سلسلهٔ ریاضیات معاصر

(۴)

جلد اوّل، بخش دوم

هندسهٔ تحویلی

در مستوی اقلیدسی

نگارش : پوهنمل محمّد امان نادری

Italy تریئست ، ایتالیا Trieste

October ، 1974 ، اکتوبر

میزان ۱۳۵۳

شناسنامه

به سلسلهٔ ریاضیات معاصر

(٤)

جلد اول، بخش دوم

هندسهٔ تحویله در مستوی اقلیدسی

نگارش پوهنمل محمد امان نادری

تریست ایتالیا Trieste, Italy

اکتوبر 1974 مسیحی

میزان ۱۳۵۳ خورشیدی

نشر الکتریکی: بنیاد شاهمامه

www.shahmama.com

جولای ۲۰۱٦، هالند

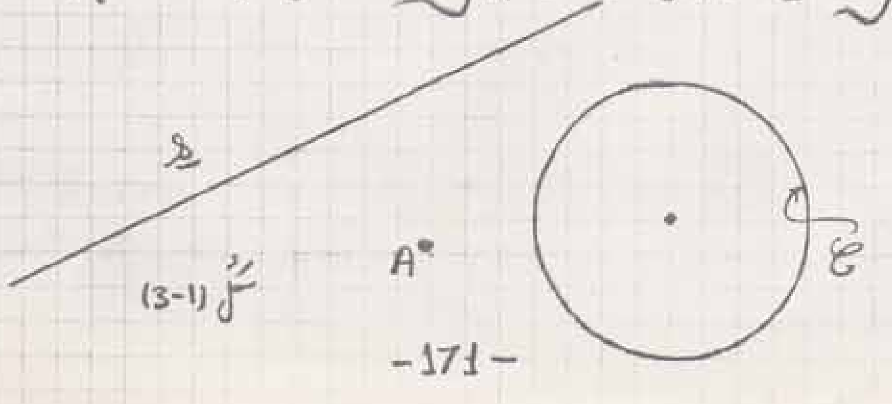
فصل سوم

دوران ها و انعکاسات گلایدی

Rotations And Glide Reflections

3-1. دورانها Rotations :

ما دیدیم که محصل ترکیب دو انعکاسات خطی حول (با اطراف) دو خط متقاطع عبارت از یک نیم دور Half Turn است، و در درصورتیکه محورهای انعکاس Axis of Reflection باهم موازی باشند درینصورت محصل ترکیب حول آنها عبارت از یک انتقال Translation میباشد. درین مبحث ما ترکیب انعکاسات خطی را حول دو محوریکه نه باهم عمود ونه باهم موازی باشند مطالعه مینمائیم. بعداً خواهید دید که آشنائی باهم همچو ترکیب انعکاسات خطی درحل تعداد زیاد مسایل مانند ذیل کمک خواهد کرد: اگر یک خط ل، یک دایره ج و یک نقطه A طبق شکل (3-1) مفروض بوده باشد، ترسیم یک مربع ABCD که رأس B آن بالای خط ل و رأس D آن بالای دایره ج واقع گردد، مطلوب است.

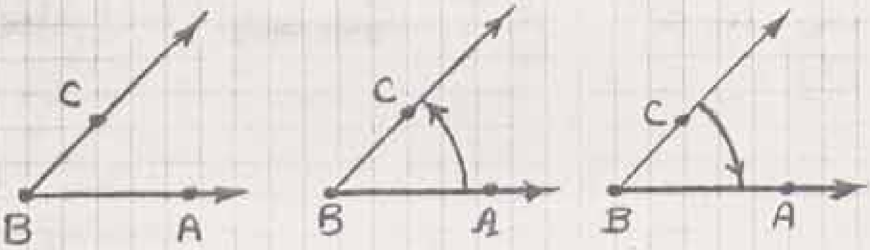


شکل (3-1)

برای هموار کردن راه مطالعهٔ ترکیب اینگونه چنین ضرورت است تا آن اصطلاحات را که بزوایا شروع بکار میگیرند معرفی نماییم. بخاطر خواهید داشت که زاویه عبارت از اتحاد Union دو شعاع که مشترک الخط نبوده و دارای یک نقطهٔ مشترک باشند. اکنون ما به معرفی زاویهٔ موجه Directed Angle که تعریف آن موازی به تعریف قطعه خط مستقیم موجه Directed Segment است اقدام مینماییم:

تعریف :-

یک زاویهٔ موجه directed angle زاویه است که یک شعاع ضلع آغاز (مبدأ) initial side و دیگر شعاع ضلع انجام Terminal side آنرا تشکیل دهند.

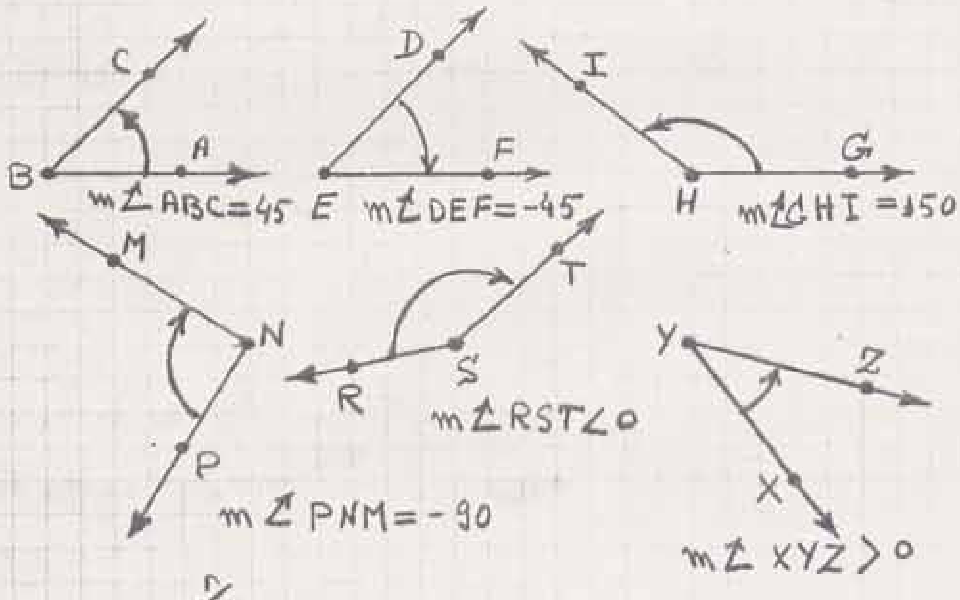


∠ABC ∡ABC ∡CBA شکل (3-2)

برای افاده مفکوره که ∠ABC یک زاویهٔ موجه است طوریکه ضلع آغاز initial side آنرا شعاع $\overrightarrow{BA}$ و ضلع انجام Terminal Side آنرا شعاع $\overrightarrow{BC}$ تشکیل میدهند از سمبول ∡ABC را استعمال میکنیم. بهمین قسم سمبول و علامهٔ ∡CBA را برای ارائه زاویهٔ موجه که ضلع آغاز آنرا شعاع $\overrightarrow{BC}$ وضلع انجام آنرا شعاع $\overrightarrow{BA}$ تشکیل دهند بکار می بریم.

قبلاً درباره اندازه وسعت زوایا تذکر داده شد که برای اندازه وسعت هر زاویه ABC اعداد حقیقی بین صفر (0) و 180 موجود بود

و این اندازه و سمت زاویه ABC را به $m\angle ABC$ نشان دادیم.
حال مایل داریم اندازه گیری زوایای موجه را نیز مانند سابق مرعی الاجرا داشته و ضمناً قرارداد های ذیل را قبولدار شویم:
ما میگوییم که: $m\angle ABC = m\angle ABC$ مثبت در صورتیکه جهت ترتیب دوران سه گانه (B,A,C) خلاف دوران ساعت باشد.
و همچنان ما میگوییم که: $m\angle ABC = -(m\angle ABC)$ مثبت در صورتیکه جهت ترتیب دوران سه گانه (B,A,C) هم جهت دوران ساعت باشد.



شکل (3-3)

توجه دارید که برای هر زاویه $\angle ABC$ ما داریم که:

$$\angle ABC \cong \angle CBA$$

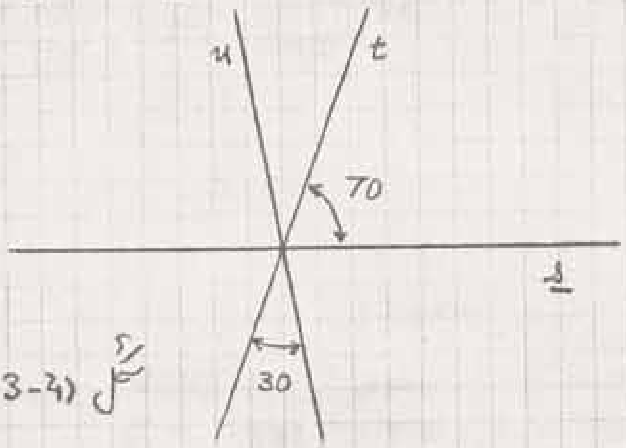
و به همین قسم:

$$m\angle ABC = m\angle CBA \,.$$

حالانکه برای هر زاویه موجه ABC ما داریم که:

ما داریم که: $m\angle ABC = -(m\angle CBA)$.

زیرا جهت ترتیب دوران شعاع‌های (BAC) همیشه خلاف جهت ترتیب دوران شعاع‌ها (BCA) است.

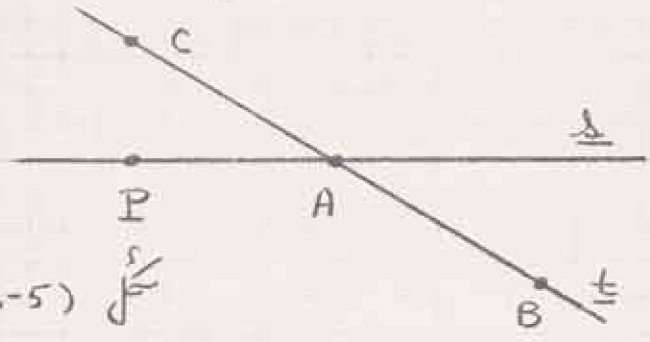


شکل (3-4)

میدانیم که از تقاطع دو خط غیر متشابه دو جوره زوایای متقابل الرأس vertical angles پیدا میشوند، طوریکه یک جوره ازین زوایای متقابل الرأس حاده در حالیکه هر یک از جوره دیگر آن منفرجه میباشد. بعد ازین زمانیکه راجع باندازهٔ زاویه بین دو خط صحبت نمائیم هدف ما عبارت از اندازهٔ زاویه حاده acute بین دو خط است. پس بنابر این در شکل (3-4) فوق اندازهٔ زاویه بین دو خط s و t عبارت از 70 بوده و در حالیکه اندازهٔ زاویه بین دو خط s و u عبارت از 80 میباشد.

برای آسانی کار بهتر است که زاویه بین دو خط را با شعاع یک قرارداد توضیح نمائیم. برای ایضاح این مطلب دو خط s و t را که در نقطهٔ A یکدیگر را قطع میکنند و P یک نقطهٔ خط s باشد در نظر میگیریم. اگر دو نقطهٔ B و C روی خط t انتخاب گردند طوریکه نقطهٔ A در بین نقاط B و C واقع شود. در صورت اگر زاویهٔ $\angle PAB$ یک زاویه حاده acute باشد، پس ما

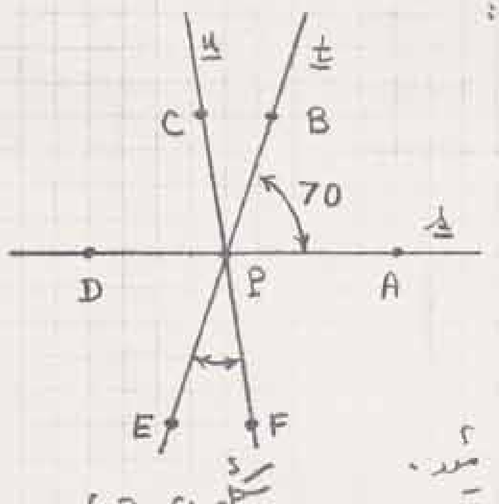
ما میگوییم که زاویه موجهٔ PAB عبارت از زاویه از خط s به t است ؛
در آنکه زاویه از s به t عبارت از زاویهٔ $\angle PAC$ میباشد.



شکل (3-5)

چون اندازه درجهٔ زاویه PAB در شکل (3-5) فرق 150 است
پس اندازه زاویه از خط s به t عبارت است از :
$m\angle PAC = -30$ بوده ،
حالانکه اندازه زاویه از خط t به s عبارت از :
$m\angle CPA = 30$. میباشد.

همچنان در شکل (3-6) اندازه های زوایای مربوط بین خطوط s ، t و u طبق ذیل تعیین شده میتواند :



شکل (3-6)

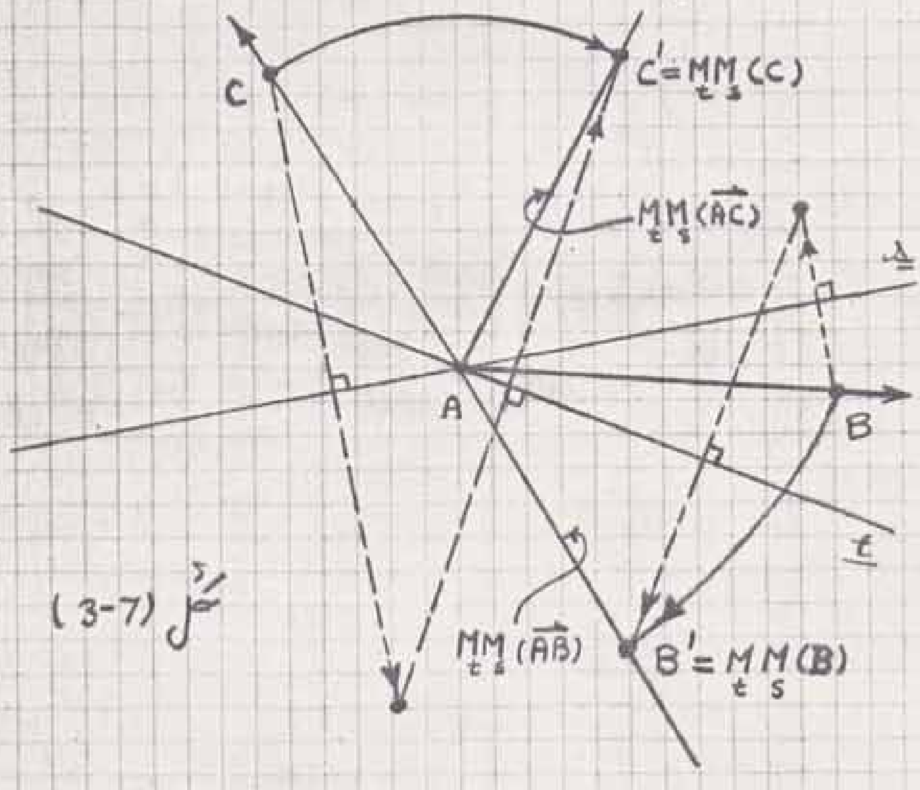
(1). از s به t :
$m\angle APB = 70$.

(2). از s به u :
$m\angle APF = -80$.

(3). از u به t :
$m\angle CPB = -30$ میشود.

بنابرین قرار داد اندازهٔ یک زاویه از یک خط به خط دیگر میتواند یکی از قیمت‌ها بین 90- و 90+ را اخذ کند، و میتوانیم بگوییم که وسعت زاویهٔ بین دو خط بالضروره دارای یک اندازهٔ که بین 0 و 90 قرار دارد میباشد.

حال بقدر کافی معلومات مقدماتی داریم تا بشناخت آن محصل ترکیب دو انعکاس خطی را بصورت عموم مطالعه نموده بتوانیم. اگر دیده‌ایم حقیقت مهمی که درین نوع ترکیب نهفته است اینست: هر شعاعی که از مبدا تقاطع محورات انعکاس نشأت میگیرد با یک اندازهٔ دوچند زاویهٔ موجه دوران میکند. این واقعیت در شکل (7-2) ذیلاً توضیح یافته و چنانچه دیده میشود که $m\angle CAC' = m\angle BAB'$.



شکل (3-7)

برای بیان دقیق دلایل مذکورهٔ فوق قضیهٔ ذیل را اقامه میکنیم :

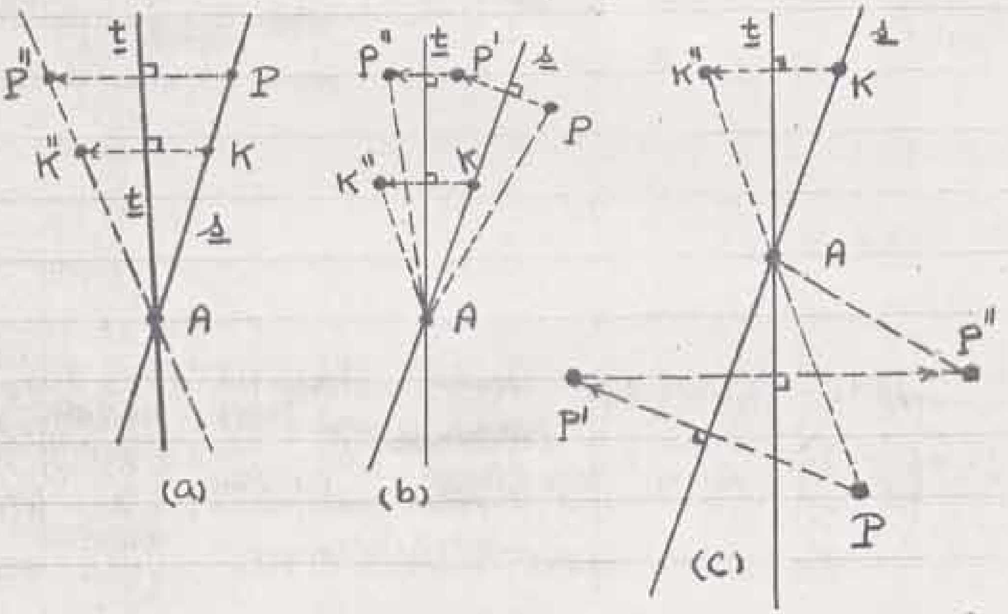
قضیه Theorem . 3-1:

فرضاً s و t دو خط متقاطع غیر عمود بوده که یکدیگر را در نقطهٔ A قطع نموده اند ، اگر P و Q هردو نقطهٔ دیگر غیر از A باشند. پس درینصورت

$m\angle PAP'' = m\angle QAQ''$ میشود ،

درحالیکه: $P'' = M_t M_s(P)$ ،

و $Q'' = M_t M_s(Q)$ میباشند.



ثبوت : Proof

برای حل این قضیه باید یک نقطهٔ K را بغیر A بالای خط s انتخاب نموده و اگر P کدام نقطهٔ دیگر باشد درینصورت نشان باید داد که: $m\angle PAP'' = m\angle KAK''$ میشود ، . . .

نشان باید داد که: $m\angle PAP''=m\angle KAK''$ میشود،

در حالیکه:

$K''=M_tM_s(K)$ میباشد.

در حالت اول فرض شده P مانند K روی خط s قرار داشته باشد، مانند شکل (a). ما داریم:

$$A''=M_tM_s(A)=A.$$

از آنکه M_tM_s یک ایزومتری isometry است، پس نقاط P، K'' و A'' همه شان روی یک خط که از نقطهٔ A میگذرد قرار دارند. پس درینصورت:

$m\angle PAP''=m\angle KAK''$ میشود.

حال اگر $P\notin s$ باشد: از آنکه ایزومتری حافظ اندازه و سمت زوایاست، پس درینصورت ما نوشته میتوانیم:

$$m\angle PAK=m\angle P''AK''.$$

علاوه بر آن مثلثهای (A,P,K) و (A,P'',K'') دارای عین ترتیب دوران اند، (زیرا محصلهٔ ترکیب دو انعکاس خطی یک ایزومتری است). و از تطبیق این حقیقت با تطابق زوایای موجبه ما میتوانیم بنویسیم:

$$m\angle PAK=m\angle P''AK''.$$

اگر موقعیت P چنان باشد که در شکل (3-8-b) آراسته شده درینصورت ملاحظه میشود که:

$$m\angle PAP''=m\angle PAK+m\angle KAP''$$

درینصورت بملاحظه برشد که:

$$m\angle PAP'' = m\angle PAK + m\angle KAP''$$

داریم:

$$m\angle KAK'' = m\angle KAP'' + m\angle P''AK''.$$

باز تعویض کردن نتیجه ذیل حاصل شده میتواند:

$$m\angle PAP'' = m\angle KAK''.$$

اگر موقعیت نقطه P مثل ثانی باشد که در شکل (3-8.c) نشان داده شده درینصورت اثبات قضیه باندکی تفاوت مانند فوق صورت گرفته میتواند وما آنرا بحیث تمرین واگذار میشویم.

پس برای هر نقطه P که بغیر از A باشد ما داریم که:

$$m\angle PAP'' = m\angle KAK''$$

وبهمین قسم برای هر نقطه Q که بغیر از A باشد ما میتوانیم بنویسیم که:

$$m\angle QAQ'' = m\angle KAK''$$

بنابران $m\angle QAQ'' = m\angle PAP''$ میشود.

Q.E.D.

پس ما دیدیم که نتیجه تاثیر تحویل M_tM_s آنست که هر نقطه را باندازهٔ عین وشعت یک زاویه موجه بحول (یا اطراف) یک نقطه ثابت A دور میدهد. درنتیجه گفته میتوانیم که M_tM_s عبارت از

عبارت از عضو آن دسته (صنف) مپینگ ها که بنام دوران ها Rotations معروف اند، میباشد.

تعریف :

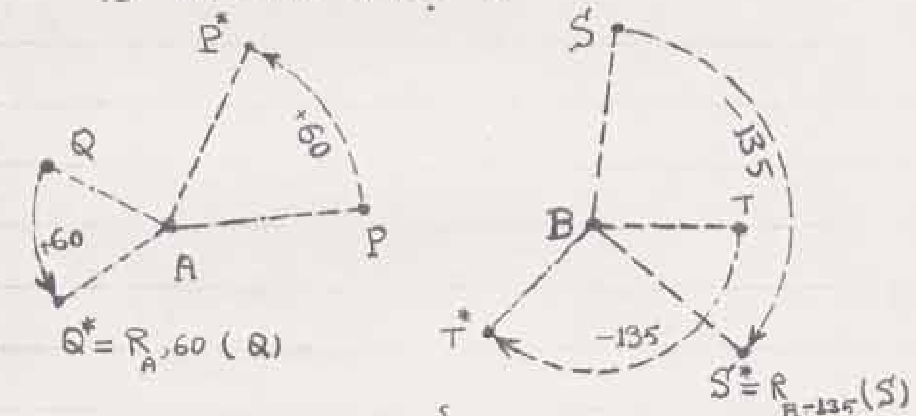
اگر A یک نقطهٔ معروض و θ عددی بین -180 و $+180$ باشد، پس یک دوران حول نقطهٔ A باندازهٔ زاویه θ عبارت از یک مپنگ است که اگر به $R_{A,\theta}$ ارائه شود، درینصورت $R_{A,\theta}$ برای تمام نقاط مستوی قرار ذیل تعریف میشود :

(1) . $R_{A,\theta}(A) = A$ ،

(2) . برای نقطهٔ $P \neq A$ ،

$R_{A,\theta}(P) = P^*$ میشود، درحالیکه :

$m\angle PAP^* = \theta$ بوده و $AP^* = AP$ میباشد .



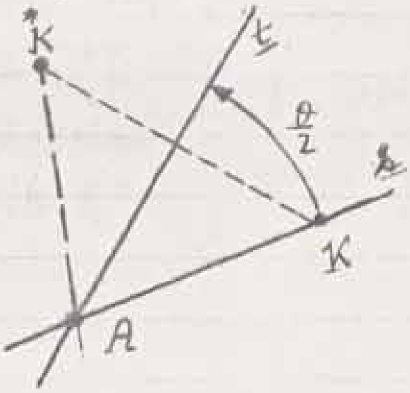
شکل (3-9)

اگر توجه شود از تعریف فوق واضح است که تصویر هر نقطهٔ P مستوی تحت مپنگ $R_{A,\theta}$ بالای دایره ای واقع میشود که طول شعاع آن باندازهٔ AP بوده و مرکز آن نقطهٔ A است. علاوه برآن زاویه دوران بین -180 و $+180$ واقع بوده، طوریکه اگر جهت آن مطابق

دوران ساعت باشد درینصورت $\theta<0$ بوده ، واگر خلاف جهت دوران ساعت باشد درینصورت $\theta>0$ میباشد. تعریف فوق درباره اینکه هر دوران محض یک تحول نبوده بلکه یک ایزومتری isometry نیز میباشد هم قابل تطبیق است. بدون اینکه ازنتیجه دتطبیق این تعریف استفاده نمایم، ما میتوانیم که حقیقت فوق را ازنتیجه قضیه ذیل که ادعا میکند: « هر دوران بحیث محصول ترکیب دو انعکاس خطی افاده شده میتواند.» به بسیار سهولت تثبیت نمایم.

قضیه : Theorem . 3-2

اگر s و t دو خط غیرمتوازی که یکدیگر را در نقطه A قطع میکنند بوده ، درصورتیکه اندازه زاویه از s به t باندازه $\frac{\theta}{2}$ باشد ، پس درینصورت: $R_{A,\theta} = M_t M_s$ میشود .



شکل (3-10)

ثبوت Proof

فرضاً P کدام نقطه ای بجز از A باشد. اگر ما کدام نقطه K را بغیر از A روی خط s انتخاب نمایم درینصورت :

اگر $K^* = M_t M_s(K)$ مدنظر گرفته شود پس نتیجه میشود
که t ناصف الزاویه $\angle KAK^*$ میباشد. از شکل اندازهٔ
زاویه از s به t عبارت از $\frac{\theta}{2}$ است؛ و این بر شاند
که:

$$m\angle KAK^* = 2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \theta$$
میشود.

حال اگر $P^* = M_t M_s(P)$ است، پس بااساس قضیه 3-1،
نتیجه میشود که:

$$m\angle PAP^* = m\angle KAK^*$$ میشود.

پس از اینجا: $$m\angle PAP^* = \theta$$ نتیجه میشود.

چون $A^* = M_s M_t(A) = A$ است، و از شکل $M_t M_s$ یک ایزومتری است
پس در هرصورت ما داریم:

$$P^*A^* = PA \;,$$
$$\text{وهم چنان}\quad P^*A = PA \;.$$

حال اگر به تعریف دوران Rotation مراجعه شود
دیده میشود که ترکیب $M_t M_s$ تمام شرائط دوران حول نقطهٔ
A را باندازهٔ زاویه θ می پذیرد. و ازین استنتاج
میشود که:

$$M_t M_s = R_{A,\theta} \quad \text{میباشد.}$$

Q. E. D.

یکی از محل تطبیق این قضیه اینست که محصل ترکیب دو انعکاس خطی حول خطوط متقاطع که با هم عمود نباشند عبارت از یک دوران Rotation است که حول نقطهٔ تقاطع آنها صورت میگیرد.

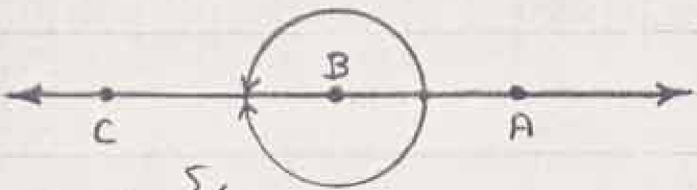
اکنون اگر مفکورهٔ زاویه را بسط و انکشاف دهیم طوریکه اتحاد دو شعاع مخالف را نیز یک زاویه (اگر بخاطر داشته باشید قبلاً ما زاویه را اتحاد دو شعاع تعریف نموده بودیم اما قیودی وضع نموده بودیم و آن این بود که اضلاع آن مشترک الخط نباشند. اکنون این قیود را حذف مینمائیم.) تعریف نمائیم؛ درینصورت اگر نقاط: A، B و C مشترک الخط باشند طوریکه نقطهٔ B بین نقاط A و C موقعیت داشته باشد، پس درینحالت اتحاد union هر دو شعاع $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ زاویهٔ ABC را بوجود می آورند.

یعنی: $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = \angle ABC$ شود.

زاویه فوق در هندسه بنام زاویهٔ مستقیمه straight angle یاد شده و دارای اندازهٔ 180 میباشد. زمانیکه ما به زاویهٔ مستقیمهٔ موجه straight directed angle سروکار داشته باشیم درینصورت با درنظرداشت شکل (3-11):

خواه $m\angle ABC = +180$

ویا $m\angle ABC = -180$ آنرا افاده میکنیم.



شکل (3-11)

باشاش این توسعه تعریف زاویه حال میتوانیم که راجع بدوران های حول زوایای که اندازه شعت آن خوره 180+ ویا 180- باشد نیز صحبت نمائیم . وما میدانیم که این نوع دوران های عبارت از نیم دورها بوده پس گفته میتوانیم که نیم دورها Half turns شت های جزئی (فرعی) Subset های ست دوران های میباشند و باین اساس اکنون تصویر ترکیبی هر دو انعکاس خطی تکمیل میگردد .

نتیجه مهمه : Corollary -3-2.A

محصل ترکیب دو انعکاس خطی یا یک دوران Rotation ویا یک انتقال Translation میباشد است .

محل تطبیق دیگر قضیه 3-2 درینجا است که : هر دوران ~~میتواند~~ بدو انعکاس خطی به طریقه های زیاد تحلیل و تجزیه شده میتواند .

نتیجه مهمه : Corollary .3-2.B

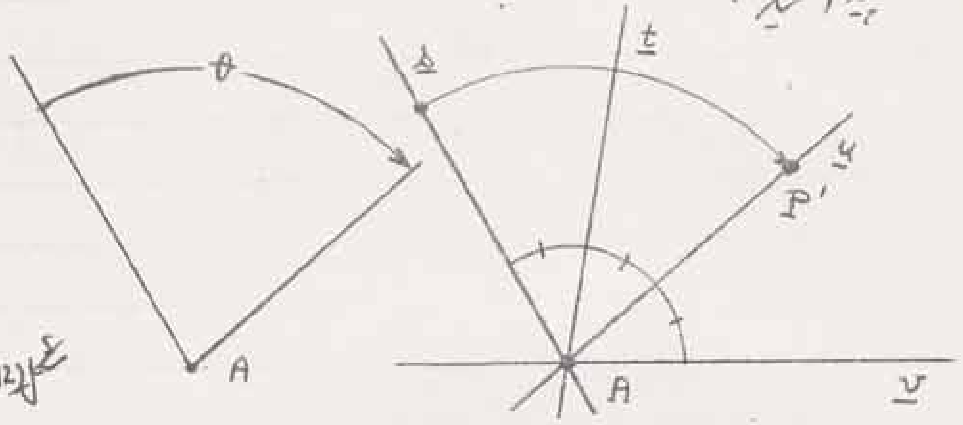
هر دوران یک ایزومتری هم جهت مستقیم است .

مثال ، Example :

اگر $R_{A,\theta}$ عبارت از یک دورانی که P را بر P' سپ میکند ، باشد ؛ [مانند شکل (3-12)] . یک جوره خطوط ~~دریافت~~ کنید که بحیث محورات انعکاس استعمال شده توانسته

و مختصر ترکیب انعکاسات مربوطه اش عبارت از دوران مفروض باشد، پیدا کنید.

(3-12) شکل



حل : Solution

(1). اگر $\underline{s} = \overleftrightarrow{AP}$ و $\underline{t}$ ناصف زاویه $\angle PAP'$ انتخاب شوند پس اندازه زاویه (اندازهٔ زاویه‌دار) از $\underline{s}$ به $\underline{t}$ عبارت از $\frac{\theta}{2}$ میشود. چون: $\underline{s} \cap \underline{t} = \{A\}$ بوده، با اساس قضیه (3-2) پس درینصورت: $R_{A,\theta} = M_{\underline{t}} M_{\underline{s}}$ میشود.

(2). اگر $\underline{u} = \overleftrightarrow{AP'}$ و $\underline{v}$ خطی از A گذشته طوریکه اندازه زاویه از $\underline{v}$ به $\underline{u}$ (اندازه زاویه‌دار زاویه از $\underline{v}$ به $\underline{u}$) $\frac{\theta}{2}$ گردد، درینصورت نیز با تطبیق قضیه (3-2) نتیجه میشود که:

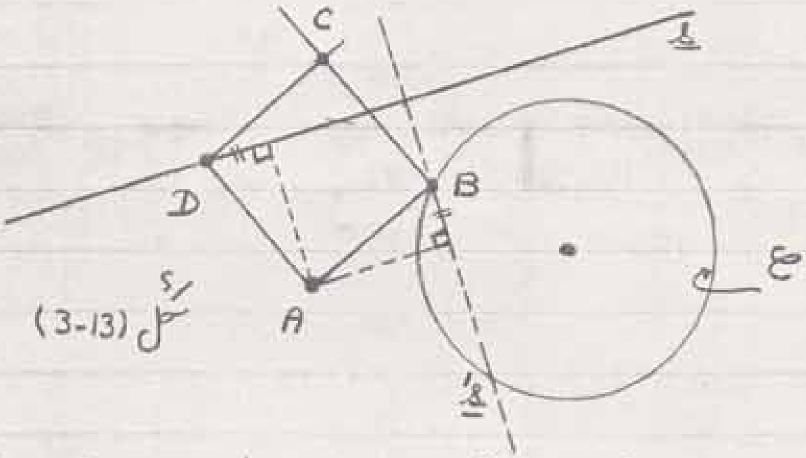
$$R_{A,\theta} = M_{\underline{v}} M_{\underline{u}}.$$

Q.E.D.

حال این مبحث را توسط حل همان مسأله‌ای که در پاراگراف اول آن تذکر داده شده ختم مینمائیم.

بخاطر خواهید داشت که در قسمت اول این فصل مسأله ای را که مطلب آن ترسیم یک مربعی بود که یک راس آن بالای یک خط مفروض و راس دیگر آن بالای یک دایره مفروض ~~واقع شده~~ و راس سومی آن بالای یک نقطه A مفروض واقع شود، تذکر نمودیم. اینک در ذیل بحل مسأله مذکور اقدام مینمائیم:

حل : Solution :



شکل (3-13)

اگر $R_{A,90}(l) = l'$ بوده و B یکی از نقاط تقاطع l' و ع باشد، پس اگر D نشان تصویر B یعنی:

$$D = R_{A,90}(B)$$ در نظر گرفته شود؛

پس درینصورت $AB = AD$ بوده و $m\angle BAD = 90$ میشود. حال اگر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ علی الترتیب به نقاط B و D عمود ترسیم شوند چهارضلعی ABCD که حاصل میشود مربع مطلوب است.

Q.E.D

Problem Set. 3-1: تمرینات

1. نقاط مشخص و متفاوت A و P مفروض اند، ترسیمات ذیل را انجام دهید:

(a). $R_{A,90}(P)$.

(b). $R_{A,-45}(P)$.

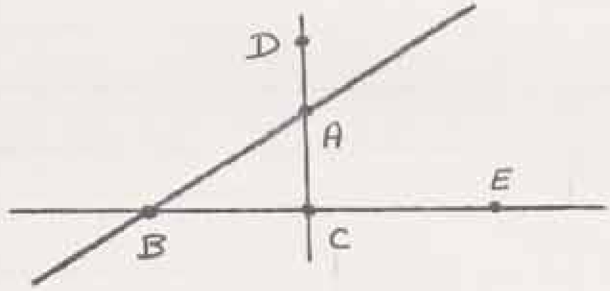
(c). $R_{A,150}(P)$.

(d). Q را حاصل کنید طوریکه: $R_{A,30}(Q)=P$ شود.

2. اگر در شکل ذیل $m\angle ABC=40$ و $m\angle BAD=120$ باشد هر یک از زاویه های ذیل را تعیین کنید:

(a). $m\angle DAB$ ؛ $m\angle BAC$ و $m\angle ECA$.

(b). اندازهٔ های زاویه وی: از $\overleftrightarrow{AB}$ به $\overleftrightarrow{BC}$ ؛ از $\overleftrightarrow{AC}$ به $\overleftrightarrow{BC}$ ؛ از $\overleftrightarrow{AB}$ به $\overleftrightarrow{AC}$ را .



3. نقاط متمایز و متفاوت A و P داده شده، اگر P^* عبارت از تصویر P تحت محصور حرکت از ترکیب های ذیل باشد P^* را رسم نموده و $\angle PAP^*$ را در هر یکی از حالات ذیل تعیین کنید:

(a). $R_{A,30}R_{A,90}$.

(b). $R_{A,-60}R_{A,120}$.

(c). $R_{A,90} \, R_{A,135}$.　　(d). $R_{A,-150} \, R_{A,-120}$.

4. شکل ساده حرکت از افاده های ذیل را بنویسید:

(a). $R_{A,60} \, R_{A,30}$.　　(b). $R_{A,-90} \, R_{A,120}$.

(c). $R_{A,90} \, R_{A,135}$.　　(d). $R_{A,-45} \, R_{A,-60}$.

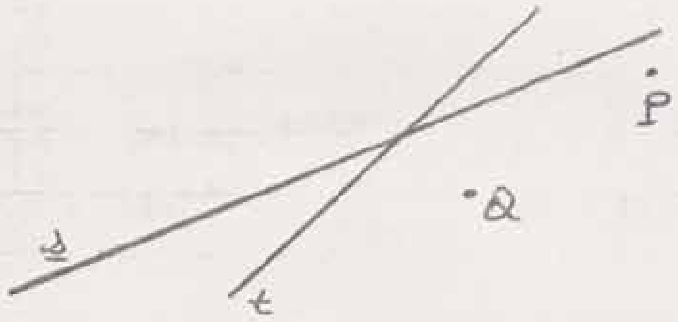
(e). $R_{A,-150} \, R_{A,-120}$.　　(f). $R_{A,60} \, H_A$.

5. خطوط s و t و نقاط P و Q طبق شکل ذیل مفروض اند:

(a). P^* را رسم نمائید طوریکه: $P^* = M_s M_t (P)$ باشد.

(b). P'' را رسم کنید طوریکه: $P'' = M_t M_s (P)$ باشد.

(c). Q' را رسم نمائید طوریکه: $Q' = M_s M_t (Q)$ باشد.

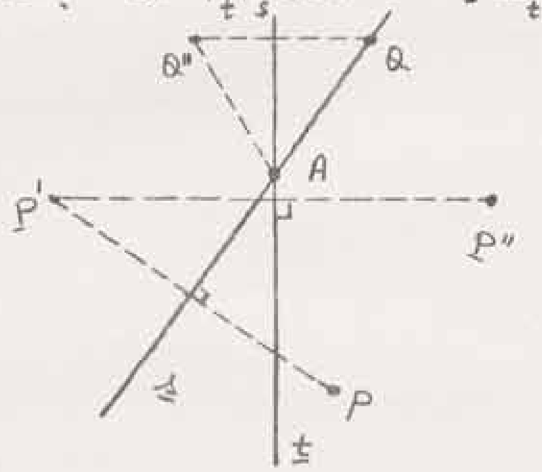


6. نقطه A مفروض است دو خط s و t را رسم نمائید طوریکه:

$M_s M_t = R_{A,-60}$ گردد

۷. اگر A ، B و B' طوریکه: $B' = R_{A,\theta}(B)$ باشد؛ خطوط s و t را رسم کنید طوریکه $M_s M_t = R_{A,\theta}$ شود.

۸. اثبات قضیه 3-1 را با نشان دادن حقیقت ذیل ا: بسته اگر s ، t ، P و Q طوریکه در شکل ذیل ارائه شده معروض با ثابت کنید که: $m\angle PAP'' = m\angle QAQ''$ میشود؛ درحالیکه:- $P'' = M_t M_s(P)$ و $Q'' = M_t M_s(Q)$ باشد.



۹. اگر O مبدأ و نقطه $A=(1,0)$ باشد، افاده‌های ذیل را تعیین کنید:

(a). $R_{O,60}(A)$ (b). $R_{O,120}(A)$

(c). $R_{O,45}(A)$ (d). $R_{O,-135}(A)$

۱۰. اگر $A=(0,0)$ و $s=\{(x,y): x=0\}$ و $t=\{(x,y): y=x\}$ باشد، موقعیت افاده‌های آتی را معین کنید:

(a) . تصاویر هرکدام از نقاط ذیل را تحت M_tM_s بدست آرید :

(i) . $B(1,0)$ ، (ii) . $C(0,3)$ ،

(iii) . $D(2,-2)$ ، (iv) . $E(4,2)$ را .

(b) . اگر P کدام نقطه $P(x,y)$ باشد مختصات $M_tM_s(P)$ را معلوم کنید.

(c) . ترکیب M_tM_s را بشکل یک تحویل ساده توضیح دارید.

11 . دوران حول نقطه $A(0,0)$ را که نقطه $B(1,0)$ را به onto نقطه $B'(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ مپ میکند تشخیص کنید.

12 . برای هرکدام یک از دوران ذیل موازی، معادلات یک جوره خطوط l_s و l_t را بنویسید طوریکه ترکیب M_tM_s شامل به دوران رابطه گردد. وفرض نمائید که O مبدأ و $A=(1,3)$ باشد.

(a) . $R_{O,-90}$. (b) . $R_{O,180}$.

(c) . $R_{O,120}$. (d) . $R_{A,90}$.

(e) . $R_{A,-90}$. (f) . $R_{A,-30}$.

13 . با استفاده از استحصال قضیه 3-2 هرکدام از قضایای آتی الذکر را ثابت کنید :

(a) . برای هر دوران : $(R_{A,\theta})^{-1} = R_{A,\theta}$ میشود.

(b) . محصله ترکیب دو دوران حول یک نقطه داده شده A یا عینیت Identity است و یا یک دوران حول A میباشد.

14 . اگر A عبارت از مبدأ و $T=R_{A,90}$ باشد مختصات هرکدام از نقاط ذیل مطلوب است :

(a) . $T(B)$ درصورتیکه $B=(2,0)$ باشد.

(b) . $T(C)$ درصورتیکه $C=(3,-1)$ باشد.

(c) ، $T(P)$ اگر $P=(x,y)$ باشد.

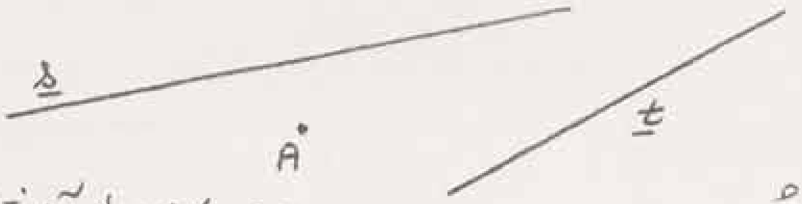
(d) ، $T(D)$ در صورتیکه $D=(4,-1)$ باشد.

15. اگر A مبدا و $\underline{s}=\{(x,y): y=2x-3\}$ باشد
معادله: $\underline{s}'=R_{A,90}(\underline{s})$ را بنویسید.

16. اگر $\mathscr{C}$ یک دایره به شعاع 2 و مرکز $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$ و
$B=(0,0)$ مفروض باشند معادلهٔ دایره:
$\mathscr{C}'=R_{B,45}(\mathscr{C})$ را بنویسید.

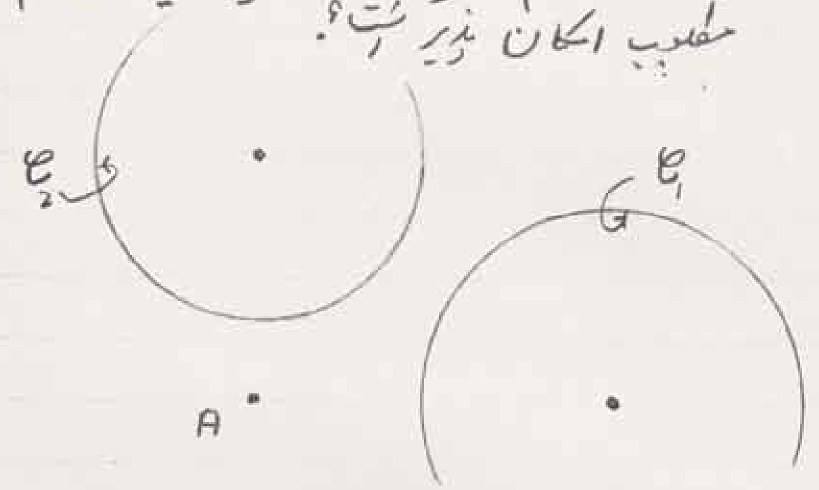
17. خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ و نقطهٔ A طبق ذیل مفروض‌اند؛ مثلث متساوی الساقین (قائم الزاویه) ΔABC را رسم نمائید طوریکه راس قائم آن به نقطهٔ A واقع گردیده و دو راس دیگر آن بالای خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ واقع شوند.

کمک: $\underline{s}'=R_{A,90}(\underline{s})$ را رسم کنید. اگر $\{K\}=\underline{s}'\cap\underline{t}$ باشد، نقطهٔ تصویر K را تحت $R_{A,90}$ بدست آورید.

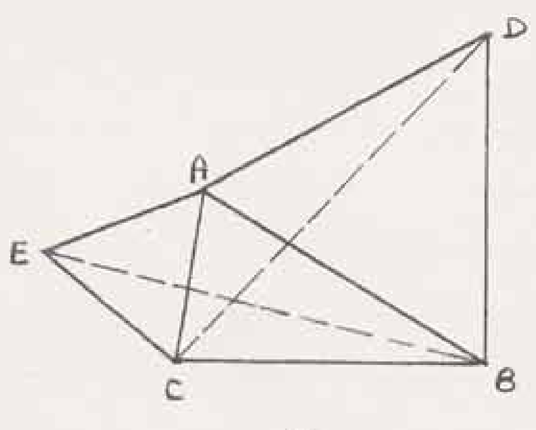


18. مثلث متساوی الاضلاع ΔABC را رسم کنید که یک راس آن به نقطهٔ A مفروض و دو راس دیگر آن بالای خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ مفروض واقع باشند.

19. دو دایره C_1 و C_2 با نقطهٔ A طبق شکل مفروض اند. مثلث متساوی الاضلاعی که یک راس آن بالای نقطهٔ A دیگر راس آن بالای دایره C_1 و راس سوم آن بالای C_2 واقع باشد رسم نمایید. آیا همیشه رسم مثلث مطلوب امکان پذیر است؟



20. مثلث $\triangle ABC$ ، مثلث متساوی الاضلاع $\triangle ABD$ با مثلث متساوی الاضلاع $\triangle ACE$ طبق شکل پایان داده شده اند. با استفاده از استعمال یک دوران مناسب حول نقطهٔ A ثابت کنید که $DC = BE$ است.

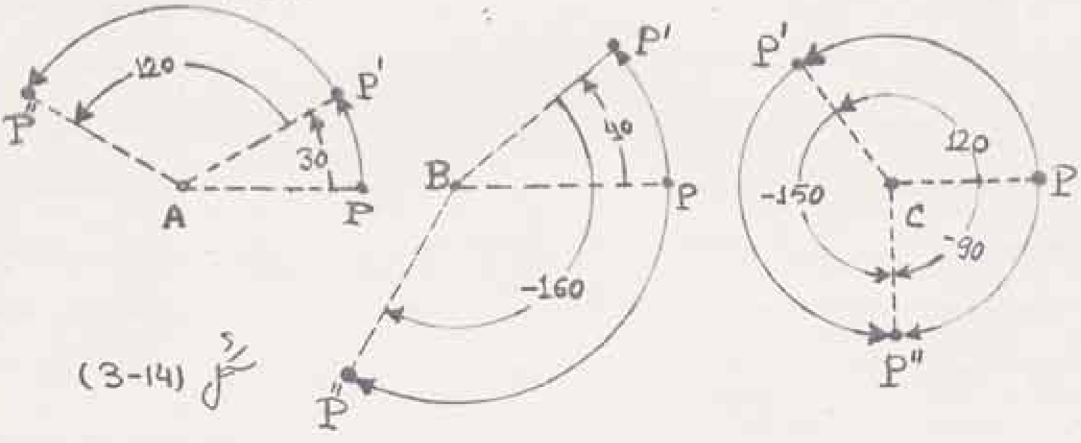


3-2. محصول ترکیب دورانها

Products Of Rotations

در یک مسأله تمرینات گذشته از شما سوال شده بود اگر: «نشان دهید که محصول ترکیب دو دوران دو خط متقاطع غیر عمود یا یک دوران حول همان نقطهٔ مشترک آنها است و یا آنکه یک مپینگ عینیت Identity mappings است».

برای آسان ساختن موضوع بهتر است که مپنگ عینیت را نه تنها محض به حیث انتقال Translation دانسته بلکه آنرا بحیث یکدوران - یکدوران حول یک نقطه باندازهٔ یک زاویه که اندازهٔ آن صفر (0) است نیز تصور نمائیم. پس درینصورت گفته میتوانیم که ثبت کلمه دوران که تحت عملیه ترکیب بسته است. زاویهٔ ~~مربوط~~ محصول ترکیب دوران را مستقیماً از زوایای دوران مرکبه های اولی مپنگ ها حاصل میتوان نمود. بطور مثال، از اشکال ذیل ملاحظه میشود که:



شکل (3-14)

$$R_{A,120}\,R_{A,30}=R_{A,150}$$

$$R_{B,-160}\,R_{B,40}=R_{B,-120}$$

و هم چنان :

$$R_{C,150}\,R_{C,120}=R_{C,-90}$$

اگر set دوران ها Rotations حول یک نقطهٔ معینه ،
با set توابع تحت عملیه ترکیب مقایسه شوند دیده میشود که عناصر دو set
مذکور دارای یک نوع ساختمان جبری میباشند. و همین
ساختمان در قسمت های مختلف ریاضیات تکراراً مشاهده میرسد.
قبل از اینکه این ساختمان الجبری را معرفی داریم میخواهیم که دو set را
تحت دو عملیه موازیاً مطالعه نمائیم.

اگر $\mathcal{S}$ عبارت از set که عناصر آنرا دوران های حول یک
نقطهٔ A تشکیل داده بوده و در حالیکه:
$\mathcal{S}=\{R_{A,\theta}: -180\le\theta\le 180\}$ ثابت بوده باشد؛

اکنون $\mathcal{S}$ set را تحت عملیه ترکیب با set اعداد تام Integers
تحت عملیه جمع مورد بررسی قرار میدهیم. برای اینکه این دو set بین
اندو set بصورت واضح مفهوم گردد موقتاً عملیه ترکیب دوران را توسط
علامهٔ "★" ارائه نموده و بجای اینکه ترکیب دو مپنگ L و T را با
"TL" ارائه کنیم آنرا به "T★L" نشان میدهیم.
اکنون توجه نمائید:

(1). ما داریم: $20+30=50$ ؛
در حالیکه: $R_{A,20}\star R_{A,30}=R_{A,50}$ میشود.

(2). باید در نظر داشت پیروی از خاصیت انجمنی (اشتراکی) مپنگ ها تحت عملیه ترکیب
و اعداد تام تحت عملیه جمع؛
ما داریم: $(20+30)+10=20+(30+10)=60$
$(R_{A,20}\star R_{A,30})\star R_{A,10}=R_{A,20}\star(R_{A,30}\star R_{A,10})=R_{A,60}$

(3) . ست اعداد تام بنابر عملیه جمع دارای عنصر عینیت Ident.
که عبارت از صفر ، 0 ، میباشد ، یعنی برای هر
عدد تام a رابطه ذیل همیشه حقیقت دارد:

$$a+0=0+a=a \quad .$$

بهمین قسم در ست $\mathcal{S}$ یک دوران I طوریکه :
$I=R_{A,0}$ ثبت موجود شده میتواند ، طوریکه برای
هر دوران $R_{A,\theta}\in\mathcal{S}$ رابطه ذیل همیشه دارای حقیقت باشد:

$$R_{A,\theta}\star R_{A,0}=R_{A,0}\star R_{A,\theta}=R_{A,\theta} \quad .$$

و بالاخره :

(4) . هر یک عنصر هر دو ست اعداد تام و ست $\mathcal{S}$ دارای یک عنصر
تضاد و یا معکوس میباشد . چه برای هر عنصر a
$a\in I$ (I ست اعداد تام را ارائه میکند .)
یک عنصر $-a\in I$ موجود شده میتواند طوریکه :
رابطه : $a+(-a)=0$ همیشه دارای حقیقت باشد .
بهمین قسم در ست $\mathcal{S}$ برای هر عنصر (دوران) $R_{A,\theta}$
$R_{A,\theta}\in\mathcal{S}$ یک عنصر $R_{A,-\theta}\in\mathcal{S}$ موجود شده میتواند طوریکه :
همیشه رابطه : $R_{A,\theta}\star R_{A,-\theta}=R_{A,0}$ دارای حقیقت باشد .

بطور مثال :

$$60+(-60)=0 \quad ,$$

$$R_{A,60}\star R_{A,-60}=R_{A,0} \quad .$$

چنانچه که دیدیم بر شکل 60 و 60- تضاد یکدیگر (معکوس یکدیگر) را در ست I تحت عملیه جمع تشکیل داده اند
بهمین قسم $R_{A,60}$ و $R_{A,-60}$ تضاد و یا معکوس یکدیگر را
تحت عملیه ترکیب دوران در ست $\mathcal{S}$ بوجود آورده اند .

اعتراض باید نمود که روابط بین این دو set :
I و $\mathcal{S}$ بنابر دو عملیات مربوطهٔ اینها : $+$ و $\star$ بشکل موازی نیست؛
بطور مثال:

$$R_{A,100} \star R_{A,140} = R_{A,-120}$$ بوده،

حالانکه $100 + 140 = 240$ میشود.
ولی باهم میدانیم که $R_{A,-120} \in \mathcal{S}$ بوده و بهمین قسم :
$240 \in I$ میباشد.

هر شی (set ای) که تحت یک عملیه دارای هر چهار صفات و مشخصات که در بالا ذکر شد باشد میگویند که یک ساختمان الجبری را بوجود آورده که بنام گروه Group یاد میشود.

تعریف :
یک set $\mathcal{S}$ تحت یک عملیه $\star$ یک گروه Group را تشکیل میدهد درصورتیکه :
(1) . set $\mathcal{S}$ تحت عملیه $\star$ بسته باشد.
(2) . $\star$ خاصیت اتحادی Associativity را در $\mathcal{S}$ پیروی کند، یعنی برای هر a ، b و c شامل $\mathcal{S}$ همیشه رابطه: $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ موجود باشد.
(3) . یک عنصر عینیت «i» در $\mathcal{S}$ موجود گردد، طوریکه برای عنصر $a \in \mathcal{S}$ رابطه ذیل همیشه موجود شود:
$$a \star i = i \star a = a$$.
(4) . برای هر عنصر $a \in \mathcal{S}$ یک عنصر معکوس (تقابل) آن $x \in \mathcal{S}$ موجود باشد طوریکه
$a \star x = x \star a = i$ گردد.

Set دوران‌ها حول یک نقطهٔ داده شده تحت عملیهٔ ترکیب یک گروه Group را تشکیل میدهند؛ و به همین Set اعداد تام تحت عملیهٔ جمع یک گروه Group را بوجود می آورند.
Set انتقالات Translations بنابر عملیهٔ ترکیب یک مثال خوب دیگری گروه Group است، از طرف دیگر Set اعداد طبیعی تحت عملیهٔ ضرب یک گروه Group را تشکیل داده نمیتوانند. آیا میدانید که چرا؟
واضح است Set اعداد طبیعی بنابر عملیهٔ ضرب بسته بوده، و از خاصیت انجمنی پیروی کرده، و دارای عنصر عینیت ضرب یعنی (یک) بوده، ولی بجز از یک دیگر هیچکدام عنصر Set اعداد طبیعی دارای عنصر معکوس نمیباشند.

حال ترکیب دو دوران را حول دو نقطهٔ متفاوت مطالعه مینمائیم. بالفرض R_{A,θ_1} و R_{B,θ_2} دو دوران را ارائه نمایند. کلید جستجو جواب را در بینها تجزیه کردن هر کدام از دوران‌های مفروض را به دو مرکبهٔ انعکاسات خطی آنها (با شاملش قضیه 3-2) تشکیل میدهد. که برای رسیدن این هدف ضرورت است تا دو خط مناسب را که بحیث محورات انعکاس اشتمال شده بتوانند تعیین نمائیم. برای حاصل کردن انعکاسات خطی مورد نظر ما خطی را که از هر دو مرکز دوران عبور میکند بحیث یک محور انعکاس خطی مشترک اشتمال مینمائیم. واضح است که این خط عبارت از $\overleftrightarrow{AB}$ بوده و بحیث انعکاس مشترک که هر دو دوران اشتمال شده میتواند.

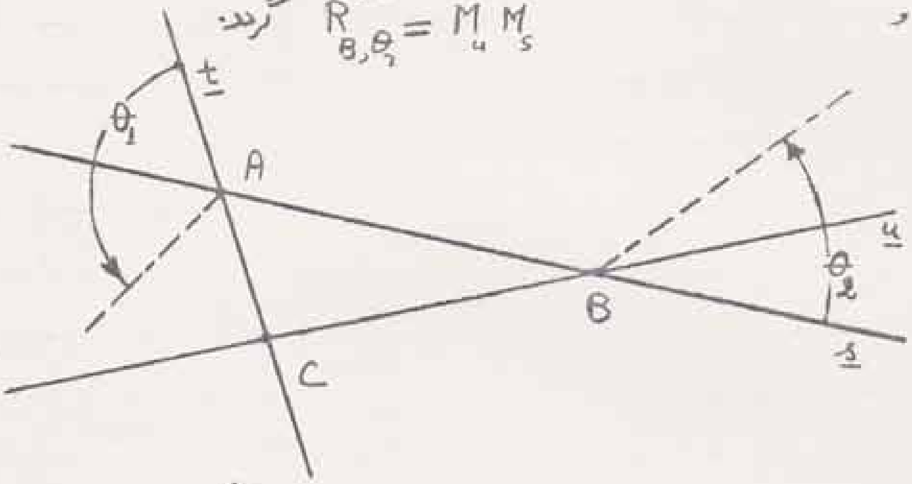
اگر $\overleftrightarrow{AB} = \underline{s}$ قرار دهیم پس دو خط $\underline{u}$ و $\underline{t}$ موجود شده میتواند طوریکه:

$$R_{A,\theta_1} = M_s M_t$$

و

$$R_{B,\theta_2} = M_u M_s$$

گردد.



شکل (3-15)

پس

$$\begin{aligned} R_{B,\theta_2} R_{A,\theta_1} &= (M_u M_s)(M_s M_t) \\ &= M_u (M_s M_s) M_t \\ &= M_u (I) M_t \\ &= M_u M_t \end{aligned}$$

پس اگر $\underline{u}$ و $\underline{t}$ موازی باشند واضح است که در خصوصیت محصل ترکیب عبارت از یک انتقال میباشد. در صورتیکه $\underline{u}$ و $\underline{t}$ یکدیگر در نقطهٔ مانند C قطع کنند، در خصوصیت قضیهٔ 3-2 محصل ترکیب هر دو دوران را یک دوران به حول نقطهٔ C تضمین میکند. ثبوت فوق ~~بشانی تغیر شکل~~ برای پذیرفتن شرطی که اگر هر دو دوران دارای عین مرکز باشند آیا شانی تغیر شکل دوران شده میتواند. درین حالت هر خطی که از مرکز مشترک آنها عبور میکند بحیث خط $\underline{s}$ فوق استعمال شده میتواند.

با شناختن توضیحات فوق قضیه ذیل را اقامه میتوان کرد:

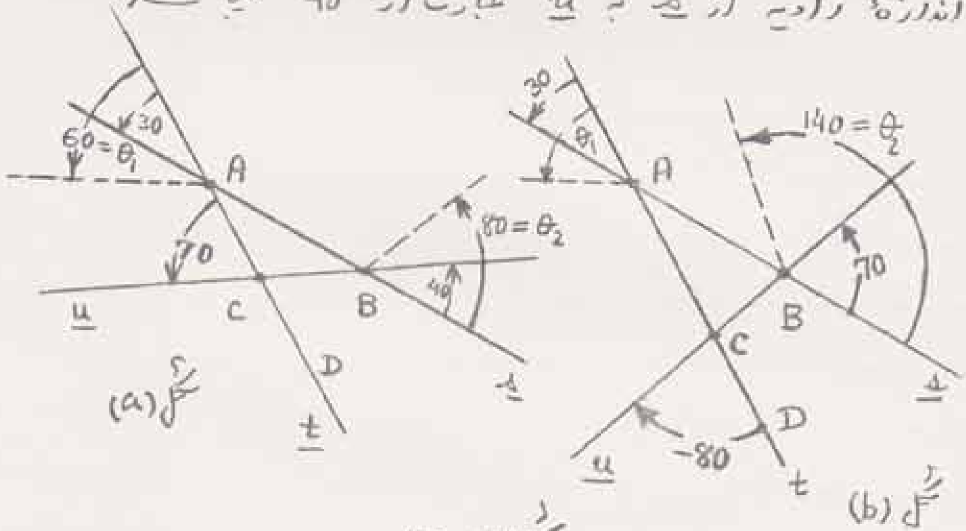
قضیه 3-3 : Theorem

محصله ترکیب دو دوران یک دوران میباشد ویا یک انتقال Translation.

در ترکیب دو دوران یعنی R_{A,θ_1} و R_{B,θ_2} که دوران $R_{C,\theta}$ بحیث محصله هردو بوجود آید دیده میشود که زاویه دوران محصله ترکیب یعنی θ به زوایای θ_1 و θ_2 ارتباط دارد.

بطور مثال:

در شکل (3-16,a) اگر $\theta_1 = 60$ و $\theta_2 = 80$ باشد ازین نتیجه میشود که اندازه زاویه از $\underline{t}$ به $\underline{s}$ 30 بوده و اندازه زاویه از $\underline{s}$ به $\underline{u}$ عبارت از 40 میباشد.



شکل (3-16)

ازین استنتاج میشود که $m\angle ACB = 110$ و $m\angle DCB = 70$ میشود.

چون $m\angle DCB = +70$ است، از این نتیجه میشود که اندازه زاویه
از $\underline{t}$ به $\underline{u}$ عبارت از 70 است.
بنابران ما داریم:

$$\theta = 2(70) = 140$$

توجه نمائید که:

$$140 = 60 + 80 = \theta_1 + \theta_2 \,.$$

مگر باید در نظر داشت شکل (3.16-b) که درینحالت
بعوض 80 اندازه $\theta_2 = 140$ است، درینصورت شکل ساکن
تغیر میخورد.

پس درینحالت ما داریم که: $m\angle ACB = 80$
و $m\angle DCB = 100$.

چون $m\angle ACB = -80$ است
درین دلالت میکند که: اندازهٔ زاویه از $\underline{t}$ به $\underline{u}$ عبارت از
-80 بوده پس $\theta_2 = -160$ میشود.
درینحالت ما داریم:

$$-160 = 200 - 360$$

$$= (\theta_1 + \theta_2) - 360 \,.$$ میشود.

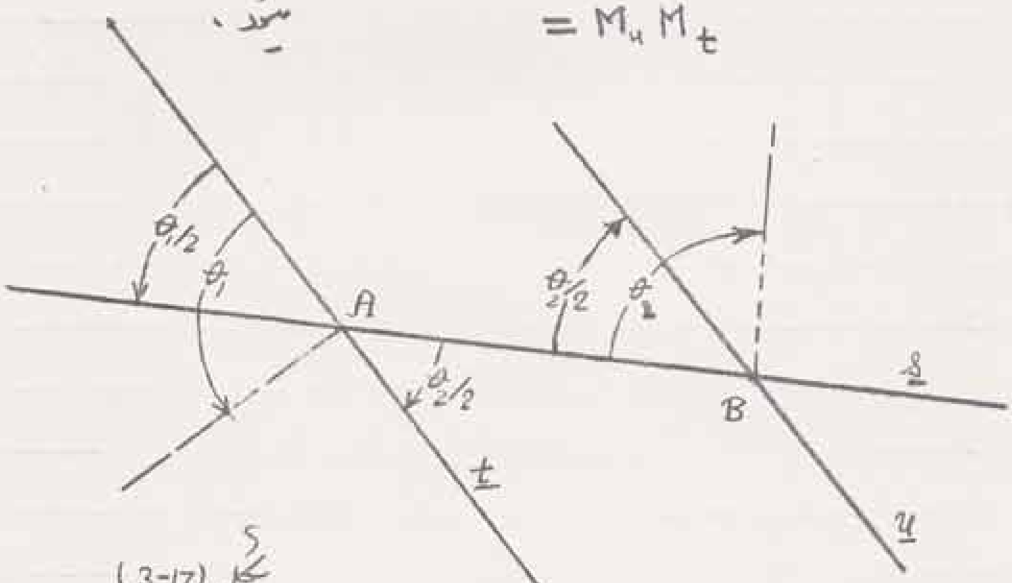
درصورتیکه بخواهیم بدانیم که چه وقت از جمله ترکیب دو دوران
یک انتقال Transl حاصل میشود، درینصورت ما حالتی را جستجو مینمائیم
که $\theta_1 + \theta_2 = 0$ گردد. چنانچه در شکل (3-17) این موضوع
بوضاحت دیده میشود.

درینصورت $\theta_1 = -\theta_2$ بوده که اندازه زاویه از $\underline{t}$ به $\underline{s}$ عبارت از $\theta_1/2$ ویا معادل آن $-\theta_2/2$ میشود. چون اندازهٔ زاویه از $\underline{s}$ به $\underline{t}$ عبارت از $-(-\theta_2/2)$ ویا بصورت ساده $\theta_2/2$ است؛ درحالیکه اندازه زاویه از $\underline{s}$ به $\underline{u}$ هم $\theta_2/2$ است؛ ازین استنتاج میشود که $\underline{t}$ موازی است به $\underline{u}$.

بنابران از $\theta_1 + \theta_2 = 0$ نتیجه میشود که محصل $R_{B,\theta_2} R_{A,\theta_1}$ یک انتقال است. زیرا:

$$\begin{aligned} R_{B,\theta_2} R_{A,\theta_1} &= (M_u M_s)(M_s M_t) \\ &= M_u (M_s M_s) M_t \\ &= M_u (I) M_t \\ &= M_u M_t \end{aligned}$$

میشود.



شکل (3-17)

تبصره: برای عمومیت بخشیدن نتایج امثال فوق الذکر باید که حالات مختلف مدنظر گرفته شود حالانکه بررسی تمام این حالات مختلفه یک موضوع طویل وخسته کن میباشد. بنابران ترجیح داده میشود که بصورت ساده وبسیط قانونی که مارا به تعیین کردن زاویه دوران ترکیب

زاویه دوران محصول ترکیب از جمع زوایای دوران مرکبه‌ای (ترکیبات) آن قرار ذیل بیان کنیم:

اگر محصول ترکیب جمینگ R_{A,θ_1} و R_{B,θ_2} عبارت از $R_{C,\theta} = R_{B,\theta_2} R_{A,\theta_1}$ باشد؛ پس درنتیجه:

(1). اگر $0 < |\theta_1+\theta_2| \leq 180$ باشد، پس $\theta = \theta_1+\theta_2$ میشود.

(2). اگر $\theta_1+\theta_2 > 180$ باشد، پس $\theta = (\theta_1+\theta_2)-360$ میشود.

(3). اگر $\theta_1+\theta_2 < 180$ باشد، پس $\theta = (\theta_1+\theta_2)+360$ میشود.

(4). اگر $\theta_1+\theta_2 = 0$ باشد، پس محصول ترکیب انتقال میشود.

مثال Example:

زاویه دوران ترکیب جمینگ $R_{A,120}$ $R_{B,-100}$ را معلوم کنید.

حل: Solution:

داریم

$$-120+(-100) = -220$$

چون $-220 < -180$

درینصورت با استفاده از قسمت سوم (3) قانون بیان شده فوق ما نوشته میتوانیم که:

$$\theta = -220+360$$
$$= 140$$

لذا $\theta = 140$.

Q.E.D.

Problem Set. 3-2: تمرینات

1. کدام از ده های ذیل یک گروه Group را تشکیل میدهند:

(a). set اعداد مثبت تمام تحت عملیه ضرب.

(b). set تمام اعداد غیرمنفی تحت عملیه جمع.

(c). set $A=\{-1,0,1\}$ تحت عملیه ضرب.

(d). set تمام دوران ها تحت عملیه ترکیب.

(e). set دوران $B=\{R_{A,0}, R_{A,120}, R_{A,-120}\}$ تحت عملیه ترکیب.

(f). set $C=\{a,b\}$ بنابر عملیه "*" که در جدول ذیل توضیح یافته است:

*	a	b
a	a	b
b	b	a

2. نقاط A، B و P طبق شکل ذیل داده شده اند:

(a). اگر $T=R_{B,30}R_{A,90}$ باشد نقاط $A'=T(A)$ و $P'=T(P)$ را رسم کنید.

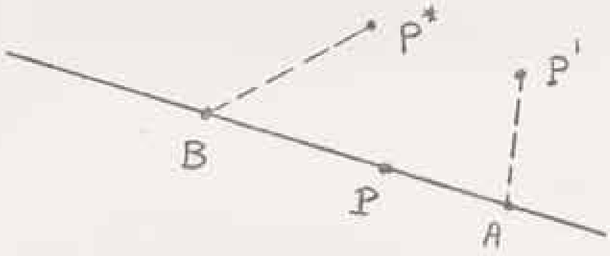
(b). مرکز دوران T یعنی نقطه C را تعیین کنید.

(c). $m\angle PCP'$ را تعیین کنید.

3. نقاط: A، B، P و Q طبق شکل آتی موجود اند:

اگر $T=R_{A,135}R_{B,-45}$ باشد؛ $P'=T(P)$ و $Q'=T(Q)$ را در شکل مقابل و مرکز دوران T را تعیین کنید.

4. اگر A، B، P، P' و P^* نقاط مفروض طوریکه در شکل ذیل ارائه شده اند باشد: اگر $P'=R_{A,\theta_1}(P)$ و $P^*=R_{B,\theta_2}(P)$ باشد، C را تعیین کنید، طوریکه: $R_{C,\theta}=R_{B,\theta_2}R_{A,\theta_1}$ گردد.



5. اگر $R_{C,\theta}=R_{B,\theta_2}R_{A,\theta_1}$ باشد، θ را تعیین کنید درصورتیکه:

(a) $\theta_1=30$ و $\theta_2=135$.

(b) $\theta_1=-90$ و $\theta_2=160$.

(c) $\theta_1=150$ و $\theta_2=120$.

(d) $\theta_1=-100$ و $\theta_2=-130$ باشد.

6. نقاط A، B و P و $AB=4$ مفروض اند:

(a) در صورتیکه $T=R_{B,60}R_{A,-60}$ باشد، $P'=T(P)$ را رسم کنید.

(b) اگر Q کدام نقطهٔ دیگر بوده $Q'=T(Q)$ باشد فاصلهٔ QQ' را تعیین کنید.

7. هر یک از متساوات ذیل را برای θ حل نموده در صورتیکه $-180\le\theta\le180$ باشد:

(a) $R_{A,30}\,R_{B,\theta}=R_{C,80}$. (b) $R_{D,150}\,R_{E,\theta}=R_{F,-60}$.

(c) $(R_{G,\theta})^3=R_{A,-120}$. (d) $(R_{A,\theta})^4=I$.

(e) $R_{B,\theta}\,R_{C,-40}=R_{D,160}$. (f) $R_{A,60}\,R_{B,60}\,R_{C,-90}=R_{D,45}$.

8. صحیح یا غلط بودن هر یک از افاده‌های ذیل را معلوم کنید در صورتیکه $A\neq B$ است.

(a) $R_{A,\theta}\,R_{A,\phi}=R_{A,\phi}\,R_{A,\theta}$.

(b) $R_{A,\theta}\,R_{B,\phi}=R_{B,\phi}\,R_{A,\theta}$.

(c) اگر $\theta=-\phi$ باشد پس $R_{A,\theta}\,R_{B,\phi}$ دارای یک نقطهٔ ثابت نمی‌باشد.

(d) اگر $\theta=-\phi$ باشد، پس $R_{A,\theta}\,R_{A,\phi}$ دارای یک نقطهٔ ثابت نمی‌باشد.

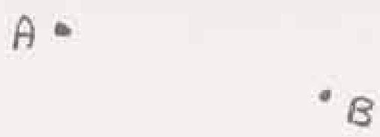
(e) اگر $\theta+\phi=180$ باشد، پس $(R_{A,\theta}\,R_{B,\phi})^{-1}=R_{A,\theta}\,R_{B,\phi}$ می‌شود.

9. درصورتیکه $R_{A,\theta}$ یک دوران و S_{AB} یک انتقال باشد،
ثابت کنید که: $R_{A,\theta}S_{AB}$ یک دوران است.
زاویه دوران ترکیب به θ چه رابطه دارد؟

10. اگر $A(2,0)$ و $O(0,0)$ نقاط مفروض بوده و $T=H_A R_{O,90}$ باشد:
(a). پس T چطور یک میپنگ میباشد؟
(b). مختصات تمام نقاط (محل هندسی) K را تعیین کنید
درصورتیکه $T(K)=K$ گردد.

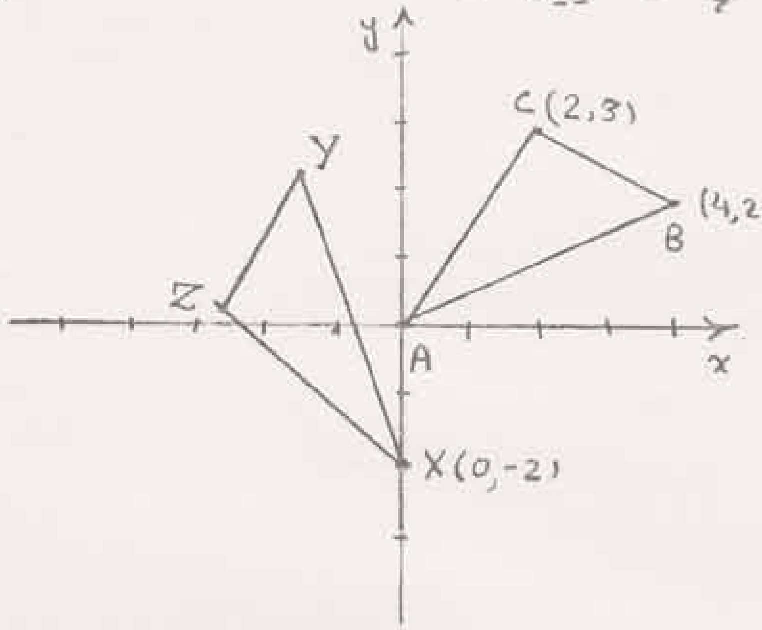
11. بافرض $T=R_{A,60}R_{B,-60}$ بوده، $A=(0,0)$ و $B=(4,0)$ باشد:
(a). پس T چه نوع یک میپنگ mapping میباشد؟
(b). اگر P یک نقطه بوده و $P^*=T(P)$ باشد
فاصله PP^* را بدست آرید.

12. نقاط A و B داده شده تمام نقاط P را رسم کنید
طوریکه $R_{A,60}(P)=R_{B,90}(P)$ گردد.



13. اگر $O(0,0)$، $A(1,0)$ و $B(6,0)$ مفروض باشند:
(a). معادلات t و s را بنویسید طوریکه: $M_t M_s=R_{O,90}$ گردد.
(b). اگر $R_{A,\theta}(B)=(4,4)$ شود معادلات u و v را بنویسید طوریکه:
$M_v M_u=R_{A,\theta}$ شود.
(c). مختصات مرکز دوران $R_{A,\theta}R_{O,90}$ را تعیین کنید.

14. مثلثات $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ با شرط $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{XY}$ مفروض‌اند:
یک ایزومتری isometry که $\triangle ABC$ به $\triangle XYZ$
مپ کند تعیین کرده و مختصات Z را حاصل کنید.

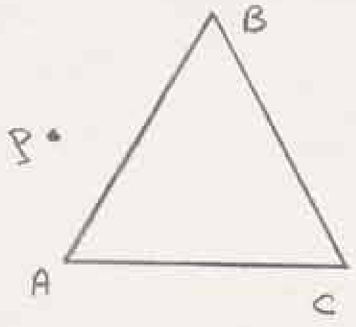


15. اگر $\triangle ABC$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع و P یک نقطه داده شده و
$T = R_{C,120} R_{B,120} R_{A,120}$ مفروض باشند:

(a). $A' = T(A)$ را رسم کنید.

(b). $P' = T(P)$ را رسم کنید.

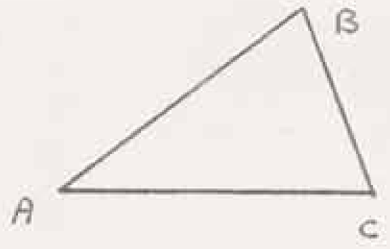
(c). T را توضیح کنید.



16. اگر $\triangle ABC$ یک مثلث که $m\angle CAB = a/2$ ، $m\angle ABC = b/2$ ، و
$m\angle BCA = c/2$ و $T = R_{C,c} R_{B,b} R_{A,a}$ باشد

(a). $A' = T(A)$ را رسم و plot کنید.

(b). ثابت کنید که T یک تطبیق عینیت Identity است.



17*. نقاط A، B، C، D و D مفروض اند طوریکه $AB = CD$ است.
نشان دهید که یک دوران T موجود شده میتواند طوریکه:
$T(\overline{AB}) = \overline{CD}$ گردیده و $T(P)$ را رسم کنید.

18. اگر S عبارت از ست تمام قطعه‌مستقیم‌های موجه و $\oplus$ یک عملیه که طبق ذیل تعریف میشود: اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ دو مستقیم موجه بوده باشد $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$ میشود در حالیکه E عبارت از نقطه است که رابطهٔ $\overrightarrow{BE} \doteq \overrightarrow{CD}$ را تضمین میکند. باشند:

(a). آیا $\oplus$ یک عملیهٔ تبدیلی commutative در S شده میتواند؟

(b). آیا $\oplus$ یک عملیهٔ انجمنی Associative در S شده میتواند؟

(c). آیا S تحت عملیهٔ $\oplus$ یک Group را تشکیل کرده میتواند؟ جواب خود را استدلال کنید.

3-3 . انعکاسات گلیدی (گلایدی)

Glide Reflections

تا حال به سه نوع ایزومتری ها isometries را که عبارت اند از: انعکاسات خطی Line Reflections ، دوران ها Rotations و انتقالات Translations مطالعه نمودیم. ضمناً حقایق ذیل را بحیث قضایا ثبت نمودیم:

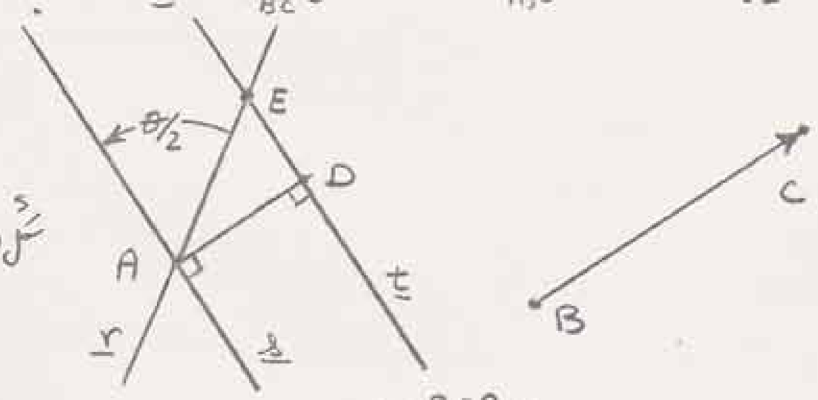
(1). محصلهٔ ترکیب دو انتقال یک انتقال است.

(2). محصلهٔ ترکیب دو انعکاس خطی یا یک انتقال و یا یک دوران میباشد.

(3). محصلهٔ ترکیب دو دوران یا یک انتقال و یا یک دوران میباشد.

ولی راجع باینکه از ترکیب دیگر جا کردن هر جوره از صنوف سه گانهٔ فوق چه نوع یک میپنگ بوجود می آید کدام صحبت بعمل نیامده است.

در سوال (9) تمرینات مبحث گذشته ارائه شده اینکه:
"نتیجهٔ ترکیب یک دوران $R_{A,\theta}$ و انتقال S_{BC} را یک دوران ثابت کنید."



شکل (3-18)

حال این مسأله را توسط ترسیم یک خط $\underline{s}$ که از نقطهٔ A گذشته و به $\overleftrightarrow{AB}$ عمود باشد باثبات میرسانیم. حال اگر ما نقطهٔ D را طوری انتخاب نمائیم که $\overrightarrow{BC} \doteq 2\overrightarrow{AD}$ بوده و $\underline{t}$ را موازی به $\underline{s}$ که از نقطهٔ D عبور کند رسم مینمائیم، ازین نتیجه میشود که:

$$M_t M_s = S_{BC} .$$

حال خط $\underline{r}$ را که از نقطهٔ A گذشته و زاویه از $\underline{r}$ به $\underline{s}$ را که باندازه $\theta/2$ باشد تعیین نماید رسم مینمائیم. پس درینصورت:

$$R_{A,\theta} = M_s M_r .$$

پس ما داریم:

$$\begin{aligned} S_{BC} R_{A,\theta} &= (M_t M_s)(M_s M_r) \\ &= M_t (M_s M_s) M_r \\ &= M_t (I) M_r \\ &= M_t M_r . \end{aligned}$$

حالانکه $M_t M_r$ عبارت از یکدوران حول نقطهٔ $\{E\} = \underline{t} \cap \underline{r}$ میباشد.

علاوه بر آن چون $\underline{s}$ و $\underline{t}$ باهم موازی اند ما میدانیم که اندازه زاویه از $\underline{r}$ به $\underline{t}$ درینصورت نیز عبارت از $\theta/2$ میباشد.

بنابر آن:

$$S_{BC} R_{A,\theta} = R_{E,\theta}$$

Q.E.D.

بهمین طریق نشان میتوان داد که:

$R_{A,\theta} S_{BC} = R_{F,\theta}$ بوده آیا $E = F$ میشود؟

درنتیجه قضیهٔ ذیل اقامه شده میتواند :

قضیــــــه ٭ 3-4 : Theorem

محصل ترکیب یکدوران و یک انتقال عبارت از یکدوران که دارای عین زاویهٔ دوران موضوع بحث میباشد .

نتیجــــه ٭ مهمه : 3-4 Corollary

تمام انتقالات و تمام دوران ها تحت عملیهٔ ترکیب یک گروه Group را تشکیل میدهد .

حال میخواهیم که محصول ترکیب دوران ها را با انعکاسات خطی حاصل نموده و نوعیت آنها را ببینیم . و درضمن ما راجع به محصول ترکیب انعکاسات و انتقالات نیز معلومات حاصل خواهیم نمود، زیرا با شناختن داده شده میتوانند که این محصول ترکیب یعنی محصول ترکیب های دوران ها و انعکاسات قابل تحویل است .

مطالعه و بررسی این موضوع را با اساس فرضیهٔ اینکه $R_{A,\theta}$ و M_s عبارت از تحویلات Transformations داده شده اند آغاز مینمائیم . درصورتیکه $A \in s$ باشد، پس $R_{A,\theta} = M_t M_s$ گردیده ، درحالیکه t عبارت از خطی است که از نقطه A گذشته و یک زاویهٔ که اندازه $\theta/2$ از s به t را داشته باشد تشکیل مینماید .

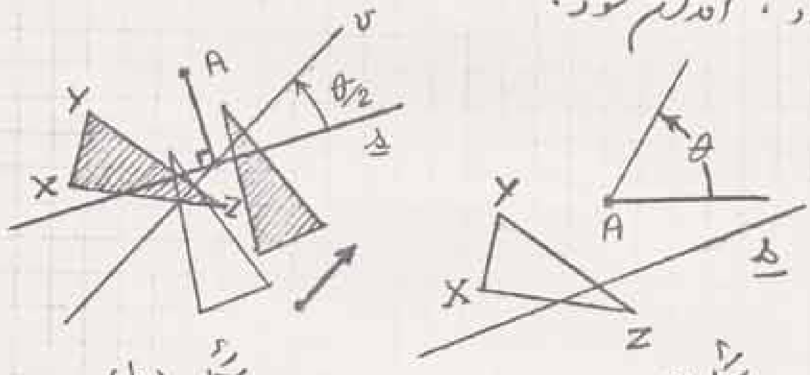
پس درینصورت:

$$\begin{aligned} R_{A,\theta} M_s &= (M_t M_s) M_s \\ &= M_t (M_s M_s) \\ &= M_t\, I \\ &= M_t \end{aligned}$$

گردیده؛

و ازین نتیجه میشود که $R_{A,\theta} M_s$ عبارت از یک انعکاس خطی حول خطی که از نقطهٔ A عبور میکند میباشد.

درصورتیکه $A \notin s$ باشد درینصورت حل مسأله مانند فوق سهل نبوده دیگر اندازهٔ کار بیشتر ایجاب میکند. ما حل این مسأله را در خلال جواب سؤال که آیا $R_{A,\theta} M_s$ یک شکل موضوع مانند مثلث XYZ را چطور تحویل می‌کند؟ جستجو مینمائیم. شکل (3-13-9) مراجعه شود. غیرمعمول خواهد بود که اگر به تصویرکشی مثلث XYZ بدون آنکه تصادیر رؤس آن حاصل گردد، اقدام شود.

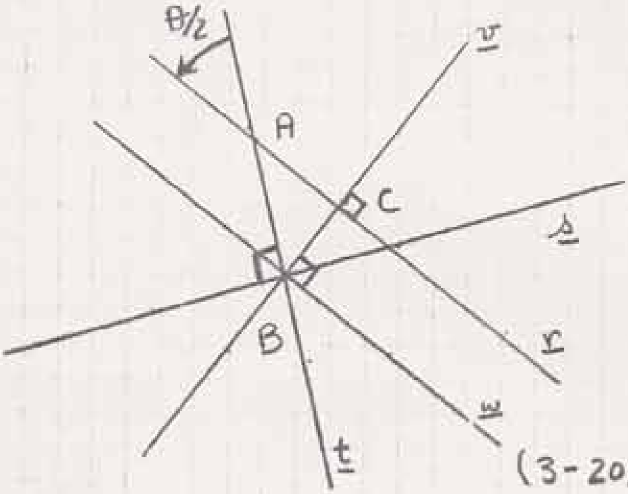


شکل (b)   شکل (a)

شکل (3-19)

از طرف دیگر ~~بشکل~~ تأثیر یک انعکاس حول یک خط s که توسط یک انتقال موازی به s طبق شکل (3-19,b) تصور شده میتواند. تعقیب گردد تا ثانی

نشان خواهیم داد که هر حاصل ترکیب نوع اول بشکل حاصل ترکیب نوع دوم توضیح شده میتواند.



شکل (3-20)

برای امکان آرایش آن - اوّلاً $R_{A,\theta}$ را بدو ترکیب انعکاس خطی آن تجزیه مینمائیم. خطوط $\underline{t}$ و $\underline{r}$ را طوری ذهنی بنمائیم که $\underline{t}$ به $\underline{s}$ عمود بوده و اندازه زاویه از $\underline{t}$ به $\underline{r}$ بقدر $\theta/2$ باشد. پس درینصورت:

$$R_{A,\theta} M_s = (M_r M_t) M_s$$
$$= M_r (M_t M_s)$$
$$= M_r H_B .$$

درحالیکه : $\{B\} = \underline{t} \cap \underline{s}$ است، میشود.

حال اگر ما خط $\underline{v}$ را که از B گذشته و به $\underline{r}$ عمود باشد انتخاب نموده و ضمناً $\underline{w}$ را که از B عبور کرده و موازی به $\underline{r}$ باشد درنظر بگیریم درینصورت ما: H_B را به $M_w M_v$ تعویض کرده میتوانیم.

پس درخصوصیت ما داریم :

$$R_{A,\theta} M_s = M_r (M_w M_v)$$
$$= (M_r M_w) M_v$$

چون $\underline{w}$ موازی $\underline{s}$ است ، ازین نتیجه میشود که $M_r M_w$ یک انتقال است ؛ بنابرین نتیجه ذیل حاصل شده میتواند :

$$R_{A,\theta} M_s = S_{2BC} M_v$$

درحالیکه $\{C\} = \underline{v} \cap \underline{s}$ است .

پس محصول ترکیب اولی بحیث ~~یک~~ محصول ترکیب انعکاس حول خط $\underline{v}$ که توسط یک انتقالی که موازی به $\underline{v}$ میباشد تصور و توضیح شده میتواند . این نوع تحویل / نوع دیگر و آخر ایزومتری های اساسی Basic isometries بوده و بنام انعکاس گلیدی (لغزانی) یاد میشود .

تعریف :

یک مپینگ G انعکاس گلیدی (لغزانی) گفته میشود درصورتیکه یک خط $\underline{v}$ و یک قطعه مستقیم موجه $\overrightarrow{AB}$ موجود گردد طوریکه :

$G = S_{AB} M_v$ موجود شود .

خط $\underline{v}$ بنام محور انعکاس گلیدی یاد میشود .

توجه باید نمود که هر انتقال بحیث محصول ترکیب دو انعکاس خطی تمثیل شده میتواند، پس هر انعکاس گلیدی Glide Reflection به شکل محصول ترکیب سه انعکاس خطی Three Line Reflections توضیح شده میتواند. ازین ما استنتاج کرده میتوانیم که انعکاسات (لغزانی) یا گلیدی تنها محض یک تحول Transformation نبوده بلکه ایزومتری ها نیز میباشند.

طوریکه ما ترکیب : $R_{A,\theta} M_s$ را بحیث یک انعکاس گلایدی (لغزانی) نشان داده توانستیم، بهمین قسم ما میتوانیم که ترکیب $M_s R_{A,\theta}$ را بحیث یک انعکاس گلیدی Glide Reflection نشان دهیم. حل و اثبات این موضوع را که آیا هر دو ترکیب : $M_s R_{A,\theta}$ و $R_{A,\theta} M_s$ عین چیزی را ارائه میکنند و یا خیر؟ بحیث تمرین واگذار شده و خود به ادامه تشریح و توضیح نتایج مهمه مربوط ترکیب انعکاسات خطی Line Reflections و دوران ها Rotations و انتقالات Translations ذیلاً می پردازیم :

قضیه — Theorem: 3-6.

محصول ترکیب هر انعکاس حول یک خط داده شده و هر دوران حول یک نقطه مفروض طوریکه نقطهٔ مفروض روی خط داده شده واقع نباشد، یک انعکاس گلیدی میباشد.

نتیجه مهمه — Corollary. 3-6. A :

نتیجهٔ مهمه: Corollary. 3-6-A

اگر $\overrightarrow{AB}$ عبارت از قطعهٔ مستقیمهٔ موجهه که بیک خط معینهٔ <u>ک</u> عمود بوده مدنظر گرفته شود، درینصورت حاصل ترکیب انتقال τ_{AB} و انعکاس خطی $M_{ک}$ عبارت از یک انعکاس گلایدی (گلیدی) میباشد.

نتیجهٔ مهمه: Corollary. 3-6-B

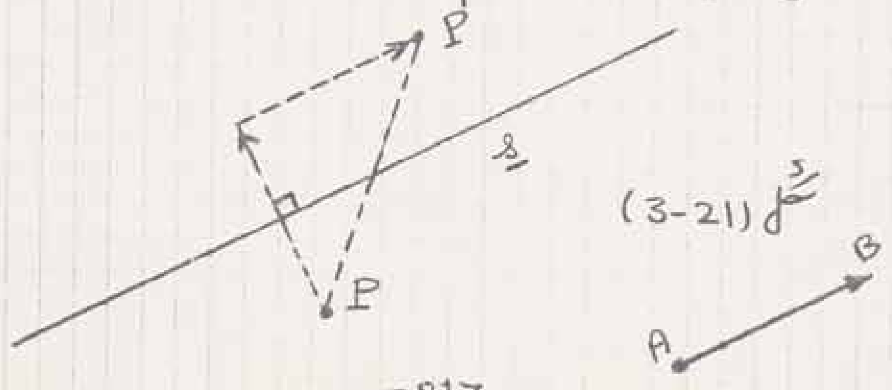
اگر سه خط <u>ل</u>، <u>م</u> و <u>ن</u> طوری واقع گردند که در یک نقطه یکدیگر را قطع نکرده و هیچکدام خود انها باهم موازی نباشند، پس هر ترکیب که از سه انعکاس خطی $M_{ل}$، $M_{م}$ و $M_{ن}$ حاصل میشود عبارت از یک انعکاس گلیدی (گلایدی) میباشد.

اگر توجه شود بملاحظه رسد که نتیجهٔ مهمهٔ 3-6-B باساس قیودات و شرایط توضیح شده است، یا بالفاظ دیگر نتیجهٔ مهمهٔ مذکور بنابر شرایط که خطوط <u>ل</u>، <u>م</u> و <u>ن</u> تحت آن قرار دارند قابل تصدیق است، درصورتیکه یکی از دو شرط رفع شود از ترکیب انعکاسات خطی فوق الذکر چه نوع یک بیجکشن بوجود می آید؟

همچنان در نتیجهٔ مهمهٔ 3-6.A اگر $\overrightarrow{AB}$ به <u>ک</u> عمود نباشد چه نوع بیجکشن بوجود می آید؟

نتیجهٔ مهمهٔ 3-6.B ما را قادر به این میسازد که هر حاصلضرب حاصل از ترکیب $M_m M_n M_l$ را بحیث یک انعکاس گلایدی Glide Ref. تلقی نمائیم. (بفرض اینکه خطوط $\underline{m}$، $\underline{l}$ و $\underline{n}$ طبق شرائط فوق الذکر یکدیگر را قطع ننمایند.) ممکن سوالی بمیان آید که آیا چطور محور انعکاس حاصله ترکیب انعکاسات خطوط $\underline{m}$، $\underline{l}$ و $\underline{n}$ ترسیم شده میتواند؟ ترسیم محور مطلوب را با شناس طریقه تحلیلی طوریکه در اثبات قضیه 3-6. از آن استفاده بعمل آمده میتوان جستجو نمود، ولی پیروی ازین طریقه در ترسیم محور مطلوب تا حدی ترسیمات نسبتاً مغلق را ایجاب مینماید. حال میخواهیم بدانیم که این محور چطور بسهولت ترسیم شده میتواند.

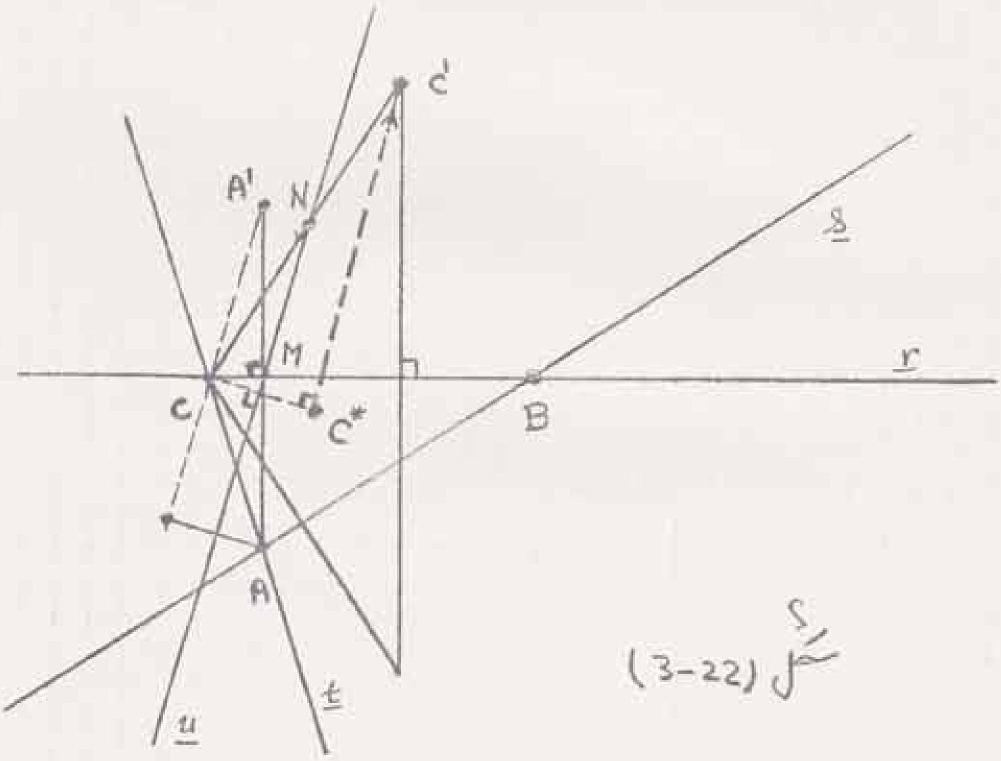
بملاحظه میرسد که اگر T عبارت از یک انعکاس گلایدی بوده و P' تصویر کدام نقطهٔ P تحت T باشد، پس درینصورت محور انعکاس گلایدی Glide Reflection بالضروره نقطه وسطی PP' را در بر دارد. (خط مستقیمی که از نقطه وسطی یک ضلع یک مثلث بضلع دوم آن رسم میشود بالضروره ضلع سومی را نیز تنصیف میکند.)



شکل (3-21)

پس اگر P' و Q' تصاویر هر آن دو نقطه باشند، خط موصول نقاط وسطی قطعه خطوط PP' و QQ' عبارت از محور انعکاس تحلیدی مذکور است.

به طور مثال $M_r M_s M_t$ را که در شکل (3-22) ذیلاً توضیح شده ملاحظه نمائید. تصاویر A و C ممکن به شیوهٔ آن نیز رسم شده بتوانند. پس اگر $\underline{u}$ خطی باشد که از نقاط وسطی قطعات $\overline{AA'}$ و $\overline{CC'}$ یعنی از نقاط M و N عبور کند در آنصورت خط $\underline{u}$ عبارت از محور انعکاس تحلیدی: $M_r M_s M_t = S_{EF} M_u$ بوده و علاوه بر آن $\overrightarrow{EF} \doteq \overrightarrow{C^*C}$ و در جائیکه $C^* = M_u(C)$ است میباشد.



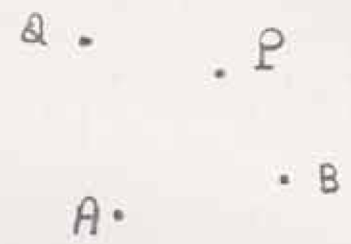
شکل (3-22)

Problem Set . 3-3 : تمرینات

1. نقاط A، B، P و Q مفروض اند درصورتیکه $\overleftrightarrow{AB} = \underline{s}$ باشد
ترسیمات ذیل را انجام دهید:

(a). $P' = S_{AB} M_s (P)$ را. (b). $P'' = M_s S_{AB} (P)$ را.

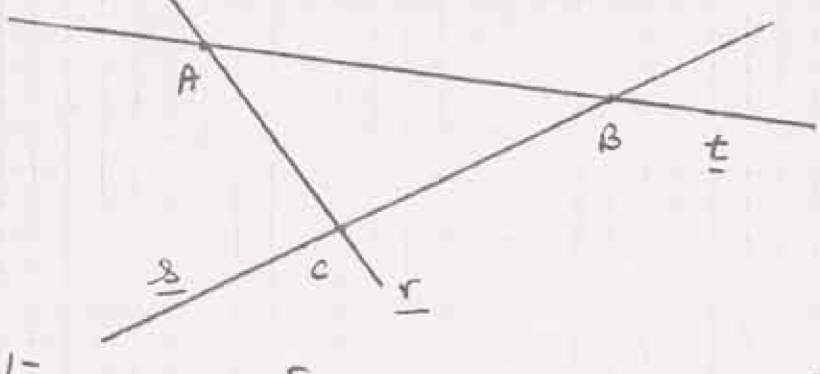
(c). نقطه R را تعیین کنید طوریکه $S_{AB} M_s (R) = Q$ گردد.



2. خطوط $\underline{r}$، $\underline{s}$ و $\underline{t}$ مفروض اند. ترسیمات مطلوب را اجرا کنید:

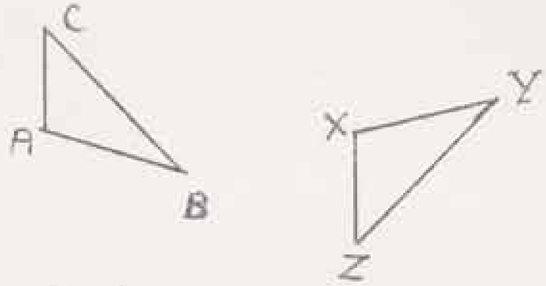
(a). $A' = M_t M_s M_r (A)$ را.

(b). محور انعکاس گلیدی $G = M_t M_s M_r$ را.



3. شکل $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ داده شده؛ محور $\underline{s}$ قطعه
مستقیم موجه $\overrightarrow{AB}$ را رسم کنید طوریکه انعکاس گلیدی

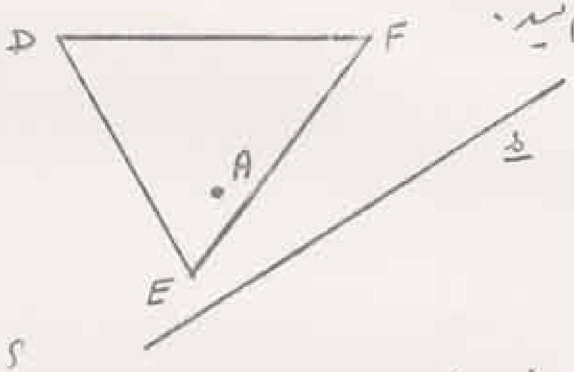
انعکاس گلیدی $M_s S_{AB}$ Glide Reflection تحت آن ΔABC را بر مثلث ΔXYZ چپه کند.



4. نقطهٔ A خط s و مثلث ΔDEF مطابق شکل ذیل مفروض اند:

(a). $\Delta D'E'F' = M_s H_A(\Delta DEF)$ را رسم کنید.

(b). بالفرض $M_s H_A$ یک انعکاس گلیدی باشد، محور انعکاس مذکور را رسم کنید.



5. خط s و نقطهٔ P که بالای s قرار ندارد داده شده اند، محور انعکاس گلیدی $M_s R_{A,90}$ را رسم کنید.

6. (a) در صورتیکه $\overrightarrow{AB} \parallel t$ ثابت کنید که $S_{AB}H_t = H_t S_{AB}$ میشود.

(b) بدون استفاده از قضیه (3-6) در صورتیکه $A \notin s$ میتوان ثابت کنید که $H_A H_s$ یک Glide Reflection انعکاس گلیدی است. محور انعکاس را تعیین کنید.

7. (a) نتیجه مهم 3-6.A را با اثبات رسانید.
(b) نتیجه مهم 3-6.B را با اثبات رسانید.

8. خط s، نقاط A و P داده شده اند:
(a) $P' = M_s R_{A,60}(P)$ را رسم کنید.
(b) محور انعکاس، انعکاس گلیدی $M_s R_{A,60}$ را رسم نمائید.
(c) آیا $M_s R_{A,60} = R_{A,60} M_s$ شده میتواند؟

9. بالفرض خط s محور انعکاس، انعکاس گلیدی G.R. $S_{AB}M_s$ بوده و P یک نقطه است که بفاصله 3 واحد از s فاصله دارد؛ اگر $P' = S_{AB}M_s(P)$ و همچنان $PP' = 8$ باشد، طول $\overrightarrow{AB}$ را حاصل نمائید.

10. قطعه مستقیم موجه $\overrightarrow{AB}$ ، نقطهٔ P و خط s طبق ذیل داده شده اند:

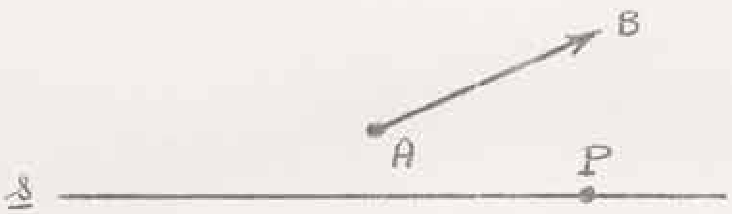
(a). تصویر P و اوتیک نقطهٔ دیگر را تحت $S_{AB} M_s$ رسم کنید.

(b). اگر انعکاس گلیدی $G = S_{AB} M_s$ باشد محور انعکاس G را به t ارائه نموده رسم کنید.

(c). قطعه مستقیم موجه $\overrightarrow{EF}$ را رسم کنید طوریکه $G = S_{EF} M_t$ شود.

(d). رابطهٔ که بین t و s موجود شده میتواند دریافت کنید.

(e). نتیجهٔ خویش را استدلال کنید.

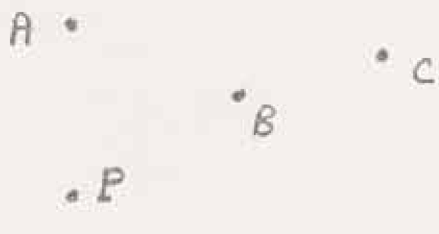


11. نقاط A ، B ، C و P طوریکه در شکل ذیل ارائه شده مفروض اند. درصورتیکه $T = S_{BC} R_{A,45}$ باشد:

(a). $A' = T(A)$ و $P' = T(P)$ را رسم کنید.

(b). T را توضیح نموده و محل هندسی تمام نقاط X $T(X) = X$ را توضیح نمائید.

(c). آیا $S_{BC} R_{A,45} = R_{A,45} S_{BC}$ صدق حقیقت دارد؟



12. اگر $A(0,0)$ ، $B(2,1)$ و $C(2,5)$ نقاط مفروض باشند:

(a) . مختصات مرکز چرخش mapping دوران Rotation $R_{A,90}S_{BC}$ را پیدا کنید.

(b) . اگر $P(x,y)$ یک نقطه کیفی باشد مختصات (مختصه) نقطه P^* را طوریکه: $P^*=R_{A,90}S_{BC}(P)$ باشد؛ پیدا کنید.

13. صحیح و غلط هرکدام از افاده های ذیل را تعیین کنید:

(a) . برای هر خط s و هر قطعه مستقیم $\overline{AB}$ رابطه: $M_S S_{AB} = S_{AB} M_S$ همیشه حقیقت دارد.

(b) . درصورتیکه r ، s و t خطوط موازی باشند پس $M_r M_s M_t$ یک انعکاس خطی است.

(c) . اگر t محور انعکاس گلیدی G را درحالیکه $G(s) \parallel s$ تشکیل دهد، پس $t \parallel s$ میشود.

(d) . اگر $s \perp \overline{CD}$ باشد پس $(S_{CD} M_s)^2 = I$ میباشد.

(e) . اگر G یک انعکاس گلیدی شود پس درینصورت G^{-1} نیز یک انعکاس گلیدی است.

(f) . حاصل ترکیب دو انعکاس گلیدی یک انعکاس گلیدی میباشد.

۱۴. هریک از قضایای ذیل را باثبات برسانید:

(a). درصورتیکه G یک انعکاس گلایدی (گلیدی) باشد نشان دهید که G^2 یک انتقال Translation است.

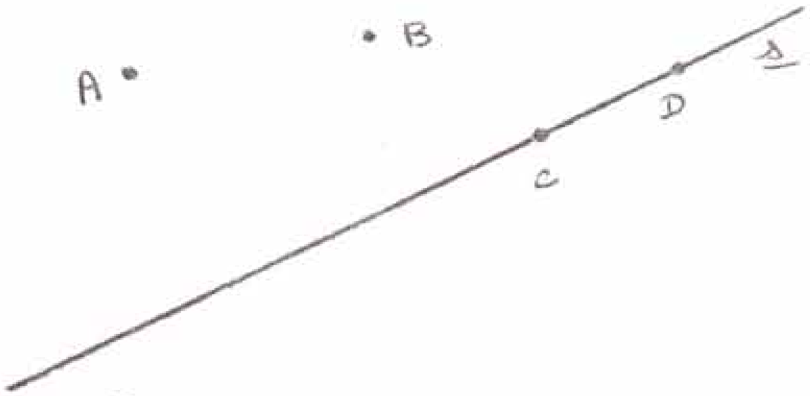
(b). اگر G یک انعکاس گلیدی Glide Reflect. باشد نشان دهید G دارای هیچگونه نقطهٔ ثابت Fixed P. نمیباشد.

15. اگر t عبارت از محور x و $A(2,3)$ و $B(1,6)$ مفروض باشند؛ اولاً تصویر دو نقطه را تعیین نموده و ثانیاً معادلهٔ محور انعکاس گلیدی $M_t S_{AB}$ را بنویسید.

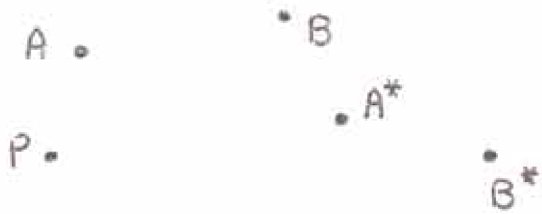
16. حقیقت قضیه: $S_{AB} R_{A,\theta} = R_{B,\theta} S_{AB}$ را ثابت کنید.
(کمک: نشان باید داد که هر دو حرکت عین دوران را ارائه میکنند.)

18. با در نظرداشت سؤال 16 فوق نشان دهید که: $R_{A,\theta} = S_{BA} R_{B,\theta} S_{AB}$ میباشد. شکل کمیات وضعیه یا مختصات نقطهٔ P^* را طوریکه $P^* = R_{A,90}(P)$ برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ بدهید تعیین کنید؛ در اینجا $A=(2,3)$ و B را یک نقطهٔ دلخواه خود به خاطر حل این مسأله انتخاب نمائید.

18. خط ℓ و نقاط A، B، C و D طبق شکل ذیل مفروض اند:
نقاط X و Y را بالای خط ℓ طوری تعیین نمایید که $XY = CD$ ثوبت و فاصله مسیر AXYB اصغری گردد. صحت نتیجهٔ حل خود را استدلال کنید.
(کمک: اولاً $A^* = S_{CD} M_\ell (A)$ را بدست آرید.)



19^*. نقاط A، B، A^*، B^* و P مفروض اند طوریکه $AB = A^*B^*$ میباشد. نشان دهید که دو ایزومتری T_1 و T_2 موجود شده میتوانند طوریکه A را به A^* و B را به B^* مپ میکنند.
$P' = T_1(P)$ و $P'' = T_2(P)$ را بدست آرید.
راجع به قطع خط $\overline{P'P''}$ چه گفته میتوانید؟



3-4. قضیهٔ یگانگی ایزومتری‌ها

The Uniqueness Theorem For Isometries

"Beside the actual universe I can set in imagination other universes in which the laws are different."

J. L. Synge [2, p. 21]

تاکنون در مطالعه هندسهٔ تحولی ما چهار نوع اساسی ایزومتری‌ها را که آن‌ها عبارت از: انعکاسات خطی، انتقالات، دوران‌ها و انعکاسات گلیدی میباشند، مورد بررسی قرار دادیم. از یکی کردن و جوره نمودن انعکاسات خطی Line Reflections انتقالات Translations و دوران‌ها Rotations را حاصل نمودیم. از یکجا کردن انعکاسات خطی، انتقالات و دوران‌ها نوع چهارم ایزومتری که عبارت از انعکاسات گلیدی اند، حاصل نمودیم؛ این سه دستهٔ اوّلی و ابتدائی: انعکاسات خطی، انتقالات، و دوران‌ها با انعکاسات گلیدی (گلایدی) چهار دستهٔ اساسی ایزومتری‌ها isometries را بوجود آورده اند. اکنون میخواهیم بدانیم اگر محصول ترکیب مینگ که از جوره کردن اعضای این چهار دستهٔ اساسی ایزومتری حاصل میشود مورد مطالعه قرار داده شود آیا از نتیجهٔ این ترکیب نیز یک ایزومتری حاصل شده میتواند؟ ویا خیر؟ یا با الفاظ دیگر: آیا از ترکیب یک انعکاس گلیدی با: یک انعکاس خطی، یک انتقال، یک دوران، ویا یک انعکاس گلیدی نیز یک ایزومتری حاصل شده میتواند؟ ویا چطور؟

حال میخواهیم بدانیم که از یکجا کردن یک انعکاس گلیدی همراه یک انتقال چه نوع یک میپنگ حاصل میشود! فرضاً G یک انعکاس گلیدی بوده طوریکه محور انعکاس از خط t تشکیل داده باشد. پس درینصورت $G = S_{AB} M_t$ گردیده، درحالیکه $\overrightarrow{AB} \parallel t$ میباشد.

اگر یک انتقال S_{CD} درنظر گرفته شود، پس درینصورت ما داریم که:

$$S_{CD}G = S_{CD}(S_{AB}M_t)$$
$$= (S_{CD}S_{AB})M_t$$

اما ما میدانیم که انتقالات تحت عملیه ترکیب بسته Closed است. بنا یک قطعه مستقیم جهت‌دار $\overrightarrow{EF}$ موجود شده میتواند طوریکه:

$S_{CD}S_{AB} = S_{EF}$ گردد.

پس ازینجا ما داریم که: $S_{CD}G = S_{EF}M_t$.

درصورتیکه $\overrightarrow{EF} \perp t$ باشد، درینصورت $S_{EF}M_t$ عبارت یک انعکاس خطی است که حول یک خط موازی به t صورت میگیرد؛ واگر $\overrightarrow{EF} \not\perp t$ باشد درینصورت بااساس نتیجهٔ مهمه 3.6-A میپنگ $S_{EF}M_t$ عبارت از انعکاس گلیدی Glide Reflection است. پس بهر صورت $S_{CD}G$ عبارت از یا یک انعکاس خطی است ویا یک انعکاس گلیدی. که درهر دو صورت یک ایزومتری است. ازینکه $S_{AB}M_t = M_tS_{AB}$ است (درصورتیکه $\overrightarrow{AB} \parallel t$ باشد) پس عین نتیجه فوق بالا برای میپنگ GS_{CD} نیز قابل تطبیق میباشد.

تحت شرائط فوق آیا $S_{CD}\,G = G\,S_{CD}$ میشود؟

بنابر توضیحات فوق گفته میشود که حاصل ترکیب یک انتقال با یک انعکاس گلیدی همیشه یا یک انعکاس خطی و یا یک انعکاس گلیدی میباشد.

برای مطالعه حاصل ترکیب یک انعکاس خطی با یک انعکاس گلیدی. یک انعکاس خطی [illegible] M_s و یا یک انعکاس گلیدی G درنظر میگیریم؛ پس درینصورت ما داریم:

$$
\begin{aligned}
M_s G &= M_s(S_{AB} M_t) \\
&= M_s(M_t S_{AB}) \\
&= (M_s M_t) S_{AB}
\end{aligned}
$$

درصورتیکه $t \parallel s$ باشد درینصورت $M_s M_t$ یک انتقال بوده و به همین قسم $M_s G$ یک انتقال میباشد. اگر $t \nparallel s$ باشد درینصورت $M_s M_t$ عبارت از یک دوران میباشد. باساس قضیه (3-2) نتیجه شده میتواند که $M_s G$ یک دوران است. Rotation دوباره ازین نتیجه که حاصل ترکیب یک انعکاس خطی با یک انعکاس گلیدی یا یک انتقال است Transl. و یا یک دوران، چنین برمی آید که:

حاصل ترکیب یک انعکاس خطی با یک انعکاس گلیدی یکی از انواع چهارگانهٔ ایزومتری های اساسی است.

بررسی موضوع حاصل ترکیب یک انعکاس گلیدی را با یک دوران و یک انعکاس گلیدی را با یک انعکاس گلیدی دیگر بجهت تمرین واگذار میکنیم. همچنان معلوم کنید که آیا از ترکیب این چهار نوع ایزومتری حاصل اشیای کدام نوع ایزومتری دیگر موجود آمده میتواند؟ و چطور؟

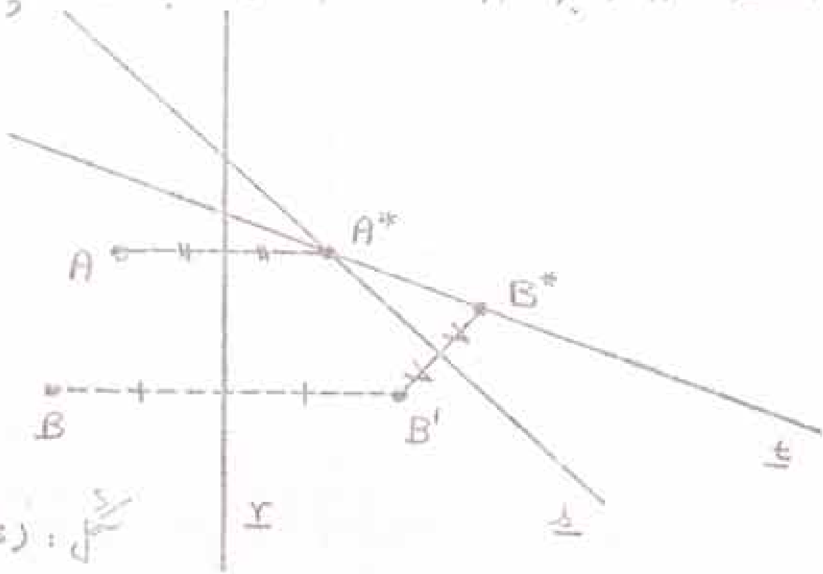
ممکن بدانید که اگر A و A^* دو نقطهٔ کیفی مدنظر گرفته شوند بی نهایت ایزومتری ها موجود خواهد شد که نقطهٔ A را بر نقطهٔ A^* چپ کنند. بطور مثال: یکی از آن ها $S_{AA^*}(A)=A^*$ است.
همچنان اگر t ناصف عمود $\overline{AA^*}$ باشد، برای هر نقطهٔ $K \in t$ یک زاویهٔ θ موجود شده میتواند طوریکه $R_{K,\theta}(A)=A^*$ گردد.

آیا ایزومتری های isometries دیگر را سراغ دارید که نقطهٔ A را بر A^* onto چپ کند؟

علاوه بر آن در مسألهٔ (19) تمرینات گذشته شما دریافت نمودید که اگر A، B، A^* و B^* نقاط مفروض بوده طوریکه $AB=A^*B^*$ باشند؛ در اینصورت لااقل دو ایزومتری موجود شده میتواند که A را onto A^* و B را بر B^* چپ کنند.

اگر بشکل (3-23) مراجعه شود دیده میشود که M_1M_2 و همچنان $M_1M_2M_3$ هر کدام این شرایط فوق را تحقیق مینمایند.

اثبات رسمی و کامل Formel این حقیقت را کمی بعدتر توضیح نموده ، اکنون سؤالی را بررسی می‌نمائیم که آیا کدام نوع دیگر ایزومتری که علاوه از آن عبارت از خود در فوق ذکر یافت موجود شده می‌تواند که نقطهٔ A را به A^* و نقطهٔ B را به B^* جب کند ؟



شکل : (3-23)

برای ما روشن باید بود که محض بدانستن تصویر دو نقطهٔ داده شده کافی نیست تا با شناسائی آن وحدانیت دستگاه یک ایزومتری را تعیین بتوان نمود . اگر بگوئیم که نقاط :

$A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، \ldots ، A_n$ و بالترتیب

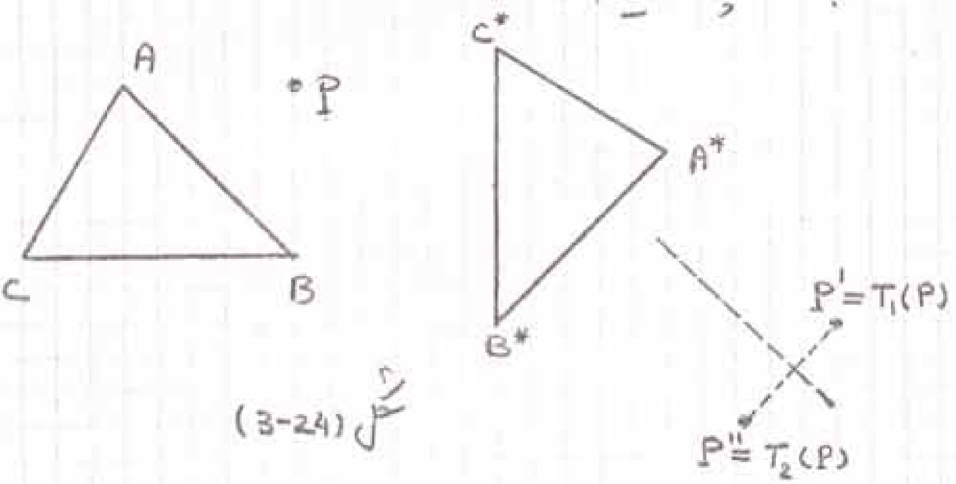
نقاط دیگر آنها : $A_1^* ، A_2^* ، A_3^* ، A_4^* ، \ldots ، A_n^*$ را یک ایزومتری تعیین میکنند ، این چنین معنی دارد که محض یک ایزومتری وجود دارد که نقطهٔ A_1 را به A_1^* ، A_2 را به A_2^* ، A_3 را به A_3^* ، ... و A_n را به A_n^* جب میکند .

قضیه آینده موضوع سؤالی که چند نقطه با تصاویر آنها باید معلوم باشند تا باشان گفته بتوانیم که فقط و تنها فقط یک ایزومتری موجود شده میتواند که نقاط مفروض را به تصاویر مشخصه آن ها مپ میکند.

قضیه Theorem . 3-7:

قضیه یگانگی برای ایزومتری‌ها:

اگر نقاط A، B و C که غیر هم خط اند به نقاط A*، B* و C* مفروض اند. بعد اکثر فقط یک ایزومتری موجود شده میتواند طوریکه نقطهٔ A را بر A* و B را بر B* و C را بر C* مپ میکند.



شکل (3-24)

ثبوت Proof:

بالفرض T_1 و T_2 عبارت از دو ایزومتری باشند طوریکه تحت آنها:

$$T_1(A) = A^* = T_2(A)$$
$$T_1(B) = B^* = T_2(B)$$
$$T_1(C) = C^* = T_2(C)$$

گردند.

هدف ما در اینجا اینست: نشان باید داد که T_1 و T_2 عین تحویل میباشند، و این هدف با نشان دادن اینکه یک نقطهٔ کیفی P طوریکه P عبارت بجز از نقاط ثلاثه مفروض بوده و با ثابت ماندن رابطهٔ:

$$T_1(P) = T_2(P)$$

برآورده شده میتواند.

در مرحلهٔ اول ما میدانیم که T_1 و T_2 هر دو ایزومتری اند؛ پس درین صورت:

$$AB = A^*B^*$$
$$AC = A^*C^*$$
$$BC = B^*C^*$$

میباشند.

حقیقت عدم مشترک الخط بودن نقاط A، B و C تضمین میکند که نقاط تصاویر آنها یعنی A^*، B^* و C^* نیز مشترک الخط نیستند. (چرا؟)

بالفرض $T_1(P) \neq T_2(P)$ باشد.

پس اگر $P' = T_1(P)$ و $P'' = T_2(P)$ باشند،

درین صورت ما داریم:

$PA = P'A^* = P''A^*$ زیرا T_1 و T_2 هر دو ایزومتری اند.

اما از اینکه تمام نقاط ناصف عمود یک قطعه خط از هر دو انجام آن متساوی الفاصله اند، پس درین صورت A^* بالای ناصف عمودی $\overline{P'P''}$ واقع میشود. بهمین قسم ثابت شده میتواند که B^* و C^* بالای ناصف عمودی $\overline{P'P''}$ واقع میشوند.

پس در حالت عمومی نقاط A^*، B^* و C^* روی (بالای) همین خط واقع میشوند، حالانکه این ناممکن است؛ زیرا حقیقت

زیرا حقیقت ثابت شده فوق الذکر را که حقیقت عدم مشترک الخط بودن
A^* ، B^* و C^* را تثبیت نموده بود نقض میکند.

بنابران فرضیهٔ $T_1(P) \neq T_2(P)$ ناممکن بوده.

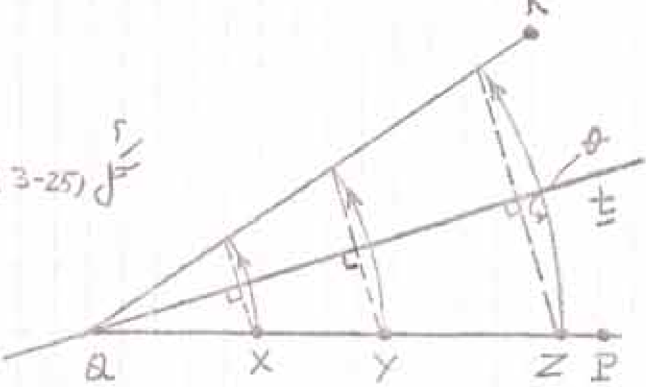
پس $T_1(P) = T_2(P)$ است.

و درنتیجه $T_1 = T_2$ میباشد.

بالاخره حقیقت یگانگی را برای ایزومتری ها تعیین میکند.

Q. E. D.

توضیح قضیهٔ فوق چنین است که دو ایزومتری های متفاوت موجود شده نمیتوانند که سه نقطهٔ متمایز را که مشترک الخط نیستند آنها را به تصویر شان مپ کنند. برای نشان دادن مساوی بودن دو ایزومتری ضرورت است تا نشان داده شود که تصاویر سه نقطهٔ متفاوت که مشترک الخط نباشند تحت هر دو ایزومتری عین چیز میباشند. توجه فرمایید که شرط مشترک الخط نبودن نقاط ضمنی است. منحیث مثال:
خط t ناصف الزاویه $\angle PQR$ را مدنظر بگیرید درحالیکه $\angle PQR = \theta$ است.



شکل (3-25)

پس اگر X، Y و Z نقاط بالای خط QP طوریکه در شکل (5-25) مربوط مشخص شده باشند در اینصورت:

$$R_{Q,\theta}(X)=M_t(X),$$

$$R_{Q,\theta}(Y)=M_t(Y),$$

و $$R_{Q,\theta}(Z)=M_t(Z)$$ گردیده،

در حالیکه: $$R_{Q,\theta}\neq M_t$$ میباشد.

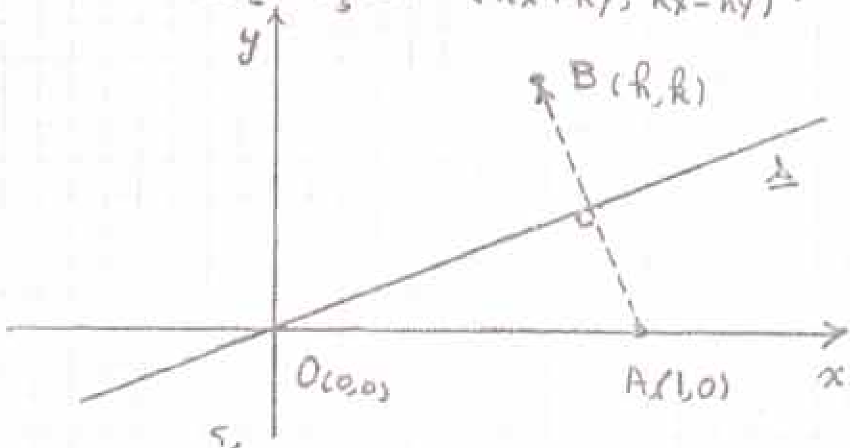
بخاطر باید داشت که قضیه یگانگی ایزومتری ها موجودیت یک ایزومتری که A را بر A^*، B را بر B^* onto و C را بر C^* سپ کند تضمین نمیکند. درصورتیکه مثلث $\triangle ABC$ انطباق پذیر به مثلث $\triangle A^*B^*C^*$ نباشد هیچ یک ایزومتری ای موجود شده نمیتواند که مثلث $\triangle ABC$ را بر مثلث $\triangle A^*B^*C^*$ onto سپ کند. حتی اگر مثلث ها منحیث انطباق پذیر هم باشند باز هم قضیه یگانگی برای ایزومتری ها موجودیت یک ایزومتری را که مثلث $\triangle ABC$ را بر $\triangle A^*B^*C^*$ onto سپ تضمین نمیکند؛ (اگرچه در نهایت فی الواقعه که یک ایزومتری همیشه باید موجود گردد که مثلث $\triangle ABC$ را بر $\triangle A^*B^*C^*$ onto سپ کند، اثبات این حقیقت را برای فصل بعد به تعویق می اندازیم) ولی این قضیه درصورت موجودیت ایزومتری که سه نقطه غیرمشترک الخط را بر onto تصاویر اینها سپ کند یگانگی و وحدانیت آنرا ادعا میکند.

یکی از حل مهم تطبیق قضیهٔ یگانگی دریافت کمیات وضعیهٔ تصویر یک نقطهٔ $P(x,y)$ تحت یک انعکاس خطی است. (بخاطر خواهید داشت که تا اکنون ما بجز از چند حالت خاص مانند اینکه محورات انعکاس را خطوط افقی و یا عمودی تشکیل داده باشند و یا اینکه محورات انعکاس را خطوط که دارای میل های $+1$ و -1 باشند، تشکیل نموده باشند مطالعه نموده و در حالات دیگر از حل این سوال ابا ورزیده ایم.) حال با استفاده از استدلال الجبری ما قضیهٔ ذیل را به اثبات میرسانیم:

Theorem 3-8: قضیه

اگر ℓ یک خطی که از مبدأ کمیات وضعیه میگذرد بوده و M_ℓ عبارت از انعکاس خطی که $A(1,0)$ را بر onto $B(h,k)$ منطبق میکند باشد؛ پس:

$M_\ell(P) = (hx+ky,\ kx-hy)$ میشود.



شکل (3-26)

ثبوت : Proof :

برای اثبات این قضیه بعوض تعقیب طریقهٔ طولانی استعمال داشتن ترتیب افاده‌های جبری ما از تطبیق قضیه یگانه گی طبق ذیل استفاده نمائیم:

فرضاً T یک جنبش‌ای را که تحت آن: $T(P) = (hx+ky,\ kx-hy)$ گردد، ارائه کند.

بنابر تطبیق قضیه یگانه گی برای ایزومتری ها، پس درینصورت بالضرور

$$T(P) = M_s$$ میشود.

در مرحله اول نشان باید داد که T عبارت از ایزومتری است.

برای رسیدن باین مطلب دو نقطهٔ $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ را مدنظر میگیریم؛ ما میتوانیم بنویسیم که:

$$P_1^* = T(P_1)$$
$$= (hx_1+ky_1,\ kx_1-hy_1)$$

وهمچنان:

$$P_2^* = T(P_2)$$
$$= (hx_2+ky_2,\ kx_2-hy_2).$$

با استفاده از اتصال فرمول (فارمول) فاصل بین نقاط، نوشته میتوانیم که:

$$(P_1^*P_2^*)^2 = [(hx_1+ky_1)-(hx_2+ky_2)]^2$$
$$+[(kx_1-hy_1)-(kx_2-hy_2)]^2$$
$$=[h(x_1-x_2)+k(y_1-y_2)]^2+[k(x_1-x_2)-h(y_1-y_2)]^2$$
$$=(h^2+k^2)(x_1-x_2)^2+(k^2+h^2)(y_1-y_2)^2.$$

چون $B = M_s(A)$ و $M_s(O) = O$ بوده و ما میدانیم که:

$$OB = OA$$

و $OA = 1$ بوده

و $OB = \sqrt{h^2+k^2}$ میشود.

پس $\sqrt{h^2+k^2} = 1$ گردیده،

ویا $h^2+k^2 = 1$ میشود.

بنابران:

$P_1^*P_2^* = \sqrt{1\cdot(x_1-x_2)^2+1\cdot(y_1-y_2)^2} = P_1P_2$ میگردد.

واین روابط اخیر ثابت میسازد که T یک ایزومتری است.

حال بنابر تعویض مختصات نقاط: $O(0,0)$، $A(1,0)$ و $B(h,k)$ ما داریم:

$$T(O) = (0,0)$$
$$T(A) = (h,k)$$
$$T(B) = (h\cdot h + k\cdot k,\ k\cdot h - h\cdot k)$$
$$= (h^2+k^2,\ 0)$$
$$= (1,0) \quad \ldots\ldots \quad (\text{زیرا: } h^2+k^2=1)$$

ولی چون: $O \in s$ و $M_s(O) = O$ بوده

واز اینکه $M_s(A) = B$ ثابت است،

امیدانیم که $M_s(B) = A$ میشود،

چون M_s و T هر دو ایزومتری (عبارت از دو ایزومتری) میباشند که سه نقطهٔ

غیر مشترک الخط: O، A و B را علی الترتیب به تصاویر

علی الترتیب بر onto تصاویرشان : O ، B ، A می‌کند ؛
بنابر قضیه یگانگی ایزومتری‌ها ادعامی‌کنیم که M_s و T
عبارت از عین تحول transform می‌باشند .
چون : $T(P) = (hx+ky, kx-hy)$ می‌باشد ،
لذا ، $M_s(P) = (hx+ky, kx-hy)$ می‌باشد .

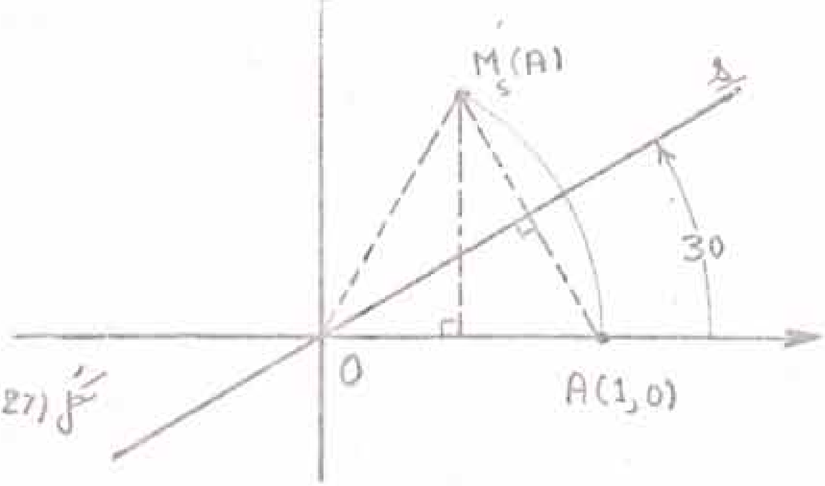
Q . E . D .

مثال ، Example :

اگر O مبدا کمیات وضعیه بوده و $P(x,y)$ یک نقطه
کیفی مستوی باشد ، فرمول تصویر P را تحت دوران $R_{0,60}$
بدست آرید .

حل Solution :

فرضاً s عبارت از خطی باشد که از مبدا O گذشته
و یک زاویه از محور x به s عبارت از 30 را تشکیل دهد .



شکل (3-27)

پس با شناخت مختصات که راجع بمثلث قائم‌الزاویه که دارای زوایای 30 و 60 باشد، داریم؛ نشان داده میتوانیم که:

$$M_s((1,0))=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

بنا بر تطبیق قضیه (8-3) ما نوشته میتوانیم که:

$$M_s(P)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$$

پس اگر t محور x قرار داده شود، درینصورت:

$$R_{0,60}=M_sM_t$$ میشود.

بنابرآن:

$$\begin{aligned}R_{0,60}(P)&=M_sM_t(P)\\&=M_s(x,-y)\\&=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\end{aligned}$$

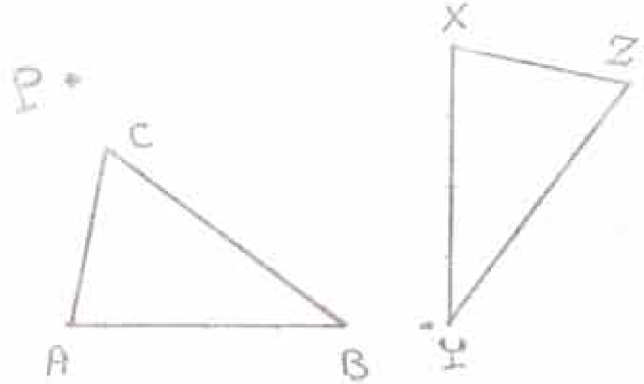
پس برای $P(x,y)$ مختصات تصویر آن تحت $R_{0,60}$ عبارت از:

$$R_{0,60}(P)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$$ میشود.

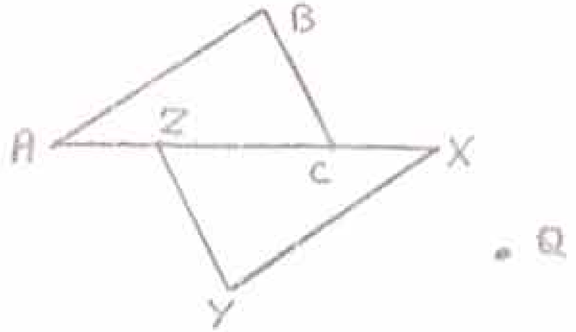
Q.E.D.

Problem Set - 3-4 : تمرینات

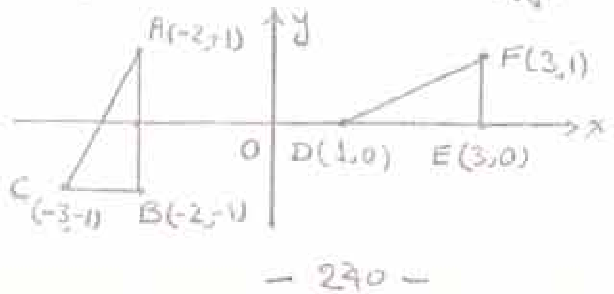
۱. اگر $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ مفروض بوده، اگر T یک ایزومتری که $\triangle ABC$ بر $\triangle XYZ$ مپ میکند باشد: $P' = T(P)$ را رسم کنید.



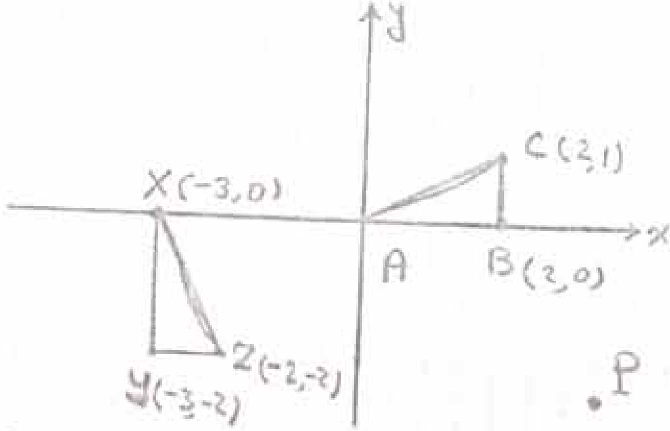
۲. اگر $\triangle ABC \cong XYZ$ مفروض بود و T یک ایزومتری که $\triangle ABC$ را بر $\triangle XYZ$ مپ میکند باشد، پس $Q' = T(Q)$ را رسم کنید.



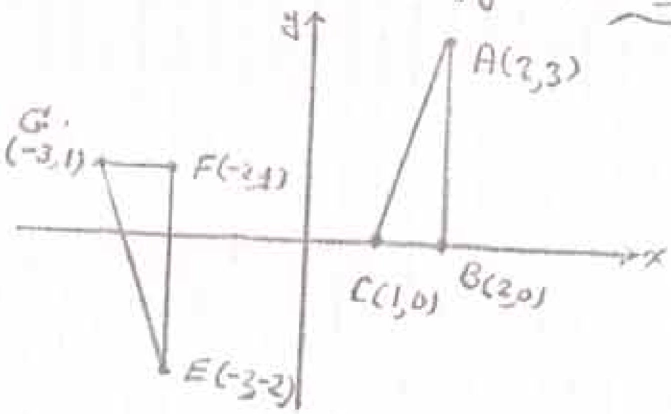
۳. T یک ایزومتری است که $\triangle ABC$ را بر $\triangle DEF$ مپ میکند. برای یک نقطهٔ $P(x,y)$، مختصات $T(P)$ را بیابید.



۴. اگر T یک ایزومتری که ΔABC را بر ΔXYZ منطبق میکند معروض باشد. اگر $P(x,y)$ یک نقطهٔ مستوی باشد، مختصات $T(P)$ را تعیین کنید.



۵. اگر T یک ایزومتری که ΔABC بر ΔEFG منطبق میکند معروض باشد. برای یک نقطهٔ $P(x,y)$ مستوی مختصات $T(P)$ را بدست آرید.



6*. در مورد G یک انعکاس گلیدی باشد:

(a). اگر $R_{A,\theta}$ یک دوران باشد راجع به مشترک G و $R_{A,\theta}$ چه گفته میتوانید؟

(b). اگر G^* یک انعکاس گلیدی دیگر باشد راجع به مشترک G^*G چه گفته میتوانید؟

۷. اگر ℓ یک خطی که از مبدأ گذشته و ضمناً یک زاویه باندازهٔ θ را محور x به ℓ را بوجود آورده باشد معروض باشد.

برای هر نقطه $P(x,y)$ مستوی $M_s(P)$ را تعیین کنید در صورتیکه:

(a) . $\theta=22.5$ باشد ، (b) . $\theta=135$ باشد ، (c) . $\theta=-15$ باشد ،

8 . اگر O مبدأ و $P(x,y)$ یک نقطهء مستوی باشد ، $R_{O,-120}(P)$ را تعیین کنید ،

9 . اگر $R_{O,\theta}$ عبارت از یک دوران حول مبدأ بوده طوریکه نقطهء $A(1,0)$ بر $B(h,k)$ صب میکند مفروض باشد :
نشان دهید که برای هر نقطهء $P(x,y)$:
$R_{O,\theta}(P)=(hx-ky,\ kx+hy)$ میشود ،

10 . با استفاده از نتیجه سؤال (9) فوق یک فرمول برای $R_{O,\theta}$ بدست آورید در صورتیکه:
(a) . $\theta=-45$ ، (b) . $\theta=60$ ، (c) . $\theta=150$ باشد

11 . اگر $A=(1,4)$ و $P(x,y)$ یک نقطه کیفی مستوی باشد کمیات وضعی $R_{A,30}(P)$ را حاصل نمائید.
(کمک :- از قضیه ذیل در سؤال (16) تمرینات صفحهء گذشته ثابت و وسیلهء استفاده بعمل آید: $R_{A,\theta}=S_{BA}R_{B,\theta}S_{AB}$)

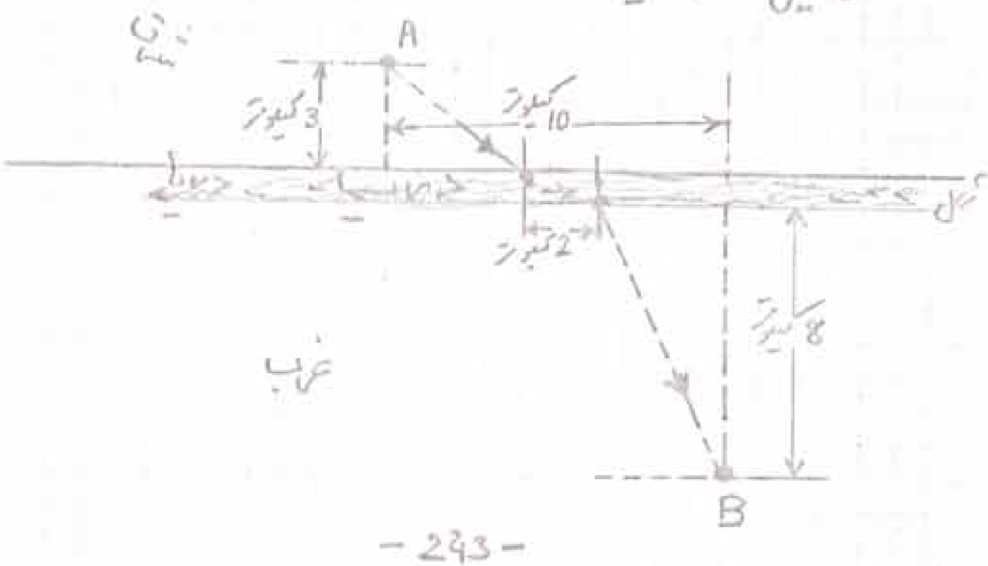
12 . جیگ که توسط افاده: $T(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y,\ \frac{-\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$ تعریف شده تشخیص کنید.

13 . (a) . آیا جیگ که توسط افاده: $L[(x,y)]=(2x+y,\ -x+2y)$ تعریف شده یک انعکاس خطی است ؟ استدلال کنید.
(b) . اگر دوران $R_{O,\theta}$ نقطهء $P(x,y)$ به $(hx-ky,\ kx+hy)$ صب میکند $R^{-1}_{O,\theta}(P)$ را تعیین کنید.

۱۴. اگر $\mathcal{P}=\{(x,y): y=x^2\}$ باشد معادله تصویر $\mathcal{P}$ را که باندازه 60 حول مبدأ/ خلاف جهت حرکت عقربه ساعت دوران کند بنویسید.

۱۵. اگر $\mathcal{H}=\{(x,y): y=\frac{1}{x}\}$ یک هذلولی (پرابول) بوده معادله: $\mathcal{H}'=M_s(\mathcal{H})$ را بنویسید درصورتیکه s از مبدأ گذشته و اندازه زاویه‌ای را 15 را از محور x به s بوجود آورد.

۱۶. یک آبباز ماهر که در نقطه A شاخه شرقی دریا طبق شکل قرار دارد میخواهد تا دوستش را که در شاخه غربی دریا حمل (ساحل) قرار دارد ملاقات کند. آبباز میخواهد که عرض باندازه 2 کیلومتر بالمقابل جریان آب آبباز گردش دریا را ترک گفته رهسپار ساحل (تا ملاقاتگاه دوست خویش گردد. برای اینکه فاصله پیاده روی مذکور رمزی گردد میخواهد نقطه‌ای را در کنار دریا تعیین نماید تا از آنجا شامل آب گردد. اگر از عرض دریا صرف نظر شود فاصله را که آبباز مذکور از A تا به B به پا می‌پیماید با شاش شکل ذیل حساب کنید.



"Take care of the sense, and the sounds will take care of themselves."

Lewis Carroll (Dodgson 1, ch. 9)

۳-۵ . قضیهٔ اساسی ایزومتری

The Fundamental Isometry Theorem

معتقدیم که شما از عهدهٔ اثبات موضوع زیر: "حاصل ترکیب یک انعکاس گلیدی Glide Ref. با یک دوران Rotation عبارت یا از یک انعکاس گلیدی است و یا از یک انعکاس خطی Line Reflection است؛ و هم چنان حاصل ترکیب دو انعکاس گلیدی یا یک انتقال Translation و یا یک دوران است." موفقانه بدر آمده باشید. در نتیجه ما گفته می‌توانیم که از یکجا کردن هر جوره از اعضای دسته‌های چهارگانهٔ ایزومتری‌ها هم کدام نوع ایزومتری جدید که در یکی ازین چهار دستهٔ شامل نباشد پیدا شده نمی‌تواند. با توضیحات فوق قضیهٔ ذیل را اثبات می‌کنیم:

قضیهٔ ۳-۹: Theorem 3-9:

طبقهٔ تحولات (تحرک‌ها) G که متشکل از تمام انعکاسات خطی، انتقالات، دوران‌ها، و انعکاسات گلیدی است، تحت عملیهٔ ترکیب بسته است.

بنا بر تطبیق پی‌در‌پی قضیه (3-9) ملاحظه خواهد شد که حاصل ترکیب هر عدهٔ معین اعضای G طبقه همیشه یک عضو و یا عنصر G طبقه باشد. ازین لحاظ ما متیقن شده می‌توانیم که ~~کدام نوع جدید ایزومتری~~ از یکجا کردن و اجتماع عناصر G طبقه کدام نوع جدید

بوجود نمی‌آیند . ولی با اینهمه سؤال پیدا میشود که ممکن کدام نوع دیگر ایزومتری که درمیان دسته چهارگانه فوق تشکیل نشده رد کردیم ناحیه دیگر ظهور نمایند . قبل از ارائه بیشتر این موضوع ملتفت میشویم باینکه :

خاصیت انجمنی بنابر عملیه ترکیب در set تمام توابع تحقیق پذیر است ،

عنصر عینیت I شامل g یعنی $I \in g$ است ،

بنابر عملیه ترکیب هر عنصر set g دارای یک عنصر معکوس در g است .

با در نظر داشت شرایط فوق نتیجه مهمه ذیل را بیان میکنیم :

نتیجه مهمه 3-9 : Corollary .

set تحولات (تحرکات) g تحت عملیه ترکیب یک گروه Group را تشکیل میدهد.

در مبحث (3-4) ادعا شده که: اگر A ، B و C سه نقطه متفاوت که مشترک الخط نیستند بوده باشند یک ایزومتری است که A را به A^* و B را به B^* و C را به C^* مپ میکند." حال نشان خواهیم داد که اگر $\triangle ABC \cong \triangle A^*B^*C^*$ باشد ، پس لااقل یک ایزومتری موجود شده میتواند که A را به A^* ، B را به B^* و C را به C^* مپ کند. اثبات این حقیقت را بنابر یک لیما[1] (قضیه صغرا) که مشکلات اثبات قضیه (کبرای) را سهلتر میسازد تعقیب میکنیم .

---

(1)- Lemma ویا قضیه صغری متشوله برای اثبات یک حصه خاص قضایای کبرای بکار برده میشود .

لیما : Lemme :

اگر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو قطعه خط انطباق پذیر باشند دو ایزومتری موجود شده میتوانند که A را به C و B را به D کرده یکی آن مستقیم و هم جهت و دیگر آن مخالف باشد.

برای اثبات این لیما سه حالت اساسی موجود است که باید همه آنها مد نظر گرفته شود.

(1). حالت که: $A=C$ بوده ولی $B\neq D$ باشد،

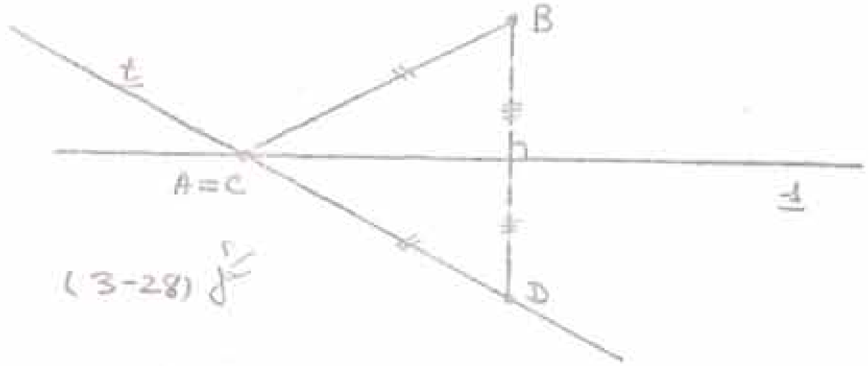
(2). حالت که: $A\neq C$ بوده و هم $B\neq D$ باشد،

(3). حالت که: $A=C$ بوده و هم $B=D$ باشد.

از مطالعه حالت که: $A\neq C$ بوده ولی $B=D$ باشد صرف نظر میشود زیرا همین شکل حالت (1) را دارا میباشد.

حالت (1): بالفرض $A=C$ بوده ولی $B\neq D$ باشد. در اینجا اگر خط d ناصف عمودی $\overline{BD}$ رسم شود، پس درینصورت؛ چون $A=C$ بوده، و هم $AB=CD$ است، ازین نتیجه میشود که $AB=AD$ بوده، پس $A\in d$ میباشد.

(هر نقطه ای که از دو انجام یک قطعه خط مساوی الفاصله باشد بالای ناصف عمودی آن واقع است.)



شکل (3-28)

پس $M_s(A) = A = C$ ، نیز

و هم: $M_s(B) = D$ میشود.

برای بدست آوردن ایزومتری دومی $\overleftrightarrow{CD} = \underline{t}$ قرار میدهیم پس درینصورت:

$$M_t M_s(A) = M_t(C) = C$$

و $M_t M_s(B) = M_t(D) = D$ میشود.

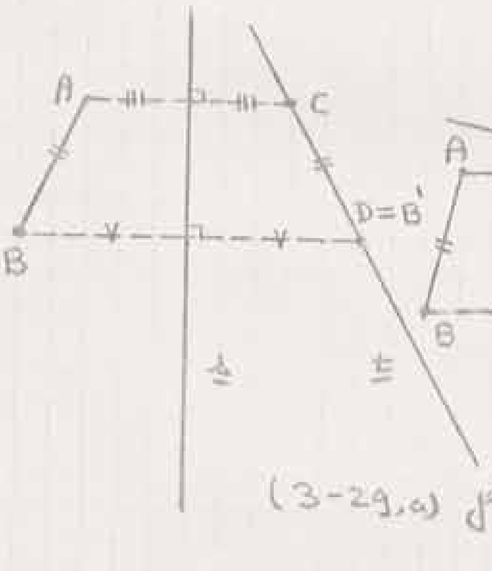
بنابران M_s عبارت از ایزومتری مخالف opposite مطلوب بوده و همچنان $M_t M_s$ عبارت از ایزومتری هم جهت و مستقیم direct مطلوب میباشد.

حالت (2): درصورتیکه $A \neq C$ و $B \neq D$ باشد. درینحالت اگر $\underline{s}$ ناصف عمودی $\overline{AC}$ قرار داده شود، درینصورت در خلی $M_s(A) = C$ میشود.

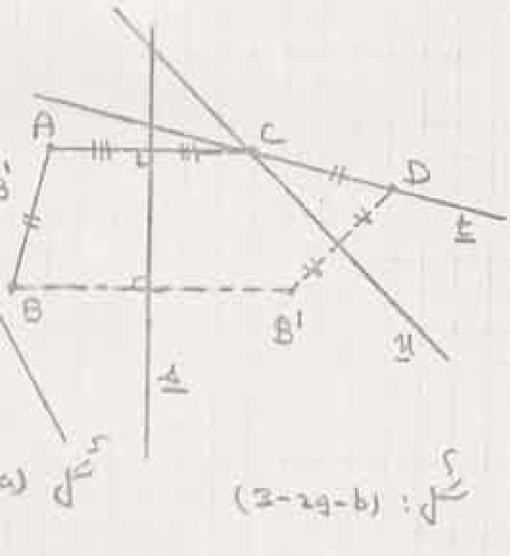
حال اگر $B' = M_s(B)$ قرار داده شود دو امکانات موجود شده میتواند:

(i) خواه: $B' = D$ میشود، مانند شکل: (3-29-a) ،

(ii) ویا اینکه: $B' \neq D$ میباشد، مانند شکل: (3-29-b) .



شکل (3-29-a)



شکل: (3-29-b)

اگر $B' \neq D$ باشد، پس M_s عبارت از ایزومتری مخالف مورد نظر است.

حال $\overleftrightarrow{CD} = \underline{t}$ قرار داده شود، و از این حاصل میشود که ترکیب $M_t M_u$ عبارت از ایزومتری هم جهت و مستقیم مطلوب است.

از طرف دیگر اگر $B' \neq D$ باشد، در اینصورت $\underline{u}$ را خط منصف عمودی $\overline{B'D}$ قرار میدهیم. و ما میدانیم که $C \in \underline{u}$ است.

در اینصورت: $CD = AB = CB'$ میشود.

چون $M_u(C) = C$ و $M_u(B') = D$ است.

در نتیجه ترکیب $M_u M_t$ عبارت از ایزومتری هم جهت و مستقیم مطلوب حاصل میشود.

بالاخره با قبولی و قرار دادن $\underline{t} = \overleftrightarrow{CD}$ ما داریم:

$M_t M_u M_s(A) = C$ بوده

و هم چنین: $M_t M_u M_s(B) = D$ میشود.

که در اینصورت $M_t M_u M_s$ یک ایزومتری مخالف مورد نظر را بوجود می‌آورد.

حالت (3). در حالتی که $A = C$ و $B = D$ باشد در این حالت اگر $\overleftrightarrow{AB} = \underline{s}$ در نظر گرفته شود؛ واضح که در اینصورت انعکاس M_s معرف یک ایزومتری مخالف و هم یک ایزومتری عینیت Identity Iso. را طوریکه $M_s M_s = I$ میشود بوجود می‌آورد و هر کدام آن A را بر C و B را بر D مپ میکنند.

دیدیم که از حالات فوق ما نشان دادیم که یک جوره ایزومتری که A را بر C و B را بر D مپ کنند موجود شده میتوانند. ایزومتری هم جهت و مستقیم از ترکیب دو انعکاس خطی و ایزومتری مخالف از انعکاس خطی یا ترکیب یک و از ترکیب سه انعکاس خطی بوجود می‌آید.

حال با در نظر گرفتن این لیما Lemma یک قضیهٔ عمده ای را که تمام مطالعات سابق ما را درباره ایزومتری که با هم یکجا متحد و مرتبط می سازد، با اثبات می رسانیم:

Theorem 310 : قضیه

The Fundamental Isom. Theorem قضیه اساسی ایزومتری

هر ایزومتری مشخصاً ترکیب حداعظمی از سه انعکاس خطی است.

ثبوت Proof

بالفرض T یک ایزومتری بوده، A، B و C سه نقطه که مشترک الخط نیستند باشد، درینصورت اگر تصاویر A، B و C را علی الترتیب به A^*، B^* و C^* ارائه کنیم پس:

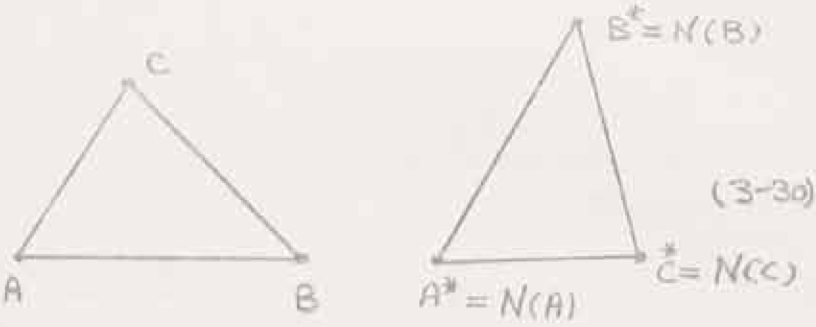
$$A^* = T(A)$$
$$B^* = T(B)$$
$$C^* = T(C)$$

میشود،

چون $A^*B^* = AB$ است، پس بنابر لیما فوق ما گفته میتوانیم که لااقل دو ایزومتری که A را به A^* و B را بر B^* و C را بر C^* onto سبب کنند موجود شده میتوانند؛ یکی ازین دو ایزومتری هم جهت و مستقیم direct بوده که ما آنرا به L_d ارائه مینمائیم و دیگرش یک ایزومتری مخالف opposite بوده که ما آنرا به L_o نشان میدهیم، میباشد. ما میدانیم که L_d عبارت از ترکیب دو انعکاس خطی M_tM_s بوده حالانکه L_o یا از یک انعکاس خطی M_s و یا از ترکیب سه انعکاس خطی $M_tM_uM_s$

در انعکاس خطی $M_t M_u M_s$ حاصل میشود. اکنون میخواهیم که از جمله این مپینگ‌ها آن مپینگ که دارای کمترین عده انعکاسات باشد انتخاب نمائیم.

حال اگر تعداد انعکاسات را به N ارائه نمائیم؛ پس درصورتیکه $L_0 = M_s$ باشد، $N = L_0$ میشود، ولی اگر $L_0 = M_s M_u M_t$ گردد، در اینحالت $N = L_3$ میگردد.



شکل (3-30)

حال اگر $C' = N(C)$ منظور گرفته شود. درصورتیکه:

$C' = C^*$ باشد، پس N، A را به A^*،

B را به B^* و C را به C^* مپ میکند. پس درینصورت بنابر تطبیق

مستقیم قضیه یگانگی با ایزومتری The Uniqueness Theo. for Iso:

N و T عین مپینگ mapping را ارائه میکنند.

شکل (3-31)

درصورتیکه $C' \neq C^*$ باشد؛ در اینحالت با خط $\underline{v}$ را رسم مینمائیم

طوریکه $\underline{v} = \overleftrightarrow{A^*B^*}$ باشد. چون N و T هردو ایزومتری‌ها اند

پس ما داریم که : $AC = A^*C^* = A^*C'$

و به همین قسم : $BC = B^*C^* = B^*C'$.

چون A^* و B^* هر دو از انجام $\overline{C'C^*}$ متساوی الفاصله واقع اند، و این چنین معنی دارد که $\overleftrightarrow{A^*B^*}$ ناصف عمودی $\overline{C^*C'}$ است .

پس در صورت : $M_l C' = C^*$ میشود .

بصورت خلاصه ما داریم که :

$$M_l N(A) = M_l(A^*) = A^*$$

و

$$M_l N(B) = M_l(B^*) = B^*$$

و همچنان

$$M_l N(C) = M_l(C') = C^* .$$

دوباره بنا بر تطبیق قضیه یگانگی ایزومتری نتیجه میشود که :

$$M_l N = T$$ است .

پس، خواه $T = M_l N$ بوده، و یا $T = N$ باشد،

چون N یک یا انعکاس خطی است و یا محصول ترکیب دو انعکاس خطی؛ و در نتیجه T بحد اعظمی محصول ترکیب سه انعکاسات خطی بوده میتواند نه بیشتر ازآن .

درینجا ثبوت مورد طلب ما به اتمام میرسد .

Q. E. D.

نتیجه قضیه 3-10 : Corollary .

هر ایزومتری یا یک انعکاس خطی است، یا یک انتقال است، یا یک دوران است و یا یک انعکاس کشیدی .

بنابراین اثبات شد هر ایزومتری مستقیم در صفحه یا یک انتقال
و یا یک دوران بوده و در حالیکه هر ایزومتری مخالف یا عبارت
از یک انعکاس خطی و یا عبارت از یک انعکاس لغزنده میباشد.
این نتیجه ما را بدانستن نتایج نهائی ترکیب های مختلف مانند:
$S_{AB} H_u R_{A,\theta} S_{CD} M_t$ و یا $M_s M_t M_u M_v M_w$ قادر میسازد.
میتوانیم تا پیشگوئی نمائیم که نتیجه نهائی ترکیب: $M_s M_t M_u M_v M_w$
یا یک انعکاس خطی و یا یک انعکاس لغزنده است. و همین قسم
نتیجه آخر ترکیب $S_{AB} H_u R_{A,\theta} S_{CD} M_t$ یا عبارت از یک انتقال
و یا یک دوران میباشد.
(بخاطر باید داشت که تحویل عینیت Identity یا بحیث یک دوران
و یا بحیث یک انتقال مد نظر گرفته میشود.)

آیا میتوانید که یک قانون را برای پیشگوئی نتیجه نهائی یک ایزومتری
مانند:

$$L = T_1 T_2 T_3 T_4 \cdots T_n$$

طرح کنید تا باساس آن گفته بتوانید که ایزومتری L یا یکی از
دو انعکاسات خطی و لغزنده است و یا یکی از دو حرکت دوران
و انتقال است؟

لیما (Lemmel) اینکه یک تن قضیه اساسی ایزومتری
باثبات رسانید، حال میتوانیم که باساس آن قضیه دیگری
که موجب استحکام بیشتر قضیهٔ اساسی گردیده و هم اساسات ایزومتری را میتوان
باثبات رسانید.

قضیه Theorem 3-11 :

اگر $\triangle ABC \cong \triangle A^*B^*C^*$ مفروض باشد، یک و تنها یک ایزومتری که A را بر A^*، B را بر B^* و C را بر C^* منطبق کند موجود شده میتواند باشد.

ثبوت: Proof :

واضح که قضیهٔ یگانگی قسمت وحدانیت ادعای این قضیه را تضمین میکند. برای اثبات وجود این ایزومتری از تعهد لیما که درصورت موجودیت $AB = A^*B^*$ وجود یک ایزومتری T را طوریکه A را بر A^*، B را بر B^* و C را بر C^* منطبق میکند تضمین مینماید استفاده مینمائیم.

حال اگر $C' = T(C)$ در نظر گرفته شود دو حالت موجود است: یا $C' = C^*$ بوده یا اینکه $C' \neq C^*$ میباشد.

درصورتیکه $C' = C^*$ باشد، درینصورت اثبات قضیه تکمیل است، زیرا: $T(A) = A^*$ و $T(B) = B^*$ گردیده و T ایزومتری مطلوب است.

اگر $C' \neq C^*$ باشد، درینصورت خط $\underline{u} = \overleftrightarrow{A^*B^*}$ را رسم مینمائیم. واضح است که $\underline{u}$ ناصف عمودی $\overline{C'C^*}$ میباشد؛ زیرا: A^* و B^* از هر دو انجام نهایت C^* و C' قطعه خط $\overline{C'C^*}$ متساوی الفاصله اند. پس درینصورت ما داریم:

$$M_u(C') = C^*$$

و ما داریم که :

$$M_4T(A) = M_4(A^*) = A^*$$

$$M_4T(B) = M_4(B^*) = B^*$$

و بالاخره :

$$M_4T(C) = M(C') = C^*$$

بنابر نتایج فوق ما موجودیت یک ایزومتری یا T ویا M.T را ثابت نمودیم طوریکه نقطهٔ A را بر A^* ، B را بر B^* و C را بر C^* منطبق کند ؛ یعنی $\triangle ABC$ را بر $\triangle A^*B^*C^*$ منطبق نماید .

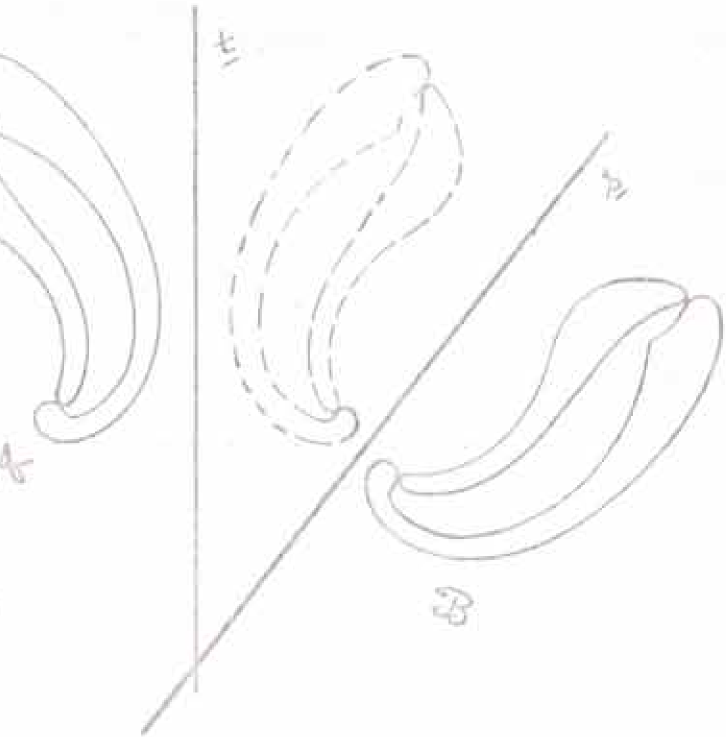
Q.E.D.

قضیه فوق جاده ای را برای تعریف جامع تر انطباق پذیری Congruence باز میسازد . در هندسه عنعنوی و تقلیدی Traditional Euclidean Geometry انطباق پذیری بحیث یک اصطلاح محض در شکل : قطعات خط ، زوایا ، مثلث ها ، دوایر ، و دیگر مضلعات میل تطبیق داشت ؛ اکنون در ذیل تعریف وسیع و جامعتری را برای توفیق این مفکوره بیان کرده میتوانیم :

تعریف : Definition

دو set نقاط باهم انطباق پذیر Congruence میباشند ؛ درصورتیکه محض و تنها محض یک ایزومتری موجود شده بتواند که یک set را بر دیگری onto منطبق کند .

توجه فرمایید که قضیه 3-11 فوق، وجود ایزومتری را پس از طرز تفکر سابق انطباق پذیری شکل‌ها تضمین نموده است. در حقیقت تعریف جدید انطباق پذیری یک توسعه و اکتشاف تعریف سابق آن است. این توسعه و اکتشاف امکانات انطباق پذیری Congruency را بین همه گونه اشکال (هندسی و غیرهندسی) مهیا میسازد. با این کشش ما از نگاه ریاضی و زبان ریاضی بصورت موجز و دقیق گفته میتوانیم که هر شکل مانند set A انطباق پذیر شکل مانند: set B است. زیرا: $M_s M_t(A)=B$ میشود.

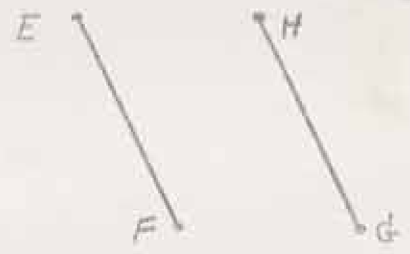


شکل (3-32)

Problem Set 3-5 : تمرینات

1. اگر $AB=CD$ باشد، یک ایزومتری T_1 که حرکت مستقیم است موجود شده میتواند طوریکه A را بر C و B را بر D منطبق کند. خطوط ℓ_1 و ℓ_2 را رسم کنید طوریکه: $T_1 = M_{\ell_2} M_{\ell_1}$ گردد.

2. اگر $EF=GH$ باشد، یک ایزومتری مخالف T_2 موجود شده میتواند طوریکه E را بر G و F را بر H منطبق میکند. اگر $\overline{EF}$ موازی به $\overline{GH}$ باشد، خطوط ℓ_3، ℓ_4 و ℓ_5 را رسم نمائید طوریکه: $T_2 = M_{\ell_5} M_{\ell_4} M_{\ell_3}$ گردد. آیا جواب شما یگانه است؟



3. (a). اگر $AB=CD$ باشد آیا بیشتر از دو ایزومتری که A بر C و B را بر D منطبق کند موجود شده میتواند؟

(b). اگر $AB=CD$ باشد چند ایزومتری موجود شده میتواند که A را بر C و B را بر D منطبق کند؟

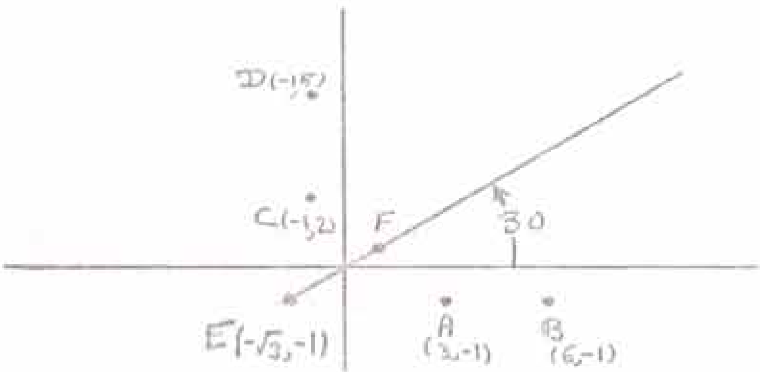
4. قطعه خط های انطباق پذیر $\overline{AB}$، $\overline{CD}$ و $\overline{EF}$ مطابق شکل ذیل مفروض اند.

اگر $P(x,y)$ یک نقطهٔ مستوی باشد :

(a) • یک ایزومتری مستقیم و هم جهت T را که A را بر C و B را بر D می‌برد تعیین نموده و $T(P)$ را بدست آرید.

(b) • یک ایزومتری مخالف L را طوریکه A را بر D و B را بر C می‌برد تعیین نموده و شکل $L(P)$ را حاصل کنید.

(c) • یک ایزومتری مستقیم و هم جهت H را که E را بر C و F را بر D می‌برد تعیین کرده و نقطهٔ $H(P)$ را مشخص کنید.



5 • میتینگ را توضیح کنید در صورتیکه ایزومتری‌های ذیل موجود باشند :-

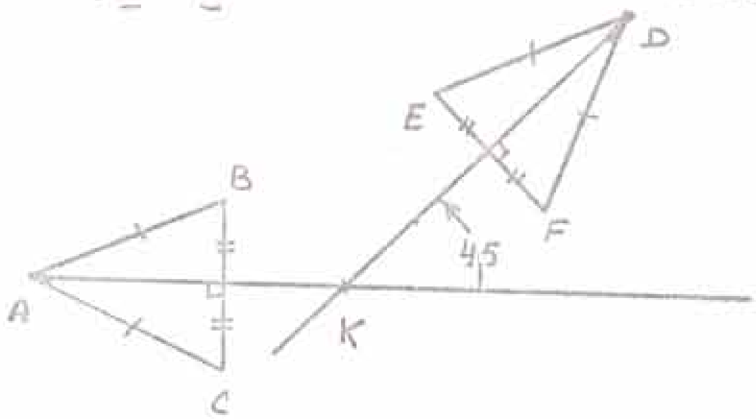
(a) • $T=M_u M_v M_1 M_t M_s M_4$ را در صورتیکه T دارای کدام نقطهٔ ثابت باشد.

(b) • $T=S_{AB} M_u R_{C,\theta} S_{DE}$ را، در حالیکه T بدون دارای یک نقطه باشد.

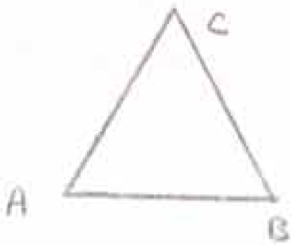
(c) • $T=R_{A,\theta} G M_t S_{BC}$ را، در صورتیکه دو نقطهٔ متمایز P و Q موجود گردند طوریکه $T(P)=E$ و $T(Q)=Q$ بود.

6 • اگر $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ دو مثلث متشابه و انطباق پذیر طوریکه در شکل ذیل ارائه شده باشند : یک ایزومتری‌ها را تعیین کنید که $\triangle ABC$ را بر $\triangle DEF$ می‌برد کرده و در این ایزومتری

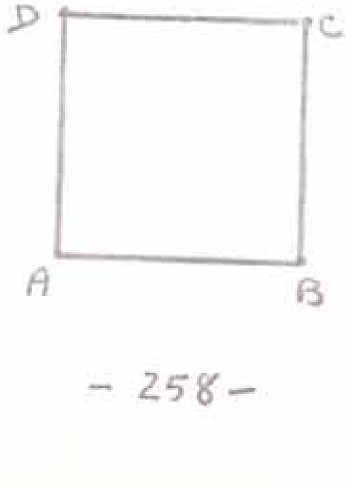
داین ایزومتری ها را با شامل یک مجموعه ترکیب مناسب: دوران ها، انتقالات، و انعکاسات تعریف کنید.



۷. یک مثلث متساوی الاضلاع $\triangle ABC$ موجود است. شش ایزومتری دیگر مثلث $\triangle ABC$ را بر خودش مپ میکند مشخص سازید.



۸. شکل $ABCD$ یک مربع موجود است. تمام ایزومتریهای که مربع $\square ABCD$ را بر خودش مپ میکند تشخیص نمائید.



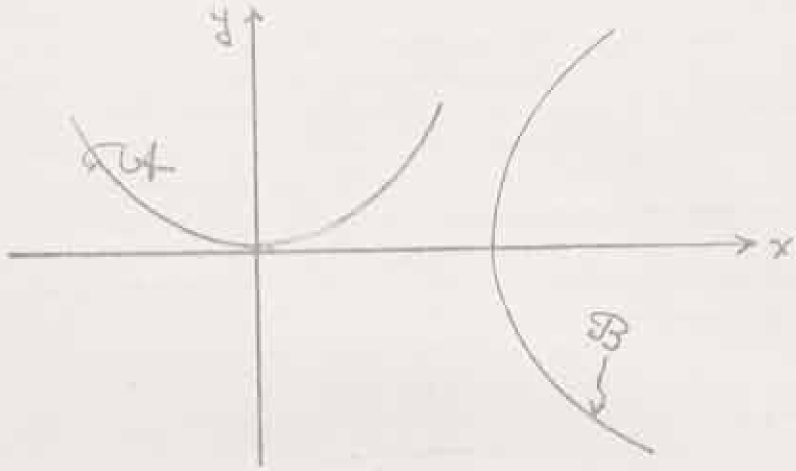
9. چند ایزومتری موجود شده میتوانند که چهارضلعی $\square ABCD$ را بر خودش منطبق کنند؟

(a). در صورتیکه چهارضلعی مذکور یک مستطیل Rectangle باشد!

(b). در صورتیکه چهارضلعی مذکور یک متوازی‌الاضلاع Parallelogram باشد؟

(c). در صورتیکه چهارضلعی مذکور یک منحرف باشد؟

10. ثابت کنید که اگر $A=\{(x,y): 2y=x^2\}$ و $B=\{(x,y): y^2=2x-4\}$ باشند پس $A\cong B$ است.



11. (a). معلوم کنید که آیا ایزومتری‌های مربوط سؤال (7) یک گروه Group را تشکیل کرده میتوانند و یا نه؟

(b). معلوم کنید که آیا ایزومتری‌های سؤال (8) یک گروه Group را تشکیل کرده میتوانند و یا خیر؟

12. اگر $P_1P_2P_3P_4P_5\cdots P_n$ یک n ضلعی منتظم regular n-gon را تشکیل دهد. معلوم کنید چه ایزومتری‌ها موجود شده میتوانند که این n ضلعی مذکور را بر خودش منطبق کنند:

(a). در صورتیکه n جفت باشد؟

(b). در صورتیکه n تاق باشد؟

"When I use a word"
Humpty-Dumpty said,
"it means just what I
choose it to mean — neither
more nor less."

Lewis Carroll (1832-1898)
[Dodgson 2, chap. 6]

فصل چهارم

تجانس ویا سیمیلیتیود ها (1)

Similitudes

4-1. دایلیشن ها (2) Dilations

در فصل گذشته ما ان ست set تحویلات Transformations را مورد بررسی قرار دادیم که از آن حافظ فاصله بین نقاط بوده و یک گروه Group ایزومتری ها isometries را تشکیل نموده بودند. بعلاوه یکی از نتایج عمده این بررسیها و مطالعات را تأسیس تشکیل روابط بین انطباق پذیری congruence مثلث ها و ایزومتری ها تشکیل میداد. در حالت خاص ما نشان دادیم که $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ است در صورتیکه فقط یک ایزومتری موجود گردد طوریکه A را به X ، B را به Y و C را به Z مپ کند. سپس ما تعریف انطباق پذیری را توسعه داده و نشان دادیم طوریکه دو شکل در صورت انطباق پذیر میشوند که یک ایزومتری

---

(1). البته در صورت یافتن کدام کلمه مناسب دری که موجب مغالطه نگردد ، کلمه سیمیلیتیود را با آن تعویض خواهیم کرد.

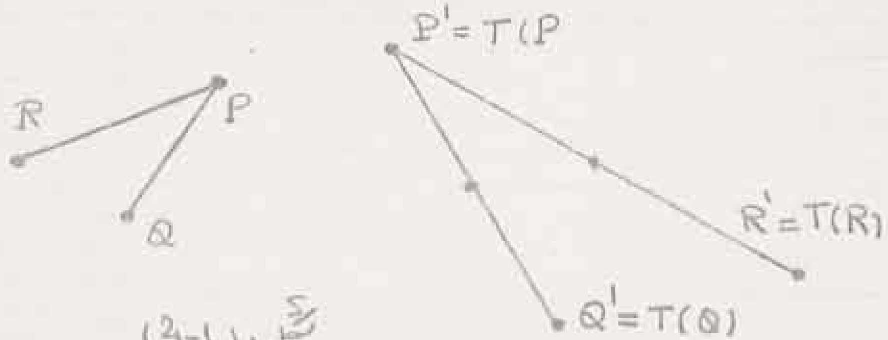
(2). بائیستی نظیر ورقی (1) در صورت یافتن کلمه مناسب دری کلمه دایلیشن نیز تعویض خواهد شد.

موجود گردد تا یکی ازین دو شکل را بر onto دیگرش مپ کند.

مفکوره تشابهات similarities مانند انطباق پذیری congruency کلید دیگر روابط relations را در هندسهٔ اقلیدسی Euclidean Geometry تشکیل میدهد. دو مضلع (چندضلعی) بجسم مشابه گفته میشوند درصورتیکه اضلاع مرتبط آنها باهم متناسب Proportional بوده و زوایای مرتبط آنها باهم انطباق پذیر باشند. طوریکه مفکوره انطباق پذیری مفکورهٔ ایزومتری isometries و مفکورهٔ را تعقیب مینماید؛ بهمین قسم مفکورهٔ تشابهات similarities مفکورهٔ sets دیگر تحولات transformations را که بنام تجانس ویا similitudes یاد میشود هدایت مینماید.

تعریف : Definition

یک تحول T transformation یک تشابه گفته میشود در صورتیکه صرف وتنها صرف یک ثابت $k>0$ موجود گردد طوریکه برای هر جوره نقاط : P و Q فاصله : $P'Q' = k(P,Q)$ گردد درحالیکه $P'=T(P)$ و $Q'=T(Q)$ میباشد.



شکل : (4-1)

شکل: (۹-1) مثلثهای را ارائه میکند که k ربوط آن 2 میباشد. توجه نمائید درصورتیکه $k=1$ باشد درینصورت تحویل transformation مورد نظر عبارت از یک ایزومتری isometry میباشد. باین گفته میتوانیم که ایزومتری ها عبارت از یک ست جزئی (فرعی) subset ، ست سیمیلیتود ها similitudes است. باعث تعجب نیست اگر بگویم که بجز از خاصیت تحفظ فاصله دیگر تمام خواص ایزومتری ها را سیمیلیتود ها نیز دارا میباشند. یا بعبارت دیگر اگر تحویل T عبارت از یک سیمیلیتود similitude باشد، درینصورت T خط را برخط مبدل کرده، خاصیت تحفظ اندازهٔ دشکت زوایا را دارا بوده و حافظ خواص عمودیت و موازات نیز میباشد.

برای اثبات حقیقت اینکه سیمیلیتود T similitude خطوط را برخطوط مبدل میکند، ما یک خط معین t را با دونقطهٔ متفاوت A و B خط t در نظر میگیریم. میخواهیم نشان دهیم که:

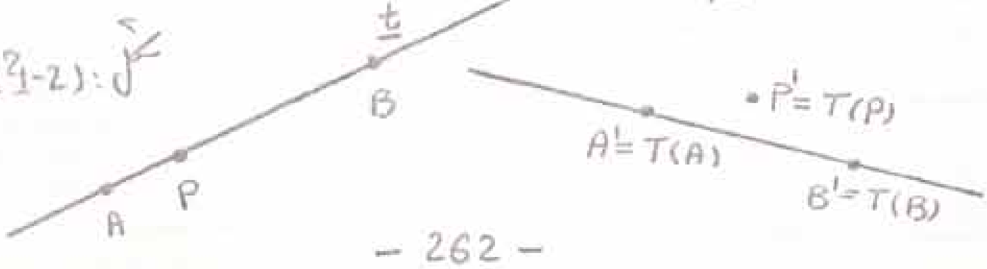
$T(t) = \overleftrightarrow{A'B'}$ میبود.

درحالیکه A' و B' عبارت از $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ میباشند.

درمرحله اول ما ثبوت مینمائیم که $T(t) \subset \overleftrightarrow{A'B'}$ است.

برای رسیدن باین مطلوب ما یک نقطهٔ معینی P خط t را مورد نظر گرفته و نشان میدهیم که $P' \in \overleftrightarrow{A'B'}$ است.

شکل: (۹-2)



اگر P بین نقاط A و B واقع باشد، درینصورت:

$AP+PB=AB$ میشود.

از طرف دیگر: $A'P'=k(AP)$ ،

و $P'B'=k(PB)$ ،

همچنان $A'B'=k(AB)$ میشود.

پس: $A'P'+P'B'=k(AP)+k(PB)$

$=k(AP+PB)$

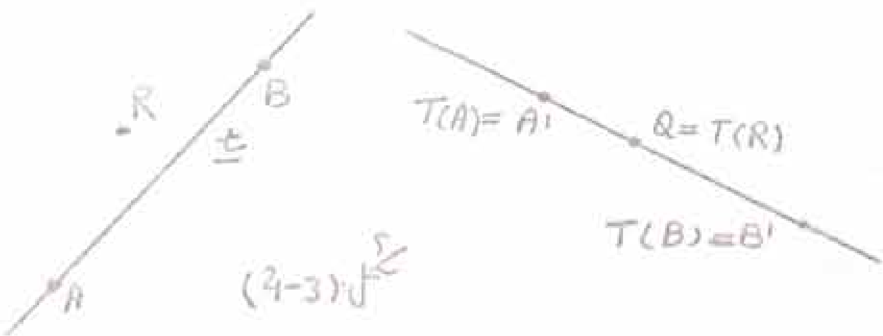
$=k(AB)$

$=A'B'$

ازین رابطه: $AP'+P'B'=A'B'$ نتیجه میشود که P' بین نقاط A' و B' واقع است.

درصورتیکه A بین B و P ویا B بین A و P واقع باشد بازهم ثبات حقیقت اینکه P' بالای $\overleftrightarrow{A'B'}$ واقع باشد فوق صورت گرفته میتواند. پس $P'\in\overleftrightarrow{A'B'}$. چون تمام دو نقطه تیکی مشترک الخط اند، ازین ادعا شده میتواند که تمام تصاویر تمام نقاط خط t مشترک الخط بوده یعنی:

$T(t)\subset\overleftrightarrow{A'B'}$.



شکل (۹-۳)

برای اثبات نمودن: $\overleftrightarrow{A'B'} \subset T(\underline{t})$ نشان باید بدهیم که هر نقطهٔ خط $\overleftrightarrow{A'B'}$ تصویر یک کدام نقطهٔ خط ($\underline{t}$) است.

حال فرض میکنیم که Q یک نقطهٔ خط $\overleftrightarrow{A'B'}$ بوده و تصویر کدام نقطهٔ R که شامل خط $\underline{t}$ نیست میباشد. (زیرا میدانیم که T یک تطبیق از مستوی بر مستوی بوده پس یک نقطهٔ R موجود شده میتواند طوریکه $T(R) = Q$ باشد.) نشان باید داد که:

$$R \in \underline{t}$$ ثابت است.

برای توضیح و اثبات این مطلب فرض مینمائیم که Q بین A' و B' واقع باشد. پس در این صورت ما داریم:

$$A'Q + QB' = A'B' \quad \ldots\ldots (1)$$

درصورتیکه: $R \notin \underline{t}$ پس نتیجه میشود که:

$$AR + RB > AB \text{ ،}$$

و یا اینکه: $k(AR + RB) > k(AB)$ ،

$$k(AR) + k(RB) > k(AB) \text{ ،}$$

و یا: $A'R' + R'B' > A'B'$.

چون $R' = T(R) = Q$

پس در این صورت ما داریم:

$$A'Q + QB' > A'B' \quad \ldots\ldots (2)$$ میشود.

حالانکه نوشته شده است اخیر (2) رابطهٔ شده (1) را نقض میکند. بناءً گفته میتوانیم که $R \notin \underline{t}$ نبوده، بلکه $R \in \underline{t}$ میباشد.

درصورتیکه A' بین Q و B' ؛ و یا اینکه B' بین Q و A' واقع گردد،

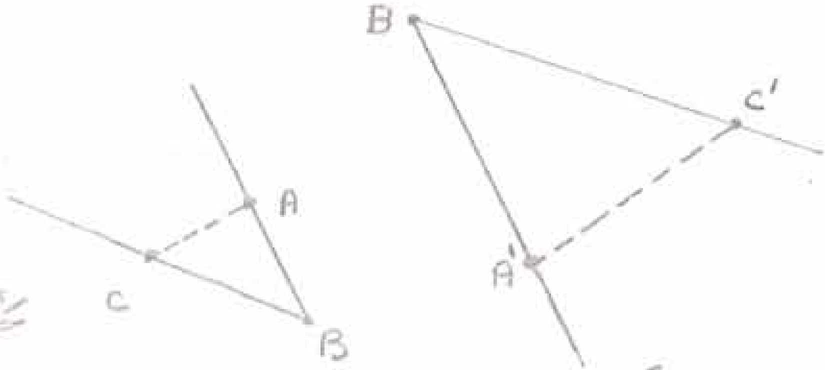
بازهم حقیقت فوق که: $R \in \underline{t}$ است بعین طریق با اثبات رسید.
پس گفته میتوانیم که هر نقطهٔ خط $\overleftrightarrow{A'B'}$ تصویر کدام یک نقطهٔ خط
$\underline{t}$ می‌باشد، پس: $\overleftrightarrow{A'B'} \subset T(\underline{t})$ است.
چون $T(\underline{t}) \subset \overleftrightarrow{A'B'}$ قبلاً ثابت شده،
بنابران حقیقت که خط $\overleftrightarrow{A'B'}$ عبارت از $T(\underline{t})$ با اثبات رسید.
پس شکی با اثبات حقیقت فوق قضیهٔ ذیل را بیان میکنیم:

Theorem .4-1 : قضیه

تصویر هر خط تحت یک سیمیلیتود Similitude
(تجانس) عبارت از یک خط میباشد.

Q. E. D.

برای اثبات حقیقت اینکه سیمیلیتودها Similitudes خط‌ها
وشکل زوایا اند؛ یک مثلث ABC را با تصویر آن $A'B'C'$
تحت یک سیمیلیتود (تجانس) T Similitude در نظر میگیریم.



شکل: (4-4)

نا داریم که: $A'B' = k(AB)$.
$A'C' = k(AC)$.
و هم چنان: $B'C' = k(BC)$.

باساس قضیهٔ تشابه SSS؛ (یعنی اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند مثلث های مذکور باهم متشابه Similar (اند.) ثابت میتوانیم که:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ بوده

در نتیجه $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ میشود،

متکی به ثبوت فوق ما حقیقت قضیهٔ ذیل را ادعا و بیان کرده میتوانیم:

قضیـــه Theorem 4-2:

اگر T یک سیمیلیتود Similitude (تجانس) و $\angle ABC$ یک زاویه باشد، پس $T(\angle ABC) = \angle ABC$ میشود.

نتیجهٔ مهمهٔ ذیل Corollary بصورت از قضیهٔ فوق استخراج شده میتواند:

نتیجـــه مهمه Corollary 4-2:

تحت یک سیمیلیتود Similitude (تجانس) تصاویر خطوط موازی خطوط موازی بوده و تصاویر خطوط متقاطع خطوط متقاطع میباشند.

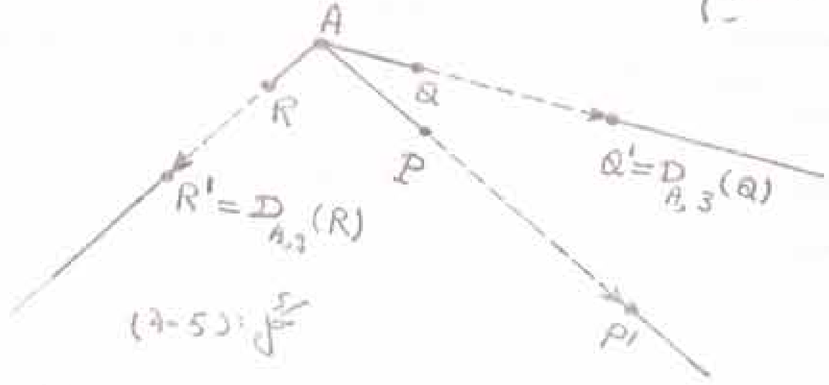
طوریکه در مطالعه ایزومتری ها بملاحظه رسید که دسته برتری تمام ایزومتری ها و انعکاسات خطی تشکیل داده و ضمناً دیده شد که ایزومتری به حد اعظمی به سه انعکاسات خطی تحلیل و تجزیه شده میتوانند؛ بهمین قسم برای بررسی و شناسایی تمام سیمیلیتود ها Similitudes مینگ ای که بنام دایلیشن و یا دیلیشن Dilation موسوم است موجود شده میتوانند.

تعریف :

یک نقطهٔ A ویک عدد مثبت r مفروض اند.
یک مپینگ D دایلیشن Dilation از A
با سکیل فکتور Scale factor r گفته میشود
درصورتیکه:

(1) . $D(A) = A$ بوده و
(2) . برای هر نقطهٔ دیگر P بجز از A، $P' = D(P)$ یک نقطهٔ شعاع $\overrightarrow{AP}$ است
طوریکه: $AP' = r(AP)$ گردد.
(یا بالفاظ دیگر P' نقطهٔ ایست که باشد آن $\overrightarrow{AP'} = r\,\overrightarrow{AP}$ میشود.)

از تعریف فوق بر می آید که برای هر نقطهٔ مفروض A و هر عدد مثبت مفروض r یک دایلیشن واحد Dilation تطابق دارد؛ که ما از آن به $D_{A,r}$ ارائه نمایم.



شکل: (9-5)

حال نشان باید داد که دایلیشن ها Dilations، سیمیلیتود ها Similitudes میباشند. این مطلب بارتثبیت حقیقت که هریک دایلیشن Dilation $D_{A,r}$ عبارت از یک تحویل (یک بیک

یک‌به‌یک one-to-one ای که مستوی را onto بر مستوی (تصویر میکند) بوده و برای هر جوره نقاط متمایز P و Q چنین رابطهٔ: $P'Q' = r(PQ)$ وجود داشته باشد.

برای ثابت ساختن حقیقت رابطهٔ: $P'Q' = r(PQ)$ چندین حالات مختلفه ای که باید مدنظر گرفته شود موجود شده میتوانند:

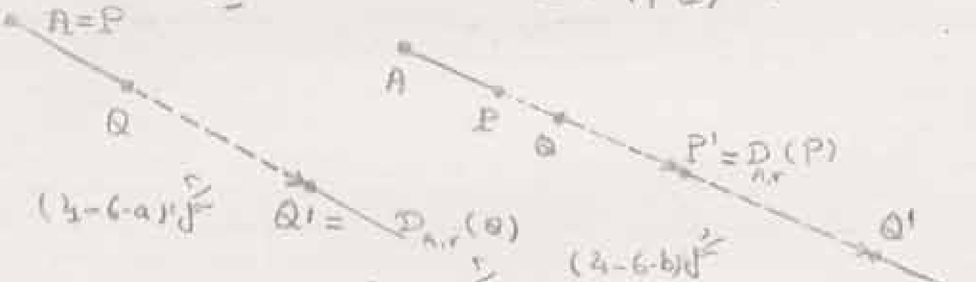
حالت اول:

اگر یکی از نقاط P و Q فرضاً P مرکز دوران Dilation را تشکیل دهد ($P = A$ گردد). مانند شکل (4-6-a)

درینصورت: $P' = A' = A$ گردیده، و

$$P'Q' = AQ' = r(AQ)$$
$$= r(PQ).$$

میشود.



شکل (4-6):

حالت دوم:

اگر Q بالای شعاع $\overrightarrow{AP}$ مانند شکل (4-6-b) قرار گیرد، درینصورت بدون کدام نقص در عمومیت مسئله ما میتوانیم که P را بین A و Q مدنظر گرفته و آنرا طبق ذیل بررسی نمائیم:

درینصورت ما داریم: $AP + PQ = AQ$.

چون $AP < AQ$ است ،

پس $۲(AP) < ۲(AQ)$ بوده ،

و از نتیجه میشود که :

$AP' < AQ'$ میباشد ؛

و چون P' بین نقاط : A و Q' واقع است ،

بنا بر آن : $P'Q' = AQ' - AP'$ میباشد .

و از طرفی ما نوشته میتوانیم که :

$$P'Q' = ۲(AQ) - ۲(AP)$$
$$= ۲(AQ - AP)$$
$$= ۲(PQ) \, .$$

حالت سوم :

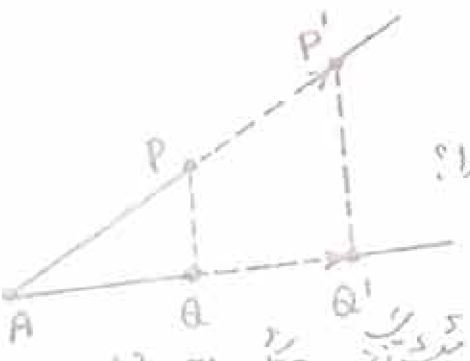
در صورتیکه نقاط : A ، P و Q مشترک الخط نباشند ؛

در نتیجه :

$$AP' = ۲(AP)$$

همچنان : $AQ' = ۲(AQ)$ بوده ، که از تقسیم نمودن

این دو مساوات فوق تناسب ذیل حاصل شده میتواند :



$\dfrac{AP'}{AQ'} = \dfrac{AP}{AQ}$ ،

و یا $\dfrac{AP'}{AP} = \dfrac{AQ'}{AQ}$ چرا ؟

بنا بر تطبیق قضیه ت ت به SAS (که اگر دو ضلع دو مثلث شکل : (۲۹-۷)

و زاویه بینی آن دو ضلع به انطباق قرار باشند مثلث ها با هم متشابه اند .)

ما داریم که: $\triangle AP'Q' \sim \triangle APQ$ بوده و بالنتیجه

میتوانیم بنویسیم که:

$$\frac{AP'}{AP} = \frac{P'Q'}{PQ} = r \, .$$

و یا اینکه:

$$P'Q' = r(PQ) \, .$$

ازین برمی‌آید که برای تمام نقاط P و Q:

$P'Q' = r(PQ)$ میباشد.

حال نشان باید داد که $D_{A,r}$ عبارت از یک تحویل یا Transf. میباشد.
برای ثبیت این حقیقت نشان باید داد که $D_{A,r}$ یک میپنگ یک بیک one-to-one بوده و مستوی را بر مستوی onto مپ میکند.
برای توضیح یک بیک بودن دایلیشن $D_{A,r}$ میبینیم که هر نقطهٔ مستوی محض دارای یک تصویر است. حال فرض مینمائیم که دو نقطهٔ متفاوت J و K موجود شده میتوانند طوریکه تصاویر اینها: J' و K' با هم مشابه یعنی $J' = K'$ باشند. درینصورت:

$J'K' = 0$ میشود، حالانکه بنابر

اثبات پیشتر: $J'K' = r(JK)$ است.

پس درینصورت: $r(JK) = 0$ میگردد.

ازینکه r متحول مثبت است پس $r \neq 0$ بوده،

در نتیجه: $JK = 0$

و ازین برمی‌آید که: $J = K$ است.

رابطهٔ اولی یک بیک بودن one-to-one دایلیشن Dilation را تکمیل میکند.

بالعلاوه به ثبوت باید رساند که دایلیشن Dilation مستوی را بر تمام مستوی میپ میکند. برای ارائه این مطلب ثابت باید نمود که برای هر نقطهٔ Y مستوی یک نقطهٔ X در مستوی موجود شده میتواند طوریکه: $D_{A,2}(X)=Y$ گردد.

برای رسیدن باین هدف شعاع $\overrightarrow{AY}$ را در نظر گرفته دیگر نقطهٔ X شعاع $\overrightarrow{AY}$ را انتخاب مینمائیم طوریکه:

$$AX=\frac{1}{2}(AY)$$

شود

درینصورت دیده میشود که: $D_{A,2}$ نقطهٔ X را بر Y میپ میکند؛ واین ثبوت حقیقت را که هر دایلیشن را یک تحویل Transformation ادا میکند، تکمیل میسازد. درنتیجه حقیقت قضیهٔ ذیل را بیان کرده میتوانیم:

قضیهٔ Theorem 4-3:

هر دایلیشن Dilation یک سیمیلیتود است.

از اینکه سیمیلیتودها similitudes خطوط را بر خطوط میپ کرده و حافظ خاصیت موازات parallelism و حافظ خاصیت عمودیت perpendicularity میباشند؛ ازین نتیجه میشود که دایلیشن ها Dilations نیز دارای عین خواص میباشند. ولی ما ازین نیز جلوتر رفته و قضیهٔ ذیل را اثبات نموده و ثبوت آنرا بیک تمرین واگذار میشویم:

قضیهٔ Theorem 4-4:

اگر ℓ و ℓ' دو خط طوریکه ℓ' تصویر ℓ تحت دایلیشن $D_{A,2}$ است موجود باشند، پس درینصورت:

(1). اگر $A\in\ell$ باشد، $\ell=\ell'$ است و

(2). اگر $A\notin\ell$ باشد، پس $\ell\parallel\ell'$ میباشد.

Problem Set 4-1 : تمرینات

۱. نقاط A، P و Q طبق آنچه داده شده، ترسیمات مطلوب را اجرا کنید:

(a) $D_{A,2}(P)$ را،

(b) $D_{A,\frac{1}{2}}(Q)$ را.

2. نقاط A، P، Q و R مفروض اند، $D_{A,k}(R)$ را رسم کنید، در صورتیکه:

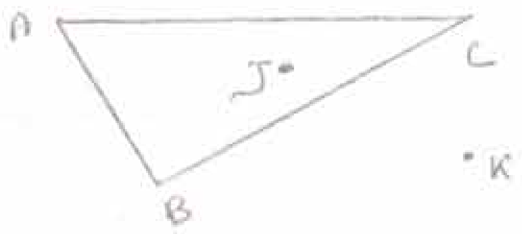
(a) $D_{A,k}(Q)=P$ باشد،

(b) $D_{A,k}(P)=Q$ باشد.

3. مثلث $\triangle ABC$ با نقاط J و K مفروض اند، ترسیمات ذیل را رسم کنید:

(a) $D_{J,1/3}(\triangle ABC)$ را.

(b) $D_{K,\frac{2}{3}}(\triangle ABC)$ را.



4. نقاط غیر مستقیم الخط A، P و Q داده شده اند ترسیمات ذیل را انجام دهید:

(a) X را پیدا کنید طوریکه $D_{A,\frac{2}{3}}(X)=P$ شود،

(b) $P'=A_{A,\sqrt{2}}(P)$ را.

(c) $Q'=A_{A,\sqrt{3}}(Q)$ را.

5. قضیه: 2-2 را با اثبات برسانید. استدلال کنید.

6. (a). اگر $D_{A,r}$ یک دایلیشن Dilation باشد، $D^{-1}_{A,r}$ چیست؟

(b). P را با شرایط K پیدا کنید اگر $D_{A,\frac{3}{4}}(P)=K$ باشد.

(c). $(D_{A,2})^2$ را ساده سازید.

7. $\triangle ABC$ مفروض است. نقطهٔ E را تعیین کنید در صورتیکه: $D_{E,r}(A)=C$ گردیده و مساحت شکل مذکور رابطهٔ ذیل را وجود دارد:

مساحت $\triangle ABC = 4[$مساحت$(\triangle A'B'C')]$

درحالیکه: $\triangle A'B'C' = D_{E,r}(\triangle ABC)$ است.

8. مثلث $\triangle ABC$ و نقطهٔ F مفروض اند.

(a). مثلث $\triangle AB'C' = D_{F,r}(\triangle ABC)$ را رسم کنید در صورتیکه $C \in \overline{AB'}$ باشد.

(b). مثلث $\triangle A''B''C'' = D_{F,S}(\triangle ABC)$ را رسم کنید درصورتیکه مساحت $(\triangle A''B''C'') = 3\cdot[$مساحت$(\triangle ABC)]$ باشد.

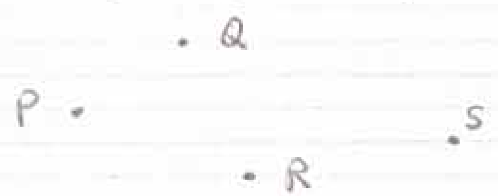
9. نقاط: P، Q، R و S طبق ذیل داده شده اند:

(a). دایلیشن $D_{A,k}$ را در نظر بگیرید طوریکه دایلیشن مذکور P را به Q و R را به S مپ میکند، نقطهٔ A را تعیین کنید.

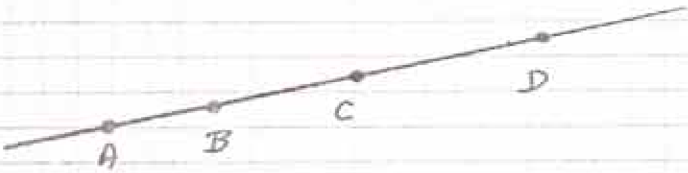
(b). آیا یک دایلیشن که P را به S و R را به Q مپ کند موجود شده میتواند؟

(c). آیا یک دایلیشن که P را به R و Q را به S مپ کند موجود شده میتواند؟

(d). اگر A، B، C و D چهار نقاطی که هیچ سه آن مشترک الخط نیستند مفروض باشند. وجود کدام شرط لازم است که موجودیت یک دایلیشن که A را به B و C را به D مپ کند تضمین نماید؟



10. اگر نقاط A، B، C و D نقاط مشترک الخط طوریکه ذیلاً ارائه شده، موجود باشند، و اگر $D_{E,k}$ یک دایلیشن Dilation که A را بر B و C را بر D مپ میکند داده شده باشد، E را تعیین کنید.
[کمک: کدام نقطهٔ دیگر مانند X را در نظر گرفته و تصویر آن تحت $D_{E,k}$ بدست آرید.]



11. صحیح و غلط هر یک از حالات ذیل را تشخیص کنید:

(a). اگر $D_{A,r}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$ باشد، پس $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ میباشد.

(b). اگر $D_{A,r}(P) = D_{B,k}(P)$ برای کدام نقطهٔ P باشد، پس در نتیجه: $A=B$ و $r=k$ میباشد.

(c). اگر $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ باشد، پس در نتیجه یک دایلیشن ای که $\overline{AB}$ را بر $\overline{CD}$ مپ میکند موجود شده میتواند.

(d). اگر C نقطهٔ سنترواید centroid (محل تقاطع میانه‌ها) مثلث $\triangle EFG$ بوده و $C^* = D_{E,3/2}(C)$ باشد پس $D_{G,2}(C^*) = F$ میشود.

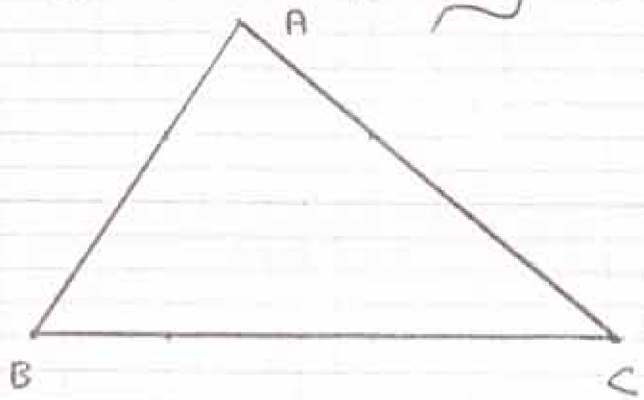
12. اگر نقطهٔ O عبارت از مبدأ محورات کمیات وضعیه بوده و $B=(2,5)$ باشد، مختصات نقطهٔ $B' = D_{O,k}(2,5)$ را پیدا کنید.

13*. اگر نقطهٔ O عبارت از مبدأ محورات کمیات وضعیه و $P(x,y)$ کدام نقطهٔ مستوی بوده کمیات وضعیه نقطهٔ $D_{O,k}(P)$ را بدست آرید.

14. کمیات وضعیه نقطهٔ A را دریافت کنید درصورتیکه $D_{A,k}$ نقطهٔ $E(1,2)$ را بر نقطهٔ $F(2,6)$ وهمچنان نقطهٔ $G(3,0)$ را بر نقطهٔ $H(7,1)$ مرتسم کند.

15. برای هر نقطهٔ داده شده $P(x,y)$ کمیات وضعیه $D_{A,3}(P)$ را بدست آرید درصورتیکه $A=(-2,3)$ باشد.

16. شکل $\triangle ABC$ طبق ذیل موجود است.
مربعی را رسم کنید که یک ضلع آن بالای ضلع $\overline{BC}$ شکل و یک رأس آن بالای ضلع $\overline{AC}$ و رأس دیگرش بالای ضلع $\overline{AB}$ شکل مذکور واقع گردد.



"A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas."

G. H. Hardy
[2, p. 24]

4-2. ترکیب دالیشن‌ها

Compositions Of Dilations

"Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics."

G. H. Hardy
[2, p. 25]

طوریکه در بررسی ایزومتری‌ها isometries ترکیب نگاشت‌ها بیشتر توجه ما را بخود جلب مینمودند؛ بهمین قسم دالیشن‌ها Dilations ها عبارت از تبدیلات transformations خوش سلوک اند، که در تشکیل ترکیب نگاشت‌ها را که حاوی یک ویا چند دالیشن باشد باعث ایجاد دگرگونی شکل نمیگردند. یک تطبیق آن در دریافت فرمول کمیات وضعیه نگاشت دالیشن‌ها با شاخص یک نقطهٔ داده شده میباشد.

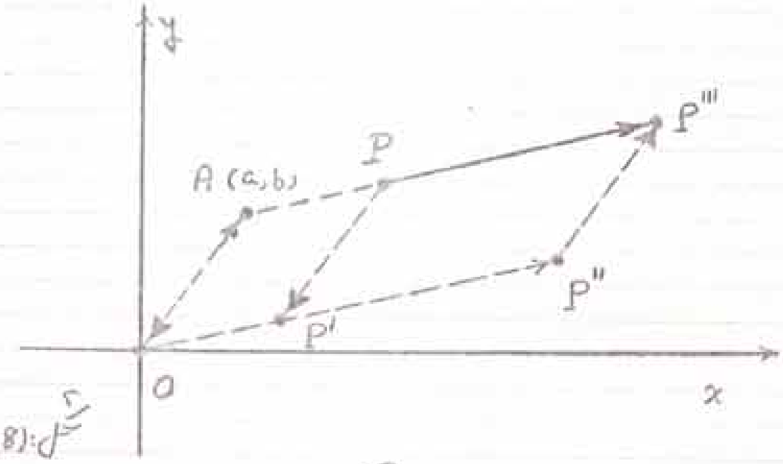
اگر O مبدأ کمیات وضعیه باشد بسهولت نشان میتوان داد که برای هر نقطهٔ $P(x,y)$:

$$D_{O,r}(x,y) = (rx, ry)$$ میشود.

ولی اگر مطلب تعیین فرمول کمیات وضعیه دالیشن Dilation با شاخص کدام نقطهٔ دیگر غیر O فرضاً A باشد، درینصورت مسئله شکل دیگری را بخود میگیرد. حل این مسئله را در تبدیل افادهٔ دالیشن $D_{A,r}$ را بحیث ترکیب سه نگاشت جستجو میتوان کرد؛ طوریکه نگاشت ویا ترکیب اول آنرا عبارت از یک انتقالی Translation که نقطهٔ A را به مبدا O سوق میکند تصور نموده، و نگاشت دوم آنرا عبارت از دالیشن از مبدأ (O) با نسبت تشابه تصور نموده، و بالآخره نگاشت سوم آنرا

بحیث یک انتقال translation که مبدأ "O" را به A
می‌فرستد تصور نموده می‌توانیم، در نتیجه داریم:

$$D_{A,r} = S_{OA}\, D_{O,r}\, S_{AO} \; .$$



شکل (4-8):

برای دریافت فرمول $D_{A,r}$ در حالیکه $A=(a,b)$ می‌نویسیم که:

$$D_{A,r}(P) = S_{OA}\, D_{O,r}\, S_{AO}(P)$$

$$= S_{OA}\, D_{O,r}\,[(x-a\,,\,y-b)]$$

$$= S_{OA}[(r[x-a], r[y-b])]$$

$$= (rx-ar+a,\; ry-br+b) \; .$$

حال نتیجه فوق را به یک قضیه در ذیل بیان میکنیم:

قضیه Theorem . 4-5:

اگر $D_{A,r}$ یک دایلیشن از نقطهٔ $A(a,b)$ با فکتور
بشکل r scale معروض باشد، پس برای هر نقطهٔ $P(x,y)$
میشود $D_{A,r}(P) = (rx + a[1-r],\; ry + b[1-r])$.

پس هرنگاشت T که برای هر نقطه $P(x,y)$ توسط:

$T(P) = (rx+c,\ ry+d)$ توضیح شود،

درحالیکه $r>0$ و $r\neq 1$ باشد بحیث یک دالیشن Dilation شناخته میشود.

برای تعیین کردن مرکز دالیشن Dilation ما از افاده ذیل مستفید میشویم:

$$c = \frac{c}{1-r}(1-r)$$

پس درنتیجه:

$T(P) = \left(rx+\frac{c}{1-r}(1-r),\ ry+\frac{d}{1-r}(1-r)\right)$ میشود.

حال با شناسایی قضیه 4-5 دیده میشود که T یک دالیشن Dilation را از نقطه:

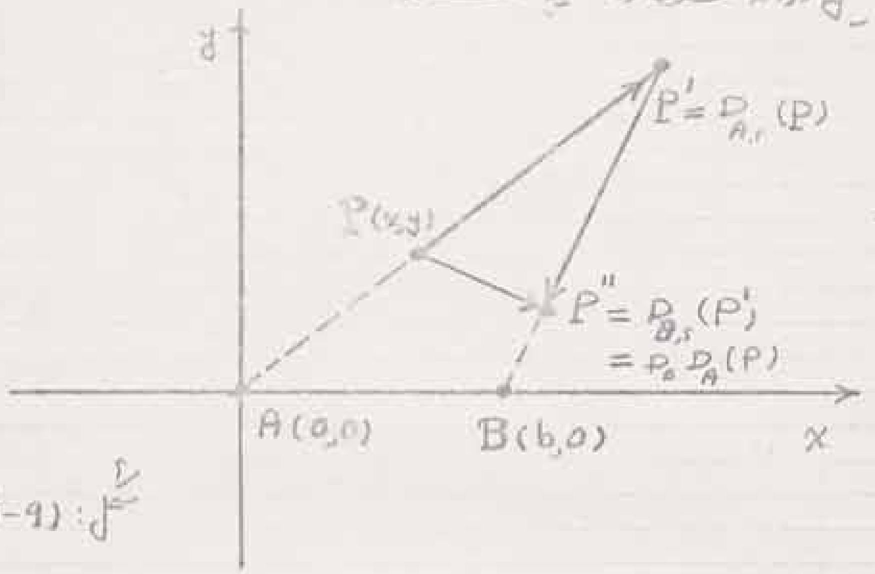
$\left(\frac{c}{1-r}, \frac{d}{1-r}\right)$ با سکیل فکتور r scale

تعریف مینماید.

اکنون بحیث یک تطبیق قضیه 4-5 نشان خواهیم داد که حاصل ترکیب دو دالیشن Dilations با در نظر داشت بعضی استثنات مهم بصورت عموم یک دالیشن پیدا شد.

برای ایضاح این مطلب دو دالیشن $D_{A,r}$ و $D_{B,s}$ را در نظر میگیریم. از اینکه ما به انتخاب سیستم کمیات وضعیه آزاد هستیم پس برای سهولت مسأله خویش مبدأ سیستم کمیات وضعیه را نقطه A انتخاب نموده و $\overleftrightarrow{AB}$ را بحیث قسمت مثبت محور X انتخاب مینمایم.

درصورتیکه: $A=(0,0)$ و $B=(b,0)$ طوریکه در شکل (۴-۹) ذیل ارائه شده اند، میباشند.



شکل: (۴-۹)

با تطبیق قضیه (4-5) برای هر نقطه $P(x,y)$ داریم:

$$D_{A,r}(P)=(rx, ry).$$

و هم چنان: $D_{B,s}(P)=(sx+b[1-s], sy).$

از ترکیب دو رابطه فوق نتیجه میشود که:

$$D_{B,s}D_{A,r}(P)=B_{B,s}(rx, ry)$$
$$=(s[rx]+b[1-s], s[ry])\cdots(1)$$

درصورتیکه $rs\neq 1$ باشد، نوشته میتوانیم که:

$$D_{B,s}D_{A,r}(P)=\left([rs]x+\frac{b-bs}{1-rs}[1-rs], [rs]y\right).$$

از قضیه (4+5) با نتیجه گرفتیم که حاصل ترکیب دو دایلیشن $D_{A,r}$ و $D_{B,s}$ عبارت از یک دایلیشن از نقطه $C((b-bs)/(1-rs), 0)$ با ضریب مشهور scale rs میباشد.

همچنان ثابت معده میرشد که مرکز این ترکیب دایلیشن یعنی نقطهٔ C بالای خط $\overleftrightarrow{AB}$ واقع است. زیرا مختصات y آن صفر (0) است.

از طرف دیگر اگر $rs=1$ و $A \neq B$ باشد پس $b \neq 0$ بوده و از مشاهدت (1) فوق ملاحظه میشد که درصورت محصله ترکیب چینک مورد نظر عبارت از یک انتقال Translation ای که جهت آن موازی $\overleftrightarrow{AB}$ است میباشد. زیرا درینجا هر نقطهٔ $P(x,y)$ به نقطهٔ $P'(x+b-bs, y)$ سبب میشود که این تحقیق یک انتقال است.

Corollary . 4-5.A : نتیجهٔ مهم :

نتیجه ترکیب دو دایلیشن $D_{A,r}$ و $D_{B,s}$ درصورتیکه $A \neq B$ باشد عبارت از یک دایلیشن $D_{C,rs}$ است، طوریکه $C \in \overleftrightarrow{AB}$ بوده و $rs \neq 1$ باشد. درصورتیکه $rs=1$ باشد، محصلهٔ ترکیب مذکور عبارت از یک انتقال که موازی به $\overleftrightarrow{AB}$ است میباشد.

یکبار دیگر به معادله (1) مراجعه نموده و آنرا تحلیل میکنیم: درصورتیکه هر دو دایلیشن های موضوع دارای همین مرکز فرضاً A باشد، درینصورت دیده میشود که محصلهٔ ترکیب اینها نیز یک دایلیشن از A میباشد. علاوه بر آن اگر شکل فکتورها Scale factor هر دو دایلیشن موضوع معکوس یکدیگر یعنی ($rs=1$) باشد، درینصورت محصلهٔ ترکیب آن عبارت از یک تبدیل عینیت I Identity میباشد. متکی باین حقایق ما نتایج مهمهٔ ذیل را بیان میکنیم:

نتیجهٔ مهمهٔ : Corollary . (4-5-b)

اگر $D_{A,r}$ و $D_{B,s}$ که از یک نقطهٔ مشترک A نشئت کنند، موضوع باشند،

درصورتیکه : $rs \neq 1$ باشد، نتیجهٔ ترکیب

اینها : $D_{A,r} D_{A,s} = D_{A,rs}$ میباشد.

واگر : $rs = 1$ باشد، درینصورت حاصل

ترکیب اینها $D_{A,r} D_{A,s} = I$ میباشد.

نتیجهٔ مهمهٔ : Corollary . (4-5-c)

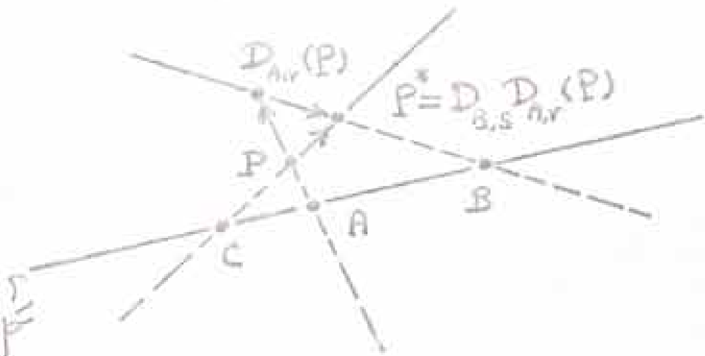
برای هر دایلیشن $D_{A,r}$ معکوس آن

$D_{A,r}^{-1} = D_{A,\frac{1}{r}}$ میباشد.

برای تعیین مرکز دایلیشن ترکیب $D_{B,s} D_{A,r}$ ضرورتست تا یک نقطهٔ کیفی P راکه بالای $\overleftrightarrow{AB}$ نباشد تعیین نموده و تصویر ویرا طبق ذیل بدست آریم :

$$P^* = D_{B,s} D_{A,r} (P)$$
$$= D_{C,rs} (P).$$

حال اگر توجه شود دیده میشود که بنابر تعریف دایلیشن نقطهٔ C بالای خط $\overleftrightarrow{PP^*}$ واقع است. و از نتیجهٔ مهمهٔ 4-5-A ملاحظه میرسد که $C \in \overleftrightarrow{AB}$ است. در نتیجه ادعا شده میتوانند که : $\{C\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{PP^*}$ میباشد.

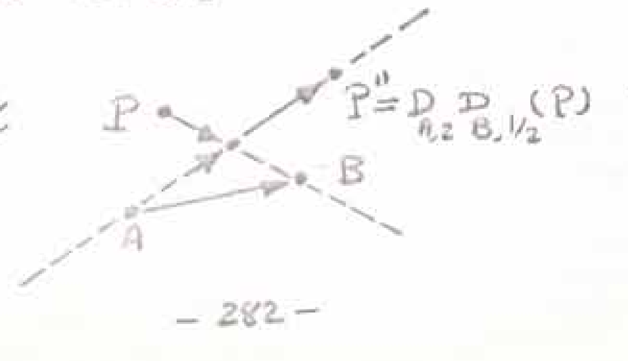


شکل (4-10)

فوقاً ملاحظه رسید که محصل ترکیب دو دایلیشن Dilations موضوعی یا یک دایلیشن است / و یا یک انتقال Translation. ولی راجع به ترکیب دایلیشن‌ها همراه انواع دیگر ایزومتری‌ها چیزی نگفته‌ایم، از ترکیب یک دایلیشن Dilation با یک انتقال Translation یک دایلیشن حاصل میشود. ثبوت این مطلب آتی نشانی صورت گرفته میتواند، در صورتیکه ما هر انتقال را بحیث محصل ترکیب دو دایلیشن بشناسیم.

قضیــــــه ۶-۴: Theorem 4-6:

گر انتقال S_{AB} که و دایلیشن‌های $D_{A,2}$ و $D_{B,\frac{1}{2}}$ موضوعی باشند، پس $S_{AB} = D_{A,2} D_{B,1/2}$ میباشد.



شکل (4-11):

ثبوت : Proof

ازینکه دایلیشن های مربوطه دارای فکتورهای معکوس میباشند ، بنابر تطبیق نتیجه مهمه (4-5.A) ادعا میشود که محصول ترکیب دو دایلیشن $D_{A,2}\,D_{B,1/2}$ عبارت از یک انتقال که ما ازان S_{CD} نام میگذاریم میباشد. حال میخواهیم نشان دهیم که:

$$S_{CD} = S_{AB}$$

است ، که این مطلب بنابر ثبوت رابطهٔ $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{AB}$ برآورده میشود .

اگر تصویر B را تحت S_{CD} در نظر بگیریم ؛ درینصورت :

$$S_{CD}(B) = D_{A,2}\,D_{B,\frac{1}{2}}(B)$$

$$= D_{A,2}(B)$$

$$= B''$$

میشود .

درحالیکه B نقطهٔ وسطی $\overline{AB''}$ است .

پس

$$\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{BB''} \quad .$$

اما ازینکه : . . . $S_{CD}(B) = B''$ میباشد ، ازین نتیجه

میشود که : . . . $\overrightarrow{BB''} \doteq \overrightarrow{CD}$ است .

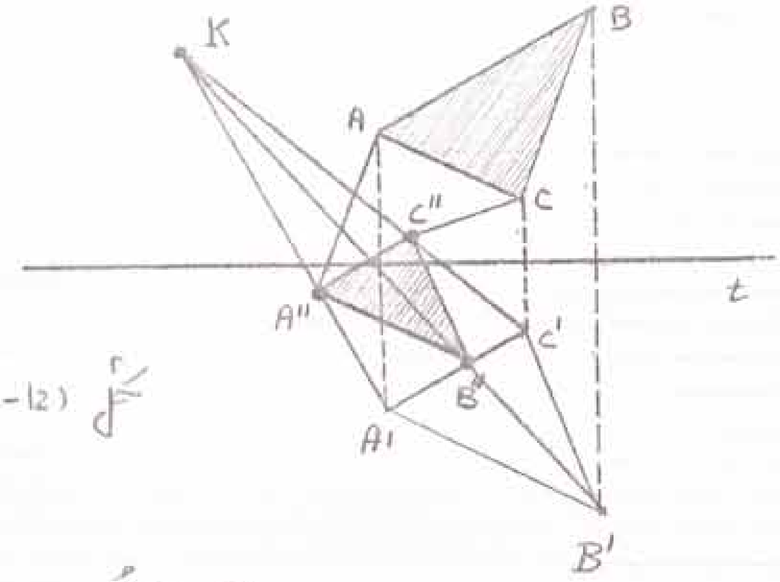
بنابران $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ میبوده ،

درنتیجه $S_{AB} = S_{CD} = D_{A,2}\,D_{B,1/2}$ میباشد .

Q . E . D .

زمانیکه یک دایلیشن با یک انعکاس خطی ویا یک دوران اجتماع نموده ویکجا شود ، درینصورت محصول ترکیب آنها نه یک دایلیشن ونه یک ایزومتری شده میتوانند ؛ چنانچه توضیح این مطلب از ملاحظهٔ شکل (2-12) بخاطر رسیده میتواند .

بنا بر قضیهٔ شکل $\triangle ABC$ با تصویر آن تحت مپینگ $D_{K,\frac{2}{3}} M_t$
که عبارت از شکل $\triangle A''B''C''$ است دیده میشود که مپینگ ترکیب
یک ایزومتری نمی باشد . علاوه بر آن عدم هم جهت بودن خطوط :



شکل (4-12)

خطوط: $\overleftrightarrow{AA''}$ ، $\overleftrightarrow{BB''}$ و $\overleftrightarrow{CC''}$ تضمین میکند که مپینگ مرکب $D_{K,\frac{2}{3}} M_t$
یک دالیشن نمی باشد .

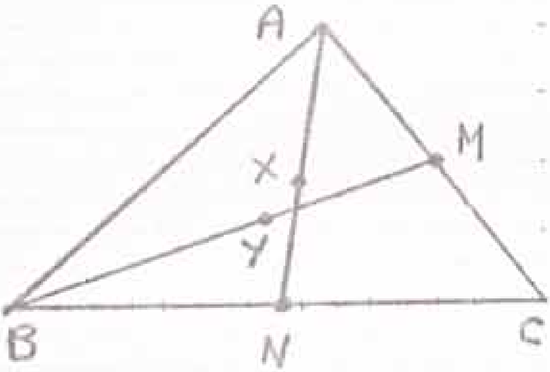
اگرچه حاصل ترکیب یک دالیشن با یک انعکاس خطی نه یک دالیشن
و نه یک ایزومتری بوجود آمده میتواند با آنهم خوب نیست که ما در وجود
یک حس عدم رضایت ترتیب را در خویش راه دهیم .
به سهولت نشان میتوان داد که این حاصل ترکیب عبارت از یک سیمیلیتود
تجانس Similitude است . و ضمناً تا شانی نشان داده
شده میتواند که حاصل ترکیب دو سیمیلیتود Similitudes یک
سیمیلیتود Similitude است ؛ درحالیکه ایزومتری ها نیز

ایزومتری‌ها عبارت از سیمیلیتودی‌هایی اند که دارای scale factor 1 میباشند، و همچنان هر دایلیشن یک سیمیلیتود است. پس شکلی باین روش قضیه ذیل را بیان کرده میتوانیم:

قضیه Theorem . 4-7 :

محصول ترکیب دایلیشن‌ها و ایزومتری‌ها هر عده که باشند عبارت از یک سیمیلیتود میباشد.

ما این مبحث را توسط اثبات تحلیلی حقیقت یک قضیه را که تقاطع میانه‌ها medians یک مثلث را در یک نقطه ای که باندازه دو ثلث طول میانه‌ها از راس مربوطه آن‌ها واقع بوده مدعی است ختم مینمائیم.



در مثلث $\triangle ABC$ موجوده نقاط M و N را علی الترتیب بحیث نقاط وسطی اضلاع $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ آن قبول نمائید. یک نقطه X را روی میانه $\overline{AN}$ و همچنان یک نقطه Y را روی میانه $\overline{BM}$ انتخاب نمائید طوریکه: $AX = 2(XN)$ و $BY = 2(YM)$ باشند.

پس نشان باید داد که $X = Y$ میباشد.

چون .... $\left.\begin{array}{l} X = D_{A,2/3}(N) \\ N = D_{B,1/2}(C) \text{ و} \end{array}\right\}$

پس: ...... $X = D_{A,2/3} D_{B,\frac{1}{2}}(C)$ میشود.

از آنکه .... $\left.\begin{array}{l} D_{A,\frac{2}{3}}^{-1} = D_{A,\frac{3}{2}} \\ D_{B,\frac{1}{2}}^{-1} = D_{B,2} \end{array}\right\}$

پس درنتیجه ...... $C = D_{B,2} D_{A,\frac{3}{2}}(X)$

از طرف دیگر ما داریم: $Y = D_{B,\frac{2}{3}} D_{A,\frac{1}{2}}(C)$.

بعد از تعویض کردن ما داریم:

$Y = D_{B,\frac{2}{3}} D_{A,\frac{1}{2}} D_{B,2} D_{A,\frac{3}{2}}(X)$.

باکاربرد تطبیق نتیجه ضمیمه 4-5.B و نوشته میتوانیم که:

و چون: $\left.\begin{array}{l} D_{B,\frac{2}{3}} = D_{B,\frac{1}{3}} D_{B,2} \\ D_{A,3/2} = D_{A,\frac{1}{2}} D_{A,3} \text{ و} \end{array}\right\}$

پس درنتیجه ما داریم که:

$$Y = (D_{B,\frac{1}{3}} D_{B,2}) D_{A,\frac{1}{2}} D_{B,2} (D_{A,\frac{1}{2}} D_{A,3})(X)$$

$$Y = D_{B,\frac{1}{3}} (D_{B,2} D_{A,\frac{1}{2}}) (D_{B,2} D_{A,\frac{1}{2}}) D_{A,3}(X)$$

بنابر تطبیق قضیه 4-6 ما نوشته میتوانیم که:

$$Y = D_{B,1/3}\, S_{BA}\, S_{BA}\, D_{A,3}(X)$$

$$Y = D_{B,1/3}\, S_{2BA}\, D_{A,3}(X) \qquad \text{بنا بر تکیه :}$$

بعین طریقه در قضیه 4-6 ما ثابت نمودیم که :

$$S_{BA} = D_{B,2}\, D_{A,1/2}$$

نشان میتوان داد که :

$$S_{::BA} = D_{B,3}\, D_{A,1/3}$$

بنابران :

$$Y = D_{B,1/3}(D_{B,3}\, D_{A,1/3})D_{A,3}(X)$$

$$= (D_{B,1/3}\, D_{B,3})(D_{A,1/3}\, D_{A,3})(X)$$

$$= [(I)(I)](X)$$

$$= X$$

بهمین طریق نشان داده میتوانیم که اگر Z باندازهٔ دو ثلث طول میانه که از رأس C رسم میشود از رأس مربوطهٔ آن واقع باشد ، پس درنتیجه $X = Z$ نیز میشود .

موجودیت رابطهٔ : $X = Y = Z$ اثبات قضیه را تکمیل میکند .

Q.E.D.

Problem Set 4-2 : تمرینات

1. نقاط : A ، B و P مفروض اند:

(a). "P را تعیین کنید طوریکه $P''=D_{A,1/2}D_{B,3}(P)$ باشد،

(b). $P^*=D_{B,3}D_{A,1/2}(P)$ را رسم کنید.

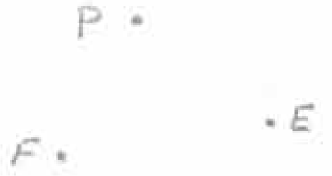
(c). اگر $D_{A,1/2}D_{B,3}=D_{C,r}$ باشد، نقطه C را تعیین و r را بدست آورید.

2. نقاط : E ، F و P مفروض اند:

(a). $P''=D_{F,3/2}D_{E,2/3}(P)$ را رسم کنید.

(b). $P^*=D_{E,2/3}D_{F,3/2}(P)$ را تعیین کنید.

(c). فواصل PP'' و PP^* را با طول EF بدست آورید.



3. قطعه متجه موجه $\overrightarrow{AB}$ و نقاط C و P مفروض اند:

(a). $P''=D_{C,2}S_{\overrightarrow{AB}}(P)$ را رسم کنید.

(b). $P^*=S_{\overrightarrow{AB}}D_{C,2}(P)$ را رسم کنید.

(c). تمام نقاط X را تعیین کنید طوریکه: $D_{C,2}S_{\overrightarrow{AB}}(X)=X$ گردد.

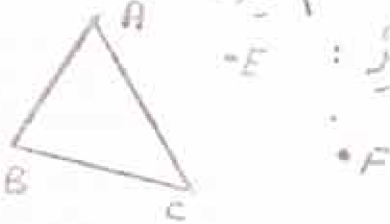
4. قطعه خط $\overline{AB}$ و نقطه P داده شده. اگر P مرکز ثقل (محل تقاطع میانه‌ها)
یا centroid مثلث $\triangle ABC$ باشد، دو تحویلی
که P را بر C onto می‌کند تشخیص کنید.

5. مثلث $\triangle ABC$ و نقاط E و F موجود اند.

(a). $H_F D_{E,2/3}(\triangle ABC)$ را رسم کنید.

(b). نقطه K را تعیین کنید طوریکه:

$H_F D_{E,2/3}(K)=A$ گردد.



6. اگر $\triangle A'B'C' = D_{E,3/4} D_{F,2} R_{E,30}(\triangle ABC)$ بوده و ساحه
مثلث area $\triangle ABC = 6$ باشد، ساحه
مثلث $\triangle A'B'C'$ را دریافت کنید.

7. صحیح و غلط بودن هر کدام از شواهدات ذیل را تشخیص کنید:-

(a). Set تمام دایلیشن‌ها که از یک نقطه ثابت میگذرند یک گروه
Group را بوجود می‌آورند.

(b). برای هر دو دایلیشن $D_{A,r}$ و $D_{B,s}$:

$(D_{A,r} D_{B,s})^{-1} = D_{B,s} D_{A,r}$ میشود.

(c). اگر برای کدام نقطه K،

$D_{A,r}(K) = D_{B,r}(K)$ گردد، پس $A=B$ میشود.

(d). اگر $D_{A,\frac{2}{3}} D_{B,k}$ دارای هیچ نقطهٔ ثابت نباشد،
پس برای هر نقطه P: $\overleftrightarrow{PP^*} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ بوده درحالیکه:
$P^* = D_{A,\frac{2}{3}} S_{BC} D_{B,k}(P)$ میباشد.

8. (a). X را با شناس K بدست آورید درصورتیکه:
$D_{A,1/2}\, S_{BC}\, D_{E,4}(X) = K$ گردد.
(b). $D_{A,1/2}\, S_{AB}\, D_{B,4}$ را ساده کنید.

9. هر یک از قضایای ذیل را ثابت کنید:
(a). اگر T و L ایزومتری باشند پس TL نیز ایزومتری است.
(b). اگر $D_{C,r}$ و $D_{C,s}$ دو دایلیشن که دارای مرکز مشترک C اند، باشند پس: $D_{C,r} D_{C,s} = D_{C,s} D_{C,r}$ میباشد.
(c). برای هر انتقال S_{AB} و هر دایلیشن $D_{C,r}$ یک نقطهٔ E موجود شده میتواند طوریکه:
$D_{C,r}\, S_{AB} = D_{E,r}$ گردد.

10. برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ درصورتیکه $A=(1,3)$ باشد:
(a). $D_{A,3/4}(P)$ را تعیین کنید.
(b). درصورتیکه $\ell = \{(x,y): 2x+y=8\}$ باشد، معادله: $D_{A,3/4}(\ell)$ را بنویسید.

11. تحویل یا را تشخیص کنید که برای هر نقطه: $P(x,y)$:
$L(P) = (3x+7,\ 3y-9)$ میشود.

12. اگر $A=(1,2)$ و $B=(4,10)$ باشند با استفاده از اشکال یک دایلیشن مناسب کمیات رقمیه نقاط ذیل را تعیین کنید:

(a). مختصات وضعیه E را تعیین کنید در صورتیکه $E \in \overline{AB}$ بوده و فاصله آن از A باندازه $\frac{2}{5}$ فاصله A از B باشد.

(b). مختصات وضعیه F را مشخص کنید طوریکه B بین A و F واقع بوده $BF = 3AB$ گردد.

13. (a). درصورتیکه $A \neq B$ باشد ثابت کنید که $D_{A,3} D_{B,1/3} = S_{2AB}$ میشود.

(b). $D_{A,1/3} D_{B,3}$ را ساده سازید.

(c). یک قضیه عمومی‌تر را متکی باثبات حقیقت (a) بیان کنید.

14. اگر نقاط: $A(0,0)$ ، $B(7,2)$ و $C(1,4)$ مفروض باشند، مختصات وضعیه مرکز ثقل (محل تقاطع میانه‌ها) مثلث ΔABC را معلوم کنید.

15*. اگر G نقطه تقاطع میانه‌ها یا centroid مثلث ΔABC که دارای رئوس: $A(0,2)$ ، $B(6,0)$ و $C(8,10)$ بوده، رئوس مثلثی را که از مپنگ $H_G D_{G,1/2}(\Delta ABC)$ حاصل میشود معلوم کنید.

16. اگر $T = S_{BA} D_{B,r} S_{AB}$ باشد. نوعیت مپنگ T را تعیین کنید؛ با در نظر داشت نقاط ثابت که T دارد، نشان دهید که T بیک شکل نسبتاً خیلی ساده افاده شده میتواند.

A discussion of order ... has become essential to any understanding of the foundation of mathematics.

Bertrand Russell (1872–19..)

[Russell 1, p. 111]

4-3 . قضیه یگانه‌گی برای سیمیلیتودها

The Uniqueness Theorem For Similitudes

در فصل گذشته ما دیدیم که هر ایزومتری یک حاصل ترکیب سه یا کمتر از سه انعکاسات خطی تحلیل شده میتواند. علاوه بر آن ملاحظه شده که هر انطباق پذیری بین دو مثلث یک ایزومتری را مشخص میسازد، یا بعبارت دیگر اگر $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ مفروض باشد پس صرف و تنها صرف یک ایزومتری موجود شده میتواند که A را بر X، B را بر Y و C را بر Z onto میپ کند. حالا یکبار دیگر امکان تمدید مفکورهٔ اساسی ایزومتری را پیدا نمودیم تا مطابق آن قضایای سیمیلیتود را موازی به قضایای ایزومتری که توسعه دادیم انکشاف دهیم.

قضیهٔ 4-8 : Theorem 4-8 . ویا :

قضیهٔ تعیین یگانه‌گی سیمیلیتود.

اگر $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ مفروض باشد،

پس صرف و تنها صرف یک سیمیلیتود T موجود شده میتواند طوریکه: $T(A) = X$ ، $T(B) = Y$ و $T(C) = Z$ گردد.

اگر دقت شود دیده میشود که قضیهٔ فوق دارای دو قسمت میباشد.

یک قسمت از اثبات وجود existence و قسمت دیگر آن را اثبات وحدانیت و یگانگی uniqueness تشکیل میدهد. برای اثبات وجود همریختی Similitude ما میدانیم که $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$ لذا عدد $k>0$ موجود شده میتواند طوریکه:

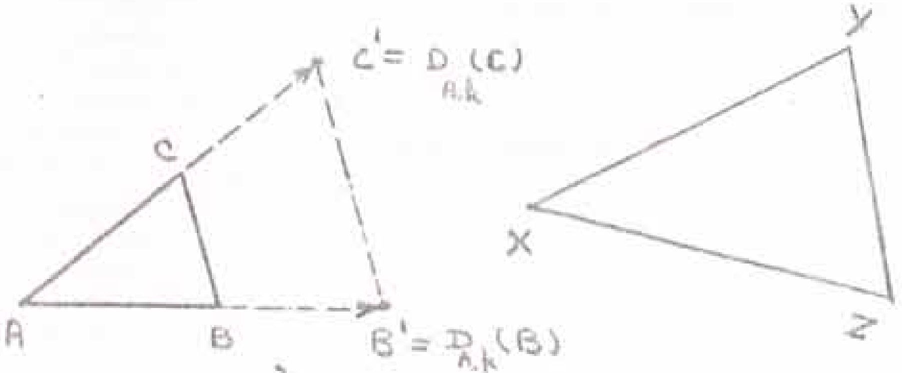
$XY = k\,AB$ ،
$YZ = k\,BC$ ،
و $XZ = k\,AC$ گردد.

اگر ما بشکل Dilation نمایش $D_{A,k}$:-
$\Delta A'B'C' = D_{A,k}(\Delta ABC)$ قرار دهیم، پس

درینصورت:
$A'B' = k\,AB$ ،
$B'C' = k\,BC$ ،
و $A'C' = k\,AC$ میشود.

پس بنابر تطبیق قضیه انطباق ذریعه SSS ما داریم:

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.



شکل: (9-19)

حال بنابر تطبیق قضیه: (3-11) ما میدانیم که یک ایزومتری M isometry موجود شده میتواند طوریکه:
$M(A') = X$ ،
$M(B') = Y$ ،
و $M(C') = Z$ گردد.

اکنون اگر T را یک حاصل ترکیب $MD_{A,k}$ قبول بگیریم،

درصورت بمحض برسد که T : A را بر X ، B را بر Y و C را بر Z منطبق میکند. از آنجا که T عبارت از حاصل ترکیب یک دایلیشن $D_{A,k}$ و یک ایزومتری M است بنابراین T یک سیمیلیتود Similitude است، این توضیحات ثبوت یا موجودیت (وجود) سیمیلیتود را تکمیل میکند.

برای اثبات وحدانیت uniqueness سیمیلیتود T برعلاوه T با موجودیت سیمیلیتود دیگر S را طوری که مثلث ΔABC را بر مثلث ΔXYZ onto نیز منطبق میکند فرض مینمائیم. برای اینکه سیمیلیتود T Similitude را یگانه ثابت نمائیم کافی است که $S = T$ ثابت نمود. برای رسیدن به این مطلب نشان باید داد که برای هر نقطهٔ کیفی $P(x,y)$ ، $T(P) = S(P)$ میشود.

حال اگر $P'' = T(P)$ و $A'' = T(A)$ وانمود فرض شده و همچنان بهمین ترتیب اگر $P^* = S(P)$ و $A^* = S(A)$ وانمود فرض شوند پس درصورت از آنجا که S و T هردو سیمیلیتودها اند — بنابرآن میتوانیم بنویسیم که:

$$A''P'' = XP'' = k\,AP \;،$$

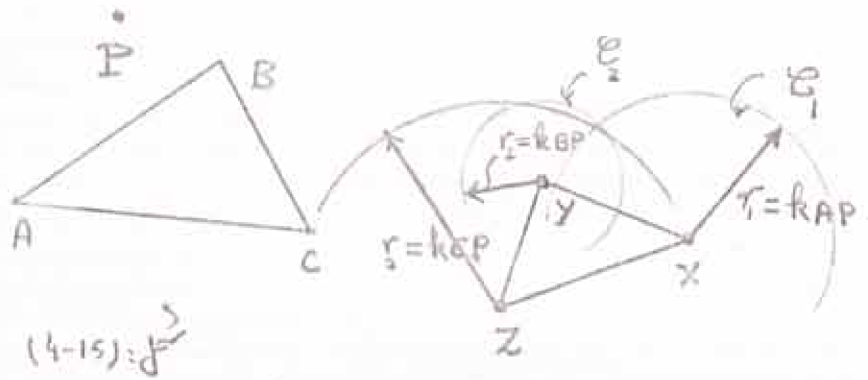
و همچنان

$$A^*P^* = XP^* = k\,AP$$

بود. پس درینصورت P'' و P^* هردو بالای یک دایره جا که بدورادیوس kAP در مرکز X است واقع شوند و همچنان

و بهمین قسم P'' و P^* باید همزمان بالای دایرهٔ ج۲ که دارای شعاع kBP و مرکز Y اند واقع گردند؛ و هم چنان باید که نقاط P'' و P^* بالای دایرهٔ ج۳ که دارای شعاع kCP و مرکز Z اند واقع گردند. پس درینصورت:

$\{P'', P^*\} \subset$ ج۱ ∩ ج۲ ∩ ج۳ . میشود.



شکل: (۴-۱۵)

اما مراکز دوایر فوق الذکر مشترک الخط نبوده که بصورت اثبات گردید که در اعظمی اینها محض دارای یک نقطهٔ مشترک بوده میتوانند و بس. بنابران ما ادعا کرده میتوانیم که: $P^* = P''$ و یا $S(P) = T(P)$ میباشد.

و این اراده میکند که T و S عین سیمیلیتود بوده و درینجا اثبات قضیهٔ موجودیت و وحدانیت سیمیلیتود باکمال میرسد.

Q. E. D.

قضیهٔ دیگری که ما درا ذیلاً اثبات مینمائیم موازی به قضیهٔ اساسی ایزومتری است.

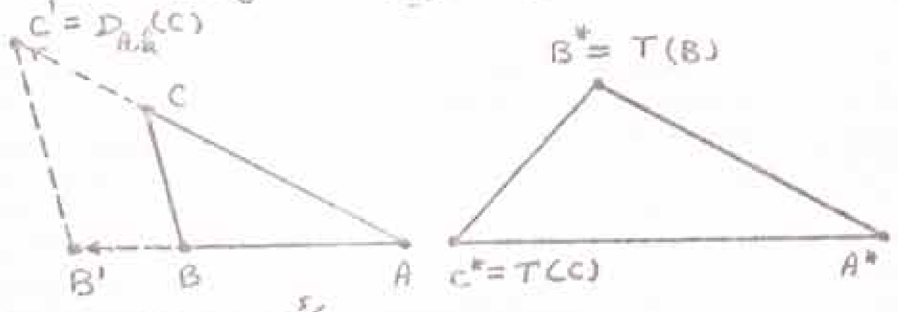
its parallel to the Fundamental Isometry Theorem.

قضیه Theorem . 4-9 :

هر شمیلیتود تحت حاصل ترکیب یک دایلیشن و یک اعظمی
با سه انعکاسات خطی افاده شده میتواند .

ثبوت : Proof

نقاط: A^* ، B^* و C^* را بحیث تصاویر (علی الترتیب) سه نقطه غیر مستقیم الخط
A ، B و C تحت یک شمیلیتود T که در (شکل) فکر کنید k ثابت ،



شکل: (4-16)

دو نقطه بگیرید . چنانچه در قسمت اثبات وجود شمیلیتود در قضیه
پیشتر L : $\triangle A'B'C' = D_{A,k}(\triangle ABC)$ وضع نمودیم دوباره فرض میکنیم ؛
در اینصورت : $\triangle A'B'C' \cong \triangle A^*B^*C^*$ میشود ،
میدانیم که محض یک ایزومتری M موجود شده میتواند که شکل
$\triangle A'B'C'$ بر شکل $\triangle A^*B^*C^*$ سپ میکند ،
بناءً $M D_{A,k}(\triangle ABC) = \triangle A^*B^*C^*$ میشود .
و بنابر قضیه تعیین یگانگی شمیلیتود ما استنتاج کرده میتوانیم که
$T = M D_{A,k}$. ثابت ضمناً بنابر
قضیه اساسی ایزومتری چون افاده میکند که : M بعد اعظمی به سه انعکاسات
خطی تحلیل و تجزیه شده میتواند . اثبات قضیه فوق تکمیل میشود .

Q.E.D.

در آخر موازی با مفکوره انطباق پذیری مربوط بهم یک ایزومتری
[افاده میشود که « دو شکل باهم انطباق پذیر اند در صورتیکه یک ایزومتری
موجود گردد تا یک شکل را بر دیگرش نسب کند. »] دامنه مفکوره
تشابهت را توسعه و انکشاف داده میتوانیم. مانند تعریف دقیقتر
و جامعتر انطباق پذیری ما میگوییم که دو شکل باهم متشابه شده
میتوانند درصورتیکه یک سیمیلیتود موجود گردد طوریکه شکل اولی
را بر شکل دومی نسب کند. بنابراین تعریف سیمیلیتود دیگر ضرورت هم
نیست که اصطلاح متشابه بودن را تنها از طریق شکل ها و یا مقایسات اطلاق
نمائیم. چون بنابر تعریف جدید تشابهات ما یک تصمیم قطعی
موفقیت ریاضی را حاصل نموده ایم تا با شامل آن گفته میتوانیم
که دو شکل مورد نظر متشابه شده میتوانند و یا خیر؟

تعریف : Definition

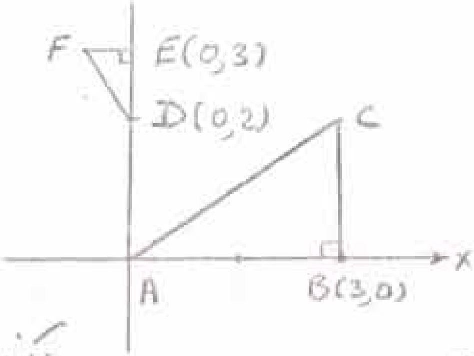
دو ~~نقطه~~ نقاط باهم متشابه Similar
گفته میشوند در صورتیکه محض و تنها محض یک
سیمیلیتود Similitude موجود شده
بتواند که یک ~~نقطه~~ نقاط را بر ~~نقطه~~ دیگر نقاط
نسب کند.

« The Mathematician's patterns, like the painters' or the Poets', must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics. »

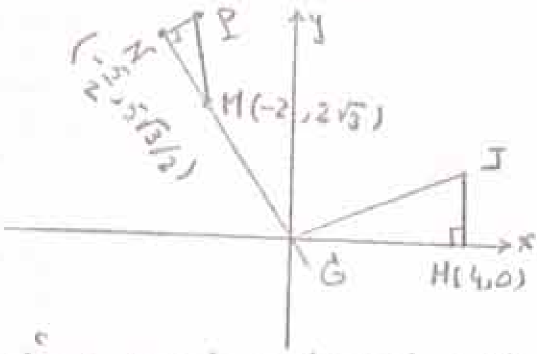
G. H. Hardy (2, p. 25)

Problem Set . 4-3 : تمرینات

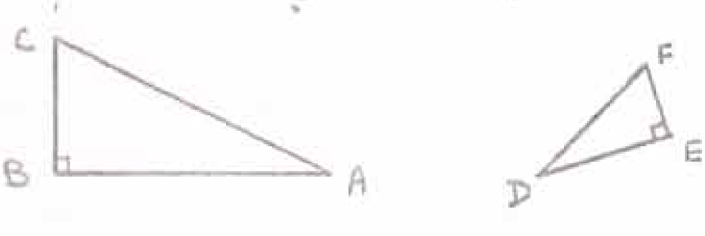
۱. اگر T عبارت از یک سیمیلیتود که $\triangle ABC$ را بر $\triangle DEF$ مپ میکند بوده باشد، مختصات وضعیه نقطه $T(P)$ را معلوم کنید در صورتیکه $P=(2,-2)$ باشد.



۲. اگر L عبارت از یک سیمیلیتود که $\triangle GHJ$ را بر $\triangle MNP$ مپ میکند بوده، مختصات وضعیه $L(P)$ را برای هر $P(x,y)$ بدست آرید.



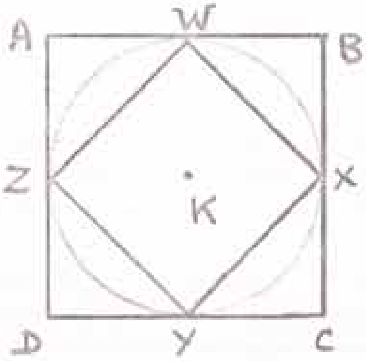
۳. بالفرض $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ بوده $AB=6$ و $DE=4$ باشد. یک دیاگرام از سه خط را رسم نمائید طوریکه محصول ترکیب انعکاسات فی خطوط مرسومه با یک دایلیشن $\triangle ABC$ را بر $\triangle DEF$ مپ کند.



۴. مربعات □ABCD و □WXYZ را که بخارج و داخل دایره C رسم شده‌اند طبق شکل در نظر بگیرید. یک سیمیتیود T را تعیین کنید که مربع ABCD را بر مربع WXYZ منطبق کند، طوریکه:

(a). $T(W)=A$ و $T(X)=B$ ،

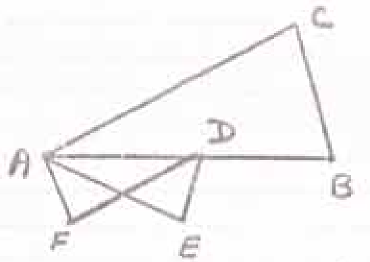
(b). $T(W)=C$ و $T(Z)=D$ باشد.



5. مثلثهای $\Delta ABC \sim \Delta ADE \sim DAF$ طوریکه $AD=4$ ، $AB=7$ ، $m\angle ACB=80$ و $m\angle BAC=40$ مفروض اند. یک سیمیلیتیود Similitude را تشخیص کنید که هر یک ذیل را اجرا کند:

(a). ΔABC را بر ΔADE ،

(b). ΔAFD را بر ΔABC .



6. مثلث ΔABC را رسم کنید طوریکه $AB=6cm$ ، $BC=5cm$ و $AC=4cm$ باشد.

(a). میانه‌های $\overline{AM_a}$ و $\overline{BM_b}$ و $\overline{CM_c}$ را رسم کنید.

(b). ارتفاعات $\overline{AH_a}$ و $\overline{BH_b}$ و $\overline{CH_c}$ را رسم کنید.

(c). مرکز دایره محیطی circumcenter را مثلث مذکور را تعیین کنید، دایره با C ارائه کنید.

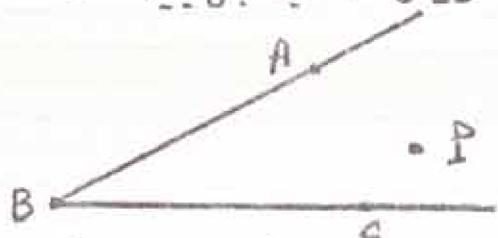
ادامه دارد ...

(d). اگر G محل تقاطع میانه‌ها (centroid) و O محل تقاطع ارتفاعات orthocenter باشد، آیا گفته میتوانید که نقاط : G ، O و C چطور با هم واقع اند ؟

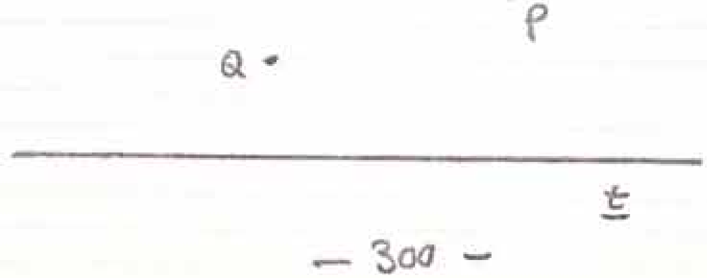
(e). اگر K نقطهٔ وسطی $\overline{OC}$ و N نقطهٔ وسطی یک خط موصول O به یکی از رؤوس مثلث باشد، دایره‌ای را بمرکز K و شعاع $\overline{KN}$ رسم کنید.

(f). راجع به نقاط M_a ، M_b ، M_c ، H_a ، H_b و H_c چه مشاهده میکنید؟

7. نقطهٔ P و $\angle ABC$ طبق شکل ذیل داده شده‌اند. یک دایره را رسم نمائید که از نقطهٔ P گذشته و با اضلاع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ زاویهٔ مذکور مماس باشد. این سوال دارای چند حل بوده میتواند؟
[کمک: فرضاً یک دایره که از P گذشته و به $\overrightarrow{AB}$ مماس باشد بوده، بنابر انتخاب یک دایلیشن مناسب بحل بقیه مسأله ادامه دهید.]



8. خط t و نقاط P و Q طبق شکل ذیل داده شده‌اند. دایره‌ای را رسم نمائید که از نقاط P و Q گذشته و بخط t مماس باشد.
[کمک: مرکز دایرهٔ مطلوب بالضرور بالای ناصف عمود $\overline{PQ}$ واقع است. حال بنابر استعمال یکدایرهٔ مساوی دیگر و انتخاب یک دایلیشن که از یک نقطهٔ خوب انتخاب شده نشأت کند بحل مسأله ادامه دهید.]



The Affinities آفینیتی‌ها ۴-۴

"I believe that this geometric proportion served the Creator as an idea when He introduced the continuous generation of similar object from similar objects."

J. Kepler (1571-1630)

گرچه در مبحث گذشته تا حدی ما توانستیم که عنوان مربوط
تجانس‌ها «سیمیلیتودها» را مورد مطالعه قرار دهیم ولی این مطالعه بنابر قیودیکه
باید $k>0$ باشد صورت گرفت. به یقین ما میتوانیم که این تجانس‌ها
«سیمیلیتودها» را بیک عمق نسبتاً بیشتر بررسی نمائیم.

قبل از آنکه بمطالعه مفصل‌تر سیمیلیتودها بپردازیم لازم دیده
میشود که بصورت خیلی مختصر موضوعات عمده هندسه تحویلی Transformational Geometry
را که تا حال مطالعه نموده ایم تکراراً از نظر بگذرانیم تا با شناسائی
آن مپینگ‌ها که با آنها معرفت داریم بخوبی مناسبت شان قرار دهیم.

بخاطر خود خواهید داشت که تحول Transformations را
بحیث یک تطبیق یک بیک one-to-one از یک مستوی بالای onto
مستوی مستوی دیگر تعریف نمودیم. بر اساس این مفکوره ساده
تابع Function ما موضوعات: انعکاسات خطی Line Reflections،
ایزومتری‌ها Isometries، و سیمیلیتودها یا تجانس‌ها
Similitudes را یکی پی دیگر آن (پی در پی) مطالعه نمودیم.

مطالعهٔ موقف نسبی این مپینگ‌ها mappings ایضاح مینماید که sets انعکاسات خطی یک سِت جزئی (فرعی) subset ، سِت set ایزومتری‌ها isometries بوده و به همین قسم set ایزومتری‌های یک سِت جزئی subset ، سِت سیمیلیتیودها similitudes و بالاخره سِت سیمیلیتیودهای یک سِت جزئی subsets ، سِت sets گروپ‌های Transformation در یک مستوی را میسازند.

بهرحال یک شاخهٔ دیگر نیز درین شجرهٔ گروپ‌ها اضافه شده میتواند ، که این شاخه را بنام افینیتی‌ها Affinities یاد میکنند و دارای مشخصات ذیل میباشند :

(1). افینیتی‌ها خاصیت بینیت Betweeness را بین نقاط مشترک الخط collinear حفظ مینمایند.
یعنی: درصورتیکه P بین نقاط A و B قرار داشته باشد تصویر P یعنی P' نیز بنابر افینیتی بین تصاویر A و B یعنی A' و B' قرار داشته باشد.

(2). افینیتی‌ها حافظ نسبت التقسیم بین قطعات خط میباشند.
با عبارهٔ دیگر اگر P یک نقطه بین A و B بوده طوریکه ؛ $\frac{AP}{AB} = k$ شود ؛ پس درین صورت:

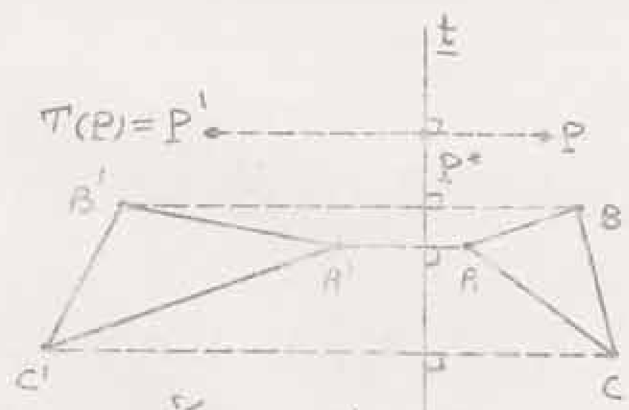
$\frac{A'P'}{A'B'} = k$ نیز میشود.

(3). اینها قطعات خط را بر قطعات خط مرتسم میکنند.
(4). افینیتی‌ها خطوط را بر خطوط مرتسم میکنند.
(5). اینها حافظ خاصیت موازات اند.

تشابه‌ها یک نوع افینیتی‌ها Affinities بوده ولی
ضرورت نیست که افینیتی‌ها Affinities از قیود $k>0$ برای
هر دو نقطه P و Q مشمول طوریکه:
$P'Q' = k(PQ)$ گردد، پیروی کنند.

تحول T Transformation اگر دارای مشخصات ذیل است بحیث
شکل یک افینیتی Affinity متصور گردد:
یک خط $\underline{t}$ مفروض است؛ درصورتیکه $P \in \underline{t}$ باشد،
پس $T(P) = P$ میشود.
اگر $P \notin \underline{t}$ درینصورت: $T(P) = P'$ گردیده،
درحالیکه $P' \in \overrightarrow{PP^*}$ بوده و P^* پای عمود قطعه خطی
است که از P به $\underline{t}$ رسم میشود. (P^* مرتسم P
بالای $\underline{t}$ است.) و علاوه برآن

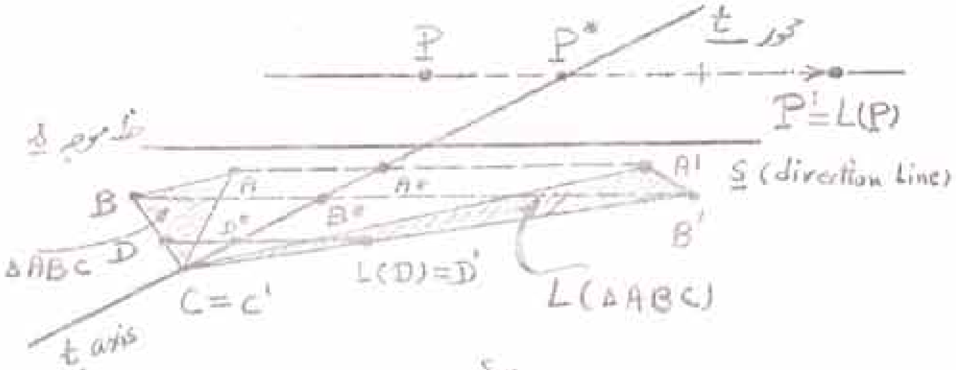
$$\frac{P^*P'}{PP^*} = 2 .$$



شکل (4-17):

از مشاهده شکل (4-17): بوضاحت دیده میشود که خاصیت حفظ زوایا angles preserved توسط آفینیتی ها Affinities تعقیب نمیشود؛ زیرا که افینیتی ها Affinities حافظ خاصیت حفظ اندازه و شکل زوایا نیستند. اشکال تحت اندیشه تحولات تغیر شکل مینمایند.

نوع ششم آفینیتی بنام پرسپکتیف افینتی Prespective Affinity یاد میشود. این نوع میپنگ توسط یک جوره خطوط متقاطع و ثابت غیر صفر nonzero constant تعیین میشوند.



شکل: (4-18)

تعریف: Definition

دو خط غیر موازی s و t و یک ثابت k را طوریکه k یک عدد حقیقی خلاف صفر ($k \neq 0$) است مدنظر گیرید. یک میپنگ L بنام پرسپکتیف افینیتی Prespective Affinity یاد میشود در صورتیکه برای هر نقطه P مشتوی $L(P) = P'$ گردد طوریکه:

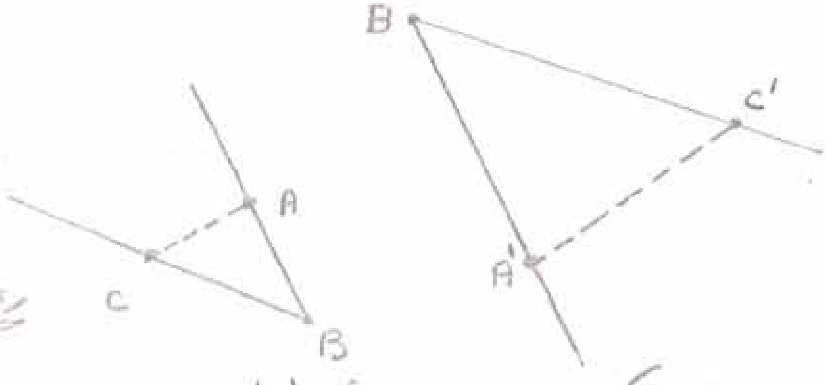
بازهم حقیقت فوق که: $R \in \underline{t}$ است بعین طریقه با ثبات رسید.
پس گفته میتوانیم که هر نقطهٔ خط $\overleftrightarrow{A'B'}$ تصویر کدام یک نقطهٔ خط
$\underline{t}$ میباشد، پس: $\overleftrightarrow{A'B'} \subset T(\underline{t})$ است.
همچنین $T(\underline{t}) \subset \overleftrightarrow{A'B'}$ قبلاً ثابت شده،
بنابران حقیقت که خط $\overleftrightarrow{A'B'}$ عبارت از $T(\underline{t})$ باشد ثابت شد.
پس شکلی با ثبات حقیقت فوق قضیهٔ ذیل را بیان میکنیم:

قضیه : Theorem . 4-1

تصویر هر خط تحت یک سیمیلیتود Similitude (تجانس) عبارت از یک خط میباشد.

Q. E. D.

برای اثبات حقیقت اینکه سیمیلیتود ها Similitudes حافظ وسعت زوایا اند، بیائید ABC مثلثی را با تصویر آن $A'B'C'$ تحت یک سیمیلیتود (تجانس) Similitude T در نظر میگیریم.



شکل (4-4):

ما داریم که:
$A'B' = k(AB)$ ،
$A'C' = k(AC)$ ،
و همچنان: $B'C' = k(BC)$.

بهمین قسم نقطهٔ D تصویر آن یک نقطه فاصله از C نظر به B،
که علی الترتیب مقادیر C و B اند، قرار دارد. این
وضعیت حقیقتی را که افینیتی Affinity (این کیل) حافظ نسبت‌های
تقسیم قطعات اند، توضیح می‌نماید.

تا حال ما پرسپکتیف افینیتی Prespective Affinity
را تعریف و مطالعه نمودیم، اکنون به تعریف جامع عمومی یک افینیتی
Affinity طبق ذیل می‌پردازیم:

تعریف: Definition

یک افینیتی Affinity عبارت از یک مپینگ
است که بحیث حاصل ترکیب معین پرسپکتیف
افینیتی‌ها Prespective Affinities افاده شده
میتوانند.

با شناسائی تمام وضعیت توضیح تصویر هر نقطهٔ $P(x,y)$
مستوی تحت یک مپینگ افینیتی Affinity طبق فرمول
ذیل صورت گرفته میتواند:

$$T(P) = (a_1x + b_1y + c_1 \, , \, a_2x + b_2y + c_2) .$$

و همچنان هر مپینگ که توسط فرمول که شکل فرمول فوق را دارا بوده
توضیح شده بتواند عبارت از یک افینیتی Affinity میباشد.
پس باین وشناسائی مپینگ: $H(P) = (x+3y \, , \, y)$ یک افینیتی را
ارائه میکند.

اگر یکبار دیگر نظری بروابط بین تحولات Transform.
بیاندازیم دیده میشود که: ایزومتری ها Isometries قطعه خط
را بر قطعه خط بدون ورود تغییر در طول آنها منطبق میکنند؛ ولی سیمیلیتود ها
Similitudes قطعه خط را بر قطعه خط با وجود ورود تغییر
در طول آنها (طویل و یا قصیر ساختن) که با شاخص یک شکل
نکوئز ثابت صورت میگیرد منطبق مینمایند، در حالیکه
افینیتی ها محض قطعه خط را بر قطعه خط (بصورت ساده) منطبق میکنند.

برای داشتن موضوع اینکه افینیتی ها Affinities در کدام
قسمت تشریح تحولات قرار میگیرند، بررسی موضوعات ذیل
حتمی است. هر انعکاس خطی یک Affinity است،
(چرا؟) از طرف دیگر هر دایلیشن Dilation یک
محصول ترکیب دو پرسپکتیف افینیتی Prespect. Affinities
افاده شده میتواند. (از آنجا حقیقت این مطلب یک
یک شانزده در تمرینات پرسان شده است.) از آنکه هر
سیمیلیتود Similitude متشکل از یک دایلیشن Dilation
از سه و یا کمتر از سه انعکاسات خطی بوده میتواند، از این
برمی آید که هر سیمیلیتود بحیث محصول ترکیب پنج و یا کمتر از پنج
پرسپکتیف افینیتی ها Prespective Affinities افاده شده میتواند.
بنابرآن گفته شده میتواند که هر سیمیلیتود Similitude
یک Affinity است.

بنابر توضیحات فوق ساختمان هندسهٔ تحویلی طبق ذیل تصور شده (ارائه شده) میتواند:

سِت تحویلات در مستوی (تبدیلات) ⊃ سِت افینیتی‌ها ⊃ سِت سیمیلیتیودها ⊃ سِت ایزومتری‌ها ⊃ سِت انعکاسات خطی

$\{\text{Line Ref.}\} \subset \{\text{Isometries}\} \subset \{\text{Similitudes}\} \subset \{\text{Affinities}\} \subset \{\text{Transform. of Plane}\}.$

اکنون مطالعات هندسهٔ تحویلی را Transformational Geom. بنابر اثبات تحویلی دو قضیهٔ کلاسیک هندسی که در ذیل ارائه میشود ختم مینمائیم. امید است که ارائهٔ این اثبات تحویلی بتواند که قناعت خاطر خواننده را در موضوع مقتدر بودن متود تحویلی فراهم سازد. قضیهٔ اول مورد نظر را اثبات مشترک الخط بودن سه نقطه که عبارت از نقطهٔ تقاطع میانه‌ها (centroid)، نقطهٔ تقاطع ارتفاعات (orthocentre) و نقطهٔ تقاطع سه خط عمود منصف اضلاع یعنی مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث میباشند، تشکیل میدهد. قضیهٔ دوم مورد نظر اثبات تحویلی دایرهٔ نه نقطه میباشد. اینک به اقامه و اثبات تحویلی قضیهٔ اول آن ذیلاً می‌پردازیم:

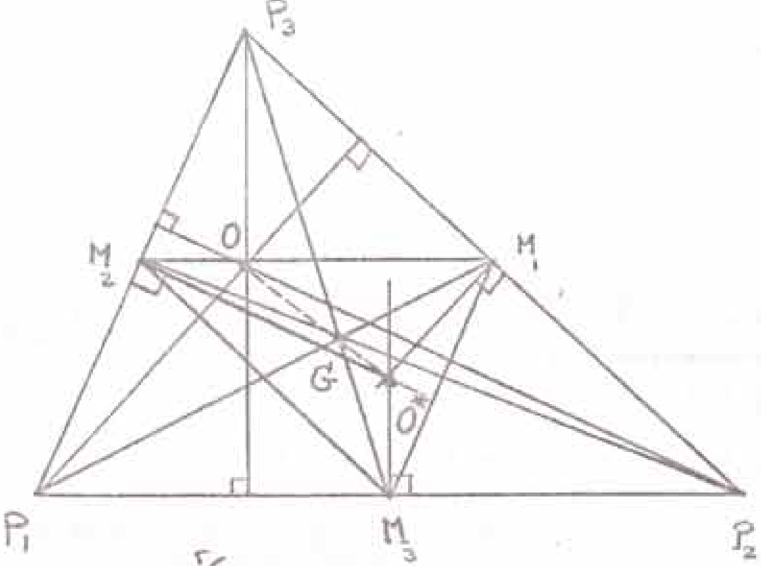
قضیهٔ 4-10 : Theorem

قضیهٔ خط اویلر The Euler Line Theorem

در هر مثلث، نقطهٔ O تقاطع ارتفاعات، نقطهٔ G تقاطع میانه‌ها و نقطهٔ C مرکز دایرهٔ محیطی آن بالای یک خط واقع میباشند. بر علاوه آن $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{GC}$ میباشد.

ثبوت: میدانیم که هر سه میانهٔ یک مثلث از یک نقطه عبور مینماید که بنام مرکز ثقل و یا مرکز دایره Centroid یاد میشود. به همین قسم هر سه ارتفاعات آن از

از یک نقطهٔ دیگر به موسوم orthocenter گذشته و هم چنان هر سه ناصف عمود بر اضلاع آن از یک نقطه که بنام circumcenter یاد میشود عبور میکنند.



شکل: (4-19)

حال اگر در $\triangle P_1P_2P_3$ نقطهٔ O محل تقاطع ارتفاعات، نقطهٔ G محل تقاطع میانه‌ها $\overline{P_1M_1}$، $\overline{P_2M_2}$ و $\overline{P_3M_3}$ باشند، در نتیجه میدانیم که میانه‌ها توسط نقطهٔ مشترک خویش (centroid) به نسبت $2:1$ تقسیم گردیده یک سیمیلیتود similitude را بوجود می‌آورند، طوریکه آن سیمیلیتود به شکل: $H_G D_{G,1/2}$ نموده شده میتواند.

حال مشاهده میگردد که:

$H_G D_{G,1/2}(P_1) = M_1$ بوده،

و همچنان: $H_G D_{G,1/2}(P_2) = M_2$ گردیده،

و بالاخره: $H_G D_{G,1/2}(P_3) = M_3$ میشود.

حال اگر $O^* = H_G D_{G,1/2}(O)$ قرار داده شود،
ازین نتیجه میشود که نقاط O، G و O^* همه یک مشترک الخط collinear بوده، همچنین:

$\overline{OG} \doteq 2\overline{GO^*}$ میباشد،

درینجا اثبات قضیه تکمیل میشود اگر ما O^* را بحیث نقطه تقاطع ناصف الـ عمود های قطعات ضلعی مذکور نشان داده بتوانیم.

چون: $\overleftrightarrow{M_1M_2} = H_G D_{G,1/2}(\overleftrightarrow{P_1P_2})$ بوده

و $\overleftrightarrow{M_3O^*} = H_G D_{G,1/2}(\overleftrightarrow{P_3O})$ میباشد،

چون: $\overleftrightarrow{P_1P_2} \perp \overleftrightarrow{P_3O}$ است،

ازینکه تشابه ها خاصیت عمودیت را حفظ میکنند، پس: $\overleftrightarrow{M_1M_2} \perp \overleftrightarrow{M_3O^*}$ میباشد

اما: $\overleftrightarrow{P_1P_2} \parallel \overleftrightarrow{M_1M_2}$ است، پس: $\overleftrightarrow{M_3O^*} \perp \overleftrightarrow{P_1P_2}$ میشود.

بنابر آن $\overleftrightarrow{M_3O^*}$ ناصف عمود $\overline{P_1P_2}$ بوده و M_3 نقطه وسطی $\overline{P_1P_2}$ میباشد. به همین قسم نشان داده میتوانیم که $\overleftrightarrow{M_2O^*}$ ناصف عمود $\overline{P_1P_3}$ و M_2 نقطه وسطی $\overline{P_1P_3}$ میشود.

ازینکه: $\overleftrightarrow{M_3O^*} \cap \overleftrightarrow{M_2O^*} = \{O^*\}$ است.

ازین برمی آید که نقطه O^* محل تقاطع ناصف الـ عمود های اضلاع مثلث $\triangle P_1P_2P_3$ است. درینجا اثبات قضیه تکمیل میشود و نشان دادیم که محل تقاطع میانه ها centroid و محل تقاطع

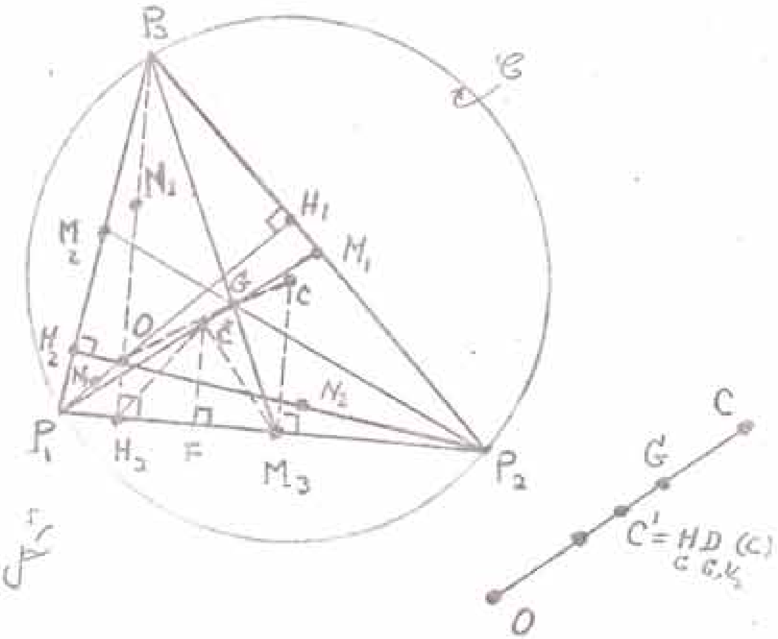
ارتفاعات orthocenter و محل تقاطع ناصف‌های عمودی اضلاعات circumcenter (مرکز دایره محیطی) یک مثلث روی یک خط واقع بوده و ضمناً نشان داده شد که centroid در بین orthocenter و circumcenter واقع بوده و فاصله آن از circumcenter دو چند فاصله آن از orthocenter میباشد[1].

Q.E.D.

قضیه 4-11: The Nine Point Circle Theorem

یا قضیه دایرهٔ نه نقطه

یا دایرهٔ ایولر



شکل (4-20):

نقاط: M_1، M_2، M_3 عبارت از نقاط وسطی اضلاع مثلث $\Delta P_1P_2P_3$ و نقاط: H_1، H_2 و H_3 عبارت از پای ارتفاعات مثلث مذکور - و همچنان نقاط: N_1، N_2 و N_3 عبارت از نقاط وسطی قطعات کراوس مثلث مذکور را به نقطهٔ تقاطع ارتفاعات orthocenter وصل مینمایند، بوده با مشخصه، مفروض اند.

ثبوت مینمائیم که این نه نقطه: H_1، H_2، H_3، M_1، M_2، M_3، N_1، N_2 و N_3 بالای یک دایره ای که مرکز آن عبارت از نقطهٔ وسطی $\overline{OC}$ (یعنی قطعه خط موصل مرکز دایره محیطی و محل تقاطع ارتفاعات است) بوده، قرار دارند.

ثبوت: Proof

اگر G عبارت از محل تقاطع میانه ها centroid و C عبارت از مرکز دایرهٔ محیطی circumcenter مثلث $\Delta P_1P_2P_3$ باشند، بنابر قضیه گذشته (اویلر) میدانیم که G در بین O و C قرار دارد طوریکه:

$\overrightarrow{OG} \doteq 2\overrightarrow{GC}$ میشود.

حال با استفاده از استعمال سیمیلیتود Similitude:

$H_G D_{G,1/2}$

مثلث $\Delta P_1P_2P_3$ را بر مثلث $\Delta M_1M_2M_3$ و نقطهٔ C را بر C^* مینمائیم.

چون: $\overrightarrow{OG} \doteq 2\overrightarrow{GC}$ است، ازین نتیجه میشود که: $GC = \frac{1}{3}(OC)$ است.

لهذا: $GC^* = \frac{1}{2}(GC)$ است،

نیز: $CC^* = \frac{1}{2}(OC)$ میشود.

یا بعبارت دیگر: C^* نقطه وسطی $\overline{OC}$ است. چون C مرکز
دایره محیطی ℭ Circumcenter است، ازین معلوم میشود که سیمیلیتود

$$H_G D_{G,1/2}$$

دایره ℭ را بر دایره $ℭ^*$ که دارای مرکز C^* است مبدل میکند.
علاوه بر آن، شعاع دایره $ℭ^*$ نصف شعاع دایره ℭ میباشد،
زیرا که، شکل فکتور scale factor سیمیلیتود فوق الذکر عبارت
از $\frac{1}{2}$ است. ازینکه نقاط P_1، P_2 و P_3 شامل دایره
ℭ اند پس بالضرور تصاویر آنها یعنی M_1، M_2 و M_3 شامل
دایرهٔ $ℭ^*$ میباشند.

اگر پایه عمود از C^* را به $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ به F نشان دهیم
پس دیده میشود که: $\overline{CM_3} \perp \overline{P_1P_2}$
ونیز $\overline{OH_3} \perp \overline{P_1P_2}$ بوده،
ازین نتیجه میشود که: $\overleftrightarrow{C^*F} \parallel \overleftrightarrow{CM_3} \parallel \overleftrightarrow{OH_3}$ میشود. زیرا
خطوطیکه بعین خط عمود باشند بین هم موازی میباشند.
حقیقت اینکه C^* نقطه وسطی $\overline{OC}$ است تضمین میکند که
F نقطهٔ وسطی $\overline{H_3M_3}$ است. (زیرا اینکه دسته خطوط
موازی خطوط متقاطع خود را متناسب تقسیم میکنند.)
بنا گفته میتوانیم که $\overleftrightarrow{C^*F}$ ناصف عمود $\overline{H_3M_3}$ است.

پس : $C^*H_3 = C^*M_3$ بوده و به همین جهت : $C^*H_2 = C^*M_2$ و
بالاخره : $C^*H_1 = C^*M_1$ میشوند . بنابراین باید داشت که نقاط
M_1 ، M_2 و M_3 بالای یک دایره قرار دارند که مرکز آن C^* است ،
حال آنکه نقاط : H_1 ، H_2 و H_3 نیز از نقطه C^* دارای عین شعاع
دایره $\mathcal{C}^*$ اند که نقاط M_1 ، M_2 و M_3 روی آن قرار
دارند ، پس از این بر می‌آید که هر شش نقاط فوق الذکر بالای دایره
$\mathcal{C}^*$ قرار دارند .

بالاخره با در نظر داشت دایلیشن $D_{O,1/2}$ از اینکه C^* نقطه وسطی
$\overline{OC}$ است ما داریم : $D_{O,1/2}(C) = C^*$.
از این نتیجه میشود که $D_{O,1/2}$ دایرهٔ $\mathcal{C}$ را بر دایره $\mathcal{C}^*$ مرتسم میکند ،
(از اینکه شکل منکوز دایلیشن مذکور $1/2$ بوده و C را بر C^* مرتسم میکند .)
ولی از اینکه $P_1 \in \mathcal{C}$ بوده و $N_1 = D_{O,1/2}(P_1)$ است ؛ پس N_1 نقطه وسطی
$\overline{OP_1}$ بوده و $N_1 \in \mathcal{C}^*$ میباشد . به همین طریق ثابت شده میتواند
که نقاط : N_2 و N_3 نیز بالای دایره $\mathcal{C}^*$ واقع میباشند .
در نتیجه ثابت میشود که هر نه نقطه مذکور روی دایره $\mathcal{C}^*$ [1] قرار دارند .

Q.E.D.

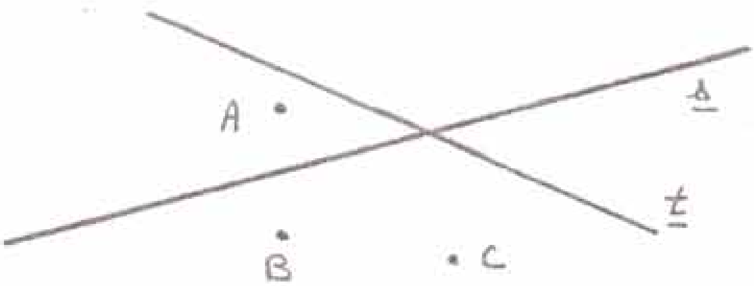
---

(1) برای اینکه اعتبار کار و مباحثش داده شود قابل متذکر است که خطی که
نقاط O ، G و C (O^*) قضیه (4-10) وصل میسازد و بافتخار کاشف آن خط اویلر
The Euler Line و هم چنان دایره‌ای که روی آن نقاط : H_1 ، H_2 ، H_3 ،
M_1 ، M_2 ، M_3 ، N_1 ، N_2 و N_3 طبق قضیه (4-11) قرار دارند بنام موصوف
یعنی Leonard Euler ریاضیدان مشهور و نابغه سویسی که در قرن هجده
زیست داشته اند ، یاد میشوند .

تمرینات: 4-4. Problem Set

1. فرضاً محور x، محور یک Pres. Affinity و محور y خط موجه آن ضمناً شکل نظیر آن Scale factor آن 2 باشد. اگر افینیتی مذکور را به T نشان دهیم با آنالیتیکیات وضعیت نقاط ذیل را تعیین کنید:
(a). $A(3,5)$، (b). $B(-4,1)$، (c). $P(x,y)$.

2. اگر $\underline{t}$ محور، $\underline{s}$ خط موجه و $1/3$ شکل نظیر Prespective Affinity: $L_{t,s,1/3}$ باشد، نقاط: A، B و C را طبق شکل ذیل در نظر گرفته:
(a). $L(\Delta ABC)$ را رسم کنید.
(b). دو خط موازی $\underline{u}$ و $\underline{v}$ را تعیین کنید طوریکه $L(\underline{u}) = \underline{u}$ و $L(\underline{v}) = \underline{v}$ گردد.



3. یک متوازی الاضلاع □ABCD مفروض است، چهار پرسپکتیف افینیتی Prespective Affinities که متوازی الاضلاع مذکور را بر خودش عکس کند تعیین کنید.

4 . اگر $\underline{t}=\{(x,y): y=2\}$ محور و محور y خط موجه Direction Line
یک T Prespective Affinity باشد، T(P) و T(A)
نقاط: A(2,-3) و P(x,y) را تعیین کنید در صورتیکه:

(a) . شکل متغیر T عبارت از 1/2 باشد.

(b) . T Scale factor عبارت از -3 باشد.

5 . اگر خط $\underline{t}=\{(x,y): y=x\}$ محور، و خط
$\underline{s}=\{(x,y): y=3\}$ خط موجه و 3 عبارت
از شکل متغیر یک Prespective Affinity L باشد کمیات ذیل
نقاط: L(A) و L(P) را تعیین کنید در صورتیکه:

(a) . $A=(-4,2)$ بوده (b) . $P=(x,y)$ باشد.

6 . خطوط متقاطع $\underline{s}$ و $\underline{t}$ که در نقطه A قطع نموده اند با نقاط P
و Q موجود اند:

(a) . $L_{t,s,-3}(P)$ را تعیین کنید.

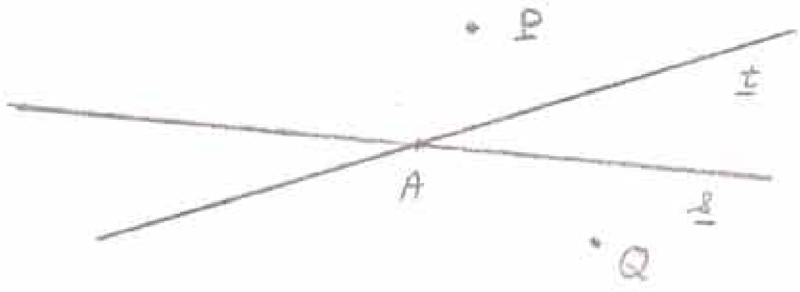
(b) . R را تعیین کنید طوریکه: $L_{t,s,-3}(R)=Q$ گردد.

(c) . معکوس $L_{t,s,-3}$ یعنی $(L_{t,s,-3})^{-1}$ را تشخیص کنید.

(d) . $L_{t,s,-3}L_{s,t,-3}(P)$ را تعیین کنید.

(e) . شکل ساده $L_{t,s,-3}L_{s,t,-3}$ را بدست آرید.

(f) . با استفاده از اشتغال مذکوره تحلیل یک سیمیلیتود Similitude
به دو ترکیب یک ایزومتری و یک دایلیشن نشان دهید که
$L_{s,t,3}L_{t,s,3}$ یک سیملیتود است.



۷. ثابت کنید که هر دایلیشن Dilation $D_{A,k}$ درصورتیکه $k>0$ باشد یک افینیتی Affinity است.

۸. اگر $\underline{t}=\{(x,y): x=0\}$ و $\underline{s}=\{(x,y): y=x\}$ و $\underline{u}=\{(x,y): y=3\}$ و $A=(2,1)$ و $\underline{P}(x,y)$ درحالیکه P یک نقطهٔ کیفی است مفروض باشند:

(a). $L_{s,t,2}\, L_{t,u,1/2}(A)$ راتعیین کنید.

(b). $L_{t,u,1/2}\, L_{s,t,2}(P)$ را تعیین کنید.

یک نوع دیگر تابع را انعکاس دایره‌وی Circle Reflection که طبق ذیل تعریف میشود تشکیل میدهد:

اگر یک دایره $\mathcal{C}$ با مرکز C و شعاع r مفروض باشد، یک تابع T یک انعکاس دایره‌وی circle reflection را حول دایرهٔ $\mathcal{C}$ بوجود می‌آورد در صورتیکه برای هر نقطهٔ P دیگر

مستوی بجز از C :

$T(P) = P'$ گردد، طوریکه

$P' \in \overrightarrow{CP}$ بوده و $(CP)(CP') = r^2$ باشد.

دستور تابع را بعضی بنام انورشن Inversion نیز یاد نموده که درینحالت دایره انعکاس دهنده را بنام دایره انورژن (انورشن) The Circle of Inversion و هم چنان مرکز C بنام مرکز انورژن The center of Inversion یاد مینمایند.

حال بنابر توضیحات فوق بحل مساله ذیل اقدام نمائید:

9. اگر دایره ζ با شعاع 1 (یک واحد) در مرکز C مفروض بوده و اگر T عبارت از یک انعکاس دایره وی حول C باشد:

(a). اگر ζ یکدایره ای بمرکز C و شعاع $1/2$ ارائه کند، $T(\zeta)$ را ترسیم کنید.

(b). اگر $\varphi = \{P : CP > 1\}$ باشد، $T(\varphi)$ را توضیح نمائید.

(c) • درصورتیکه $c \in \underline{\ell}$ باشد، $T(\underline{\ell})$ توضیح نمائید.

(d) • آیا T کدام نقطهٔ ثابت fixed point را دارا میباشد؟
درصورتیکه دارا باشد آن نقطه یا نقاط کدام اند؟

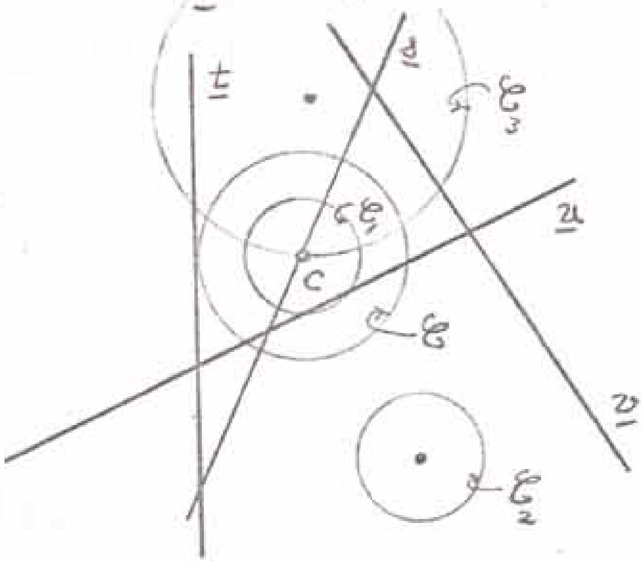
(e) • آیا T دارای یک معکوس بوده میتواند؟ اگر داشته باشد
معکوسش T کدام است؟

(f) • اگر $\underline{t}$ مماس به $\mathcal{C}$ باشد $T(\underline{t})$ را توضیح بدارید.

(g) • اگر $\mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_3$ دوائری که درشکل ذیل ارائه شده اند، مفروض
باشند، $T(\mathcal{C}_2)$ و $T(\mathcal{C}_3)$ را رسم نمائید.

(h) • اگر $\underline{u}$ و $\underline{v}$ خطوط مفروض مانند ذیل باشند،
$T(\underline{u})$ و $T(\underline{v})$ را رسم کنید.

(i) • اگر یک سیستم کمیات وضعیه با مبداء آن در نقطهٔ c تاسیس گردد،
مختصات $T(P)$ را برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ که در دومین T
Domain باشد، بدست آرید.



14 oct. 1974.
Trieste

فهرست مندرجات
اصطلاحات و تعریف آنها

Index

صفحات

صفحات

صفحات

صفحات