, f, g\}$ را درنظر بگیرید.

تقاطع ست های مذکور را بدست آورده و نتیجه آنها را توسط

ون دیاگرام نشان دهید .

۲ • تقاطع ست های ذیل را توسط ون دیاگرام نشان دهید :

$K=\{2, 3, 4\}$
$L=\{3, 4, 5\}$
$M=\{4, 5, 6\}$

۳ • تقاطع هرجوره از ست های ذیل را بدست آورده ونتایج را توسط

ون دیاگرام ارائه کنید .

(a) . . . . $A=\{2, 4\}$ و $B=\{1, 3, 5\}$.

(b) . . . $A=\{1, 3, 5\}$ و $B=\{5, 1, 3\}$.

(c) . . . . $A=\{1, 2, 4\}$ و $B=\{2, 3, 4\}$.

(d) . . . . $A=\{2, 7\}$ و $B=\{2, 5, 7\}$.

(e) . . . . . $A=\phi$ و $B=\{9, 7, 5\}$.

(f) . . . . $A=\{1, 2\}$ و $B=\{3, 5, 8\}$.

۴ • تحت کدام شرایط هرکدام یک از روابط ذیل دارای حقیقت شده میتواند :

(a) • $A \cap B = A$

(b) • $A \cap \phi = \phi$

(c) • $A \cap B = \phi$

۵ • تقاطع دو ست ذیل را بدست آورده وسپس نتیجه را توسط ون دیاگرام ارائه کنید :

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 = 16\}$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ (x-1)(x-4) = 0\}$

6 • تقاطع ست های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ را بدست آرید .

7 • تقاطع ست های اعداد تاق واعداد جفت را پیدا کنید .

۸ • چهار نقطه A ، B ، C و D را بالای خط مستقیم $\overleftrightarrow{(d)}$ طبق شکل ذیل در نظر بگیرید :

روابط ذیل را تکمیل کنید :

(a) • $\overline{AC} \cap \overline{BD} = ?$ ، (b) • $\overline{AB} \cap \overline{BD} = ?$ ،

(c) • $\overline{AD} \cap \overline{CD} = ?$ ، (d) • $\overline{AB} \cap \overline{BC} = ?$.

2 - 6 "روابط بين "U" ، "∩" و "C" :

رابطه اول : عمليه "U" بالاي عمليه "∩" ازخاصيت توزيعي

Distributive Property پيروي ميكند .

يا بعبارت ديگر براي هرست A ، B و C رابطه :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) .$$ هميشه

داراي حقيقت است .

ثبوت : براي اثبات رابطه فوق حقيقت دو رابطه ذيل را

ثبوت بايد كرد :

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \ldots (1\text{-}a)$$

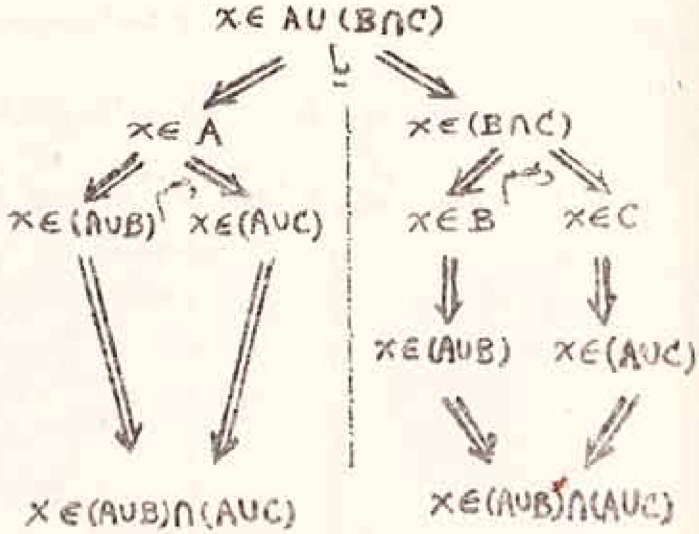
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C) \quad \ldots\ldots (1\text{-}b)$$

براي ثبوت رابطه (1-a) يك عنصر كيفي x را در $A \cup (B \cap C)$

انتخاب و موجوديت آنرا در $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

جستجو مينمايم .

پس در اینصورت :



پس در هر صورت :

$$x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

بنابراً : $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ...(1-2)

برای ثبوت حقیقت رابطه: $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$

یك عنصر کیفی x را در $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ اخذ وموجودیست

آنرا در $A\cup(B\cap C)$ جستجو باید کرد .

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

درینجا دو حالت موجود است:

$x \in A$ ویا $x \notin A$

اگر $x \in A$ باشد،

$$\Downarrow$$

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

اگر $x \notin A$ باشد، پس چون $x \in (A \cup C)$ و هم $x \in (A \cup B)$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$x \in B \qquad x \in C$$

$$x \in (B \cap C)$$

$$\Downarrow$$

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

بنابرآن

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C) \quad \ldots (1\text{-}b)$$

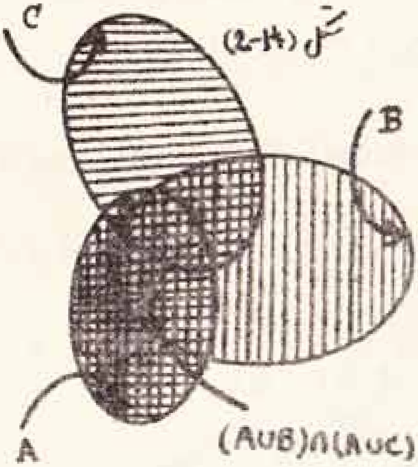
ازمقایسه روابط (1-a) و (1-b) فوق استنتاج میشود که:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \ldots (1)$$

رابطه فوق توسط ون دیاگرام طبق شکل (2-13) و شکل (2-14)

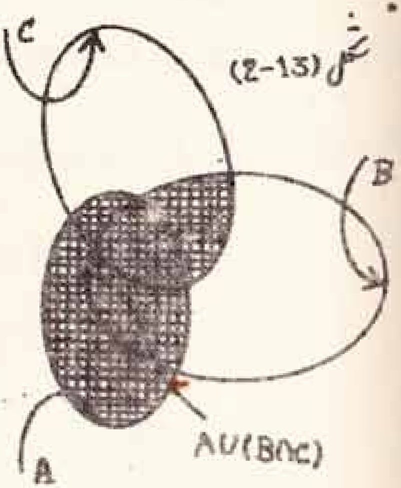
ذیل ارائه شده میتواند :

شکل (2-14)



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

شکل (2-13)



$A\cup(B\cap C)$

حقیقت رابطه (1) فوق از مقایسه ستون های (10) و (13) جدول I

شمول عناصر یا جدول حقیقت نیز بمشاهده میرسد . لصفحهٔ (۹۳)

رابطه دوم : عملیه $\cap$ بالای عملیه $\cup$ از خاصیت توزیعی پیروی میکند .

یعنی برای هرست A ، B و C رابطه :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

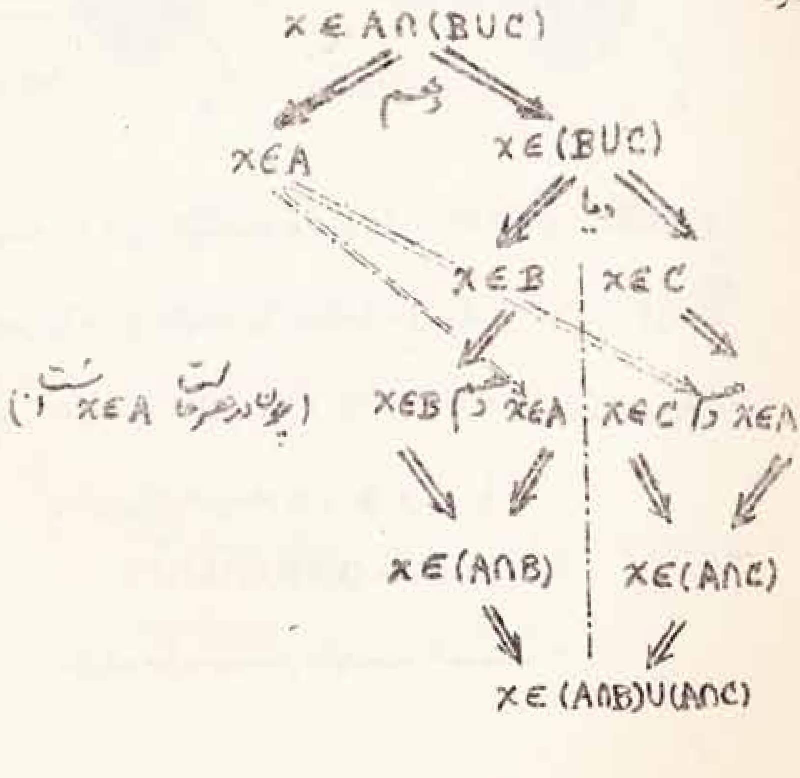
همیشه جایز حقیقت است .

نوت : برای ثبوت حقیقت رابطه فوق نشان باید داد که :

$$(2\text{-}a) \cdots A\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$(2\text{-}b)\text{-}(A\cap B)\cup(A\cap C) \subset A\cap(B\cup C)$$

برای ثبوت حقیقت رابطهٔ (2-a) فوق یك عنصر کیفی x را در $A\cap(B\cup C)$ اخذ و موجودیت آنرا در $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ جستجو باید نمود .



در نتیجه: $x\in A\cap(B\cup C) \Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

بنابرآن: $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$ . . . (2-a)

برای اثبات حقیقت رابطهٔ: $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$

یک عنصر کیفی x را در $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ انتخاب نموده موجودیت آنرا در $A\cap(B\cup C)$ جستجو باید کرد:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & x\in(A\cap B)\cup(A\cap C) \arrow[dll, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] \arrow[d, phantom, "\text{ویا}"] & & & \\
 & x\in(A\cap B) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[d, phantom, "\text{وهم}"] & & & & x\in(A\cap C) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[d, phantom, "\text{وهم}"] & \\
x\in A \arrow[ddr, Rightarrow] & & x\in B \arrow[d, Rightarrow] & & x\in A \arrow[ddr, Rightarrow] & & x\in C \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & x\in(B\cup C) \arrow[dl, Rightarrow] & & & & x\in(B\cup C) \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & x\in A\cap(B\cup C) & & & & x\in A\cap(B\cup C) &
\end{tikzcd}$$

چون $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$

پس: $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$ . . . (2-b)

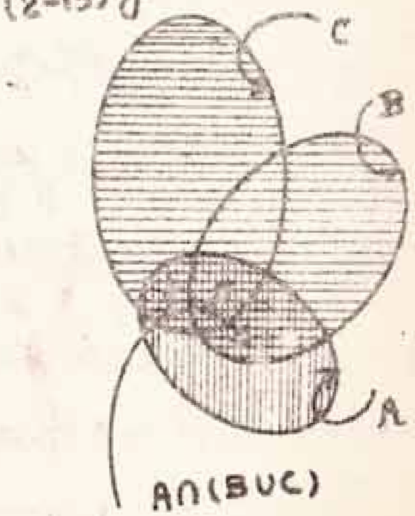
ازمقایسهٔ روابط (2-e) و(2-h) نتیجه میشود :

$$(2) \ldots \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

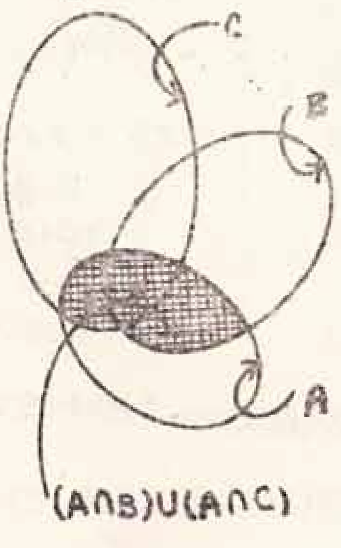
ثبوت رابطه (2) فوق را از مقایسهٔ ستون های (5) و (8) جدول I شمول عناصر نیز مشاهده میتوان نمود .

واقعیت رابطهٔ فوق را دیاگرام شکل (2-15) و شکل (2-16) قرار ذیل نمایش داده میتوانیم :

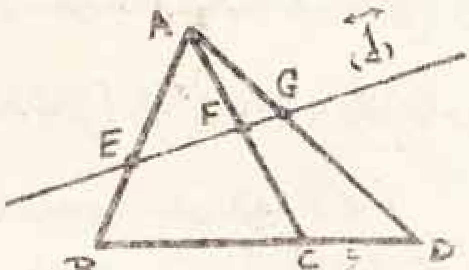
شکل (2-15)



شکل (2-16)



مثال اول. اگر تقاطع خط ($\overleftrightarrow{d}$) با سطوح داخلی دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ACD$ در نظر گرفته شود، در ینصورت خاصیت توزیعی $\cap$ را بالای $\cup$ طبق شکل مقابل نشان داده میتوانیم:



شکل (2-17)

$$\overleftrightarrow{d}\cap(\triangle ABC\cup\triangle ACD) \stackrel{?}{=} (\overleftrightarrow{d}\cap\triangle ABC)\cup(\overleftrightarrow{d}\cap\triangle ACD)$$

$$\overleftrightarrow{d}\cap(\triangle ABD) \stackrel{?}{=} \overline{EF}\cup\overline{FG}$$

$$\overline{EG} = \overline{EG}$$

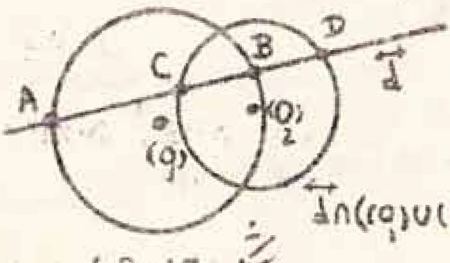
لذا: $\overleftrightarrow{d}\cap(\triangle ABC\cup\triangle ACD) = (\overleftrightarrow{d}\cap\triangle ABC)\cup(\overleftrightarrow{d}\cap\triangle ACD)$

مثال دوم. باید در نظر داشت شکل (2-18) تقاطع خط ($\overleftrightarrow{d}$) را با دسکهای (O_1) و (O_2) طبق ذیل حاصل میتوان کرد:

$$\overleftrightarrow{d}\cap((O_1)\cup(O_2)) = (\overleftrightarrow{d}\cap(O_1))\cup(\overleftrightarrow{d}\cap(O_2))$$

$$= \overline{AB}\cup\overline{CD}$$

$$= \overline{AD}.$$



لذا . . . $\overleftrightarrow{d}\cap((O_1)\cup(O_2)) = \overline{AD}$

شکل (2-18)

<u>رابطه سوم</u> . نظر بیک ست کلی مکمل تقاطع دو ست مساوی با اتحاد مکملهای آنها است.

یعنی : $\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$

ثبوت : برای سهولت کار ما مکملهٔ A یعنی $\complement A$ را به A' و همچنان

$\complement(A\cap B)$ را به $(A\cap B)'$ وعلی القیاس ... نشان میدهیم ،

پس درینصورت نشان باید داد که :

$$(A\cap B)'\subset A'\cup B' \quad \ldots\ldots (3\text{-}a)$$

$$A'\cup B'\subset(A\cap B)' \quad \ldots\ldots (3\text{-}b)$$

در مرحله اول :

$$x\in(A\cap B)'$$
$$\Downarrow$$
$$x\notin(A\cap B)$$

$x\in A$ و $x\notin B$ $\Rightarrow$ $x\notin A'$ و $x\in B'$ $\Rightarrow$ $x\in(A'\cup B')$

و یا

$x\notin A$ و $x\in B$ $\Rightarrow$ $x\in A'$ و $x\notin B'$ $\Rightarrow$ $x\in(A'\cup B')$

و یا

$x\notin A$ و $x\notin B$ $\Rightarrow$ $x\in A'$ و $x\in B'$ $\Rightarrow$ $x\in(A'\cup B')$

دیده میشود که در هر حالت :

$$x\in(A\cap B)'\Rightarrow x\in A'\cup B'\,.$$

پس .... $(A\cap B)' \subset A'\cup B'$ .... (3-a)

برای ثبوت (3-b) یك عنصر کیفی x را در $A'\cup B'$ اخذ

وموجودیت آنرا در $(A\cap B)'$ جستجو مینمایم :

$$
\begin{tikzcd}
 & x\in A'\cup B' \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\text{ویا}"] & \\
x\notin A \arrow[dr] & & x\notin B \arrow[dl] \\
 & x\notin (A\cap B) \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & x\in (A\cap B)' &
\end{tikzcd}
$$

دیده میشود که :

$$x\in A'\cup B' \Rightarrow x\in (A\cap B)'$$

بنابران : ... $A'\cup B' \subset (A\cap B)'$

ازمقایسه روابط (3-a) و (3-b) ما داریم :

$$(3)\ \ldots\ (A\cap B)' = A'\cup B'$$

ثبوت رابطهٔ (3) فوق را در جدول II رابطهٔ شمول عناصر ازمقایسهٔ ستون های: (5) و (10) نیز مشاهده کرده میتوانید .

شما میتوانید با استفاده از ون دیاگرام رابطهٔ فوق را باثبات رسانید .

رابطه چهارم : مکملهٔ اتحاد دوست مساوی به تقاطع مکملهٔ آنهاست .

یعنی : $\complement(A\cup B) = \complement A \cap \complement B$

یا : $(A\cup B)' = A' \cap B'$

ثبوت : اگر در رابطهٔ (3) بعوض A مکملهٔ آن یعنی A' و بعوض B مکملهٔ آن یعنی B' مد نظر گرفته شود ،

درینصورت ما نوشته میتوانیم :

$$(A' \cap B')' = (A')' \cup (B')'$$

$$(A' \cap B')' = A \cup B$$

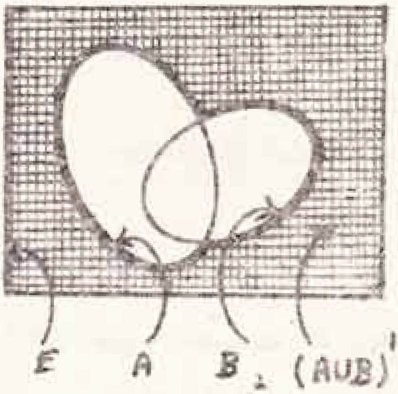
$$((A' \cap B')')' = (A \cup B)'$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$

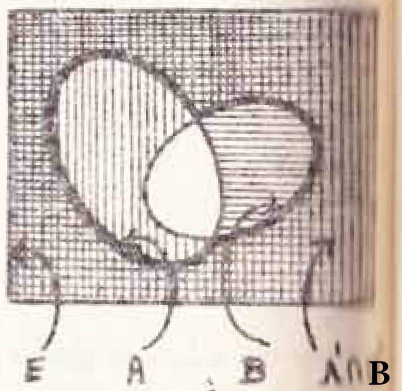
لذا : $(A\cup B)' = A' \cap B' \quad \ldots (4)$

رابطهٔ فوق توسط ون دیاگـــرام قـــرار شکل (2-19)

و شکل (2-20) در ذیل ارائه شده است :



شکل (2-19)



شکل (2-20)

ضمناً حقیقت رابطه فوق از ستون های (6) و (8) جدول II

شمول عناصر نیز بمشاهده میرسد . (به صفحه ۹۴ مراجعه شود .)

خاصیت پنجم : اگر E بحیث ست کلی ، A و A' بحیث ست های

فرعی آن مد نظر گرفته شود ، درینصـــورت

در رابطه : $A \cup A' = E$ . . . . . .

و . . . . . $A \cap A' = \phi$ همیشه

حایز حقیقت است .

ثبوت (a) • چون $A \cup A'$ عبارت از ستی است که تمام عناصری که

در A است وهم تمام عناصری که در A نیست

همه را در بر دارد • بنابران این ست عبارت از

ست کلی E است •

پس :- $A \cup A' = E \quad (5\text{-}a)$

(b) • چون عناصر ست $A \cap A'$ را آن عناصری که

هم در A موجود باشد وهم در A موجود نباشد

تشکیل میدهد • درحالیکه چنین عنصر موجود

شده نمیتواند •

پس $A \cap A'$ ست خالی است •

بنابران : $A \cap A' = \Phi \quad (5\text{-}b)$

جدول شمول عناصر ویا جدول حقیقت

ستون‌ها / عناصر	1 A	2 B	3 C	4 $(B \cup C)$	5 $A \cap (B \cup C)$	6 $(A \cap B)$	7 $(A \cap C)$	8 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$	9 $(B \cap C)$	10 $A \cup (B \cap C)$	11 $(A \cup B)$	12 $(A \cup C)$	13 $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
x_1	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_2	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_3	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_4	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_5	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_6	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
x_7	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
x_8	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

ازمقایسهٔ ستون (5) و (8) وهمچنان ازمقایسهٔ ستون (10) و (13) نتیجه میشود که :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

جدول (II) شمول عناصر ویا جدول حقیقت

سِت‌ها / عناصر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	A	B	A'	B'	$A'\cup B'$	$A'\cap B'$	$(A\cup B)$	$(A\cup B)'$	$(A\cap B)$	$(A\cap B)'$
x_1	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
x_2	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
x_3	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
x_4	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$

غرض سهولت درجدول فوق علامه « زَبَر » بعوض « $\complement$ »
جهت ارائه مکمله یک ست بکار برده شده است .

ازمقایسه ستون‌هاي : (5) و (10) جدول حقیقت رابطه :

$$(3)\ldots (A\cap B)' = A'\cup B'$$

وهمچنان ازمقایسه ستون‌هاي : (6) و (8) حقیقت رابطه :

$$(4)\ldots (A\cup B)' = A'\cap B'$$

بمشاهده میرسد .

تمرینات

1 ۰ ست های: $A=\{1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5\}$

$B=\{2 ، 4 ، 6 ، 8\}$

و $C=\{4 ، 5 ، 6 ، 7\}$ را د نظر بگیرید،

(a) ۰ ست: $A\cup(B\cap C)$ را بدست آرید ۰

(b) ۰ ست: $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ را حاصل کنید ۰

(c) ۰ ست های حاصل شده جز (a) و (b) را با هم مقایسه کنید ۰

2 ۰ ست های: $E=\{a ، b ، c ، d ، e\}$

$F=\{b ، d ، h ، i\}$

و $G=\{x ، y ، z\}$ را د رنظر گرفته:

(a) ۰ ست: $E\cap(F\cup G)$ را حاصل کنید ۰

(b) ۰ ست: $(E\cap F)\cup(E\cap G)$ بدست آرید ۰

(c) ۰ ست های حاصله جز (a) و (b) را با هم مقایسه کنید ۰

3 ۰ اگر ست حل معادله: $4x^2-9=0$ را به A ،

و ست حل معادله: $2x-4=0$ را به B ،

وست حل معادله : $x^2-4=0$ را به C نشان دهیم ،

اول ° ست های : A ، B و C را با ساس عناصرآنها تشخیص دهید .

دوم ° ثبوت کنید که ست $A \cup B$ عبارت از ست حل معادله :

$(2x-4)(4x^2-9)=0$ است °

سوم ° ثبوت کنید که ست $B \cap C$ . . . . عبارت است

از ست حل سیستم : $\begin{cases} 2x-4=0 \\ x^2-4=0 \end{cases}$.

چهارم ° ست حل سیستم :

$\begin{cases} (2x-4)(x^2-4)=0 \\ (2x-4)(4x^2-9)=0 \end{cases}$ را حاصل کنید °

4 ° دریك مکتب 5 نفرمعلم تنها مضمون الجبرو 3 نفرتنها مضمون هندسه و 4 نفرتنها مضمون مثلثات را و نفرمعلم مضامین الجبر ومثلثات و یك نفرمضامین الجبروهندسه و پنج نفرمضامین هندسه ومثلثات وشش نفرهرسه مضمون راتدریس مینمایند :

(a) ° تعداد معلمانکه هریك ازمضامین راتدریس مینمایند بدست آرید °

(b) ـ تعداد تمام معلمان ریاضیات مکتب مذکور چند نفر است؟

5 ـ اگر در یک مکتب 18 نفر معلم مضمون فزیک را و 17 نفر مضمون هندسه و 19 نفر مضمون الجبره را تدریس نمایند طوریکه از آنجمله یک نفر محض مضمون هندسه و 2 نفر تنها مضمون الجبره و 3 نفر تنها مضمون فزیک و 5 نفر اشتراکاً هر سه مضمون را تدریس نمایند:

(a) ـ تعداد تمام معلمان مکتب را معلوم کنید.

(b) ـ تعداد معلمان که مضامین:

(i) ـ هندسه فزیک

(ii) ـ هندسه و الجبره

(iii) ـ الجبره فزیک را تدریس می نمایند معلوم کنید.

6 ثبوت کنید که:

(a) ـ $(X \cup Y) \cap Y = Y$ ،

(b) ـ $(X \cap Y) \cup Y = Y$ ،

(c) ـ $(X \cap Y) \cap Y = X \cap Y$ ،

(d) ـ $(X \cup Y) \cup Y = X \cup Y$.

۷ ۰ اگر R و S ست های نرون E باشند ۰

ثابت کنید که :- $R\cup C_E(R\cup S)=(R\cup C_E S)$

۸ ۰ افاده : $(C_E R\cup C_E S)\cup(R\cup C_E(R\cup S))$ را ساده کنید ۰

9 ۰ درصورتیکه رابطه : $A\cap B\subset A\cap C$ دارای حقیقت باشد ،

حقیقت رابطه : $A\cap B\subset B\cap C$ را ثابت کنید ۰

10 ۰ اگر $A\cap B=\phi$ باشد ۰

(a) ۰ حقیقت رابطه $C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ را توسط

ون دیاگرام نشان دهید ۰

(b) ۰ حقیقت رابطه فوق را باساس خاصیت توزیعی

ثابت کنید ۰

11 ۰ اگر $A\cap B=\phi$ بوده ۰ A و B ست های فرعی $\mathcal{U}$

باشند ، نشان دهید که : $A\subset C_{\mathcal{U}}B$ است ۰

12 ۰ اگر $A\subset B$ باشد ، ثابت کنید که $C B\subset C A$ نظر به یک ست کلی است ۰

۱۵ • (a) • روابط بین ستهای هریک از کلمات : ((عالم))، ((فاضل)) و ((عاقل))

شکل (21-2)

راتوسط ون دیاگرام در شکل (21-2) ذیل با نوشتن حرف در محل مناسب آنها ارائه کنید .

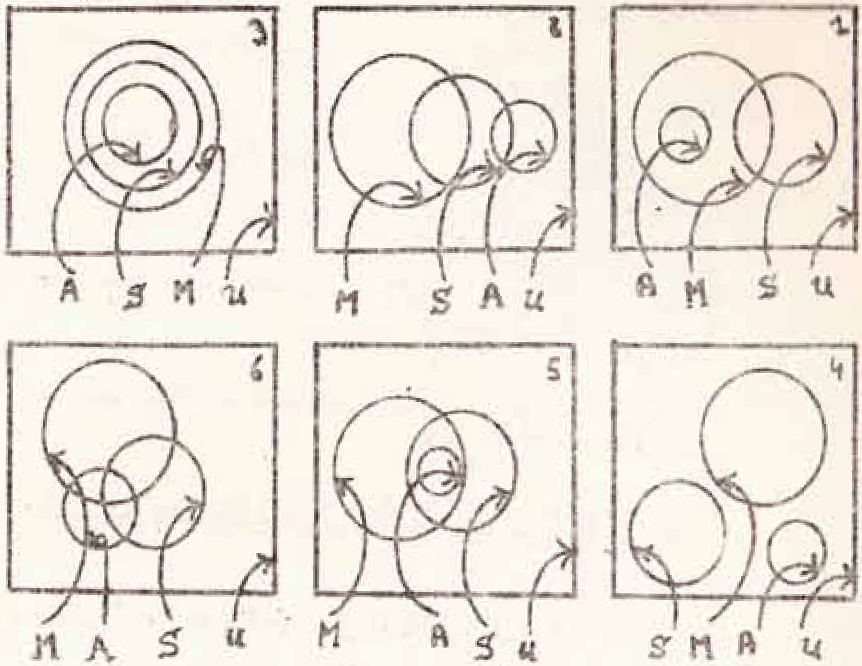
(b) • مانند جزء (a) روابط بین ست حروف مربوط کلمات : ((علم))، ((فضل)) و ((عقل)) راتعیین کنید .

(c) • رابطه بین ست های مربوط کلمات جزء (a) وست های حروف مربوط کلمات جزء (b) راتعیین کنید .

۱۶ • اگر M ست تمام ریاضیدانان را – و S ست تمام ساینسدانان را و A ست تمام نویسندگان را و بالاخره U ست تمام انسانها را ارائه کنند . بفکر شما روابط که در بین این ست ها بیشتر

امکان پذیر است ارائه آنها توسط کدام یک از ون دیاگـــــرام

ذیل معقول تر است ؟



15 • اگر ست حروف مصرع : ((توانا بود هرکه دانا بود)) را به A ،

وست حروف مصرع : ((زدانش دل پیر برنا بود)) را به B ،

وست تمام حروف الفبای دری را به U نشان دهیم •

(a• $A \cap B$ را • (b• $\complement_U (A \cup B)$ را بدست آورید •

(c• یک ست کلمات پنج عنصری را که از حروف مربوط (a) حاصل

میشود تشکیل دهید •

فصل سوم

استعمال ست ها

درمباحث قبلی ما راجع به ست هاي اعداد بنام هاي ست اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ و ست اعداد تام $\mathbb{Z}$ و ست اعداد نسبتی $\mathbb{Q}$ ، ست اعداد غیرنسبتی C_R^Q و ست اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ صحبت نمودیم . درین مبحث ما راجع به طرز استفاده از استعمال ست ها در حل مسایل حسابی معادلات - غیرمعادلات - و ارائه مفاهیم هندسی صحبت مینمایم .

3-1 . استعمال ست ها در حساب

3-1.2 . ست مضرب ها :Set Of Multiples

مثال اول . اگر ست تمام اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را که مضرب هاي 4 اند به $4\mathbb{N}$ نشان دهیم درینصورت :

$4\mathbb{N} = \{4 , 8 , 12 , 16 , 20 , 24 , \dots\}$ میشود .

همچنان اگر ست تمام اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را که مضرب هاي 8 اند ،

به $8\mathbb{N}$ ارائه کنیم درینصورت نوشته میتوانیم :

$$8\mathbb{N}=\{8, 16, 24, 32, 40, 48, \ldots\}.$$

میدانیم هرعدد یکه ضرب 8 است باالضرور ضرب 4 نیز میباشد، که این مطلب رابنابرعلامه گذاری ستها طبق ذیل افاده میکنیم :

$$\{8, 16, 24, 32, \ldots\}\subset\{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$$

ویا ... $8\mathbb{N}\subset 4\mathbb{N}$

بصورت عموم اگر ست تمام اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ راکه ضرب های یکعدد طبیعی a اند به $a\mathbb{N}$ ارائه نمایم درینصورت ما میتوانیم بنویسیم :

$$a\mathbb{N}=\{a, 2a, 3a, 4a, \ldots\}$$

بصورت عموم اگریکعدد طبیعی b ضرب یکعدد طبیعی a باشد، ما میدانیم که درینصورت تمام ضرب های b ضرب a نیزمیباشند.

باستفاده ازاستعمال مذکوره ست هاگفته میتوانیم که ست

مضرب هاي b یك ست فرعی مضرب هاي a میباشد ٠

یعنی : . . . $bN \subset aN$ است ٠

مثال دوم ٠ اگر $a = 3$ و $b = 9$ مدنظرگرفته شود

درینصورت b مضرب a است :

$$aN = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, \cdots\}$$

$$bN = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, \cdots\}$$

دیده میشود که هرعنصرست bN شامل ست aN است

بنابرآن . . . . . . $bN \subset aN$ میشود٠

b-1-3 ٠ ست مضرب هاي مشترك دوعدد Common Multiples

مثال سوم ٠ میخواهیم که ست مضرب هاي مشترك اعداد 6 و 9 را

بدست آریم ٠ ما میدانیم که :

$$6N = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \ldots\}$$

$$9N = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, \ldots\}$$

چون ست که عناصر آنرا عناصر مشترک دو ست $6\mathbb{N}$ و $9\mathbb{N}$ تشکیل

میدهد عبارت از ست ضرب های مشترک اعداد 6 و 9 است .

پس درینصورت ست ضرب های مشترک اعداد 6 و 9 عبارت است از :

$$6\mathbb{N} \cap 9\mathbb{N} = \{18 , 36 , 54 , 72 , \ldots\}$$

از رابطهٔ فوق معلوم میشود که :

$$6\mathbb{N} \cap 9\mathbb{N} = 18\mathbb{N} .$$

رابطهٔ اخیر افاده میکند که ضرب های مشترک 6 و 9 عبارت از

ضرب های 18 میباشد .

مثال چهارم . میخواهیم ست ضرب های مشترک اعداد 5 و 15 را بدست

آریم . درینصورت ما داریم :

$$5\mathbb{N} = \{5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , \ldots\}$$

$$15\mathbb{N} = \{15 , 30 , 45 , 60 , 75 , 90 , \ldots\}$$

چون : $15\mathbb{N} \subset 5\mathbb{N}$ ......

پس $5\mathbb{N} \cap 15\mathbb{N} = 15\mathbb{N}$ ......

بنابرآن ست ضربهای مشترک اعداد 5 و 15 عبارت از ست $15\mathbb{N}$ است .

1.C.3 ـ کوچکترین مضرب مشترک دو عدد .L.C.M :

از دو مثال اخیر فوق بملاحظه میرسد که ست مضرب های مشترک دو عدد عبارت از تقاطع ست مضرب های مربوطه آنهاست . پس کوچکترین مضرب مشترک آنها عبارت از کوچکترین عنصر ست تقاطع آنهاست .

چنانچه از مثال سوم دیده میشود که کوچکترین مضرب مشترک اعداد 6 و 9 عبارت از 18 است که کوچکترین عنصر ست تقاطع $6\mathbb{N}$ و $9\mathbb{N}$ میباشد . و همچنان از مثال چهارم واضح است که کوچکترین مضرب مشترک 5 و 15 عبارت از عدد 15 است .

2.3 ـ ست قاسم ها Divisors :

یکعدد طبیعی a قاسم یکعدد طبیعی b گفته میشود در صورتیکه عدد a عدد b را بالای خود پوره تقسیم کند . مثلاً اعداد 1 ، 2 ، 3 و 6 عدد 6 را بالای خویش پوره تقسیم میکنند ، پس هریک از اعداد : 1 ، 2 ، 3 و 6 را قاسم 6 میگویم . اگر ست قاسم های عدد 6 را به D_6 نشان دهیم در ینصورت نوشته میتوانیم :

$D_6 = \{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6\}$.

وهم چنان ست قاسم های 24 عبارت است از :

$D_{24} = \{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 24\}$

دیده میشود که تمام عنصر ست D_6 در ست D_{24} نیز موجود است ،

بنابران . . . $D_6 \subset D_{24}$ است .

بصورت عموم اگر یکعدد طبیعی a قاسم یکعدد طبیعی b باشد

پس درینصورت : . . . $D_a \subset D_b$ . . . میباشد .

3-2 . Common Divisors: <u>ست قاسم های مشترک دو عدد</u>

<u>مثال پنجم</u> . میخواهیم ست قاسم های مشترک 24 و 16 را بدست آریم.

درینصورت ما داریم :

$D_{24} = \{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 24\}$

$D_{16} = \{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16\}$

ست اعدادیکه هم 24 وهم 16 رابالای خود پوره تقسیم

میکنند عبارت از ست قاسم های مشترک هردو عدد 24 و 16

بوده وآن عبارت است از :

$$D_{16} \cap D_{24} = \{1, 2, 4, 8\}$$

ازرابطهٔ اخیربوضاحت دیده میشود که :

$\{1, 2, 4, 8\} = D_8$ میباشد.

بنابرآن $D_{16} \cap D_{24} = D_8$

3-2-b. بزرگترین قاسم مشترک دو عدد G.C.D.

ازمثال پنجم بملاحظه میرسد که هریک از اعداد :

1 ، 2 ، 4 و 8 هردوعدد 24 و 16 رابالاي خود پوره تقسیمیکنند،

ولی بزرگترین آنهاعبارت ازعدد 8 است . پس عدد 8 را بزرگترین

قاسم مشترک اعداد 24 و16 مینامند . براي دریافتن بزرگترین قاسم

مشترک دو ویا چندعدد ـ درمرحلهٔ اول ست قاسم هاي هریک از

اعدادمورد نظر رابدست می آریم . درمرحله دوم ست هاي مشترک اعداد

مذکور راکه ازتقاطع ست قاسم هاي آنهاحاصل میشود بدست می آریم .

یا الاخره بزرگترین عنصرست اخیر الذکررا انتخاب مینمایم و این عدد

عبارت از بزرگترین قاسم مشترک اعداد مورد نظر است .

<u>مثال ششم</u> . میخواهیم بزرگترین قاسم مشترک دو عدد 18 و 42 را

بدست آریم . درینصورت :

درمرحله اول :

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

و $D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ رابدست میاوریم .

درمرحله دوم :

$D_{18} \cap D_{42} = \{1, 2, 3, 6\}$ راحاصل نموده ،

وبالاخره بزرگترین عنصر $D_{18} \cap D_{42}$ که عبارت از 6 است انتخاب مینمایم .

اینک 6 بزرگترین قاسم مشترک اعداد 18 و 42 میباشد .

<u>مثال هفتم</u> . میخواهیم بزرگترین قاسم مشترک اعداد : 24 ، 28 و 36

رابدست آریم . درینصورت :

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$D_{28}=\{1،2،4،7،14،28\}$

$D_{36}=\{1،2،3،4،6،9،12،18،36\}$

$D_{24}\cap D_{28}\cap D_{36}=\{1،2،4\}$.

که درینصورت عدد 4 عبارت از بزرگترین قاسم مشترک هر یک از اعداد 24 ، 28 و 36 میباشد .

تمرینات

1 . آیا یک جوره اعداد طبیعی a و b موجود شده میتواند طوریکه :
$aN\cap bN=\phi$ شود؟ چرا؟

2 . آیا یک جوره اعداد طبیعی a و b موجود شده میتواند طوریکه :
$D_a\cap D_b=\phi$ گردد؟ چرا ؟

3 . برای هر عدد کیفی طبیعی n ثبوت کنید که 2 عنصر ست $D_{(n(n-1))}$ میباشد .

4 . برای هر عدد کیفی طبیعی n ثابت کنید که 6 عنصر ست $D_{(n(n-1)(n-2))}$ میباشد .

مثال اول ، اگر ست حل معادلهٔ :

$x^2-4=0$ . . . . (1) را به A

و ست حل معادلهٔ :

$x^2-5x+6=0$ . . . . . (2) را به B نشان دهیم ،

درینصورت ست حل معادله :

$(x^2-4)(x^2-5x+6)=0$ . . (3) عبارت از $A \cup B$ ست است .

زیرا : چون A ست حل معادله (1) است پس هر عنصر ست A

معادلهٔ (1) را تحقیق میکند ، یعنی هر عنصر ست A

افادهٔ (x^2-4) را صفر میسازد .

چون هر عنصر ست A فکتور (x^2-4) معادلهٔ (3) را صفر

میسازد پس خود معادلهٔ (3) را تحقیق میکند .

بهمین قسم هرعنصرست B معادلهٔ (2) راتحقیق کـــرده ،

یعنی فکتور (x^2-5x+6) معادلهٔ (3) راصفر میسازد ،

پس خود معادلهٔ (3) راتحقیق میکند • ازینکه خواه تمام عناصر

ست A ویا تمام عناصر B معادلهٔ (3) را تحقیق مینمایند ، بنابران

عناصر ($A \cup B$) معادلهٔ (3) راتحقیــق میکنــد •

بجز از عناصر ($A \cup B$) کدام عدد دیگر که معادلهٔ (3) را صدق

کند وجود ندارد •

زیرا :

$$y \notin (A \cup B)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} y \notin A & \text{هم} & y \notin B \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x^2-4 \neq 0 & \text{هم} & x^2-5x+6 \neq 0 \end{array}$$

$$(x^2-4)(x^2-5x+6) \neq 0$$

پس گفته میتوانیم که : $A \cup B$ یگانه ست حل معادلهٔ :

$$(x^2-4)(x^2-5x+6)=0$$

است •

چون $A = \{-2 , 2\}$

و $B = \{2 , 3\}$

پس $A \cup B = \{-2, 2, 3\}$

اینک ست حل معادله (3) عبارت از :

$\{-2 , 2 , 3\}$ میباشد .

بصورت عموم اگر ست حل معادله : $E(x) = 0$ رابه A ،

وست حل معادله : $F(x) = 0$ رابه B نشان دهیم ،

پس ست حل معادله : $E(x) \cdot F(x) = 0$

عبارت از $A \cup B$ میباشد .

<u>مثال دوم</u> . توابع : $y = x^2 - 9 \ldots (1)$

و $y = x^2 - 4x + 3 \ldots (2)$ رامد نظر بگیرید .

ترتیب نقطه

ما میدانیم که تقاطع منحنیات مربوط توابع فوق

صحیح از

با محور x عبارت از $y = 0$ است .

هرگاه نقطه مشترک تقاطع هرد ومنحنی با محور x مطلوب باشد ،

درینصورت باید که ابسیس (Abscissa) یا فضلـه

نقطهٔ مطلوب حل همزمان سیستم معادلات :

$$\begin{cases} x^2-9=0 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases}$$ راصدق کنـد .

پس اگر ستِ حلِ : $x^2-9=0$ را به A

وستِ حلِ $x^2-4x+3=0$: را به B نشان دهیـم

درینصورت ابسیس نقطهٔ مطلوب عبارت از عنصر $A\cap B$ است .

چون . . . $A=\{-3, 3\}$

و . . . . $B=\{1, 3\}$ . . . است .

پس . . . . $A\cap B=\{3\}$ بوده ،

و . . . . . . $x=3$ میشود .

پس مختصات (Coordinates) نقطهٔ مطلـوب

عبارت از $(3, 0)$ میباشد .

مثال سوم - میخواهیم حل همزمان سیستم معادلات :

$$\begin{cases} x^2-1=0 \cdots (1) \\ x^2-x=0 \cdots (2) \\ x^2-4x=0 \cdots (3) \end{cases}$$

را بدست آریم .

اگر ست حل معادله (1) را به A واز (2) را به B

واز (3) را به C نشان دهیم .

درینصورت ست حل همزمان سیستم فوق عبارت از :

$A \cap B \cap C$ میباشد .

چون : $A=\{-1, 1\} \cdots$

و $B=\{0, 1\} \cdots$

و $C=\{0, 4\} \cdots$ است ،

بنابرآن $A \cap B \cap C=\phi$ است .

پس گفته میتوانیم که سیستم معادلات فوق حل همزمان

ندارد .

4-3-10 استعمال ست ها در غیرمعادلات :

قبل از آنکه درباره استعمال ست ها در حل مسایل غیرمعادلات صحبت نمایم لازم دیده میشود که قدری درباره مفکوره مسافه ها صحبت شود .

4-3-10-1 مسافه ها : Intervals

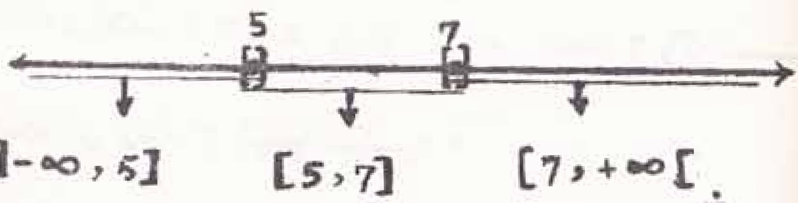
برای سهولت توضیح مطلب ما :

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \leq 5\} =]-\infty, 5]$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ 5 \leq x \leq 7\} = [5, 7]$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ 7 \leq x\} = [7, +\infty[$$

نشان داده و مطالب فوق را توسط شکل (3-1) ذیل ارائه میکنیم :



شکل (3-1)

بهمین قسم :

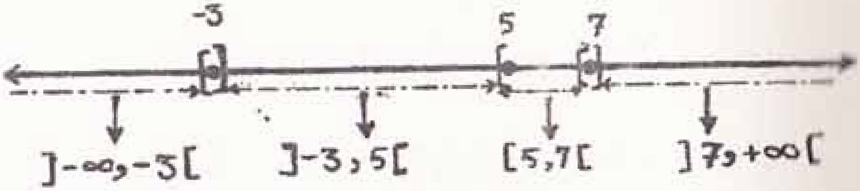
$$\{x \mid x \in \mathbb{R} ، x < -3\} =]-\infty , -3[$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} ، -3 < x < 5\} =]-3 , 5[$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} ، 5 \leq x < 7\} = [5 , 7[$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} ، 7 < x\} =]7 , +\infty[$$

مطلب فوق را توسط شکل (3-2) ذیل نشان داده میتوانیم :



شکل (3-2)

درافاده : $-3 < x < 5$ ، x قیمت های 3- و 5 را گرفته نمیتواند .

حالانکه درافاده : $5 \leq x < 7$ ، x قیمت 5 را گرفته توانسته ولی قیمت 7 را بخود نمیگیرد .

b.4.3 ـ غیرمعادلات :

مثال اول . میخواهیم ست اعداد حقیقی ای که غیرمعادله :

(۱) . . . . $2x - 4 < 0$ راتحقیق کند بدست آریم .

غیرمعادله (۱) رابشکل : $2x < 4$

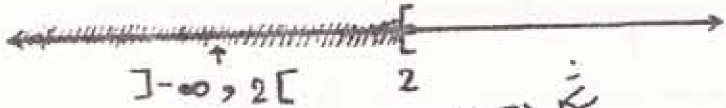
رابشکل . . . . $x < 2$ آورده میتوانیم .

غیرمعادله اخیراین مفهوم راکه x تمام اعداد حقیقی که کوچکتراز 2 است گرفته میتواند ارائه میکند .

پس گفته میتوانیم که ست حل غیرمعادله (۱) عبارت ازست :

$]-\infty , 2[$ میباشد .

ما ست حل غیرمعادله فوق راطبق شکل (3-3) روی خط عدد که حصه مخطط شده ان جواب مثال رانشان میدهد قرار ذیل ارائه کرده میتوانیم :



شکل (3-3)

مثال سوم : میخواهیم ست حل غیرمعادله :

$x^2-4>0 \ldots (2)$ را در ست اعداد حقیقی حاصل نمائیم.

ما میتوانیم که غیرمعادله (2) را بشکل :

$(x+2)(x-2)>0$ بنویسیم.

میدانیم که جذور غیرمعادله اخیر عبارت از 2- و 2 بوده و

به قیمت های: $x<-2$ و یا $x>2$

غیرمعادله اخیرالذکر تحقیق پذیر است.

با استفاده از استعمال مفکورهٔ مسافه ها این ست حل غیرمعادله

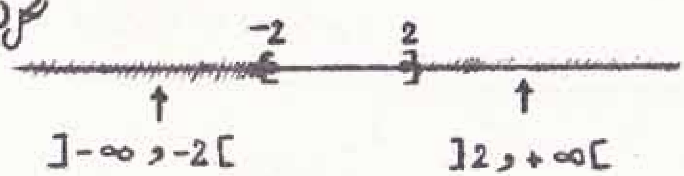
(2) را بشکل : $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

افاده کرده میتوانیم.

ست حل فوق را توسط حصهٔ مخطط شدهٔ خط عدد قرار

شکل (3-4) ذیل نشان داده میتوانیم:

شکل (3-4)



مثال سوم . ست حل همزمان سیستم :

$$\begin{cases} x-3<0 \\ 2x+6>0 \end{cases}$$ را در R بدست میآریم :

ما میدانیم که ست حل غیرمعادلهٔ : $x-3<0$ عبارت از :

$]-\infty , 3[$ بوده و هم چنان

ست حل غیرمعادله : $2x+6>0$ . . . عبارت از :

$]-3 , +\infty[$ است .

ست حل همزمان سیستم غیرمعادلات فوق عبارت از تقاطع

ست های حلهٔ مربوطهٔ آنها بوده

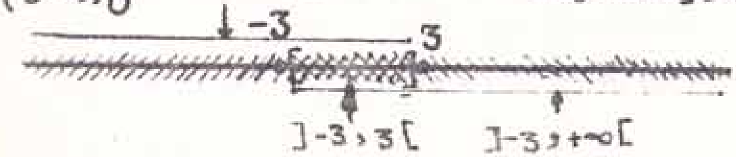
یعنی : $]-\infty , 3[\cap]-3 , +\infty[$

یا : $]-3 , 3[$ . . . . . میباشد .

ما حل همزمان سیستم فوق را بالای خط عدد طبق شکل (S-5)

قرار ذیل ارائه کرده میتوانیم که حصهٔ دو مرتبه مخطط شدهٔ خط عدد جواب

مثال را افاده میکند . $]-\infty , 3[$ شکل (S-5)



مثال چهارم - میخواهم حل همزمان سیستم :

$$\begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ x^2-5x+4 \leq 0 \end{cases}$$ را در $\mathbb{R}$ حاصل نمایم .

ما میدانیم که ست حل غیرمعادله: $x^2-9 \geq 0$ عبارت از :

$]-\infty , -3] \cup [3 , +\infty[$.

وهمچنان ست حل غیرمعادله $x^2-5x+4 \leq 0$:

عبارت از : $[1 , 4]$ . . . میباشد .

ست حل همزمان سیستم فوق عبارت از تقاطع ست های

مربوط حل غیرمعادلات سیستم فوق است .

پس درینصورت ست حل همزمان سیستم عبارت از :

$(]-\infty , -3] \cup [3 , +\infty[) \cap ([1 , 4])$ میباشد .

اگرست $]-\infty , -3]$ . . . را به A

وست $[3 , +\infty[$ . . . را به B وهم چنان

ست $[1 , 4]$ . . . را به C نشان دهیم ،

درینصورت ست حل همزمان سیستم عبارت از :

$(A \cup B) \cap C$ گردیده

که بنابرتطبیق خاصیت توزیعی عملیهٔ $\cap$ بالای عملیهٔ $\cup$ افاده

فوق رابشکل :

$(A \cap C) \cup (B \cap C)$ نوشته میتوانیم .

حالانکه : $A \cap C = \phi \; \cdots$

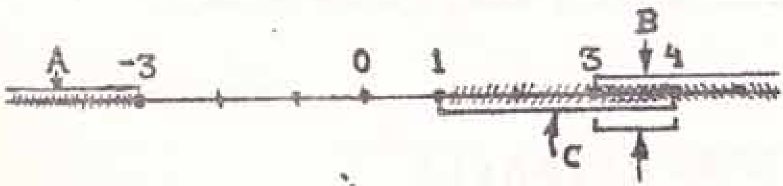
و $\cdots \; B \cap C = [3, 4] \; \cdots$ میشود .

پس درینصورت ست حل همزمان سیستم عبارت از تمام عناصر ست

$[3, 4]$ در $\mathbb{R}$ است .

ما حل همزمان سیستم را قرار شکل (6 - 3) ذیلاً روی خط عدد

که قسمت مخططشده آن جواب مثال است افاده مینمایم .



شکل (3-6)

مثال پنجم . میخواهیم ست حل سیستم :

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \cdots (1) \\ x^2 + 2x > 0 \cdots (2) \end{cases}$$

را در ست $\mathbb{R}$ بدست آریم .

اگر ست حل غیرمعادله (1) را به A و از (2) را به B نشان دهیم درینصورت ما داریم :

$A =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$B =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

میدانیم که ست حل سیستم فوق الذکر عبارت از $A \cap B$ است.

حال اگر $]-\infty, -2[$ را به C و $]2, +\infty[$ را به D

وهم چنان $]0, +\infty[$ را به E نشان دهیم،

درینصورت ما داریم :

$$A \cap B = (C \cup D) \cap (C \cup E)$$

بنابرتطبیق خاصیت توزیعی عملیه $\cup$ بالای عملیه $\cap$

نوشته میتوانیم :

$$A \cap B = C \cup (D \cap E) .$$

جون : $D \cap E =]2, +\infty[= D$ است ،

پس : $A \cap B = C \cup D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

درینصورت : $A \cap B =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ میشود.

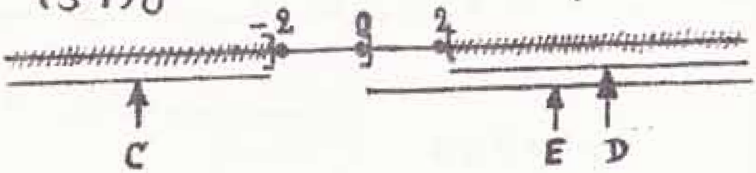
بنابرآن گفته میتوانیم که تمام عناصر ست $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

عبارت از حل سیستم فوق الذکر است.

ماحل همزمان سیستم فوق را بالای خط عدد قرار شکل (3-7)

ذیل نشان داده میتوانیم.

شکل (3-7)



تمرینات

1. ست حل غیرمعادله : $x + 5 \leq 0$ را در ست اعداد حقیقی توسط علامه گذاری مسافه ها افاده کنید.

2. (a). ست حل غیرمعادله : $x^2 + 5 > 0$ را در $\mathbb{R}$ بدست آرید.

(b). نتیجه را روی یک خط عدد نشان دهید.

3 • میدانیم که ست حل معادله :

$(x-5)(x-3)=0$ عبارت از:

$\{3,5\}$ است •

نشان دهید که ست حل غیرمعادله :

$(x-5)(x-3)\neq 0$ عبارت از:

$C_{\mathbb{R}}\{3,5\}$ بوده و آنرا با استفاده از مفکوره اتحاد ست ها

توسط علامه گذاری مسافه ها ارائه کنید •

4 • (a) • ست حل همزمان سیستم :

$$\begin{cases} x+9>0 \\ x+1<0 \end{cases}$$ را در

$\mathbb{R}$ حاصل و آنرا توسط علامه گذاری مسافه ها ارائه کنید •

(b) • ست حل مسأله را روی خط عدد نشان دهید •

5 • ست حل غیرمعادله : $(x-7)^2<0$ را در $\mathbb{R}$ بدست آرید •

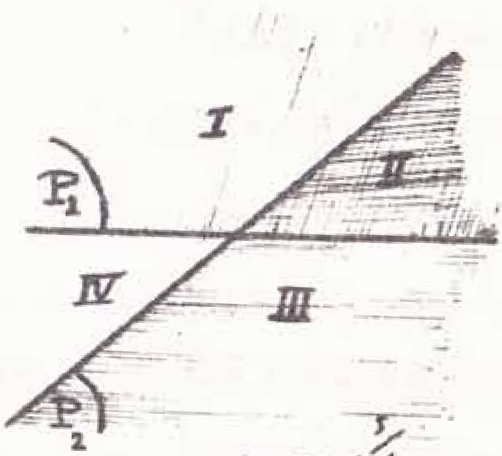
6 • (a) ست حل همزمان سیستم غیرمعادلات :

$$\begin{cases} x^2-16<0 \\ x^2-5x+6 \geq 0 \end{cases}$$ را در $\mathbb{R}$ معلوم کرده

(b) نتیجه را بالای خط عدد ارائه کنید •

5 ـ 3 • استعمال ست ها در ارائه مفاهیم هندسی

اگر ما مستوی را بحیث ست نقاط مورد مطالعه قرار دهیم ، پس درینصورت نیمه مستوی ها و هر شکل هندسی که در یک مستوی قرار گرفته بتواند مانند : خطوط ، نیم خط ها ، قطعه خط ها ، مثلث ها و غیره همه بحیث یک ست فرعی مستوی مورد مطالعه قرار میگیرند • اینک در ذیل یکعده مفاهیم هندسی را باساس مفکوره ست ها توضیح مینمایم •



شکل (8-3)

مثال اول . دو نیمه مستوی P_1 و P_2 را طبق شکل (8-3) مد نظر میگیریم • دیده میشود که این دو نیمه مستوی مستوی را به چهار ناحیه : I ، II ، III و IV تقسیم میکند • ناحیه II که بین هر دو نیمه مستوی P_1 و P_2 مشترک بود عبارت

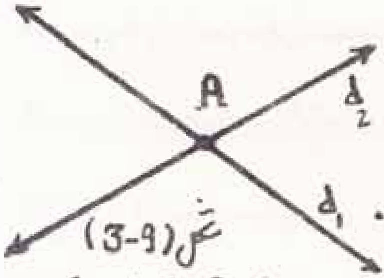
ازتقاطع آنهاست • وهمچنان اتحاد P_1 و P_2 عبارت از

مکمله ناحیه IV در کل مستوی است •

مثال دوم ـ نظریه هندسه ما میدانیم که دو خط d_1 و d_2 بالضرور یکی از

دو حالت ذیل را نظر بیکدیگر دارا میباشند •

اول اینکه هردو خط d_1 و d_2 یکدیگر را محض در یک نقطه مانند A



قطع میکنند مانند شکل (9-3)

که درینصورت :

$d_1 \cap d_2 = \{A\}$ * میشود.

دوم اینکه هردو خط d_1 و d_2 در یک نقطه یکدیگر را قطع نمیکنند •

که درینصورت دو حالت موجود است :

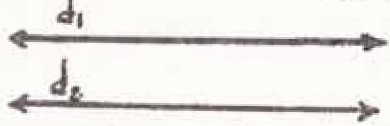
(*) • خود حرف A در هندسه نقطه A را ارائه میکند • ولی افاده {A}

ستی را که محض دارای یک عنصر بوده و آن هم عبارت از نقطه A است

نشان میدهد • پس درینصورت $d_1 \cap d_2$ عبارت از ستی است که

عنصر آن نقطه A است •

در حالت اول: ممکن خطوط d_1 و d_2 هیچ یک نقطه مشترک نداشته باشند مانند شکل (ج-10) که درینصورت:

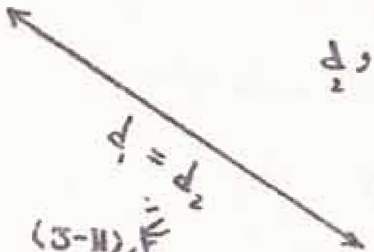


شکل (ج-10)

$d_1 \cap d_2 = \phi$ بوده.

وگفته میشود که خطوط d_1 و d_2 باهم موازی اند.

در حالت دوم: ممکن d_1 و d_2 بی نهایت نقاط مشترک داشته باشند که درینحالت خطوط d_1 و d_2 باهم منطبق ویا در ریاضی d_1 مساوی به d_2 گفته میشود.



شکل (ج-11)

پس درینصورت: $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$ میشود.

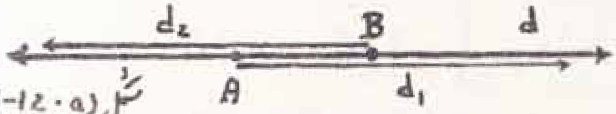
تعریف: دو خط که در یک مستوی واقع بوده و یکدیگر را در یک نقطه قطع نکنند موازی گفته میشوند. پس نظر به تعریف فوق خطوط مساوی (منطبق) نیز باهم موازی گفته میشوند.

مثال سوم • تقاطع دو نیم خط d_1 و d_2 که بالای یک خط d واقع گردند

(a) • نظر به شکل (3-12.a) عبارت از قطعه خط $\overline{AB}$

است •

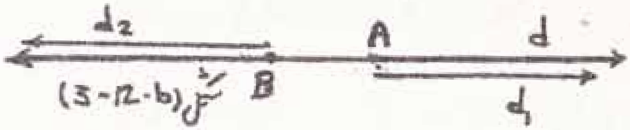
یعنی : $d_1 \cap d_2 = \overline{AB}$



شکل (3-12.a)

(b) • نظر به شکل (3-12.b) عبارت از ست خالی است •

یعنی : $d_1 \cap d_2 = \Phi$



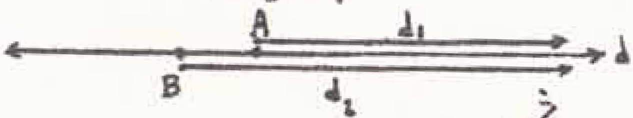
شکل (3-12.b)

(c) • نظر به شکل (3-12.c) تقاطع این دو نیم خط d_1 و d_2

عبارت از آن یکی از نیم خط های مفروض است

که ست فرعی دیگرش میباشد •

یعنی : $d_1 \cap d_2 = d_1 \ldots\ldots$



شکل (3-12.c)

(d) . درشکل (3-12.d) تقاطع نیم‌خط های d_1 و d_2 عبارت

ازستی است که محضرداراي یك عنصریعنی نقطهٔ A ویا

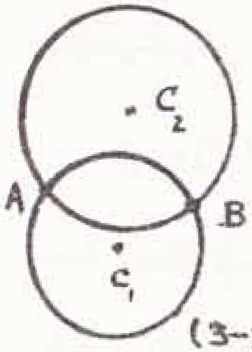
نقطهٔ B است .

(3-12.d) شکل

یعنی: $d_1 \cap d_2 = \{A\} = \{B\}$.

مثال چهارم . دودایره نظر بیکدیگر بالضروریکی ازحالات چهارگانهٔ ذیل

رادارامیباشد :



اول . یااینکه دودایره (C_1) و (C_2)

یکدیگررا دردونقطه قطع میکنند

مانند شکل (3-13.a) .

(3-13.a) شکل

پس درینصورت :

$(C_1)\cap(C_2)=\{A,B\}$ . . . . . میشود .

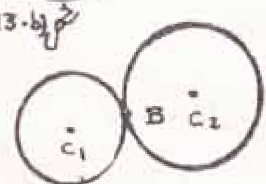
(3-13.b) شکل

دوم . یااینکه هردودایره (C_1) و (C_2)

یاداخلاً ویاخارجاً مماس بوده

یعنی داراي محضریك نقطهٔ

مشترك میباشند



(3-13.c) شکل

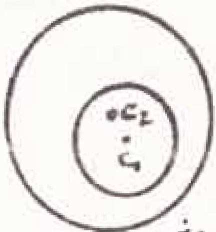
مانند شکل (3-13.b) وشکل (3-13.c)

پس درینصورت : . . .

$$(c_1)\cap(c_2)=\{A\} \ . \ . \ .$$

ویا . . . . $(c_1)\cap(c_2)=\{B\}$ میشود .

سوم . ممکن هردو دایره (c_1) و (c_2) هیچکدام نقطهٔ مشترک نداشته باشد مانند شکل (3-13-d)



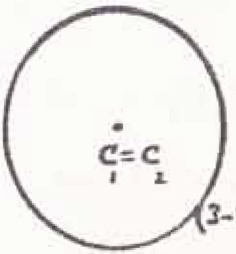
پس درینصورت :

$(c_1)\cap(c_2)=\phi$ میشود .

شکل (3-13-d)

چهارم . ممکن دو دایره (c_1) و (c_2) دارای بیش از دو نقطه مشترک باشند . مانند

شکل (3-13-e)



شکل (3-13-e)

که درینصورت :

. . . $(c_1)\cap(c_2)=(c_1)=(c_2)$ میشود .

یک مستوی

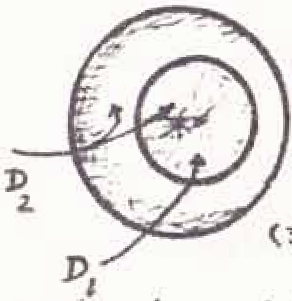
هدف ما از دایره درین رساله عبارت از ست نقاطی[7] است

که از یک نقطهٔ ثابت داخلی همیشه متساوی الفاصله اند نه ناحیه

داخلی دایره .

ناحیه داخلی دایره را بنام دسک یاد مینمائیم ۰

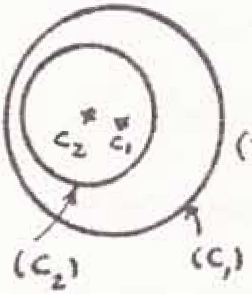
مثال پنجم - اگر دو دسک D_1 و D_2 را نظر به شکل (3-14.a) مد نظر بگیریم درینصورت D_1 ست فرعی دسک D_2 میشود ۰ و ما میتوانیم بنویسیم که :



شکل
(3-14.a)

$D_1 \subset D_2$.

ولی اگر دو دایره (C_1) و (C_2) را نظر به شکل (3-14.b) مد نظر بگیریم درینصورت :



شکل
(3-14.b)

$(C_1) \not\subset (C_2)$.

. . . چرا ؟

تبصره ۸ :

در اکثر کتب هندسه تعریف مثلث دقیق نیست چنانچه از مطالعه موضوعات مربوطه آن معلوم میشود که گاهی مثلث بحیث ست نقاط که از اتحاد سه قطعه خط که دو دو یا آنها دارای نقطه مشترک اند تعریف شده است ۰ بطور مثال گاهی گفته میشود که یک خط مثلث را در دو نقطه قطع میکند ۰ ازین واضح است که

مثلث باساس تعریف فوق تعریف گردید (سمت) ما ولی یکعده توضیحات

موجود است که توسط آنها مثلث بحیث سطح تعریف میشود .

چنانچه گفته میشود که :((مساحت مثلث مساویست به نصف

حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن :)) ازین برمی آید که مثلث بحیث

سطحی که توسط سه قطعه خط محدود شده است تعریف

میشود .

درین رساله ما مثلث را باساس تعریف اول قبول دارمیشویم .

بنابراستفاده ازمفکوره ونظریه ست ها ما میتوانیم کــه

مفاهیم هندسی رابصورت موجزودقیق ترافاده کنیم .

مثال ششم . درهندسه گفته میشود که :((اگر سه ضلع یك مثلث بسه ضلع

مثلث دیگریك بیك باهم مساوي باشند مثلث هاي مذکورباهم

مساوي اند .)) ولی باستفاده ازمفکوره ست ها میدانیم که

این دومثلث باهم مساوي نبوده زیرادومثلث درصورتی باهم

مساوي میشوند که تمام نقاط آنها باهم مشترك باشند . یابعبارت

دیگردومثلث باهم مساویست درصورتیکه ازهرحیث باهم منطبق

باشند . پس اگر طول سه ضلع یك مثلث با طول سه ضلع مثلث

دیگریك بیك باهم مساوی باشند میگوئیم که مثلث هاي مذکور باهم

انطباق پذیر congruent اند ، نه مساوي .

بصورت عموم دو خط و یا دو شکل هندسی در صورتی باهم

مساوي گفته میشوند که داراي عین ست نقاط باشند .

مثال هفتم . در هندسه گفته میشود که : ((محل هندسی نقاطی که از دو نقطه

ثابت A و B قطعه خط $\overline{AB}$ متساوي الفاصله است عبارت

از ناصف عمودي قطعه خط $\overline{AB}$ است .)) ولی این مطلب را

ما چنین افاده میکنیم : ست نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B

متساوي الفاصله اند عبارت از ناصف عمودي $\overline{AB}$ است . براي

ثبوت این مطلب نشان باید داد :

اول . ست مطلوب یك ست فرعی ناصف عمودي بوده ،

دوم . ست نقاط ناصف عمودي یك ست فرعی ست مورد نظر است .

واضح است که طرز افاده آخیر مفهوم فرق دقیق تر است .

تمرینات

1. دو خط موازی d_1 و d_2 مستوی P را مد نظر بگیرید، طوریکه هر یک از خطوط مذکور انجام های دو نیمه مستوی P_1 و P_2 را تعیین میکنند. با در نظر داشت حالات مختلفه P_1 و P_2

(a). $P_1 \cap P_2$ را بررسی کنید.

(b). $P_1 \cup P_2$ را مطالعه کنید.

2. در صورتیکه مثلث بحیث ست اتحاد سه قطعه خط تعریف شود، چهارضلعی را تعریف کنید.

3. اگر دو نقطه A و B یک مستوی مد نظر گرفته شود آیا ست نقاط $\overline{AB}$ وست نقاط $\overline{BA}$ با هم مساوی شده میتوانند ویا خیر؟ چرا؟

4. اگر A ، B ، C و D چهار نقطه ثابت یک مستوی P مد نظر گرفته شود، آیا ست نقاط چهارضلعی ABCD و چهارضلعی ABDC ست های مساوی اند ویا خیر؟ چرا؟

5. دو قطعه خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ را رسم نمائید طوریکه : $\overline{ABC} \overline{CD}$ باشد.

6 • آیا ترسیم یک مثلث مشابه روی یک مثلث مفروض باشد امکان پذیر است ؟ و یا چطور ؟

7 • مفهوم را اینکه میگویند "یک قطعه خط محدود است" ضمناً ادعا مینمایند: که "تعداد عناصر یک قطعه خط بی نهایت زیاد است" توضیح نمائید .

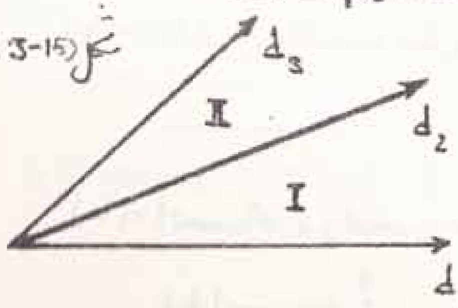
8 • (a) • مفهوم اینکه یک دایره محدود بوده ولی تعداد عناصر ست مربوطه آن بی نهایت زیاد است توضیح نمائید .

(b) • راجع به حدود و تعداد عناصر یک خط مستقیم چه فکر میکنید ؟

9 • دو مستوی P_1 و P_2 را در فضا مد نظر گرفته و با استفاده از مفکوره ست ها تقاطع P_1 و P_2 را در حالات مختلفه بررسی کنید .

10 • قطعه خط $\overline{AB}$ را بالای خط l مد نظر گرفته و ثابت کنید که مکمله $\overline{AB}$ در l عبارت از اتحاد دو نیم خط است .

شکل (3-15)



11 • اگر دو ناحیه I و II را نظر به شکل (3-15) نواحی مجاوره بنامیم .

(a) • تقاطع نواحی مجاوره را بدست آرید •

(b) • اتحاد نواحی مذکور را حاصل نمائید •

12 • (a) • بکدام حالت تقاطع دو دایره عبارت از یکدایره است؟

(b) • بکدام حالت تقاطع دو دسك نیزیك دسك است ؟

(c) • بکدام حالت تقاطع دو مثلث نیزیك مثلث است ؟

13 • آیا تعریف مثلث عبارت از اتحاد سه قطعه خط است؟ یك تعریف جامع وکامل مثلث است ؟

14 • تحت کدام شرایط :

(a) • اتحاد دو دایره یك دایره است ؟

(b) • اتحاد دو مثلث یك مثلث است ؟

15 • تحت کدام شرایط :

(a) • تقاطع دو قطعه خط یك قطعه خط است ؟

(b) • اتحاد دو قطعه خط یك قطعه خط است ؟

مسایل

1 . اگر ست حله معادله :

$x^5-4x^4+3x^3+7x^2-1=0$ را در $\mathbb{R}$ به A ،

و از معادله :

$(x^5-4x^4+3x^3+7x^2-1)(5x^3-7)=0$ را در $\mathbb{R}$ به B نشان دهیم ،

(a) . بدون حل کردن معادلات فوق ثبوت کنید که : $A\subset B$.

(b) . ست حله غیرمعادله :

$x^5-4x^4+3x^3+7x^2-1\neq 0$ را در $\mathbb{R}$ بنویسید .

(c) . ست حله غیرمعادله :

$(x^5-4x^4+3x^3+7x^2-1)(5x^3-7)\neq 0$ را در $\mathbb{R}$ به

چطور افاده میکنید ؟

2 . با در نظر داشت معلومات تعداد ست های فرعی دو عنصره یک ست پنج عنصره " پنج نقطه ثابت A ، B ، C ، D و E مستوی P را مد نظر گرفته ،

(e)• تعداد قطعه خط هاي راكه توسط هرجوره ازنقاط مذكور
حاصل میشود محاسبه کنید •

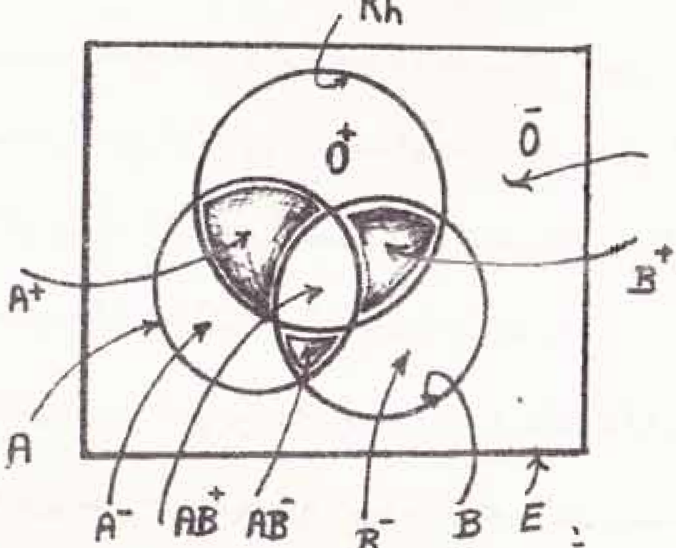
(h)• تعداد خطوطی راکه ازهرجوره نقطه که ازپنج نقطه که سه نقطه آنهــــا مشــترك الخط (بالاي يك خط) نيستند بوجود می آیند حساب کنید •

(c)• تعداد نقاطی راکه ازتقاطع پنج خط مستقیم که هیچ خط آنها ازیك نقطه نمیگذرند محاسبه کنید •

3 • گروپ خون انسان هابنابرداشتن ونداشتن يك وياچند ازمواد سه گانه که بنام انتی جیــن هاي Rh و B ، A Antigens ياد میشوند تقسیم گردیده اند • اگر انتی جن Rh درخون موجود باشد آنرا بنام گروپ وياتايپ Rh مثبت يعنى Rh^+ ، واگــر موجود نباشد آنرا بنام گروپ نوع Rh^- یاد میکنند • درصــورت عدم وجود انتی جن هاي A و B گروپ خون بنام گروپ تايـــــپ منفی یاد میشود •

گروپ هاي خون انسانها توسط ون دياگرام طبق شكل (16 - 3)

دسته بندي شده ازنگاه گروپ بندي خون ، E ست تمام انسانها را



شكل (3-16)

و A آن انسان هائی راكه خون شان داراي تايپ ، نوع انتی جن A

است نشان داده وبهمين قسم B و Rh ست آن اشخاص راكه

گروپ خون شان داراي انتی جن هاي B و Rh اندارائه ميكنند.

تجارب طبی نشان ميدهدكه دادن خون ويا Transfusion

درصورتی محفوظ تلقی ميشود كه خون شخص خون گيرنده لااقـــل

داراي تمام انتی جن هاي خون شخص خون دهنده باشد. بطور

مثال از یک نفریکه خون آن از نوع گروپ A باشد به نفریکه خون او

داراي انتی جن A یا A^+ یا انتی جن هاي A^+ و B^+ یعنی AB^+

باشد بصورت محفوظ خون دادن صورت گرفته میتواند. بهمین

قسم یک نفرکه خون او از تایپ O^+ است از آنجائیکه خون شان از

تایپ O^+ یا O^- است بصورت محفوظ خون گرفته میتواند. بنابر

توضیحات حقایق فوق اکنون مسایل ذیل را حل کید :

(a). تایپ خون اشخاصیکه بهرکس خون داده بتواند کدام است ؟

(b). تایپ خون اشخاصیکه ازهرکس خون گرفته بتوانند چیست ؟

(c). اشخاصیکه گروپ خون شان از نوع A^+ است این اشخاص از کدام

گروپ بصورت محفوظ خون گرفته میتوانند ؟

(d). اشخاصیکه خون شان ازگروپ نوع B^- است بکدام اشخاص

بصورت محفوظ خون داده میتوانند ؟

(e). نوع گروپ خون یک نفرخون دهنده چه باشد تا به نفریکه

تایپ خون آن B^+ است بصورت محفوظ خون داده بتواند ؟

(۵) ـ آیا میدانید که موظفین بانک خون بجمع آوری کسدام

تایپ گروپ خون خیلی زیاد علاقمند بوده و بکدام تایپ

آن علاقه خیلی کم نشان میدهند ؟ چرا ؟

۴ ـ اگرست متوازی الاضلاع ها را به P، از مستطیل ها را به R، از مربع ها

را به S، و از لوزی ها را به L نشان دهیم در صورتیکه :

$L \cap R = S$ تعریف نمائیم موضوع را توسط ون دیاگرام

ارائه نموده و توضیح نمائید ـ

ختم جلد اول

اصطلاحات

English	Français	دری
Abscissa	L'abscisse	فاصله
Associative Property	La propriété d'associativité	خاصیت انجمنی
Associativity	L'associativité	انجمنی
Common Divisors	Les diviseurs communs	قاسم های مشترک
Common Multiples	Les multiples communs	مضرب های مشترک
Commutative Property	La propriété de commutativité	خاصیت تبدیلی
Commutativity	La commutativité	تبدیلی ویا تبادلوي
Congruent	Superposable (dans ce livre)	انطباق پذیر (درین کتاب)
Coordinates	Les coordonnées	مختصات ویا کمیات وضعیه
Distributive Property	La propriété de distributivité	خاصیت توزیعی
Divisors	Les diviseurs	قاسم ها
Element of a Set.	L'élément d'un ensemble	عناصر یك ست
Greatest Common Divisor (G.C.D.)	Le Plus Grand Diviseur Commun (PGDC)	بزرگترین قاسم مشترک
Integers	Les entiers	اعداد تام
Intersection	L'intersection	تقاطع
Intersection of Sets	L'intersection des ensembles	تقاطع ست ها

Intervals	Les intervalles	مسافه ها
Irrationals	Les irrationnels	اعداد غیرنسبتی
(L.C.M.) Least Common Multiple	(PPMC) Le Plus Petit Multiple Commun	کوچکترین ضرب مشترك
Natural Numbers	Les Nombres Naturels	اعداد طبیعی
Prime-Numbers	Les nombres Premiers	اعداد اولیه
Properties of Intersection	Les propriétés de l'intersection	خواص تقاطع
Properties of Union	Les propriétés de l'union	خواص اتحاد
Rational Numbers	Les nombres rationnels	اعداد نسبتی
Real Numbers	Les nombres réels	اعداد حقیقی
Set	L'ensemble	ست
Set of Multiples	L'ensemble des multiples	ست ضرب ها
Subsets	Les parties	ست های فرعی (جزئی)
The Complement of a Set	Le complémentaire d'un ensemble	مکملهٔ یك ست
Union	L'union	اتحاد
Union of Sets	L'union des ensembles	اتحاد ست ها
Universal Set	L'univers	ست کلی
Venn-Diagram	Le diagramme de Venn	دیاگرام ون

استعمال علایم

شرح	سمبول
ست	$\{\,,\,\}$
ست خالی	$\emptyset , \{\ \}$
علامهٔ ست فرعی بودن	$\subset$
A ست فرعی B است	$A\subset B$
A ست فرعی B نیست	$A\not\subset B$
علامهٔ شمول	$\in$
x شامل A است	$x\in A$
y شامل B نیست	$y\notin B$
ست اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
ست اعداد تام	$\mathbb{I}$
ست اعداد نسبتی	$\mathbb{Q}$
ست اعداد غیرنسبتی	$C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
اعداد اولیه	$\mathbb{P}$
مکملـه	C
مکملهٔ ست A در S	C_S^A

شرح	سمبول
اتحاد	$\cup$
تقاطع	$\cap$
خط مستقیم AB	$\overleftrightarrow{AB}$
قطعه خط AB	$\overline{AB}$
نیم خط AX	$\overrightarrow{AX}$
ایجاب میکند که	$\Rightarrow$
درحالیکه ویا طوریکه	$\mid$
جوره مرتب x و y	(x, y)
فاصله هاي بسته	$[\cdots]$
فاصله هاي باز	$]\cdots[$
فاصله هاي چپ بسته وراست باز	$[\cdots[$
فاصله هاي راست بسته وچپ باز	$]\cdots]$
x کوچکتر است از y	$x<y$
x کوچکتر نیست از y	$x \nless y$
x کوچکتر است یا مساوی است با y	$x \leq y$
بزرگترین قاسم مشترک	G.C.D.
کوچکترین مضرب مشترک	L.C.M

جوابات تمرینات از صفحه (۱۲ الی ۱۷):

1. (a) $A=\{x \mid x \in N,\ 10 \leqslant x \leqslant 14\}$

(b) نه . (c) درو غ . (d) بلی . (e) نه . (f) نه .

2. (a) سبق، بیر و سبک در ست B شامل شده می توانند .

ساکت، سر، ساده و صبر در ست B شامل شده نمیتوانند .

(b) ست B عبارت از اسمای سه حرفی که حرف اول آن (س) آ میباشد .

(c) ست B را با شار لست عناصر آن تشخیص کرده نمیتوانیم زیرا که

تعداد عناصر آن زیاد است .

3. (a) بلی . (b) نه . (c) نه . (d) نه . (e) بلی .

4. (a) . . . . . $\{11, 12, 13, 14, \cdots, 28, 29\}$

(b) . . . . . . $\{12, 14, \cdots, 26, 28\}$

(c) ست جز (a) دارای 19 عنصر و ست جز (b) دارای 9 عنصر میباشد .

5. (a) . . . $\{5\}$. (b) تعداد عناصر این ست 1 است .

(c) . . $\{\ \}$ یا Φ .

6. (a) $\{\ \}$ یا ϕ. (b) ست اعداد کسری را که بین اعداد 5 و 6 واقع اند به اساس لست کردن عناصر آن نوشته کرده نمیتوانیم زیرا که تعداد عناصر این ست بی نهایت است اما این این ست را چنین تشخیص کرده میتوانیم:

$$\{x \mid x \in Q,\ 5 < x < 6\}$$

7. (a) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

(b) $\{E, F, G, H, I, J, K\}$

(c) $\{x \mid x \in Q,\ -3 < x < 0\}$

(d) $\{\ \}$ یا ϕ (e) $\{x \mid x \in Q,\ -6 < x < -5\}$

8. $Y = \{$ منفی، روز، سرد، سفید، دراز $\}$

9. (a) $F = \{2, \frac{5}{3}, \frac{8}{7}, \frac{1}{6}\}$

(b) $F = \{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{7}{8}, -6\}$

(c) $\{\ \}$ یا ϕ

(d) $F = \{4, \frac{10}{3}, \frac{16}{7}, \frac{1}{3}\}$

10. (a) $E = \{3, 4, 5, 6\}$

(b) $F = \{2, 4\}$

$$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad (c)$$

$$H = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\} \qquad (d)$$

$$L = \{4, 6, 8, 10\} \; \cdots \qquad (e)$$

$M = \{\ \}$ یا Φ $\cdots$ (f)

11.(a) $A = \{x \mid x \in N$, x جفت است و $1 < x < 9\}$

(b) $B = \{x \mid x \in N$, x طاق است و $2 < x < 10\}$

(c) $C = \{x \mid x \in N$, x عنصر P است و $1 < x < 12\}$

(d) $D = \{x \mid x = 2^n,\ n \in Z$ و $0 \leqslant n \leqslant 3\}$

(e) $E = \{x \mid \frac{x}{3} \in N,\ 3 \leqslant x \leqslant 15\}$

(f) $F = \{x \mid \frac{x}{2} \in Z\}$ $\cdots$

جوابات تمرینات از صفحه (۳۵ الی ۴۲):

1. ست عوامل ضربی عدد 4 مساویست به: $\cdots$ $\{1, 2, 4\}$ و ست عوامل ضربی عدد 8 مساویست به: $\{1, 2, 4, 8\}$. واضح است که ست اول ست فرعی ست دوم میباشد.

2. چون $A \subset B$ و $B \subset C$ اند، پس $A \subset C$ است و چون از طرف دیگر $C \subset A$ است، پس $A = C$ میباشد. همچنان $A = B$ میگردد.

3. براي حل اين سوال ثبوت بايد نمود كه $S \subset P$ و $P \subset S$ اند .

4.
$$E = \{-1, 2\}$$
$$F = \{0, -1, 2\}$$

5. اگر معادله اول را ضرب x نمائيم ، معادله دوم حاصل ميگردد ، پس هر حل معادله اول در معادله دوم شامل است .

6. چون هر نقطه قطعه خط $\overline{AB}$ بالاي خط $\overleftrightarrow{AB}$ واقع است ، پس :

$$\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$$

7. اگر هردو طرف معادله اول را مربع سازيم ، معادله دوم حاصل ميگردد ، پس هر حل معادله اول حل معادله دوم است . اما 1 معادله دوم را صدق ميكند ومعادله اول را صدق كرده نميتواند ، پس $D \subset C$ نيست .

8. تمام نقاطيكه از O به فاصله 3 سانتي متر ويا كمتر از آن واقع باشد شامل ست Y ميباشد .

9. (a) A ست فرعي N نيست زيراكه $1-$ در N شامل نيست .

(b) A ست فرعي I ميباشد .

10. $N \subset I \subset Q \subset R$ . . . .

11. (a) . . . . $\{2, 3, 5, 7, \cdots, 97\}$

(b) . . . . $\{9, 18, 27, \cdots, 90, 99\}$

(c) . . . . . $\{19, 28, 37, \cdots, 91\}$

12. چون عناصر ست B مساوي به a ، b ، c و d میباشد ، پس واضح است که : $A \subset B$ و $B \subset C$ بوده و $A = B$ میباشد .

13. این دو ست باهم مساوي اند .

14. مثلاً : نام

15. (a) {ت، و، س، ن، و، خ، ر، ف، ا} ، (b) بلی . (c) بلی . (d) نیست .

16. خواننده حل کند .

17. از ستون اول جدول صفحه ۱۳۲ استفاده شود .

18. ست D یك ست پنج عنصره بوده ($D = \{2, 3, 5, 7, 11\}$) و دارای 32 ست فرعی است که خود شما آنرا بنویسید .

19. برای حل این سوال از ست {کلاه ، بالاپوش ، چتري} استفاده شود . مثلاً یك ست فرعی آن {کلاه ، بالاپوش} بوده و نفرمذکور میتواند همراه کلاه و بالاپوش و بدون چتري از خانه خارج شود . هفت ست فرعی دیگر آنرا خود شما ترتیب کنید .

20. (a) چون اقلاً یک قلم سامان را به خرید ارعتز ...

بناً 31 حالت ممکنه موجود شده میتواند. $(32-1)$:

(b) .. $(16-1=15)$ ، (c) $(8-1=7)$

21. (a) .... $\{0,2,4,6,8\}$

(b) .... $\{1,3,5,7\}$

(c) ...

(i) .... $\{2\}$

(ii) .... $\{5,6,7,8\}$

(iii) .... $\{1\}$

(iv) ..... S زیرا صفر مضرب تمام عناصر S میباشد.

(d) (i) $\{5,6,7,8\}$ ، (ii) S ، (iii) $\{0,1,2\}$

(e) $\{0,1\}$ وست هاي فرعی آن.

22. ست هاي جز a ، c ، d و h ست فرعی ست a میباشند.

(j) ... {مستطیل ها} $\subset$ {مربع ها}

23. (a) 128 .

(b) 512 .

جوابات تمرینات ازصفحه (۴۸ الی ۵۰):

1. مکمله Q در R عبارت از ست اعداد غیرنسبتی است.

2. ست مثلث های مختلف الاضلاع.

3. $\{x \mid x \in N$ و $(5<x$ یا $x<1)\}$.

4. ست اعداد تام منفی وصفر.

5. $\{-2,-1,4,5\}$

6. نیم خط $\overrightarrow{AY}$ بدون نقطه A.

7. مثلاً مکمله ست $\{a,b\}$ در ست D مساوی به $\{c\}$ است.

8. $(p-n)$ عنصره.

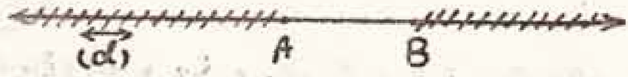
9. مکمله ٔ مکمله ٔ یک ست عبارت ازخودش میباشد پس مکمله مکمله ٔ مکمله ٔ A در S عبارت ازمکمله A در S است.

10. ست حروف کلمه لب و ست حروف کلمه بلبل باهمدیگرمساویست بناً مکمله ست اول درست دوم ست خالی است.

11. ست ناکام های این صنف.

12. مستطیل هائیکه هرچهارضلع آن باهم مساوی نباشد.

.13



.14 (a) $\{T\}$ ، (b) {س، ت}

جوابات تمرینات صفحات (۶۳و۶۴):

.1 $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

.2 $\mathbb{I} \cup \mathbb{N} = \mathbb{I}$

.3 ست های A و B ست های خالی اند.

.4 $A \cup B \cup C = C$

.5 $A \cup B = B$

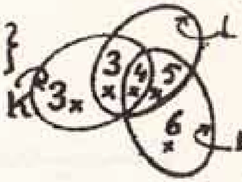
.6 (a) $\overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC}$ ، (b) $\overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AC}$

.7 (a) {ي، د، ز، ل، ق، ت، س، ا} ، (b) مثلاً: قدوس، زد ، ...

جوابات تمرینات صفحات (۷۸و۷۹):

.1 $A \cap B = \{d, e\}$

.2 $K \cap L \cap M = \{4\}$



.3 (a) $\{\ \}$ ، (b) $\{1,3,5\}$ ، (c) $\{2,4\}$ ، (d) $\{2,7\}$ ، (e) $\{\ \}$ ، (f) $\{\ \}$.

.4 (a) به شرطیکه: $A \subset B$ باشد .

(b) بحر شرایط ، (C) به شرطیکه A و B عنصر مشترک نداشته باشند .

.5 $A \cap B = \{4\}$

.6 $\mathbb{I} \cap N = N$

.7 $\{\ \}$ ویا ϕ

.8 (a) $\overline{AB}$ ، (b) ست $\{B\}$ ، (c) $\overline{CD}$ ، (d) $\{B\}$.

جوابات سوالات از صفحه (۹۵ الی ۱۰۰) :

-1 (a) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(b) عین نتیجه جزء a .

(C) هردو ست مساوی اند .

-2 (a) $E \cap (F \cup G) = \{b, d\}$ ، (b) عین نتیجه جزء a .

(C) هردو ست مساوی اند .

3. اول : $A=\{-\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\}$

$B=\{2\}$

$C=\{-2,2\}$

دوم : ست حل معادله $(2x-4)(4x^2-9)$ عبارت

از ست $\{2,-\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\}$ یعنی $A\cup B$ است .

سوم : ست حل همزمان سیستم داده شده عبارت از $\{2\}$ یعنی

$B\cap C$ است .

چهارم : $\{2\}$ ، یا $(B\cup C)\cap(B\cup A)$

4. (a) الجبر : ۱۴ نفر ، هندسه : 15 نفر و مثلثات : ۱۲ نفر .

(b) 26 نفر .

نوت : از دیاگرام ون استفاده نمائید .

5. (a) 28 نفر .

(b) (i) ۱۵ نفر (که درینجا معلمین هرسه مضمون حساب شده است.)

(ii) ۱۱ نفر ، (iii) ۱۵ نفر .

6. (a) چون $Y\subset X\cup Y$ میباشد پس : $(X\cup Y)\cap Y=Y$ میگردد.

(b) چون $X\cap Y\subset Y$ میباشد پس: $(X\cap Y)\cup Y=Y$ میگردد.

(c) $(X\cap Y)\cap Y = X\cap(Y\cap Y) = X\cap Y$

(d) $(X\cup Y)\cup Y = X\cup(Y\cup Y) = X\cup Y$

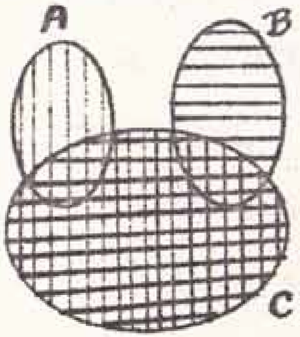
.7 $$R\cup C_E(R\cup S) = R\cup\left(C_E^R\cap C_E^S\right) = \left(R\cup C_E^R\right)\cap\left(R\cup C_E^S\right)$$

$$= E\cap\left(R\cup C_E^S\right)$$
$$= R\cup C_E^S$$

.8 $$\left(C_E^R\cup C_E^S\right)\cup\left(R\cup C_E(R\cup S)\right) = \left(C_E^R\cup C_E^S\right)\cup\left(R\cup C_E^S\right)$$

$$\left(\left(C_E^R\cup R\right)\cup\left(C_E^S\cup C_E^S\right)\right) = E\cup\left(C_E^S\right) = E$$

.9 باید ثبوت شود که هر عنصر $A\cap B$ در $B\cap C$ نیزشامل است اگر x عنصر $A\cap B$ باشد، بااستفاده ازرابطه مفروض دیده میشود که x در $A\cap C$ نیزشامل است. پس x اینکه در B است در C نیزشامل میباشد ودرنتیجه عنصر $B\cap C$ میگردد.



.10 (a) $A\cup C$ توسط خطوط عمودی و $B\cup C$ توسط خطوط افقی در دیاگرام مقابل نشان داده شده است وتقاطع انها عبارت ازتقاطع خطوط افقی وعمودی است.

$$(A\cup C)\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup C$$ (b)
$$= \phi \cup C$$
$$= C$$

. چون $A\cap B=\phi$ است . هرعنصر A عنصر B نبوده ، پس در مکمله
B شامل است .

. اگر x در مکمله B باشد. در خود ست B شامل بوده نمیتواند پس در A نی
شامل شده نمیتواند .(زیرا اگر در ست A موجود باشد حتماً در ست B نی
شامل است) درنتیجه x شامل مکمله A است .

. حل این سوال واضح است .

. دیاگرام 6 .

.(a) $A\cap B=\{$ر، د، ب، ن، ا، و$\}$

(b) $C_u(A\cup B)=\{$ز، ع، ح، خ، ق، ...$\}$

(C) مثلاً : $\{$رود، نان، اردون، باب، ان$\}$

جوابات تمرینات صفحه (۱۰۱) :

نه؛ زیراکه حاصل ضرب a و b در aN و bN شامل است .

نه؛ زیراکه 1 در D_a و در D_b شامل است .

یکی از دو عدد n و $n-1$ حتماً جفت بوده ، حاصل ضرب آن نیز جفت می

4. یکی از سه عدد n ، $n-1$ و $n-2$ جفت ، یکی از آنهـــا قابل تقسیم بر 3 بوده پس حاصل ضرب آنها قابل تقسیم بر 6 است .

جوابات تمرینات صفحات (۱۲۳ و ۱۲۴) :

1. . . $]-\infty , -5]$

2. (a) خود $\mathbb{R}$ است .

3. . . . $C_{\mathbb{R}}(3,5) =]-\infty , 3[\cup]5 , +\infty[$

4. . . . . $]-9 , -1[$

5. . . . . ϕ یا $\{\ \}$

6. . . . . $]-4 , 2] \cup [3 , 4[$

جوابات تمرینات از صفحه (۱۳۴ الی ۱۳٦) :

1. تقاطع ایند و نیمه مستوی یا ست خالی ، یا یك خط مستقیم ، یا ((نیتـــه یا نیمه مستوي میباشد . اتحاد آنها عبارت از : د و نیمه مستوي ، یك نیمه مستوي ، و یا تمام مستوي میباشد .

2. چهارضلعی $ABCD$ عبارت از اتحاد قطعه خط هاي $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ میباشد .

3. بلی ، زیراکه قطعه خط هاي $\overline{AB}$ و $\overline{BA}$ داراي عین نقاط اند .

4. نه، زیرا که یکی آن محدب و دیگر آن مقعر است.

5. مثلاً:

6. نه.

7. درخود سوال واضح است.

8. (a) درخود سوال واضح است. (b) خط مستقیم غیرمحدود و تعداد عناصر آن بی نهایت میباشد.

9. $P_1 \cap P_2$ عبارت است از: یا خط مستقیم، یا ست خالی، و یا خود P_1 و یا P_2.

10. درخود سوال واضح است.

11. (a) تقاطع این نواحی مجاوره عبارت از d_2 میباشد.

(b) اتحاد این نواحی مجاوره عبارت از ناحیه است که بین نیم خط های d_1 و d_2 محصور است.

12. (a) درحالتیکه این دو دایره مساوی باشند.

(b) درصورتیکه یک دسک داخل دیگرش واقع گردد.

(C) درحالتیکه ایند مثلث باهم مساوي باشند .

13. کامل نیست مایدکه دو بدوي آن انجام هاي مشترک داشته باشند .

14. (a) و (b) درصورتیکه هر دوي شان باهم مساوي باشند .

15. (a) و (b) درصورتیکه هر دو قطعه خط بالاي یک مستقیم واقع بوده و داراي نقاط مشترک باشند .

بعضی آثار دیگر نویسنده:

- سلسلهٔ ریاضیات معاصر: خودآموز ریاضی در چهار قسمت: روابط دوگانه‌ای، عملیات دوگانه‌ای، گروه‌ها، وساحه‌ها.

اثر مذکور حایز جایزهٔ مطبوعاتی اولین سالگرد نظام مترقی جمهوری گردیده است.
در مرکز فزیک نظری بین‌المللی، تریست، ایتالیا، در می 1973 طبع شده.

- سلسلهٔ ریاضیات معاصر: مبادی هندسهٔ معاصر وانتقادات بر سیستم اقلیدسی، آمادهٔ چاپ است.

- سلسلهٔ ریاضیات معاصر: مبادی هندسهٔ عالی
کتاب درسی صنف سوم پوهنحی تعلیم و تربیه سابق، طبع شعبهٔ نشرات موسسهٔ تعلیم و تربیه.

- ریاضیات معاصر: هندسهٔ تحویلی در مستوی اقلیدسی
آمادهٔ طبع است. ترجمه است.

- ریاضیات معاصر: روابط و توابع، برای اولین بار در ادبیات فارسی نگاشته شده، آمادهٔ طبع است.

- ریاضیات معاصر: ست‌ها و استعمال آنها
توسط: ایتان ژیل و محمد امان نادری
از دستگاه نشراتی لیسهٔ عالی استقلال