ریاضیات معاصر

خود آموز

ستها و استعمال آنها

تألیف : پوهنمل محمد امان نادری
دیپارتمنت ریاضیات
اکادمی تربیهٔ معلم

[illegible] مطبوعات . [illegible] مطبعهٔ استقلال ، قوس ، ۱۳۵۵

یادداشت انتشارات شاهمامه

به سلسلۀ نشر آثار فراموش شدۀ استاد محمدامان نادری، اینک به انتشار «**سلسلۀ ریاضیات معاصر**» میپردازیم تا از یک سو مورد استفادۀ علاقمندان قرار گیرد و از جانبی دستآورد های علمی این متفکر ریاضیات که عمری در راه معارف در بدترین وضعیت سیاسی و صحی، قلم زده است، یکبار دیگر روگشایی گردد. بدون شک استاد نادری یکی از انگشت شمارانِ کشور بود که آثار ارزشمند فراوانی در زمینۀ ریاضیات به یادگار گذاشته است. او در حقیقت نخستین مفسر و معرف ریاضیات مدرن در افغانستان می باشد.
سه جلد این سلسله به دسترس ما قرار دارد که میکوشیم ثبت آرشیف «شاهمامه» و دیگر آرشیف های نشراتی گردد تا نسلهای بعد این خدمات را نادیده نگیرند و سهم اینگونه شخصیت های پویا و کوشا در رشد معارف کشور برازنده و جاودان ماند.

با سپاس،
منیژه نادری
مسؤول بنیاد شاهمامه

شناسنامه

سلسلۀ ریاضیات معاصر
خود آموز، ستها و استعمال آنها
تألیف پوهنمل محمد امان نادری
دستنویس استاد نادری
دیپارتمنت ریاضیات
اکادمی تربیۀ معلم
از نشرات لیسۀ عالی استقلال
قوس ۱۳۵۵ خورشیدی
نشر الکتریکی: بنیاد شاهمامه
www.shahmama.com
جون ۲۰۱٦، هالند

پیشگفتار

«چو شمع از پی علم باید گداخت
که بی علم نتوان خدا را شناخت»

مسرت دارم از حسن توفیق تا این اثر را در زمان نظام مترقی جوان جمهوری که یکی از ثمرات مهمای بلیغ آن بخش و گسترش دانش در کشور است، تحریر و بخدمت دوستداران علم و معرفت تقدیم بنمایم.

محتویات این اثر را قسمتی از مواد کتاب: خودآموز ریاضی، که حایز جایزهٔ مطبوعاتی اولین جشن سالگرد نظام جمهوری شناخته شده است، تشکیل میدهد. مواد متن این کتاب که در هشت فصل ترتیب یافته با نصاب جدید تعلیمی موسسات عالی تحصیلی مملکت و با ریفارم بنیادی معارف است توافقت تام دارد. روی این حقیقت استعمال این رساله بحیث کتاب ممد درسی در پهلوی کتاب: ستها و استعمال آنها، که بغرض دنبال کردن مرام قسمتی از پروگرام جدید ریاضیات معارف نگاشته شده است، ضروری پنداشته میشود.

در نگارش این کتاب علاوه از تکیه سعی شده تا مفاهیم و تئوری های کلاسیک ریاضی بعبارات سلیس و روان، بزبان دقیق ریاضیات معاصر افاده شود. ارزش نکات آتی نیز در آن مد نظر گرفته شده است:

– علایم مروج و معمول این اثر علایمی انتخاب شده که تقریباً در همه جا معمول است. علاوه بر آن لست این علایم با معنی هریک آن که ملاحظه مینمایید در صفحه 151 کتاب جابجا داده شده است.

[illegible]

مربوط آن بیشتر حاشیه گذاشته شده است.

- کلمات و لغات انگلیسی اینکه درین رساله بحیث اصطلاح بکار رفته به ترتیب الفبای لاتین تنظیم و با افادهٔ معنی دری آنها در صفحه 152 در آخر کتاب گنجانیده شده است.

سپاس اینکه توانسته باشم سهمی از وجیبهٔ ملی و شغلی ذمت خود را ادا نمایم این اثر را تحریر داشته امیدوارم که مطالعهٔ آن بحال طالبین علم و معرفت مفید ثابت گردد.

وظیفه ام میدانم تا از حضرات محترمیکه مرا در نگارش این صحیفه تشویق و مساعدت نموده اند بصورت عام و از محترم پروفیسوران ذیل Mr. E. Gille آمر و Mrs. N. Hamid تشکر و از دفتر سید انوری و شاغلی حفیظ الله (رضائی) همکار شعبهٔ نشراتی لیسهٔ عالی استقلال که در چاپ این اثر از هیچگونه مساعدت دریغ نکرده اند بصورت خاص اظهار امتنان نمایم. بهمین تسلسل از شاغلی محترم امین الله (امین) مدیر و تمام اعضای شعبهٔ نشرات اکادمی که زمینهٔ طبع این رساله را مساعد ساخته اند تشکر نموده و همچنان از شاغلی محترم محمد نذیر استاد ریاضی اکادمی و محمد ظاهر (ظهیری) معلم لیسهٔ استقلال که در پروف خوانی این اثر کمک نموده اند سپاسگذارم.

از خوانندهٔ محترم خواهشمندم تا از روی لطف از سهو و اغلاطیکه حین مطالعه به آن مواجه میشوند اینجانب را مطلع و رهنمون فرمایند تا در صورت امکان چاپ ثانی بعد از تصحیح اغلاط جلوگیری بعمل آید.

پوهنمل محمد امان نادری
عضو دیپارتمنت ریاضیات اکادمی
تربیهٔ معلم

کابل، قوس، ۱۳۵۵

رهنمائی برای استفاده بهتر ازین کتاب :

چون این کتاب غرض دنبال کردن هدف « آموختن بدون معلم » یعنی بشکل : خودآموز نوشته شده ، بناءً طرز نگارش این کتاب از طرز نوشتن کتب معمول تعلیمی متفاوت است . شیوه نگارش این اثر طوریست که در صورت مراعات نکات ذیل خواننده بتواند ازآن بصورت بهتر بهره مند گردد :

اول . هر مفکوره و مفهوم عمدهٔ ریاضی درین رساله ، با در نظر داشت ترتیب و تسلسل ، بامفاهیم نسبتاً کوچک و ساده تقسیم و هر موضوع معمولاً بقسم سوال مطرح گردیده است . جواب مربوط هر یک ازین مسایل که ما آنرا چوکات مینامیم ، متعاقباً درین چوکات مستطیل الشکل نوشته شده است . برای استفاده اعظمی بهتر است تا خواننده جواب مربوط هر چوکات را توسط یکپارچه کاغذ بپوشند .

دوم . بهتر است که خواننده نخست مسأله مربوط هر چوکات را بدقت مطالعه و آنرا تحلیل کند ، سپس جواب مربوط همان مسأله را در ورق جدا گانه بنویسند .

سوم . مسایل مربوط بعضی از چوکات ها طوری مطرح شده که جواب مربوط آنها تکمیل جملات را ایجاب میکند ، درینصورت

در صورتیکه جواب ارائه کرده خواننده با جواب مربوطه
چوکات یکی همین عبارات باشد، امّا لازمی است که جواب
ارائه شده، مفهوم جواب مربوط کتاب را افاده کند.

چهارم. بعد از مطالعه هر چوکات بهتر است تا خواننده
جواب مربوط خویش را با جواب داده شده همان چوکات
مقایسه کند. در صورتیکه جواب خواننده با جواب
مربوط چوکات مغایرت داشته باشد بهتر است تا موضوع
مربوط همان مفهوم را دوباره مطالعه نمایند.

(نادری)

بدستگاه نشرات لیسه ها چاپ شد.

فصل اوّل

سِت (مجموعه) ها، عناصر و عضویت

Sets, Elements And Membership

1. مفکوره سِت ویا مجموعه یکی از مفکوره های مهم ریاضیات معاصر شمار میرود. سِت (مجموعه) را بصورت مختصر و دقیق تعریف نمیتوان کرد. ولی ما میتوانیم که مفکوره سِت (مجموعه) را بحیث ______ تعبیر و توضیح نمائیم.

مجموعه اشیاء، ویا دسته اشیاء ...

2. باید در نظر گرفت که سِت ویا مجموعه مشخص و معین فرضاً سِت A هر شی نظر به سِت A بالضروره یکی از دو حالت ذیل را دارا باشد :

اول یا اینکه شی مورد نظر فرضاً a شامل سِت A میباشد،

دوم یا اینکه شی مذکور یعنی a شامل سِت A نمیباشد.

درصورتیکه a شامل سِت A باشد، درینصورت ما میگوییم که a یک (a) ______ ویا ______ سِت[1] (مجموعه) A سِت. درصورتیکه a شامل (b) ______ نباشد، درینصورت ما میگوییم که a عنصر ویا عضو سِت A نیست.

(a) عنصر ویا عضو، (b) سِت (مجموعه) A

3. هرگاه یک شی a شامل یک سِت A باشد، درینصورت ما مینویسیم که:

$a \in A$. وچنین خوانده میشود: "(a) ______".

واگر یک شی b شامل ویا عنصر سِت A نباشد درینصورت ما مینویسیم که:

$b \notin A$. وچنین خوانده میشود: "(b) ______".

(a) "a شامل سِت A ویا a یک عنصر سِت A."
(b) "b شامل A نیست ویا b یک عنصر سِت A نیست."

4. اگر سِت: $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مدنظر گرفته شود، چون 2 شامل سِت B است، پس مینویسیم (a) ________ . ازینکه 7 شامل سِت B نیست، درینصورت مینویسیم (b) ________ .

(a) $2 \in B$. (b) $7 \notin B$.

5. سِت: $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را درنظر گرفته، علائم شمول یا عضویت "$\in$" ویا عدم شمول "$\notin$" را در جاهای مناسب مسائل ذیل بنویسید:

(a) 3 — B ، (b) 6 — B ، (c) $\frac{3}{2}$ — B ، (d) π — B .

(a) $\in$ ، (b) $\notin$ ، (c) $\notin$ ، (d) $\notin$

6. یک سِت را عموماً توسط حروف کلان لاتین (انگلیسی) و عناصر آنرا توسط حروف خورد انگلیسی نمایش میدهند. اگر سِت: $A = \{c, d, e, f\}$ باشد، جواب صحیح سوالات ذیل را به T وجواب غلط انها را به F ارائه کنید:

(a) $b \in A$ ، (b) $d \in A$ ، (c) $a \notin A$ ، (d) $g \in A$ ، (e) $f \notin A$.

F (e) ، F (d) ، T (c) ، T (b) ، F (a)

۷. اگر B ستی را که عناصر آنرا شش حرف اول حروف الفبای لاتین تشکیل میدهند ارائه کند، درینصورت: B={ . . . . . } میباشد.

B={a، b، c، d، e، f}

۸. ازینکه نوشتن تکراری عناصر در یک ست مربوط اینجا بی تفاوت است، حتی این حقیقت را میتوانیم بنویسیم که: {a,a,a,b,b} = {a,b} است. شکل ساده ترین ست: C={2، 3، 3، 3، 5، 5} را بنویسید.

شکل ساده ترین ست C عبارت است از {2، 3، 5}.

۹. ازینکه محل و ترتیب عناصر در یک ست بی تفاوت است، حتی این واقعیت را میتوانیم بنویسیم: {a، b}={b، a}. حال اگر ست A={1، 2، 3} را در نظر بگیریم، درینصورت:

(a) دو شکل دیگر ست A عبارت اند از: { . . . } و { . . . }

(b) عدد امکانات یکه با آن ست A را ارائه نموده میتوانیم عبارت از ______ است.

(a) $\{2،1،3\}$ ، $\{3،1،2\}$ ، (b) 6 امکان

10. اگر سِت $C = \{\triangle ، \diamondsuit ، \spadesuit ، \clubsuit\}$ را مد نظر گرفته شود، با در نظر داشت حقیقت اینکه ترتیب و محل عناصر در سِت بی تفاوت است، (a) سه شکل دیگر سِت C را بنویسید. (b) عدهٔ تمام امکانات که سِت C توسط اینها ارائه شده میتواند چند است؟ چرا؟

(a) $\{\diamondsuit ، \spadesuit ، \clubsuit ، \triangle\}$ ، $\{\spadesuit ، \clubsuit ، \triangle ، \diamondsuit\}$ ، $\{\clubsuit ، \triangle ، \diamondsuit ، \spadesuit\}$

(b) عدهٔ تمام امکانات 24 است؛ زیرا از چپ برای خانهٔ اول سِت 4 چانس، برای خانهٔ دوم آن 3 چانس، برای خانهٔ سوم 2 چانس و بالاخره برای خانهٔ چهارم آن محض 1 چانس وجود دارد؛ پس عدهٔ تمام امکانات عبارت از:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ میشود.

11. یک سِت را بر علاوهٔ آنکه باساس لست کردن تمام عناصر آن یعنی بشکل روستر Roster آن مانند سِت های فوق نوشته میتوانیم، آنرا باساس خواص مشترک عناصر آن یعنی بنابر استفاده از استعمال علامهٔ سِت سازی Set builder notation نیز میتوان نوشت. مثلاً

سِت اعداد تام بین دو عدد 3 و 8 را بدو طریق ذیل ارائه نموده میتوانیم:

اگر سِت مورد نظر را به D نشان دهیم، درینصورت سِت D را باساس لِست عناصر آن: $D = \{\ ,\ ,\ ,\ \}$ نوشته میتوانیم. و بهمین قسم سِت D را باساس خواص مشترک عناصر آن و با استفاده از استعمال علامهٔ سِت سازی قرار ذیل نشان میتوان داد: $D = \{x \mid x \in \mathbb{I}$ و $3 < x < 8\}$. (که درینجا $\mathbb{I}$(*) سِت تمام اعداد تام را ارائه میکند.) شکل اخیر سِت D چنین افاده میشود: ______________________

______________________.

$\{4, 5, 6, 7\}$، عناصر سِت D را x های متحول تشکیل میدهند طوریکه این x شامل سِت اعداد تام بوده و بین 3 و 8 قرار دارند.

12. اگر $\mathbb{I}$ سِت تمام اعداد تام و $\mathbb{R}$ سِت تمام اعداد حقیقی را ارائه کند، در صورت امکان شکل روستر Roster سِت های:

____

(*) درینجا سِت اعداد تام $\mathbb{I}$ عبارتست از: $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$$A=\{x \mid x\in I,\ 2<x<5\}$$

$$B=\{x \mid x\in R,\ 2<x<5\}$$ را بنویسید.

$A=\{3،4\}$ ، شکل روستر سِت B را نگاشته نمیتوانیم زیرا بین 2 و 5 بی نهایت زیاد اعداد حقیقی موجود است ، پس نمیتوانیم که تمام عناصر سِت B را بصورت روستر Roster ، لست آنرا بنویسیم.

13. دو مجموعهٔ ذیل را داریم: $P=\{2،3،5،7\}$

$S=\{x \mid x\in R و 9<x\}$ را با علایم:

"$\in$" و "$\notin$" مدنظر گرفته ، صحیح و غلط هر یک از افاده‌های ذیل را ارائه کنید؛ طوریکه در مقابل افادهٔ صحیح آن حرف T و بمقابل افادهٔ غلط آن حرف F را بنویسید:

(a) $7\in S$ ، (b) $7\in P$ ، (c) $4\pi\notin P$ ،

(d) $4\pi\notin S$ ، (e) $\frac{41}{2}\in S$ ، (f) $4\in P$ ،

(g) $8\in S$ (h) $2\pi\notin S$ ، (i) $1\notin P$.

T (e) ، F (d) ، T (c) ، T (b) ، F (a)

T (i) ، T (h) ، F (g) ، F (f)

14. با در نظر داشت واقعیت اینکه نگاشتن مکرر عناصر در سِټ مربوط اهمیت ندارد،
سِټ: {ب، گ، ل} = A را در نظر بگیرید،
دو سِټ کلمات دو حرفی را که از حروف مربوط سِټ A تشکیل یافته باشند،
بنویسید.

{گل، بلب، ببل} ؛ {ببل، لب، گل}

15. دو سِټ: $A = \{x \mid x \in \mathbb{I}, 1 < x < 2\}$

و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 2\}$ را در نظر گرفته، در صورت امکان

(a) شکل روستر سِټ A را بنویسید.

(b) شکل روستر سِټ B را بنویسید.

(a) شکل روستر سِټ A عبارت از سِټ تهی است که هیچ عنصر ندارد. { }.

(b) نظر بجواب جوکات 12 و استدلال آن شکل روستر سِټ B را نوشته نمیتوانیم.

تعریف : سِتی که دارای هیچ یک عنصر نباشد بنام

سِت خالی Empty Set ویا Null set

یاد میشود.

سِت خالی را معمولاً به ϕ ویا { } ارائه میکنند.

16. ما میدانیم که بین دو عدد تام 7 و 8 کدام عدد تام دیگر موجود نیست. بنابر آن سِتی که عناصر آن را اعداد تامی که بین 7 و 8 واقع اند تشکیل میدهد یک سِت خالی ϕ است. با استفاده از استعمال علامهٔ سِت سازی Set builder notation ما میتوانیم که سِت مورد نظر خود را بشکل ________ ارائه نمائیم.

$$\boxed{\{x \mid x \in \mathbb{I},\ 7 < x < 8\}}$$

17. اگر سِت اعداد نسبتی (گویاه ویا ناطق) Rational Numbers را به Q ارائه نموده و آنرا قرار ذیل تعریف نمائیم:

$Q = \{x \mid x = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{I},\ b \neq 0\}$ این افاده

چنین خوانده میشود: "________."

« Q یا ست اعداد نسبتی عبارت از ست اعداد یست که عناصر آنرا x ها تشکیل داده باشند طوریکه این x ها بشکل $\frac{a}{b}$ نوشته شده (مساوی به $\frac{a}{b}$ بوده) و a و b شامل ست اعداد تام $\mathbb{Z}$ بوده و b خلاف صفر است. »

18- ما میدانیم که: $Q=\{x \mid x=\frac{a}{b}$ و $a , b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0\}$ ست اعداد نسبتی Rationals را نشان میدهد؛ با در نظر داشت تعریف فوق ست Q کدام افاده های ذیل صحیح و کدام اینها غلط است؟ افاده صحیح را به T ، و افاده غلط را به F نشان دهید:

(a) $\frac{3}{2} \in Q$ ، (b) $1.3 \notin Q$ ، (c) $\sqrt{2} \in Q$ ، (d) $\pi \notin Q$ ،
(e) $0 \in Q$ ، (f) $2 \notin Q$ ، (g) $\frac{22}{7} \in Q$ ، (h) $\sqrt{4} \in Q$.

T(a) ، F(b) ، F(c) ، T(d) ، T(e) ، F(f) ، T(g) ، T(h) .

19- اگر ست S اعداد نسبتی ای را که بین 5 و 6 واقع اند ارائه کند، در صورت امکان

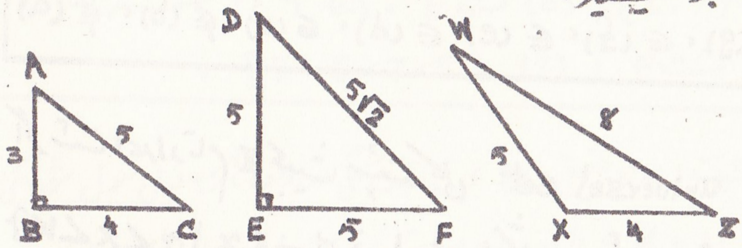
(a). ست S را اولاً با استفاده علامه ست سازی S را توضیح کنید.

(b). باساس لیست عناصر آن ست S را ارائه کنید.

(a) $S=\{x \mid x\in Q ,\ 5<x<6\}$

(b) توضیح کنید با شانس لست عناصر آن امکان پذیر نیست، زیرا: بین دو عدد 5 و 6 بی نهایت اعداد نسبتی موجود است، که نمیتوان همهٔ انها را لست نمایم.

20. هرگاه T لست تمام شکل ها را، M لست تمام مثلث متساوی الساقین را و R لست تمام مثلث قایم الزاویه را ارائه کند، با در نظر داشت اشکال ذیل علایم «$\in$» ویا «$\notin$» را در محل مناسب افاده های مربوط انها بنویسید:



(a) ΔWXZ ___ M ، (b) ΔWXZ ___ R ، (c) ΔABC ___ M ،

(d) ΔWXZ ___ T ، (e) ΔABC ___ R ، (f) ΔDEF ___ M

(g) ΔDEF ___ R ، (h) ΔABC ___ M .

(a) $\notin$ ، (b) $\notin$ ، (c) $\notin$ ، (d) $\in$ ، (e) $\in$ ، (f) $\in$ ، (g) $\in$ ، (h) $\notin$.

21. علامهٔ « $\in$ » و یا علامهٔ « $\notin$ » را در محل مناسب مربوط آنها در افادهٔ ذیل بنویسید، در صورتیکه $A=\{-5 ، 0 ، \pi ، \frac{3}{7} ، 1\}$ باشد.

(a) $-2 — A$ ، (b) $2\pi — A$ ، (c) $0 — A$ ، (d) $1 — A$ ، (e) $\pi — A$ ، (f) $\frac{7}{7} — A$ ، (g) $-1 — A$.

(a) $\notin$ ، (b) $\notin$ ، (c) $\in$ ، (d) $\in$ ، (e) $\in$ ، (f) $\in$ ، (g) $\notin$.

22. اگر ست اعداد تام $\mathbb{Z}$ بحیث ست کلی Universel set در افادهٔ: $S=\{x \mid 7<x<16\}$ قبول شود، شکل روستر ست S عبارت است از ______ .

$S=\{8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 ، 13 ، 14 ، 15\}$

23. در سِت $E=\{x \mid x\in \mathbb{I},\ 5<x<8\}$ که شکل روشنتر آن عبارت از (a) ______ سِت، دیده میشود که عدد 8 شامل (b) ____ نبوده و همچنان عدد (c) ____ شامل سِت E نمیباشد. ولی در افادهٔ:

$F=\{x \mid x\in \mathbb{I},\ 5\le x\le 8\}$ عدد 8 شامل سِت F بوده و همچنان 5 شامل (d) ____ میباشد. و شکل روشنتر سِت F عبارت از: (e) ______ .

(a) $\{6, 7\}$، (b) سِت E ، (c) 5 و یا کمتر از آن
(d) سِت F ، (e) $\{5, 6, 7, 8\}$.

24. اگر سِت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ بحیث سِت کلی در افاده‌های ذیل قبول شود، یکی از علایم "$\in$" و یا "$\notin$" را در جاهای مناسب شان استعمال نمائید:

(a). 12 — $\{x \mid 8<x\le 12\}$ ، (b). 0 — $\{y \mid y>1\}$

(c). π — $\{x \mid x^2>5\}$ ، (d). -12 — $\{x \mid x\le -30\}$

(a) $\in$ ، (b) $\notin$ ، (c) $\in$ ، (d) $\notin$.

25. با درنظر داشت ست اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ بحیث ست کلی هریک از ست های ذیل، ست های مورد نظر را تشخیص کنید:

(a) $\{y \mid y-y=1\}$ ، (b) $\{x \mid 2x+x=1\}$ ،

(c) $\{z \mid z\neq z\}$ ، (d) $\{x \mid x=x\}$.

(a) ϕ ، (b) $\{\frac{1}{3}\}$ ، (c) ϕ ، (d) تمام اعداد حقیقی $\mathbb{R}$.

26. هریک از ست های ذیل را بعبارات بیان کنید:

(a) $A=\{x \mid x\in\mathbb{R} ، x^2-1=0\}$ ،

(b) $B=\{y \mid y\in\mathbb{Q} ، y^2-1=0\}$ ،

(c) $C=\{z \mid z\in\mathbb{I} ، z^2-1=0\}$.

(a) A ست x های است که شامل اعداد حقیقی بوده و در شرط $x^2-1=0$ را صدق میکنند.
(b) B ست y های است که شامل ست اعداد نسبتی بوده و در شرط $y^2-1=0$ را صدق میکنند.
(c) C ست z های است که شامل ست اعداد تام بوده و در شرط $z^2-1=0$ را صدق میکنند.
ویا عبارات دیگر، معادل عبارات فوق جواب شاگرد مذکور را افاده کرده میتواند.

فصل دوم

سِت های فرعی (جزئی) یک سِت

Subsets of a set

27. اگر دو مجموعه ویا سِت: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
و $B = \{2, 4\}$ مد نظر گرفته شوند، دیده میشود
که هر عنصر سِت B (a) ____ سِت A است. درین صورت
گفته میشود که سِت B یک سِت (b) ____ ویا ____ سِت A است.

(a) شامل ویا عضو ویا عنصر ، (b) فرعی ویا جزئی

28. اگر سِت: $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2 \leq x \leq 5\}$
و سِت: $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2 < x < 5\}$ را مورد مطالعه قرار دهیم
ملاحظه میرسد که تمام عناصر سِت E در سِت D (a) ____ است.
پس گفته میتوانیم که E یک سِت (b) ____ سِت ____ است.

(a) شامل ، (b) فرعی میا جزئی (سَت) D

تعریف :- یک سِت S سِت فرعی Subset
یک سِت T گفته میشود درصورتیکه هر (تمام)
عنصر S شامل سِت T باشد .

تعریف فوق را چنین ارائه میکنند : $S \subset T$.

29. کدام سِت های ذیل سِت فرعی : {1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 6} اند؟
(a) {3 ، 6 ، 7} ، (b) {1 ، 3 ، 6} ، (c) {5} ، (d) {0}

(a) نیست ، (b) میباشد ، (c) میباشد ، (d) نمیباشد .

30. هرگاه یک عنصر در یک سِت فرضاً A موجود شود که شامل
سِت B نباشد درینصورت سِت A ، سِت فرعی سِت B نبوده
وچنین مینویسند ______ .

$A \not\subset B$

31. علامه گذاری: اگر A بعوض جملات ویا عبارات که بشکل:
«اگر p پس q» افاده میشوند علامه «$\Rightarrow$» بشکل: «$p \Rightarrow q$»
بکار برده میشود. وافادهٔ: «$p \Rightarrow q$» بمفهوم «p مستلزم q است»
ویا بمعنی: «p ایجاب میکند q را.» نیز استعمال میشود.
با استفاده از استعمال علامهٔ «$\Rightarrow$» ما تعریف فوق مربوط
چوکات (28) را طبق ذیل توضیح نموده میتوانیم: یک سِت S یک سِت
فرعی subset سِت T میباشد درصورتیکه برای تمام x ——
——.

$$\boxed{x \in S \Rightarrow x \in T}$$

32. علامه گذاری مربوط چوکات (31) فوق را انکشاف داده و عبارات:
«اگر p پس q و اگر q پس p» ویا اینکه «p مستلزم q و q مستلزم p است»
را توسط استعمال علامهٔ: «$\Leftrightarrow$» بشکل: «$p \Leftrightarrow q$» ویا «$q \Leftrightarrow p$»
ارائه مینمایند. افادهٔ: «$p \Leftrightarrow q$» برای توضیح مفهوم عبارت:
«p اگر تنها و تنها q» نیز استعمال میشود. درحقیقت افاده:
«$p \Leftrightarrow q$» شکل مختصر دو افاده: «——— و ———» را ارائه میکند.

“$p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$”

33- اگر یک سِت A سِت فرعی یک سِت B باشد، درینصورت
مینویسیم: "$A \subseteq B$". بزودی ملاحظه خواهیم نمود که استعمال $\subseteq$
در بین دو سِت با طرز استعمال $\leq$ در بین دو عدد حقیقی "$\mathbb{R}$"
شباهت زیاد خواهد داشت. اگر یک سِت A سِت فرعی یک
سِت B نباشد، درینصورت مینویسیم: "$A \not\subseteq B$". اکنون
در ذیل علایم $\subseteq$ و $\not\subseteq$ را در جاهای مناسب مربوط شان بنویسید:

(a) $\{a, c, b\}$ $\{a, b\}$ ، (b) $\{6, 7\}$ $\{5\}$ ، (c) $\{1, 2, 5\}$ $\{1, 2\}$

(a) $\{a, b\} \subseteq \{a, c, b\}$ (b) $\{5\} \not\subseteq \{6, 7\}$
(c) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 5\}$

34. درصورتیکه یک سِت A سِت فرعی یک سِت B باشد درینصورت
سِت B را بنام superset ویا سِت اصلی مینامیم. حال در دو
سِت $\{a, b, c, d\}$ و $\{b, d\}$ سِت اصلی و همچنان
سِت فرعی را تعیین نمائید.

$\{a, b, c, d\}$ سِت اصلی و $\{b, d\}$ عبارت از سِت فرعی است.

35. اگر دو سِت: $C = \{x \mid x \in \mathbb{I}$ و $-3 < x < 2\}$
و $D = \{y \mid x \in \mathbb{I}$ و $-2 < x < 4\}$ را در نظر بگیریم

در نیصورت بشکل روستر (a) سِت C عبارت است از: ________ .

دشکل روستر (b) سِت D عبارت است از: ________ .

(c) دیده میشود که رابطه بین سِت C و D: ________ موجود است.

زیرا: ________ . و همچنان رابطه بین سِت D و

C عبارت از ________ سِت است، زیرا: ________ .

(a) $C = \{-2, -1, 0, 1\}$ ، (b) $D = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
(c) $C \not\subseteq D$ ، زیرا $-2 \in C$ ولی $-2 \notin D$.
(d) $D \not\subseteq C$ ، زیرا $3 \in D$ امّا $3 \notin C$ و همچنان $2 \in D$ امّا $2 \notin C$.

36. اگر سِت: $E = \{x \mid x \in \mathbb{I}, -3 < x < 2\}$ و
سِت: $F = \{x \mid x \in \mathbb{I}, -3 \leq x \leq 2\}$ در نظر گرفته شود

بملاحظه میرسد که $E \subseteq F$ ثبت ، زیرا: هر ____ آن x

شامل F نیز میباشد.

x شامل E ، ویا هر $x \in E$ ویا $\forall x \in E$

37 . اگر هر دو سِت E و F دربرط چوکات (56) را دوباره از نظر بگذرانیم بملاحظه میرسد که بین F و E رابطهٔ: $\subseteq$ ویا $\not\subseteq$ موجود است،

زیرا: ____ وهم چنان ____ .

$F \not\subseteq E$ ، زیرا: $-3 \in F$ که $-3 \notin E$ وهم چنان $2 \in F$ که $2 \notin E$.

38 . اگر سِت های: $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ و $-2 \leq x \leq 2\}$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ و $-2 \leq x \leq 2\}$ مد نظر گرفته

شوند دیده میشود که (a) ____ ، زیرا هر عنصر B شامل A ثبت است.

از طرف دیگر بملاحظه میرسد که (b) ____ ، زیرا بی نهایت عناصر در A

موجود شده میتوانند که شامل سِت B نمیباشند. چنانچه $\frac{3}{2} \in A$

ولی $\frac{3}{2} \notin B$. همچنان $-1.9 \in A$ بوده که $-1.9 \notin B$ میباشد.

(a) $B \subseteq A$ ، (b) $A \not\subseteq B$

39. اگر $A \subseteq B$ باشد، درینصورت (a) ________ میباشد.
وبالعکس اگر $x \in A \Rightarrow x \in B$ باشد، درینصورت (b) ______ میباشد.

(a) $x \in A \Rightarrow x \in B$ (b) $A \subseteq B$

40. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد، درینصورت $A = B$ میباشد. زیرا: ________________

____

زیرا: از $A \subseteq B$ نتیجه میشود که $x \in A \Rightarrow x \in B$
همچنان از $B \subseteq A$ نتیجه میشود که $x \in B \Rightarrow x \in A$
چون هر (تمام) عناصر ست A شامل B و همچنان
تمام (هر) عنصر ست B شامل A است، پس هر دو
ست A و B دارای عین عناصر بوده، بناءً باهم
مساوی اند.

۴۱ - از ست عددی دو ست: $A = \{3, 5, 7, 11\}$

و $B = \{5, 7, 11\}$ بملاحظه میرسد که

هر عنصر ست B شامل ست A است. پس درینصورت

(a) ______ . از طرف دیگر در ست A یک عنصر 3

موجود است که شامل ست B نیست. بنابران (b) ______ .

ست B ست فرعی مناسب proper subset ست A میباشد.

$$\boxed{A \not\subseteq B \quad (b) \quad B \subseteq A \quad (a)}$$

تعریف: یک ست S ست فرعی مناسب (یا یک ست T گفته میشود در صورتیکه proper subset

هر عنصر (تمام عناصر) ست S شامل T

بوده ولی لااقل یکعنصر در T موجود گردد

که شامل S نباشد.

یا بعبارت دیگر: ست S یک ست فرعی مناسب ست T

است، درصورتیکه $S \subset T$ بوده ولی $T \not\subseteq S$ باشد.

هرگاه یک سِت S یک سِت فرعی مناسب

یک سِت T باشد، درینصورت مینویسند

که : $S \subset T$. یعنی بجای علامهٔ " $\subseteq$ "

سِمبول ویا علامهٔ : " $\subset$ " را بکار می برند.

42. نظر به تعریف: " A سِت فرعی B گفته میشود، درصورتیکه هر عنصر A شامل B باشد." ازینکه هر عنصر یک سِت فرضاً S در S شامل است؛ یا بعبارت دیگر کدام عنصری در S موجود شده نمیتواند که شامل S نباشد.

بنابرین هر سِت S (a) ______ همان سِت S است.

(b) آیا هر سِت مانند S سِت فرعی مناسب Proper Subset خودش شده میتواند؟ چرا؟

(a) سِت فرعی ، (b) نه خیر ؛ زیرا در سِت S کدام عنصری موجود شده نمیتواند که شامل S نباشد، پس $S \not\subset S$.

43. استعمال علامهٔ " $\subset$ " بین دو (مجموعه) سِت: A و B

تا حدی با استعمال علامهٔ : « < » که غرض مقایسه بین دو عدد حقیقی

"$\mathbb{R}$" معمول است شباهت دارد . بطور مثال عدد x

کوچکتر است از y را، توسط افاده : " $x<y$ " ارائه مینمایند.

وافاده بیان میکند که : $x \neq y$. بهمین قسم افادهٔ :

$A \subset B$ توضیح مینمائید که $A \neq B$. جاهای خالی افاده های ذیل

توسط یکی از علایم « < » ویا « $\subset$ » خانه پری نمائید ، طوریکه

مفهوم درست وصحیح ریاضی را افاده کند .

(a) $8 — 12$ ، (b) $\{1,2\} — \{2\}$ ، (c) $3 — \pi$ ،

(d) $\{a,c,b\} — \{a,c\}$ ، (e) $\{\blacktriangle, \div, \blacklozenge\} — \{\div, \blacklozenge, \blacktriangle, 2\}$.

(a) $8<12$ ، (b) $\{2\}\subset\{1,2\}$ ، (c) $\pi>3$ ،
(d) $\{a,c\}\subset\{a,c,b\}$ ، (e) $\{2,\blacktriangle,\blacklozenge,\div\}\supset\{\blacklozenge,\div,\blacktriangle\}$.

44. استعمال علامهٔ « $\in$ » رابطهٔ شمول ویا عضویت یک عنصر را

دریک ست توضیح مینمائید ، درحالیکه استعمال علامه « $\subseteq$ » و

« $\subset$ » رابطهٔ ست فرعی بودن یک ست را دریک ست افاده میکند .

در افاده های ذیل یکی از علایم « $\in$ » ، « $\subseteq$ » ویا « $\subset$ » را

در جاهای مناسب آن بنویسید :

(a) $2 \;\_\_\; A$ ، (b) $\{0,1,2\} \;\_\_\; \{0,2\}$ ، (c) $B \;\_\_\; a$ ،

(d) $\{2,3\} \;\_\_\; \{3,2\}$ ، (e) $\{2,1\} \;\_\_\; 5$ ، (f) $\{2\} \;\_\_\; \{0\}$.

(a) $\in$ یا $\notin$ ، (b) $\in$ ، (c) $\in$ یا $\notin$ ، (d) $\subseteq$ ، (e) $\notin$ ، (f) $\not\subset$

45. افادهٔ $S \not\subset T$ این مطلب را توضیح نمائید که : ______________

____

لااقل یک عنصر $x \in S$ موجود شده میتواند طوریکه $x \notin T$ میباشد.

46. اگر S یک سِت و Φ سِت خالی را ارائه کند آیا Φ سِت فرعی S شده میتواند؟ چرا؟

بلی ، Φ سِت فرعی هر سِت شده میتواند.
زیرا در سِت Φ کدام عنصری موجود شده نمیتواند که شامل S نباشد ، بنابران Φ سِت فرعی S است. بهمین استدلال Φ سِت فرعی هر سِت ادعا شده میتواند.

47. ما میدانیم که دو ست A و B باهم مساوی اند، در صورتیکه $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$ باشد. یا بعبارت دیگر دو ست A و B باهم مساوی است در صورتیکه دارای عین عناصر باشند.

کدام ستهای مفروض ذیل باهم مساوی اند:

(a) $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ ، (b) $\{1, 2, 3, 4\}$

(c) $\{x \mid x \in \mathrm{II}$ و $x < 12\}$ ، (d) $\{x \mid x \in \mathrm{I}$ و $0 < x < 5\}$

(e) $\{x \mid x \in$ ست اعداد تام تاق و $1 < x < 12\}$

(a) و (e) و همچنان (b) و (d) باهم مساوی اند.

48. اگر ست: $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ و $-2x+3 < 5-3x\}$

و ست: $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ و $x < 2\}$ مفروض باشند،

نشان میدهیم که $A = B$. برای رسیدن به این هدف

نشان باید داد که: (1) $A \subseteq B$ و (2) $B \subseteq A$.

فرض آزمایش کردن رابطه: $A \subseteq B$ کافیست تا یکعنصر کیفی x را در ست A اخذ و وجود آنرا در ست B جستجو باید نمود، یعنی حقیقت رابطه: $x \in A \Rightarrow x \in B$ را جستجو مینمائیم:

ثبوت :
$$x \in A \Rightarrow x < 2$$
$$\Rightarrow -3x + x < 2 - 3x$$
$$\Rightarrow -2x < 2 - 3x$$
$$\Rightarrow 3 - 2x < 2 - 3x + 3$$
$$\Rightarrow 3 - 2x < 5 - 3x$$
$$\Rightarrow x \in B$$

ازینکه موجودیت یکعنصر کیفی $x \in A$ در ثبت B نیز تثبیت شد ،

بنابرآن $A \subseteq B$. ثابت

اکنون موجودیت رابطهٔ : $B \subseteq A$ را نشان دهیم .

برای تثبیت وجود رابطهٔ $B \subseteq A$ یکعنصر کیفی فرضاً $p \in B$ را مورد مطالعه قرار داده و وجود آنرا در A طبق ذیل جستجو مینمائیم :

$$p \in B \Rightarrow 3 - 2p < 5 - 3p$$
$$\Rightarrow 3 - 2p + 3p < 5 - 3p + 3p$$
$$\Rightarrow 3 + p < 5$$
$$\Rightarrow 3 + p - 3 < 5 - 3$$
$$\Rightarrow p < 2$$
$$\Rightarrow p \in A .$$

ازینکه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ است، بنابرآن گفته میتوانیم که ______ .

$$\boxed{A = B .}$$

49. اگر دقیق توجه شود دیده میرسد که هر ست فرعی مناسب ست B یک ست فرعی B است؛ ولی هر (تمام) ست فرعی یک ست B ست فرعی مناسب proper subset آن نیست.

صحیح وغلط بودن هریک از افادهٔ ذیل را توسط حروف T و F نشانی کنید

(a) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ ، (b) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$ ،

(c) $\{3, 2, 1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ، (d) $\{3, 2, 1\} \subset \{1, 2, 3\}$.

(a) F بهتر است (b) T ، (c) T ، (d) F

تعیین تعداد ست های فرعی یک ست محدود[1]:

50. ما میدانیم هر ست، ست فرعی خودش بوده وهم چنان ست خالی $\emptyset$، ست فرعی ...

---

(1) درین کتاب صرف با ازست ای محدود عبارت از ست های است که عدهٔ عناصر انها معلوم باشد.

سِت خالی سِت فرعی Subset هر سِت است . با در نظر داشت این حقیقت تمام سِت های فرعی سِت : $A = \{a\}$ را بدست آرید .

$$\{\ \} \subseteq A \quad ، \quad \{a\} \subseteq A$$

51- از مسئله مربوط چوکات (50) این حقیقت بثبات میرسد: وقتیکه مجموعه دارای یک عنصر است عده سِت های فرعی آن 2 سِت است. اکنون سِت : $B = \{a ، b\}$ را در نظر گرفته و تمام سِت های فرعی آنرا حاصل نمائید. یعنی تعداد تمام سِت های فرعی این سِت B که دارای دو (2) عنصر است، چند سِت است ؟

$$\{\ \} \subseteq B \;،\; \{a\} \subseteq B \;،\; \{b\} \subseteq B \;،\; \{a ، b\} \subseteq B$$

تعداد تمام سِت های فرعی این سِت B ، 2 عنصره ، 4 سِت است .

52- با استفاده از حل مسئله مربوط چوکات (51) تمام سِت های فرعی سِت سه (3) عنصره : $C = \{a ، b ، c\}$ را بدست آرید . عده تمام سِت های فرعی سِت C به چند سِت میرسد ؟

چون تمام عناصر سِت $B = \{a , b\}$ در C نیز شامل است
بنابراین تمام سِت های فرعی B در جمله سِت های فرعی
سِت C نیز شامل میباشند . ازینکه سِت C دارای
یک عنصر (c) بیشتر از سِت B است ، پس با ازدیاد
عنصر (c) در هر یک از تمام سِت های فرعی سِت B ، چهار
سِت فرعی دیگر سِت $C = \{a , b , c\}$ طبق ذیل حاصل میشود :

$\{\ \} , \{a\} , \{b\} , \{a , b\}$

$\{c\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a , b , c\}$

که هر هشت سِت فوق سِت های فرعی سِت C را تشکیل میدهند .

53. با استفاده از حل مسایل مربوط چوکات های (50 - 52) رابطه بین عده عناصر و تعداد سِت های فرعی یک سِت محدود را تعیین کنید .

از حل مسایل مربوط چوکات های (50 الی 52) بمشاهده میرسد که :
تعداد سِت های فرعی یک سِت (یک عنصره) مساوی است به: $2^1 = 2$ سِت.
تعداد سِت های فرعی یک سِت (2 عنصره) مساوی است به: $2^2 = 4$ سِت.
تعداد سِت های فرعی یک سِت (3 عنصره) مساوی است به: $2^3 = 8$ سِت.

بلاخره دیده میشود که با زیاد نمودن یک عنصر در یک ست تعداد ست های فرعی آن 2 چند میشود.
پس تعداد ست های فرعی یک ست (4 عنصره) مساوی است به: $2^4=16$ ست.
و " " " " " (5 عنصره) " " : $2^5=32$ " "
و بالاخره . . .
تعداد ست های فرعی یک ست (n عنصره) مساوی است به: 2^n ست.

53. آیا حقیقت رابطهٔ عده ست های فرعی یک ست n عنصره که مساوی است به: 2^n ست، بالای ست خالی، { }، هم قابل تصدیق است؟ استدلال کنید.

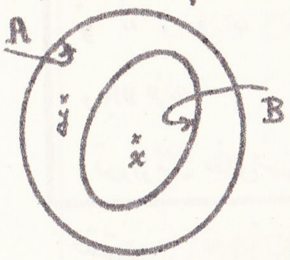
بلی، زیرا: ست خالی دارای هیچکدام یک عنصر نیست، یعنی عده عناصر ست خالی صفر بوده، پس تعداد ست های فرعی آن مساوی است به: $1=2^0$ است.
حالانکه ست خالی دارای محض یک ست فرعی که آن هم خودش است میباشد.

54. ست $E=\{a,b,c,d,e\}$ را در نظر بگیرید، (a) عده ست های فرعی E چند است؟ (b) عده ست های مناسب E چند است؟
(c) عده ست های فرعی یکعنصرهٔ آن چند است؟ (d) عده ست های فرعی چهار عنصره آن چند است؟

(a) 32 (b) 31 (c) 5 (d) 5

ارائهٔ سِت‌ها با استفاده از وِن دیاگرام[1]:

55. شکل هندسی ارائهٔ سِت‌ها توسط اشکال که ما آنرا بنام وِن دیاگرام یاد میکنیم صورت گرفته میتواند. مثلاً در شکل (1-1) مقابل نقاط ناحیهٔ داخلی دایرهٔ A تمام عناصر مربوط سِت A را ارائه کرده



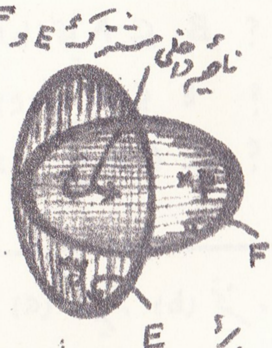
وهمین قسم نقاط ناحیهٔ داخلی بیضوی B تمام عناصر مربوط سِت B را ارائه میکند. شکل (1-1)

بملاحظهٔ از شکل (1-1) آیا (a) B سِت فرعی A شده میتواند؟
(b) B یک سِت فرعی مناسب A شده میتواند؟ استدلال کنید.

(a) بلی، زیرا هر نقطهٔ مربوط ناحیهٔ داخلی بیضوی B شامل دایرهٔ A نیز میباشد.
(b) بلی، زیرا بعضی نقاطی در ناحیهٔ داخلی A موجود میباشد که شامل بیضوی B نیست. بنابران $B \subset A$.

(1) گرچه در اکثر کتب ریاضیات دیاگرام که توسط آنها مجموعه‌ها یا سِت ارائه میشود بنام Venn Diagram معروف است، ولی بعضی از نویسندگان آنرا بنام Euler Diagram باعتبار Leonhard Euler (1707-1783) نیز یاد میکنند.

56. با در نظر داشت وین دیاگرام مربوطه شکل (1-2) که بیضوی خط عمودی ست E و ناحیه داخلی بیضوی خط افقی ست F را ارائه میکند؛ به سوال ذیل جواب دهید:



شکل (1-2)

(a). آیا $E \subseteq F$ ؟

(b). آیا $F \subseteq E$ ؟ چرا؛ استدلال کنید.

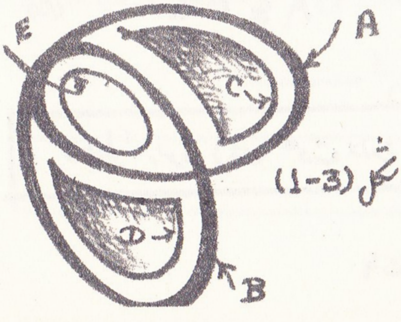
(c). آیا کدام ناحیه‌ای موجود شده میتواند که ست فرعی هر دو ست E و F شود؟

(a) نخیر، زیرا از شکل دیده میشود که یکعده عناصر مانند $4 \in E$ که $4 \notin F$. پس $E \nsubseteq F$.

(b) نخیر، زیرا: $P \in F$ موجود است، ولی $P \notin E$.

(c) بلی، ناحیه مشترک هر دو ست E و F ست فرعی مشترک E و F است.

57. وین دیاگرام مربوطه شکل (1-3) را در نظر گرفته،



شکل (1-3)

(a). آیا $A \subseteq B$ ؟

(b) آیا $B \subseteq A$ ؟ (c) آیا $C \subseteq A$ ؟ (d) $C \subseteq B$

(e) آیا $E \subseteq A$ ؟ (f) آیا $D \subseteq B$ ؟ (g) آیا $D \subseteq A$ ؟

(h) آیا $E \subseteq B$ ؟ (i) آیا $E \subseteq C$ ؟ (j) آیا $E \subseteq D$ ؟

(a) نخیر، (b) نخیر، (c) بلی، (d) نخیر، (e) بلی، (f) بلی
(g) نخیر، (h) بلی، (i) نخیر، (j) نخیر.

58. نقاط نواحی داخلی هر یک از بیضوی های A، B و C در این دیاگرام و ربط شکل (1-4) از ست های A، B و C نماینده گی میکند، با در نظر داشت شکل یکی از روابط ذیل صحت دارد، آن رابطه صحیح را دریافت کنید.

شکل (1-4)

(a) $B \subseteq C \subseteq A$ ، (b) $C \subseteq A \subseteq B$ ،

(c) $A \subseteq B \subseteq C$ ، (d) $C \subseteq B \subseteq A$.

رابطهٔ مربوط (d) صحت دارد.

فصل سوم

مسافه‌ها*

Intervals

5• اکثراً با استعمال بعضی سِت های فرعی سیستم اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، آنقدر ضرورت می افتد تا با آنها نام و علامه (سمبول) خاص داده شود. بطور مثال: اگر مطلب ما آن سِت فرعی اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، که عناصر بین دو عدد 5 و 7 باشد درینصورت ما این سِت فرعی $\mathbb{R}$ را به علامه: " $]5,7[$ " ارائه نموده و آنرا قرار ذیل توضیح مینمائیم:

$$]5,7[=\{x \mid 5<x<7\}$$

* اگر سِت فوق را روی خط اعداد حقیقی نشان دهیم درینصورت نقاط مربوط 5 و 7 خط عدد شامل سِت مورد نظر ما ــــــ .

نمیباشند.

60. اگر مطلب ارائه آن سِت فرعی اعداد حقیقی باشد که عناصر آن را تمام اعداد یکه بین 3- و 2 واقع اند (بشمول 3- و 2) باشد، درینصورت این سِت فرعی $\mathbb{R}$ را طبق (a): $[-3,2] = \{x \mid \_\_\_\_\_\_\_\_ \}$ نشان میدهیم. هرگاه هدف ارائه هندسی سِت مطلوب بالای خط اعداد حقیقی باشد، درینصورت تمام آن نقاط روی خط عدد که بین 3- و 2 (b)________ 3- و 2 قرار دارند عناصر سِت مورد نظر را تشکیل میدهند.

(a) $\{x \mid -3 \le x \le 2\}$ ، (b) بشمول

61. در افاده $\{x \mid -3 \le x \le 2\}$: از سِت کلی Universal set مربوط آن نام برده نشده، زیرا: ________

____

از متن مسئله مربوط آن که در چوکات (60) توضیح شده واضح است که سِت کلی آن عبارت از $\mathbb{R}$ است. پس در صورتیکه سِت کلی کدام سِت فرعی واضح باشد، ضروری نیست تا تکراراً در متن افاده از آن تذکر داده شود.

تعریف: اگر دو عدد حقیقی a و b مد نظر گرفته شود طوریکه a < b بوده و شاخهٔ بسته از a تا b را به Closed interval from a to b [a ، b] ارائه نمائیم، درینصورت [a ، b] را طبق ذیل تعریف مینمائیم: $[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$.

62: شاخهٔ بسته (closed interval) [2 ، 7] و ست {2 ، 7} از هم متفاوت اند، زیرا قرار تعریف شاخهٔ بسته [2 ، 7] ست $\{x \mid 2 \le x \le 7\}$ را ارائه میکند، و این ست تمام اعداد حقیقی بین 2 و 7 بشمول 2 و 7 را بحیث عناصر خویش دربر دارد. حالانکه {2 ، 7} عبارت از ستی که محض دارای دو عنصر 2 و 7 است، میباشد. بناءً: $[2, 7] \neq \{2, 7\}$.

در افاده های ذیل علامه و یا سمبول مناسب $\in$ و یا $\notin$ را بنویسید:

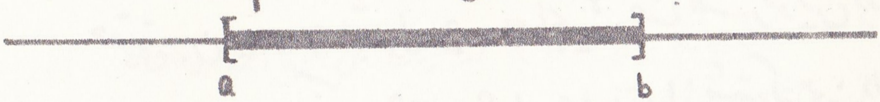
(a) 2 — [2، 7] ، (b) 5 — {5، 7} ، (c) 9 — [1، 9] .

(d) π — {2، 9} ، (e) π — [2، 9] ، (f) 10 — [2، 9] .

(g) 2.5 — {2، 5} ، (h) 2.5 — [2، 5] ، (i) 2π — [2، 5] .

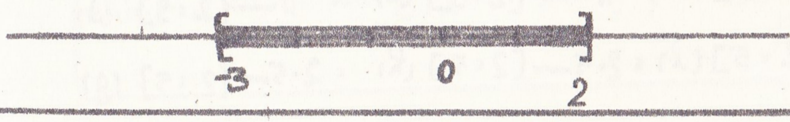
(a) $\in$ ، (b) $\in$ ، (c) $\in$ ، (d) $\notin$ ، (e) $\in$ ،
(f) $\notin$ ، (g) $\notin$ ، (h) $\in$ ، (i) $\notin$.

63. هرگاه ارائهٔ هندسی یک فاصلهٔ بسته از a تا b مطلب باشد، درینصورت از خط عدد، اعداد حقیقی قطعه خطی را بطول قیمت عددی از a تا b (بشمول a و b) جدا نموده و نقطهٔ انجام طرف چپ آنرا به عدد خورد (a) و نقطهٔ انجام طرف راست آنرا بعدد بزرگ (b) با استفاده از استعمال علامهٔ [a ، b] طبق ذیل نشان میدهیم:



واضح است که درینصورت نقاط انجامی قطعه خط در نمایندهٔ هندسی افادهٔ [a ، b] نیز شامل ست نقاط مربوط آن است.

با استفاده از توضیحات فوق شکل هندسی افادهٔ [-3 ، 2] را رسم کنید.



64. یکی از دو علامه ویا سمبول $\in$ ویا $\notin$ را در جاهای مناسب شان در افاده های ذیل بنویسید :

(a) $2 \;—\; [-2 ، 2]$ ، (b) $2 \;—\; \{-2 ، 2\}$ ،

(c) $-1.5 \;—\; [-2 ، 2]$ ، (d) $-1.5 \;—\; \{-2 ، 2\}$ ،

(e) $\frac{\pi}{6} \;—\; [-2 ، 2]$ ، (f) $\frac{\pi}{6} \;—\; \{-2 ، 2\}$ ،

(g) $2.3 \;—\; [-2 ، 2]$ ، (h) $2.3 \;—\; \{-2 ، 2\}$ ،

(j) $0 \;—\; [-2 ، 2]$ ، (k) $0 \;—\; \{-2 ، 2\}$.

(a) $\in$ ، (b) $\in$ ، (c) $\in$ ، (d) $\notin$ ، (e) $\in$ ،
(f) $\notin$ ، (g) $\notin$ ، (h) $\notin$ ، (j) $\in$ ، (k) $\notin$.

تعریف : دو عدد حقیقی a و b را در نظر گرفته طوریکه $a<b$ باشد، فاصلهٔ باز open interval از a تا b را به $]a,b[$ ارائه نموده وآنرا توسط افاده : $]a ، b[= \{x \mid a<x<b\}$ تعریف مینمائیم.

65. اگر $]x ، y[$ یک فاصلهٔ باز open interval را ارائه کند ،

از لحاظ: $]x,y[=\{p \mid x<p<y\}$ درصورتیکه اعداد x و y شامل ست نبوده، یعنی: (a) $]x,y[$ $\underset{\in \text{ و یا } \notin}{\underline{\qquad}}$ x ،

همچنان: (b) $]x,y[$ $\underset{\in \text{ و یا } \notin}{\underline{\qquad}}$ y .

(a) $x \notin]x,y[$ ، (b) $y \notin]x,y[$.

66. ساحهٔ باز $]a,b[$ را با استفاده از استعمال اشکال هندسی طبق ذیل ارائه کرده میتوانیم:

در ارائهٔ ساحهٔ باز $]a,b[$ نقاط مربوط a و b شامل ست نقاط قطعه خط رسم شده (a) ________ .

(b) شکل هندسی افادهٔ $]-1,2[$ را رسم کنید.

(a) نمیباشند ، (b)

67. ساحهٔ باز $]-1,2[$ و ست $\{-1,2\}$ از هم متفاوت اند.

زیرا افادهٔ $]-1,2[$ سِت تمام آن اعداد حقیقی را که بین -1 و 2 (بدون -1 و 2) واقع اند ارائه میکند ؛ در حالیکه $\{-1,2\}$ یک سِت دو عنصر را نشان میدهد. اگر دقیق شویم بنظر میرسد که بین این دو سِت کدام عنصری مشترک موجود نیست.

با در نظر داشت حقایق فوق الذکر یکی از دو علامه: «$\in$» و یا «$\notin$» را در جای آن در هر یک از افاده‌های ذیل بنویسید:

(a) $1 \;—\;]1,2[$ ، (b) $1 \;—\; \{1,2\}$ ، (c) $1.2 \;—\;]1,2[$ ،

(d) $1.2 \;—\; \{1,2\}$ ، (e) $2 \;—\;]1,2[$ ، (f) $2 \;—\; \{1,2\}$.

(a) $1 \notin]1,2[$ (b) $1 \in \{1,2\}$ ، (c) $1.2 \in]1,2[$ ،

(d) $1.2 \notin \{1,2\}$ (e) $2 \notin]1,2[$ ، (f) $2 \in \{1,2\}$.

64. فاصلهٔ بسته closed interval از -3 الی 2 که توسط علامه:

(a) ______ ارائه میشود و با استفاده از استعمال علامه سِت سازی

توسط افادهٔ: (b) ______ نیز توضیح شده میتواند.

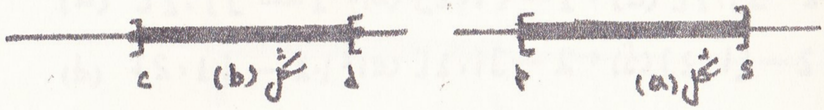
فاصلهٔ باز open interval از -3 الی 2 که توسط علامه:

(۵) ________ ارائه میگردد، با استفاده از استعمال علامه ست سازی

میتوان که آنرا توسط افاده: (d) ________ نیز ارائه نمود.

(a)	$[-3, 2]$ ،	(b)	$\{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$ ،
(c)	$]-3, 2[$ ،	(d)	$\{x \mid -3 < x < 2\}$.

69. دو شکل ذیل افاده‌ی فاصله‌ها را ارائه میکنند، شکل جبری افاده‌ها را با شامل علامه ست سازی و هم با شامل علامه گذاری فاصله‌ها بنویسید.

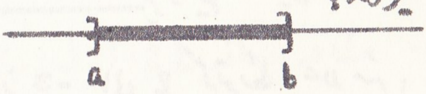


شکل (a): $[p, s] = \{x \mid p \leq x \leq s\}$

شکل (b): $]c, d[= \{x \mid c < x < d\}$

70. با استفاده از ترکیب هر دو نوع مفکوره‌ی فاصله‌ی بسته و فاصله‌ی باز مفکوره‌ی نیمه بسته و نیمه باز نیز وجود کرده و طبق ذیل تعریف و ارائه شده میتوانند:

$]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$



$[c, d[= \{x \mid c \leq x < d\}$

فاصله‌های فوق که بنام نیمه بسته half closed ویا فاصله‌های نیمه باز half open intervals نیز یاد میشوند، یک انجام آنها بسته وانجام دیگر آن باز میباشد. متوجه شوید که جهت قوس نظر به سِت مربوط شان شمول ویا عدم شمول نقطهٔ انجام مربوط شانرا تعیین میکنند. شکل جبری هریک از افاده‌های نیمه بسته ذیل را بنویسید:

(a). $]-5, 7] = \{$ ________________ $\}$

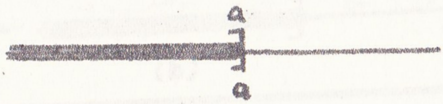
(b). $[-1, 2[= \{$ ________________ $\}$

$$\boxed{\begin{array}{l}]-5, 7] = \{x \mid -5 < x \leq 7\} \quad (a) \\ [-1, 2[= \{x \mid -1 \leq x < 2\} \quad (b) \end{array}}$$

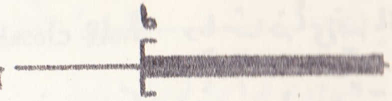
71. بعضی اوقات به مطالعهٔ آن سِت اعداد حقیقی که کوچکتر از یک عدد معینه ویا بزرگتر از یک عدد معینه اند نیازمند میباشیم. برای ارائهٔ همچو مطالب از استعمال علامه گذاری‌های Notations ذیل مستفید میشویم:

(1). $]-\infty, a[= \{x \mid x < a\}$

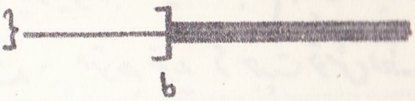
(2). $]-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$



(3). $[b,+\infty[=\{x \mid b\le x\}$



(4). $]b,+\infty[=\{x \mid b<x\}$



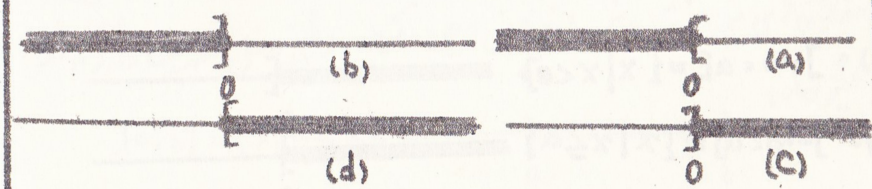
جهت قوس‌های مربوط در هر یک از ست‌های مربوطه‌شان شمول و یا عدم شمول عناصر a و b را در هر یک از حالات چهارگانه فوق تضمین میکنند. علایم «$-\infty$» و «$+\infty$» علی الترتیب برای دلالت مفهوم منفی بینهایت و مثبت بینهایت انتخاب شده‌اند. با در نظرداشت قراردادی فوق افاده‌های ذیل را تکمیل و گراف مربوط‌شان را رسم کنید:

(a). $]-\infty,0[=\{\_\_\_\_\_\}$ ، (b). $]-\infty,0]=\{\_\_\_\_\_\}$

(c). $]0,+\infty[=\{\_\_\_\_\_\}$ ، (d). $[0,+\infty[=\{\_\_\_\_\_\}$

(a). $]-\infty,0[=\{x \mid x<0\}$ ، (b). $]-\infty,0]=\{x \mid x\le 0\}$

(c). $]0,+\infty[=\{x \mid 0<x\}$ ، (d). $[0,+\infty[=\{x \mid 0\le x\}$



فصل چهارم

عملیات در ست‌ها

operations on sets

اتحاد ست‌ها union

72• بعضی اوقات ضرورت می‌افتد که تحت شرایط مشخص از دو ست موردنظر یک ست سومی را بوجود آوریم. بطور مثال اگر بخواهیم که از دو ست داده‌شده:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

و $B = \{7, 9, 11\}$ ، یک ست سومی C را

بدست آوریم طوریکه ست مطلوب C تمام عناصر A و تمام عناصر B را دارا باشد. پس نظر باین شرط ست C مورد نظر عبارت است از: ________.

$$\boxed{C = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 11\}}$$

73. تعریف: اتحاد union دو سِت A و B عبارت از سِت سومی است که به AUB افاده شده و تمام عناصر سِت A وهم تمام عناصر سِت B را دارا میباشد.

یا بعبارت دیگر:

$$A \cup B = \{x \mid \forall x \in A \text{ یا } \forall x \in B\}^{*}.$$

اگر سِت: $A = \{a, b, c, d, e, f\}$

و سِت: $B = \{d, e, f, g, h\}$ مفروض باشد.

درینصورت اتحاد (union) A و B عبارتست از: ____ ____.

$$\boxed{\begin{aligned} A \cup B &= \{a, b, c, d, e, f\} \cup \{d, e, f, g, h\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f, d, e, f, g, h\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}. \end{aligned}}$$

---

* علامهٔ "∀" بمفهوم برای تمام ها، و علامهٔ: "∀x" بمفهوم برای تمام x ها افاده مینمائید.

۷۴. در علامه گذاری $A\cup B=\{x \mid \forall x\in A$ ویا $\forall x\in B\}$ برای افادهٔ اتحاد کلمهٔ: «ویا» بمفهوم: «خواه در A ویا B ویا در A و B» استعمال شده است. پس اگر $A=\{-1,2,3\}$ و $B=\{-2,-1,3,4\}$ مدنظر گرفته شود، پس درینصورت $A\cup B=\{\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\}$ میشود.

$$\boxed{\begin{aligned} A\cup B &= \{-1,2,3\}\cup\{-2,-1,3,4\}\\ &= \{-1,2,3,-2,-1,3,4\}\\ &= \{-1,2,3,-2,4\}.\\ \therefore\ A\cup B &= \{-1,2,3,-2,4\}. \end{aligned}}$$

۷۵. اگر S سِت تمام اعداد مثبت تام و T سِت تمام اعداد منفی تام را ارائه کند، پس $S\cup T$ سِت تمام __________ ________________

$\boxed{\text{پس } S\cup T \text{ سِت اعداد تام بدون صفر را ارائه میکند.}}$

76. شکل ساده (ناده) ی ذیل را بدست آرید :

$]1,3[\cup \{1,3\}$ (b) ، $[0,3[\cup \{3\}$ (a)

$$\boxed{[1,3] \text{ (b)} \quad ، \quad [0,3] \text{ (a)}}$$

77. اگر $A=\{a,b\}$ ، $B=\{a,b,c\}$ باشد ،
درینصورت : $A \cup B =$ ________ میشود .

$$\boxed{A \cup B=\{a,b,c\} = B \, .}$$

78. شکل ساده تر هر یک از افاده ی ذیل را بدست آرید :

$]0,2[\cup [1,3[$ (a) ، $]0,3] \cup [0,+\infty[$ (b) ،
$]0,16] \cup \{12,3,2,0\}$ (c) ، $[-1,0[\cup \{0\}$ (d)

$$\boxed{]0,3[\text{ (a)} ، [0,+\infty[\text{ (b)} ، [0,16] \text{ (c)} ، [-1,0] \text{ (d)} .}$$

79. اگر $A=\{a,b\}$ و $B=\{b,c,d\}$ در نظر گرفته شود و بخواهیم
که یک ست سومی C را طوری حاصل نمائیم که محض دارای عناصر
مشترک A و B باشد ، پس درینصورت ست C

سِت C عبارت است از : ________ .

$$C=\{b\}$$.

80. تقاطع Intersection:

تعریف : تقاطع دو سِت A و B، که به $A\cap B$ ارائه میشود، عبارت از یک سِت سومی (C) است که عناصر آن را عناصر مشترک A و B تشکیل میدهد.

یا بعبارت دیگر :

$A\cap B=\{x \mid \forall x\in A$ و هم $x\in B\}$.

اگر $A=\{-1,0,2\}$ و $B=\{0,2,4,6\}$ مفروض باشد، پس تقاطع A و B عبارت است از :

$$\begin{aligned} A\cap B &= \{-1,0,2\}\cap\{0,2,4,6\} \\ &= \{0,2\} \end{aligned}$$

81. اگر E سِت تمام اعداد تام جفت را و P سِت اعداد تام مثبت را ارائه کنند پس $E\cap P$ سِت تمام اعداد

(a) ______ را ارائه میکند.

حال اگر سِت تمام مثلث های متساوی الاضلاع را به $\mathcal{E}$ و سِت تمام مثلث های متساوی الساقین را به $\mathcal{J}$ ارائه نمائیم درینصورت:

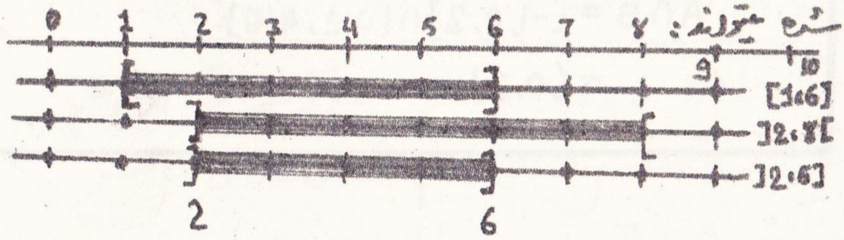
(b) ...... $\mathcal{E}\cap\mathcal{J} =$ ______

(a) سِت تمام اعداد تام جفت مثبت ،

(b) $\mathcal{E}$ ، زیرا هر مثلث متساوی الاضلاع دارای دو ساق متساوی نیز میباشد.

---

82. اگر $[1،6]$ شاخه بسته از 1 تا 6 Closed intervals را هم چنان $]2،8[$ شاخه باز از 2 تا 8 open intervals را ارائه نمائید، پس: ______ $= [1،6] \cap]2،8[$. بوده وطبق ذیل ترسیم شده میتوانند:



$$]2, 6] = \{x \mid 2 < x \leq 6\}$$

درجواب فوق نقطهٔ 2 شامل نبوده ولی نقطهٔ 6 مربوطهٔ خط شامل است.

85. بعضاً واقع میشود که دو سِت موضوعی هیچیک عنصر مشترک نمیداشته باشند، درینصورت تقاطع intersection عنصر دو سِت عبارت از ــــــ سِت است. مثلاً اگر $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{4, 6, 8, 10\}$ منظور گرفته، درینصورت:

$A \cap B =$ ــــــ میشود.

سِت تهی یا Φ ، Φ ،

84. اگر E سِت تمام اعداد تام جفت و O سِت تمام اعداد تام تاق را ارائه کنند پس: $E \cap O$ عبارت از (a) ــــــ سِت است، بهمین قسم اگر I^+ سِت تمام اعداد تام مثبت و I^- سِت تمام اعداد تام منفی را ارائه کنند پس (b) ــــــ $= I^+ \cap I^-$ میشود. زیرا اگر یکعدد یا مثبت است ویا منفی؛ نمیتواند که یک عدد همهم مثبت وهم منفی باشد.

(a) سِت خالی ، (b) Φ ،

86- تعریف :- دو ست A و B را غیرمتقاطع[(1)] میگویند، disjoint sets درصورتیکه $A \cap B = \phi$ باشد.

یا بالفاظ دیگر: اگر $A \cap B = \phi$ باشد، پس درینصورت A و B ست های غیرمتقاطع disjoint sets گفته میشوند.

درصورتیکه موجود باشند کدام جوره از ست مربوط افاده های ذیل ست های غیرمتقاطع اند:

a. $]0, 1]$ و $[1, 5[$

b. $]-\infty, 3]$ و $]2, 8[$

c. ست تمام اعداد تاق تام و ست تمام اعداد تام جفت.

d. $A = \{x \mid x \leq 2\}$ و $B = \{y \mid x \geq 2\}$

e. $C = \{x \mid x < 3\}$ و $D = \{y \mid 3 < y\}$.

(C) و (e)

(1) - بعضی ها ست های متقاطع، متصل و غیرمتقاطع را منفصل نیز مینامند.

۸۷. تقاطع intersection هر جوره از سِت های ذیل را بدست آرید. درصورت موجودیت سِت های غیر متقاطع (سِت های منفصل) را در هر جوره نشان دهید:

(a). $]2, 5[$ و $\{2, 5\}$ ،

(b). $[a, b]$ و $\{a, b\}$ ،

(c). $[-3, 7[$ و $\{-3, -1, 0, 4, 7\}$ ،

(d). $]c, d]$ و $\{c, d\}$ ،

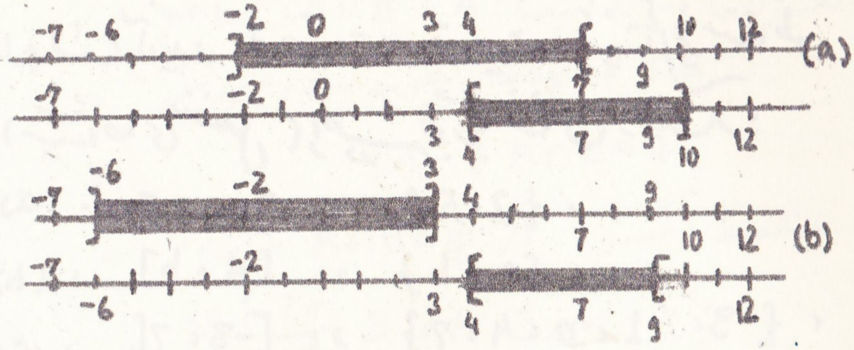
(e). $\{x \mid -1 \leq x < 4\}$ و $\{x \mid 0 < x \leq 5\}$ را.

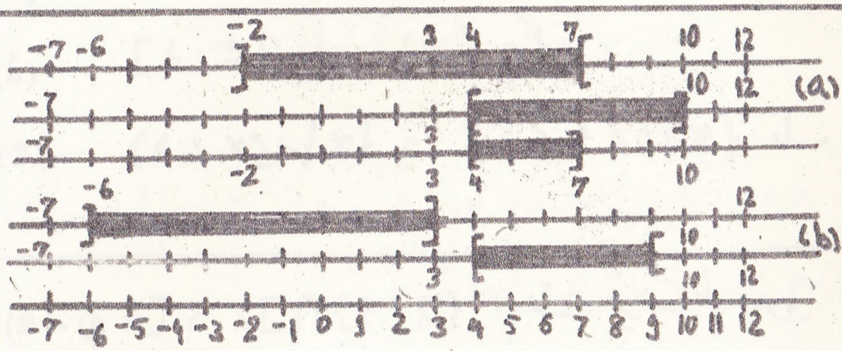
(a). $\{2, 5\} \cap]2, 5[= \phi$. سِت غیر متقاطع اند،

(b). $\{a, b\}$ ، (c). $\{-3\}$ ، (d). $\{d\}$

(e). $\{x \mid 0 < x < 4\}$. تنها سِت های مربوط جوره جزء (a) غیر متقاطع اند.

۸۸. تقاطع هر جوره از سِت های مربوط اشکال ذیل را بدست آرید:





$]2,7[\cap [4,10] = [4,7]$ . . . . (a)

$]-6,3[\cap [4,9[= \phi$ . . . . (b)

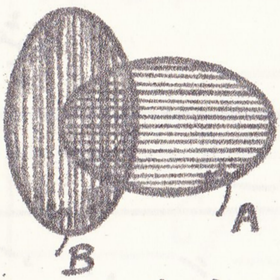
89. (a). اتحاد ست‌های مربوط شاخه‌های جزء (a) شماره حرکات (88) را بدست آورید.

(b). اتحاد ست‌های مربوط شاخه‌های جزء (b) شماره حرکات فوق را بدست آورید.

$]-2,7[\cup [4,10] =]-2,10]$ .... (a)

$]-6,3] \cup [4,9[$ ..... (b)

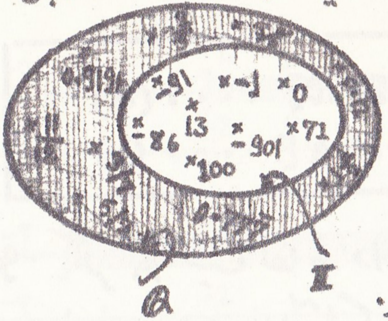
90. اگر A سیټ نقاط داخل بیضوی (A) و B سیټ نقاط بیضوی (B) را ارائه کند، وناحیهٔ داخلی بیضوی (A) را بصورت افقی واز (B) را بصورت عمودی مخطط نمائیم درینصورت باستفاده از دیاګرام ون Venn Diagram ناحیه که هم بصورت افقی وهم بصورت عمودی مخطط شده



عبارت از (a)._____ هردو سیټ A و B بوده وهم چنان تمام نقاط نواحی A و B عبارت از (b) _____ هردو سیټ A و B میباشد.

(a) تقاطع ویا Intersection
(b) اتحاد ویا Union

۹۱- ما میدانیم که سِت اعداد تام «$\mathbb{Z}$» یک سِت فرعی اعداد نسبتی



"Q" است. یعنی : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

از طرف دیگر بکمیه زیاد

اعداد نسبتی Rational Numbers

موجود اند که اینها اعداد تام نیستند.

این سِت اعداد نیز یک سِت فرعی دیگر Q را تشکیل داده، و عبارت از سِت کثور بوده، و بنام ـــــ سِت $\mathbb{Z}$ نظر به Q یاد میشود.

متمم یا Complement

تعریف : اگر A یک سِت T باشد متمم سِت A در T عبارت از ستی مشتمل تمام آن عناصر T سِت که در A شامل نیستند. و آنرا چنین ارائه مینمایند : $C_T A$.

متمم یک سِت A در T در صورتیکه سِت T واضح باشد به « $\sim A$ » و یا « $-A$ » نیز ارائه میشود.

۹۲. اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x<5\}$ مدنظر گرفته شود، واضح است که متمم A در $\mathbb{R}$ عبارت است از:
__________ .

$$\boxed{\sim A=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ 5\le x\}}$$

۹۳. اگر $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و نیز $B=\{2,4,6,8,10\}$ مفروض باشد متمم B در S عبارت است از: __________ .

$$\boxed{C_S B=\{1,3,5,7,9\}=\sim B}$$

۹۴. متمم Φ در T عبارت از T است. زیرا __________
____

زیرا: متمم Φ در T شامل آن عناصر T است که در Φ نیستند. از طرف دیگر Φ دارای هیچ یک عنصر نیست. بنابراین متمم Φ تمام عناصر T را در بر دارد. یعنی $\sim\Phi=C_T\Phi$ است.

95. متممهٔ T در T عبارت از Φ است. یعنی $C_T T = \Phi$.

زیرا: ________________ .

زیرا: این چنین یک عنصری موجود شده نمیتواند که هم در ست T موجود باشد و هم در آن موجود نباشد. بنابر آن متممهٔ ست T در T عبارت از ستی است که دارای هیچکدام یک عنصر نیست. یعنی $C_T T = \Phi$ است.

96. اگر $[0 , 2]$ بحیث یک ست فرعی $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شود، درینصورت متممهٔ $[0 , 2]$ در $\mathbb{R}$ عبارت از ________________ میباشد.

$$C_{\mathbb{R}}[0,2] = \left]-\infty , 0\right[\cup \left]2 , +\infty\right[$$

97. متممهٔ متممهٔ A در یک ست T عبارت از A است. زیرا: ________________ .

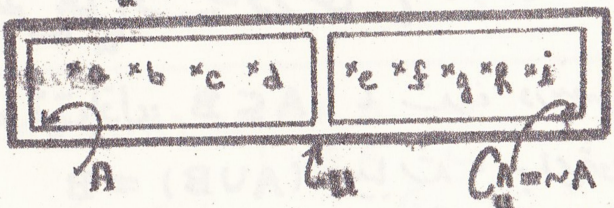
زیرا: متممهٔ متممهٔ A در T عبارت از آن ست فرعی T است

که آنعناصر T راکه در مکملهٔ A نیستند دارا میباشد ،
پس این سِت عبارت از A است. بنابران $\sim(\sim A) = A$

95. اگر سِت های $A=\{a, b, c, d\}$ و $U=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ را مدنظر گرفته و مطلب تعیین کردن سِت مکملهٔ A در U باشد ، درینصورت مکمله سِت A در U عبارت است از (a) ________ .

(b) مکمله سِت A را در U توسط دیاگرام وین قرار ذیل ارائه کرده میتوانیم :

$\sim A = C_U A = \{e, f, g, h, i\}$ (a)



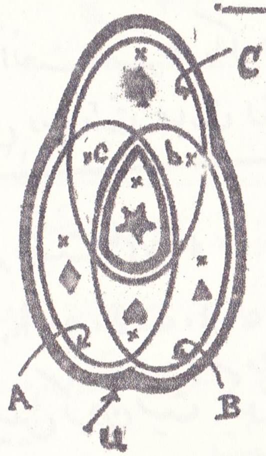
(b)

96. درشکل وین دیاگرام ذیل مکملهٔ سِت A نظر به سِت U

عبارت از: (a) ________

و تکمیله سِت B عبارت است از:

(b) ________ .



سِت $A \cap B \cap C$ عبارت است از:

(c). ________ .

سِت $C_u(A \cup B)$ عبارت است از:

(d). ________ .

(a). {♠ ، b ، ▲} ،	(b). {♠ ، c ، ♦} ،
(c). {★} ،	(d). {♠} .

خواص عملیات اتحاد و تقاطع: (اول خواص اتحاد)

97. خاصیت اول: $A \subseteq B$ باشد، درینصورت :-

$(A \cup B) = B$ میباشد. برای ثبوت این حقیقت

اثبات دو روابط ذیل (1) ________، (2) ________ ضروریست.

(1) $B \subseteq (A \cup B)$ ، (2) $(A \cup B) \subseteq B$.

98. درصورتیکه $A \subseteq B$ باشد، درینصورت:
$(A \cup B) = B$ میباشد. برای ثبوت حقیقت فوق حقیقت دو رابطه: $B \subseteq (A \cup B) \ldots (1)$
$(A \cup B) \subseteq B \ldots (2)$ را نشان باید داد.

برای ثبوت حقیقت رابطه (1) یکعنصر کیفی ثبت B را مورد نظر قرار داده و موجودیت آنرا در $(A \cup B)$ جستجو باید نمود.

نظر به تعریف عملیه اتحاد: $x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B)$

رابطه فوق ارائه میکند که هر عنصر $x \in B$ آن عنصر در $(A \cup B)$ نیز موجود میباشد، بنابران: $B \subseteq (A \cup B)$ میباشد.

اکنون برای تثبت رابطه: $(A \cup B) \subseteq B$ یکعنصر کیفی x را در $(A \cup B)$ مورد نظر گرفته و موجودیت آنرا طبق ذیل در B جستجو باید نمود:

$$x \in (A \cup B) \Rightarrow \begin{cases} x \in B & \text{خواه} \\ x \in A & \text{ویا} \end{cases}$$

درهر حالت ازینکه $A \subseteq B$ است، پس:

$$x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in B$$

پس: $\ldots (A \cup B) \subseteq B$.

۹۹. از بررسی نتایج چوکات مسأله (۹۷) و چوکات مسأله (۹۸) علی الترتیب داریم:

(1) $B \subseteq (A \cup B)$.

(2) $(A \cup B) \subseteq B$.

از مقایسه دو رابطه فوق نتیجه میشود که: ________.

$A \subseteq B \Rightarrow (A \cup B) = B$: پس درنتیجه $(A \cup B) = B$

100. خاصیت دوم: اگر $(A \cup B) = B$ باشد، درینصورت $A \subseteq B$ میباشد. برای ثبوت این حقیقت یک عنصر کیفی $x \in A$ را انتخاب نموده و موجودیت آنرا طبق ذیل در B جستجو مینمایم: ________.

$$x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$$

لیکن .... $(A \cup B) = B$

پس .... $x (A \cup B) \Rightarrow x \in B$

درنتیجه ...... $A \subseteq B$.

101 . خاصیت سوم : اتحاد هر سِت با سِت خالی عبارت از خود همان سِت است. یعنی : $A \cup \phi = A$ است.

زیرا : ________________

ما میدانیم که ϕ سِت فرعی هر سِت است. یعنی :-
$\phi \subset A$. نظر به خاصیت اول ادعا مینمائیم که :
$A \cup \phi = A$.

102 . خاصیت چهارم : اتحاد هر سِت با خودش خود همان سِت است.
یعنی : $A \cup A = A$.

زیرا : ________________

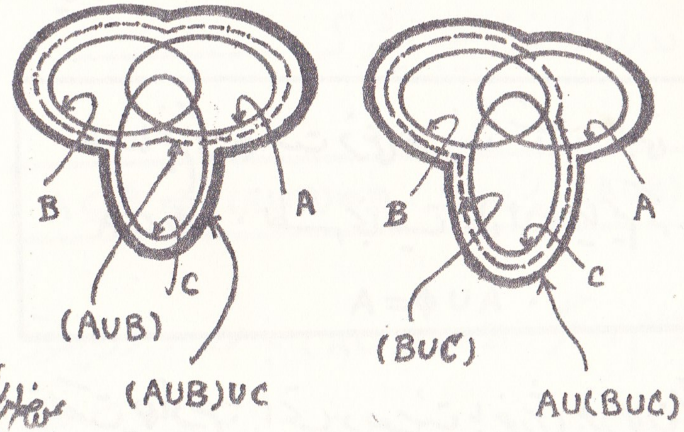
ما میدانیم که هر سِت ، سِت فرعی خودش میباشد ، یعنی $A \subseteq A$.
پس بنا بر نتیجه خاصیت اول ادعا میتوان کرد که : $A \cup A = A$ است.

103 . خاصیت پنجم : عملیه اتحاد « $\cup$ » از خاصیت انجمنی Associativity پیروی میکند . یعنی برای هر سِت

A ، B و C رابطهٔ :-

$(AUB)UC = AU(BUC)$ همیشه دارای حقیقت است.

حقیقت رابطهٔ فوق را بکمک وین دیاگرام طبق حرکات ذیل آزمایش میتوان کرد:



ملاحظه کنید

که در هردو حالت جواب فوق عین چیز است ، یعنی :-

$(AUB)UC = AU(BUC)$ میشود.

نتیجه :- با استفاده از خاصیت فوق ما میتوانیم که عملیهٔ اتحاد «U» را بدون استعمال قوسین اجرا نمائیم : یا بعبارت دیگر میتوان که :

$$(AUB)UC = AU(BUC)$$
$$= AUBUC$$

بنویسیم.

104. خاصیت ششم: عملیه اتحاد «U» از خاصیت تبدیلی (تبادلوی) Commutative Property پیروی میکند.

یعنی: $A \cup B = B \cup A$ .... همیشه دارای حقیقت است.

زیرا: ______________________.

هر عنصر کیفی $x \in A$ ویا $x \in B$، همان عنصر $x \in A \cup B$ وهم $x \in B \cup A$ میباشد.
درنتیجه: .... $A \cup B = B \cup A$ همیشه حقیقت دارد.

دوم خواص تقاطع:

105. خاصیت اول: اگر $A \subseteq B$ باشد، درینصورت: $A = (A \cap B)$ میشود. برای ثبوت حقیقت رابطه.

از واقعیت دو رابطه: (1) $A \subseteq (A \cap B)$

(2) $(A \cap B) \subseteq A$ را باثبات

باید رسانید. برای ثبت حقیقت رابطه (1) یک عنصر کیفی x ثبت A را مدنظر گرفته وموجودیت آنرا در $A \cap B$

طبق ذیل جستجو باید نمود :

برای هر $x \in A$ ؛ چون $A \subseteq B$ است .

پس : ... $x \in A \Rightarrow x \in B$

ازینکه : $\left.\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (A \cap B)$

درنتیجه : ... $A \subseteq (A \cap B)$.

برای ثبوت حقیقت رابطه $(2): (A \cap B) \subseteq A$ یکعنصر کیفی x ست $(A \cap B)$ را مورد نظر قرار داده و موجودیت آنرا در A طبق ذیل جستجو باید کرد :

بموجب تعریف تقاطع هر عنصر $x \in (A \cap B)$ آنعنصر $x \in B$ وهم $x \in A$ است ، پس :

$x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$

درنتیجه : ... $(A \cap B) \subseteq A$.

ازمطالعه نتایج دو حرکات فوق نتیجه میشود که : $(A \cap B) = A$ است .

106- خاصیت دوم : اگر $A=(A\cap B)$ باشد ، پس درینصورت $A\subseteq B$ میباشد. برای اثبات حقیقت مطلب فوق یک عنصر کیفی $x\in A$ را مدنظر گرفته وجود آنرا در B طبق ذیل جستجو باید نمود :-

ما میدانیم که :	$x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in B$
ازینجا داریم که :	$(A\cap B)\subseteq B$
لیکن نظر به فرضیه :	$(A\cap B)=A$
پس درنتیجه :	$A\subseteq B$.

107. خاصیت سوم : تقاطع هر سِت با سِت خالی عبارت از سِت خالی است . یا بالفاظ ریاضی : $A\cap\Phi=\Phi$

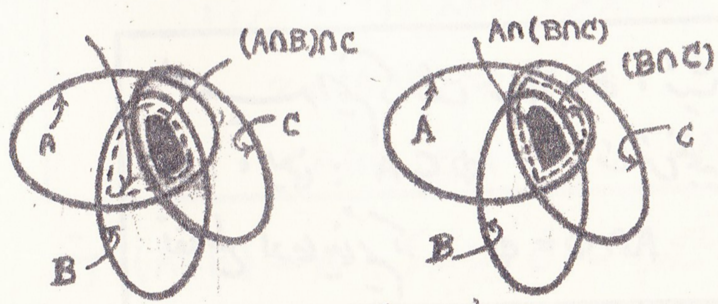
ثبوت این حقیقت را در حرکات ذیل استدلال میتوان نمود:

ما میدانیم که سِت خالی ، Φ ، سِت فرعی هر سِت بوده ، یعنی : $\Phi\subseteq A$. با اساس نتیجه خاصیت اول تقاطع ادعا مینمائیم که : $A\cap\Phi=\Phi$ میشود .

108. خاصیت چهارم: تقاطع هر سِت با خودش عبارت
از خود همان سِت است. یا با الفاظ ریاضی: $A \cap A = A$.
حقیقت رابطهٔ فوق را با شاملی چکات ذیل ثابت میتوان کرد:

ما میدانیم که هر سِت، سِت فرعی خودش میباشد. بموجب این حقیقت و با استفاده از خاصیت اول تقاطع ما ادعا نموده میتوانیم که: $A \cap A = A$ میشود.

109. خاصیت پنجم: عملیهٔ تقاطع از خاصیت انجمنی Associativity
پیروی میکند. یا با الفاظ ریاضی برای هر سِت: A،
B و C رابطهٔ: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ همیشه حایز
حقیقت است. اثبات این حقیقت را بکمک دیاگرام ون طبق دو شکل ذیل
ارائه نموده میتوانیم:



ازون دیاگرامهای فوق بمشاهده میرسد که نتیجه هر دو شکل عین ست
نقاط را ارائه میکند . درنتیجه ما میتوانیم بنویسیم که : ______

$$\boxed{(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)\ .}$$

110. خاصیت ششم : عملیه تقاطع از خاصیت تبدیلی (تبادلوی) Commutative Property پیروی میکند . یا بزبان ریاضی برای هر ست A و B همیشه رابطه : $A\cap B=B\cap A$ دارای حقیقت است . ثبوت این خاصیت را در حرکات ذیل استدلال مینمائیم:

ما میدانیم که $A\cap B$ عبارت از ستی است که عناصر آنرا عناصر مشترک ست A و ست B تشکیل میدهد.

همچنان $B\cap A$ عبارت ازان ستی است که عناصر آنرا عناصر مشترک ست های A و B تشکیل میدهد.

چون هر دو ست $A\cap B$ و $B\cap A$ دارای عین عناصر اند . بنابران : $A\cap B = B\cap A$.

فصل پنجم

جوره های مرتب و حاصل ضرب دکارتی

Ordered Pairs and Cartesian Products

111 . طوریکه در هندسهٔ تحلیلی معمول است ما میتوانیم که هر نقطهٔ یک مستوی را توسط یک جوره عدد بشکل : (x, y) ارائه نمائیم. مرکبهٔ x این جوره را بنام ابسیس Abscissa ، و مرکبهٔ y آنرا بنام ترتیب Ordinate یاد مینمائید. ازینکه مراعات ترتیب مرکبه های x ، y در جوره ای (x, y) شرط لازمی است ، ازینرو جورهٔ (x, y) را بنام ______ یاد میکنند.

جوره مرتب Ordered pairs

112 . یک جوره مرتب (a, b) از یک جوره مرتب (b, a) ______ است ، درحالیکه $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ از هم ______ نخواهند.

متفاوت ، تفاوت دیا فرق

113 . افاده های : $\{2،7\}$ و $\{7،2\}$ هرسر دو ، دوست را که دارای عناصر 2 و 7 بوده و ترتیب عناصر در آن ها شرط نیست ارائه مینماید . درینصورت ما میتوانیم بنویسیم که :

$\{2،7\} \overset{\text{ }}{\underset{\neq ، =}{\rule{3em}{0.4pt}}} \{7،2\}$. حالانکه افاده های : $(2،7)$ و $(7،2)$ دو جوره مرتب را که دارای مرتبه های : 7 و 2 بوده و ترتیب مرتبه ها در آن ها شرط لازمی است ارائه مینماید . درینصورت ما مینویسیم که : $(2،7) \underset{\neq ، =}{\rule{3em}{0.4pt}} (7،2)$.

$$\{2،7\} = \{7،2\} \quad ، \quad (2،7) \neq (7،2) \quad .$$

114 . دو جوره مرتب : $(a،b)$ و $(c،d)$ باهم مساوی میشوند ، درصورتیکه اگر و اگر ________ باشد .

$$(a،b) = (c،d) \text{ درصورتیکه اگر } a = c \text{ و } b = d \text{ باشد}$$

115. از حل رابطه : $(5 \cdot 18) = (3x \cdot 6y)$ حاصل میشود که

$x = ?$ و $y = ?$ میباشد.

$$\boxed{y = 3 \ , \ x = \frac{5}{3}}$$

116. اگر $A = \{a, b\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ در نظر گرفته شود، درینصورت $A \times B$ عبارت از سِت تمام جوره‌های مرتب است که مرکبهٔ اول اینها را عناصر سِت A و مرکبهٔ دوم اینها را عناصر سِت B تشکیل میدهد. پس درینصورت شکل دوستر Roster سِت $A \times B$ عبارت است از: ______ .

$$\boxed{A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}}$$

117. اگر $A = \{a, b\}$ و $B = \{1, 2\}$ در نظر گرفته شوند ملاحظه میرسد که $A \times B \neq B \times A$. زیرا: ______

$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$.

$B \times A = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$.

چون $(1 \cdot a) \neq (a \cdot 1)$ است، پس $A \times B \neq B \times A$.

118. تعریف: حاصلضرب دکارتی دو ست A و B

که به $A\times B$ ارائه میشود عبارت از ست جوره‌ای

مرتبی است که مرکبهٔ اول اینها را تمام عناصر A

و مرکبهٔ دوم اینها را تمام عناصر B تشکیل بدهند.

یا بعبارت دیگر:

$$A\times B=\{(x,y)\mid \forall x\in A,\ \forall y\in B\}.$$

اگر $A=\{0,1,2\}$ و $B=\{5,7,9\}$ در نظر گرفته شود، درینصورت

$B\times A$ عبارت از (a) ______________ بوده،

$A\times B$ عبارت از (b) ______________ میشود.

(a). $B\times A=\{(5,0),(5,1),(5,2),(7,0),(7,1),(7,2),(9,0),(9,1),(9,2)\}.$

(b). $A\times B=\{(0,5),(0,7),(0,9),(1,5),(1,7),(1,9),(2,5),(2,7),(2,9)\}.$

119. اگر $E=\{a,b\}$ در نظر گرفته شود درینصورت $E\times E$ عبارت است از: ______________.

$$E\times E=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}.$$

120. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{\Phi\}$ مفروض باشد، درینصورت $T\times S$ عبارت است از ______.

$$\boxed{T\times S=\{(\Phi,1),(\Phi,2),(\Phi,3)\}.}$$

121. در حاصل ضرب دکارتی $A\times B$ ست A را بنام منشأ ویا منبع، و ست B را بنام هدف یاد میکنند. درمثال جوابات (120) ست T (a) ______ و S ست (b) ______ $T\times S$ را تشکیل میدهد.

(a) منبع ویا منشأ (b) هدف

122. با ملاحظه ست $\{(2,c),(1,a),(2,b)\}$ که یک ست فرعی $A\times B$ است، آیا گفته میتوانید که کمترین عدد عناصری که ست منشأ ویا A داشته باشد چند عنصر بوده واینها کدام اند؟ وبهمین قسم کمترین عدد عناصر ست B ویا ست هدف چند بوده واینها کدام اند؟

بلی، کمترین عدد عناصر A دو بوده و $A=\{1,2\}$ است.
بلی، کمترین عدد عناصر B سه عنصر بوده و $B=\{a,b,c\}$ است.

فصل ششم

مسایل مربوط روابط و عملیات در ست ها

Exercises on Relations and Operations in Sets

123. اگر S و T دو ست مفروض باشد، برای تثبیت رابطهٔ:
$S \subseteq T$ کافی است تا یک عنصر کیفی ست (a) ______
را مورد نظر قرار داده، و موجودیت آنرا در (b) ______
جستجو باید نمود.

(a) ست S را ، (b) در ست T ،

124. بطور مثال غرض تثبیت رابطهٔ:
$\{x \mid 9 < x-3\} \subseteq \{x \mid 7 < x\}$ یکعنصر کیفی
$p \in \{x \mid 9 < x-3\}$ را مدنظر گرفته، و موجودیت آنرا

در ست $\{x \mid 7<x\}$ جستجو نمائیم :

$$p \in \{x \mid 9 < x-3\} \Rightarrow 9 < \underline{\qquad} \quad (a)$$

$$\Rightarrow 9+3 < p-3+3$$

$$\Rightarrow 12 < p$$

ما میدانیم که $7<12$. بنابر خاصیت انتقالی رابطهٔ " > "

ما داریم که : $7<p$ بوده ، یعنی : $p \in \{x \mid 7<x\}$ میباشد .

بنا طور باید داشت که p یکعنصر کیفی ست $\{x \mid 9<x-3\}$ انتخاب شده

بود. از نیرو ما یکعنصر کیفی را در $\{x \mid 9<x-3\}$ انتخاب نموده

وموجودیت آنرا در $\{x \mid 7<x\}$ نشان دادیم ، بنابرآن وجود هر عنصر

شامل ست $\{x \mid 9<x-3\}$ را در $\{x \mid 7<x\}$ ادعا نموده

میتوانیم . درنتیجه (b) ____________ .

$$\boxed{(a) \; p-3 < 9 \;,\; (b) \;,\; \{x \mid 9<x-3\} \subseteq \{x \mid 7<x\}}$$

125 . همین قسم برای اثبات حقیقت رابطهٔ :

$\{x \mid x<5\} \supseteq \{x \mid x<2\}$ باید یک کیفی a را

در ست $\{x \mid x<2\}$ انتخاب نموده ، وموجودیت آنرا در ست

در ست $\{x \mid x<5\}$ جستجو نمود : ______

۱/ $a \in \{x \mid x<2\} \Rightarrow a<2$ میدانیم که $2<5$. بنابر خاصیت انتقالی رابطهٔ « > »   این نتیجه میشود که : - $a<2 \Rightarrow a<5$ $a<5 \Rightarrow a \in \{x \mid x<5\}$ در نتیجه : $\{x \mid x<2\} \subseteq \{x \mid x<5\}$.

12. ثبوت نمائیم که : $\{x \mid x^2 \leq 9\} \subseteq \{x \mid -4<x<13\}$.

برای اثبات رابطهٔ فوق موجودیت $p \in \{x \mid x^2 \leq 9\}$ ۱/

در $\{x \mid -4<x<13\}$ جستجو نمائیم :

$p \in \{x \mid x^2 \leq 9\} \Rightarrow$ ___ $\leq p \leq$ ___ (a)

$\Rightarrow$ ___ $<p<$ ___ (b)

$\Rightarrow p \in \{$ ______ $\}$ (c)

در نتیجه : $\{x \mid x^2 \leq 9\} \subseteq \{x \mid -4<x<13\}$.

$-3 \leq p \leq 3$.(a) ، $-4<p<13$.(b) ، $\{x \mid -4<x<13\}$ (c)

127- حقیقت رابطهٔ : $\{x \mid x+2<-5\} \subseteq \{x \mid x<1\}$ را اثبات کنید.

ثبوت :

$$p \in \{x \mid x+2<-5\} \Rightarrow p+2<-5$$
$$\Rightarrow p+2+(-2)<-5+(-2)$$
$$\Rightarrow p+0<-7$$
$$\Rightarrow p<-7$$

از طرف دیگر ما میدانیم که : $-7<1$ و نظر بخاصیت انتقالی رابطهٔ «$<$» ما میتوانیم بنویسیم : $p<1$. حالانکه :

$$p<1 \Rightarrow p \in \{x \mid x<1\}$$
$$\Rightarrow \{x \mid x+2<-5\} \subseteq \{x \mid x<1\}$$

128- ثبوت کنید که : $[-1,3] \subseteq]-2,4[$.

ما میدانیم که : $]-2,4[$ وهم $[-1,3]$ هردو فاصله را ارائه مینماید و ما میتوانیم که این افادهٔ فاصله‌ها را باستفاده از علامت سازی طبق ذیل ارائه نمائیم :-

$[-1,3]=\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$.
$]-2,4[=\{x \mid -2<x<4\}$.

اکنون برای اثبات رابطهٔ (۱) :

$$\{x|-1\le x\le 3\}\subseteq\{x|-2<x<4\}$$

یک عنصر کیفی p را در $[-1,3]$ انتخاب نموده و موجودیت آنرا در $]-2,4[$ مبین ذیل جستجو باید کرد:

$$p\in\{x|-1\le x\le 3\}\Rightarrow -1\le p\le 3$$
$$\Rightarrow -2<p<4$$
$$\Rightarrow p\in\{x|-2<x<4\}$$

ازین نتیجه میشود که: $\{x|-1\le x\le 3\}\subseteq\{x|-2<x<4\}$

ویا . . . . $[-1,3]\subseteq\,]-2,4[$

129. ثبوت نمائید که: $\{x||2-x|<5\}=\{x|-3<x<7\}$

اگر $\{x|-3<x<7\}$ را به B و ست $\{x||2-x|<5\}$ را به A ارائه نمائیم، برای تثبیت رابطهٔ: $A=B$ ضرورت است تا نشان دهیم که: (1). $A\subseteq B$ ،

و هم: (2). $B\subseteq A$.

برای ثابت کردن رابطهٔ (1) یک عنصر کیفی p را در A انتخاب نموده

و موجودیت آنرا در B مطابق حرکات ذیل جستجو مینمائیم:

$$
\begin{aligned}
p \in A &\rightarrow p \in \{x \mid |2-x| < 5\} \\
&\Rightarrow |2-p| < 5 \\
&\Rightarrow -5 < 2-p < 5 \\
&\Rightarrow -7 < -p < 3 \\
&\Rightarrow -3 < p < 7 \\
&\Rightarrow p \in \{x \mid -3 < x < 7\} \\
&\Rightarrow p \in B \\
&\Rightarrow A \subseteq B .
\end{aligned}
$$

اکنون حقیقت رابطه (2) : $B \subseteq A$ را مطابق حرکات ذیل ثابت باید نمود:

$$
\begin{aligned}
p \in B &\Rightarrow p \in \{x \mid -3 < x < 7\} \\
&\Rightarrow -3 < p < 7 \\
&\Rightarrow -7 < -p < 3 \\
&\Rightarrow 2-7 < 2-p < 2+3 \\
&\Rightarrow -5 < 2-p < 5 \\
&\Rightarrow |2-p| < 5
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow p \in \{x \mid |2-x| < 5\}$$
$$\Rightarrow p \in A$$
$$\Rightarrow B \subseteq A$$

از دو حرکات فوق بشاهده میرسد که : $A \subseteq B$ و هم $B \subseteq A$ است ،

درنتیجه ادعا مینمائیم که : $A = B$.

130 . ثبوت بنمائید که : $\{x \mid |x+1| < 2\} =]-3,1[$.

اگر $A =]-3,1[$ و $B = \{x \mid |x+1| < 2\}$ فرض شود ، درینصورت :

$A = \{x \mid -3 < x < 1\}$ میشود ،

اینک در حرکات ذیل مانند حرکات (129) نشان میدهیم که :

$A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ بوده که درنتیجه : $A = B$ ثابت میشود .

$$p \in A \Rightarrow p \in \{x \mid -3 < x < 1\}$$
$$\Rightarrow -3 < p < 1$$
$$\Rightarrow -2 < p+1 < 2$$
$$\Rightarrow |p+1| < 2$$
$$\Rightarrow p \in \{x \mid |x+1| < 2\}$$

$$\Rightarrow p \in B$$
$$\Rightarrow A \subseteq B$$

اکنون یک عنصر کیفی $p \in B$ را منظور گرفته وجود آنرا در A جستجو نمائیم:

$$p \in B \Rightarrow p \in \{x \mid |x+1| < 2\}$$
$$\Rightarrow |p+1| < 2$$
$$\Rightarrow -2 < p+1 < 2$$
$$\Rightarrow -3 < p < 1$$
$$\Rightarrow p \in \{x \mid -3 < x < 1\}$$
$$\Rightarrow p \in A$$
$$\Rightarrow B \subseteq A.$$

چون $A \subseteq B$ و هم $B \subseteq A$ است، پس $A = B$.

یعنی: $\{x \mid |x+1| < 2\} =]-3, 1[$.

131. نشان دهید که: $\{x \mid |x| < 5\} \subseteq [-6, 11]$.

کمک: $[-6, 11] = \{x \mid -6 \leq x \leq 11\}$.

اینک اثبات حقیقت رابطهٔ فوق را درحرکات ذیل آغاز می‌نمائیم:

$$p \in \{x \mid |x|<5\} \Rightarrow |p|<5$$
$$\Rightarrow -5<p<5$$
$$\Rightarrow -6<-5<p<5$$
$$\Rightarrow -6<p<5<11$$
$$\Rightarrow -6<p<11$$
(متوجه بودید که : $a<b \Rightarrow a\leq b$) $\Rightarrow -6\leq p\leq 11$
$$\Rightarrow p\in\{x \mid -6\leq x\leq 11\}$$
$$p\in\{x \mid -6\leq x\leq 11\} \Rightarrow \{x \mid |x|<5\} \subseteq \{x \mid -6\leq x\leq 11\}$$
یا .. $\{x \mid |x|<5\} \subseteq [-6, 11]$

132. برای هر سِت A ، B و C اگر $A\subseteq B$ باشد،
پس : $A\cap C \subseteq B\cap C$ میباشد.

کمک : برای ثبیت رابطهٔ : $A\cap C\subseteq B\cap C$ ضرورت است تا یک عنصر کیفی را در $A\cap C$ مدنظر گرفته و موجودیت آنرا در $B\cap C$ نشان باید داد. پس اگر یک عنصر کیفی $p\in(A\cap C)$ مدنظر گرفته شود در نتیجه :

$$p\in(A\cap C) \Rightarrow p\in A \text{ هم } p\in C$$

ولی ما میخواهیم نشان دهیم که $p\in(B\cap C)$ یعنی : $p\in C$ وهم $p\in B$.
ما میدانیم که $p\in C$ است، پس نشان باید داد که $p\in B$.

از طرف دیگر ما داریم: $A \subseteq B$. پس هر $p \in A \Rightarrow p \in B$.

از نتیجه $p \in B$ و $p \in C$ ما داریم $p \in (B \cap C)$.

اینک در صفحات ذیل اثبات حقیقت فوق ارائه میشود:

ثبوت: $\quad$ فرضیه: $p \in A \cap C$ $p \in A \cap C \Rightarrow p \in A$ و هم $p \in C$ $A \subseteq B \Rightarrow p \in A \Rightarrow p \in B$ $p \in B$ و هم $p \in C \Rightarrow p \in B \cap C$ $\Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

133. برای هر سیت: A ، B ، C اگر $A \subseteq B$ ، $B \subseteq C$ باشد! ثابت کنید که $A \subseteq C$ میباشد.

کمک: برای اثبات رابطه: $A \subseteq C$ نشان باید داد که برای هر p

$p \in A \Rightarrow p \in C$.

ثبوت: $\quad A \subseteq B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$ بهمین قسم چون $B \subseteq C$ است، $B \subseteq C \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$ لذا نتیجه: . . . . $x \in A \Rightarrow x \in C \Rightarrow A \subseteq C$.

134 . ثبوت کنید که برای هر سه ست: A ، B و C اگر $A\subseteq B$ باشد،
$A\cup C\subseteq B\cup C$ میباشد.

ثبوت :

$p\in A\cup C$ ..... فرضاً

$p\in A\cup C \Rightarrow p\in A$ ویا $p\in C$

چون ... $A\subseteq B$ ازین نتیجه میشود : $p\in A\Rightarrow p\in B$

پس ... ($p\in C$ ویا $p\in B) \Rightarrow p\in B\cup C$

$\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$

135 . از بررسی مثال چوکات های (129) و (130) نتیجه میشود:

$A=B \Leftrightarrow$ (1)، هر عنصر A شامل ستِ B است، وهم چنان :
(2)، هر عنصر B شامل ستِ A است.

$A=B \Leftrightarrow$ (1). $A\subseteq B$ وهم چنان :
(2). $B\subseteq A$ است.

پس ما داریم : $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ وهم $B\subseteq A$.

ثبوت کنید درصورتیکه $R\subseteq T$ باشد، پس $R\cap T=R$ میشود.
درینجا ثابت باید نمود که $p\in R\cap T\Rightarrow p\in R$ بوده وبالعکس.

وبالعکس $p\in R \Rightarrow p\in R\cap T$ باشد.

ثبوت: (1). درصورتیکه $p\in R\cap T$ باشد،

$$p\in R\cap T \Rightarrow p\in R \text{ وهم } p\in T$$

$p\in R\cap T \Rightarrow p\in R$ ..... ازینکه

$R\cap T\subseteq R$ ..... پس

(2). ازینکه $R\subseteq T$ است، این رابطه ایجاب مینماید که هر عنصر R شامل T است. پس درینصورت:

$$(p\in R\Rightarrow p\in T)\Rightarrow p\in R\cap T$$

چون برای p شامل R، پس p شامل $R\cap T$ است.

بنابرین ..... $R\subseteq R\cap T$ است.

(3). درنتیجه ______

از مقایسه نتیجه جزء (1) و (2) فوق ما داریم که:

$R\subseteq R\cap T$ وهم $R\cap T\subseteq R$ است؛

پس درصورتیکه $R\subseteq T$ باشد، $R\cap T=R$ میشود.

136. تبصره: قبلاً تذکر دادیم که رابطهٔ «$\subseteq$» در بین ست ها با رابطهٔ «$\leq$» در بین اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ مشابهت زیاد دارد.
اینک غرض توضیحات بیشتر خواص هر دو رابطه را در جدول ذیل مطالعه مینمائیم:

برای تمام اعداد حقیقی: r، s و t	برای تمام ست های: R، S و T
(a'). $r \leq r$	(a). $R \subseteq R$
(b'). اگر $s \leq r$ و $r \leq s$ باشد پس $r = s$ میباشد.	(b). اگر $R \subseteq S$ و $S \subseteq R$ باشد پس $R = S$ میباشد.
(c'). اگر $r \leq s$ و $s \leq t$ باشد پس $r \leq t$ میباشد.	(c). اگر $R \subseteq S$ و $S \subseteq T$ باشد پس $R \subseteq T$ میباشد.

137. برای هر ست S و هر ست T درصورتیکه $S \subseteq T$ باشد پس $S \cup T = T$ میشود.

ثبوت: نشان باید داد که:

(a). $(S \cup T) \subseteq T \ldots$

(b). $T \subseteq (S \cup T)$.

از مقایسهٔ نتایج (a) و (b) ثابت میشود که: $S \cup T = T$.

اینک در چوکات ذیل ثبوت حقیقت فوق ارائه میشود:

$p \in S \cup T \Rightarrow p \in S$ و یا $p \in T$ . . . (a)

درصورتیکه $p \in T$ باشد، درینجا ما حل جزء (a) مسأله را دریافته ایم.

درصورتیکه $p \in S$ باشد، درینصورت چون: $S \subseteq T$ ثابت (1).

پس: $S \cup T \Rightarrow p \in S \Rightarrow p \in T$.

بهرصورت نتیجه میشود که: $p \in S \cup T \Rightarrow p \in T$ . . .

و ازینجا ما داریم: $S \cup T \subseteq T$ . . . (a) .

(b)، حال دیده میشود که: $p \in T \Rightarrow p \in T \cup S$ . . . .

ازینجا ما داریم: $T \subseteq T \cup S$ . . .

(c)، از مقایسهٔ نتایج (a) و (b) ما داریم:

$(S \cup T \subseteq T$ و هم $T \subseteq S \cup T) \Rightarrow S \cup T = T$.

.138 ثبوت کنید که: $\{x \mid x^2 < 1\} \neq [-1, 1]$.

کمک: برای ثبوت رابطهٔ: $A = B$ ضروری است تا نشان دهیم که:

(ه) برای هر عنصر کیفی p ست A رابطه: $p\in A \Rightarrow p\in B$
حقیقت داشته باشد همچنین قسم (ط) برای هر عنصر کیفی p ست B رابطه:
$p\in B \Rightarrow p\in A$ حقیقت دارد. ولی برای ثبت
رابطه: $A\neq B$ کافی است تا یکی از دو رابطه ذیل را اثبات
نمود: (ه). محض یک عنصر را در ست A پیدا نمود که در
B موجود نباشد یعنی: برای یک عنصر $p\in A$ رابطه $p\notin B$ را
نشان داد. (ط) ویا اینکه یک عنصر $p\in B$ را پیدا نمود که
رابطه: $p\notin A$ را تصدیق کند. بعبارت دیگر
برای اثبات رابطه: $A\neq B$ کافیست تا نشان دهیم که محض یک
عنصر در یکی از دو ست A ویا B موجود شده میتواند که در دیگرش
نباشد. اینک در چوکات ذیل باثبات رابطه فوق اقدام میکنیم:

$1\in[-1,1]$ ولی $1\notin\{x \mid x^2<1\}$.

وهمچنان:

$-1\in[-1,1]$ ولی $-1\notin\{x \mid x^2<1\}$.

139. با ثبوت رسانید که $\{x|x^2<1\} \subset [-1,1]$.

کمک: برای ثبوت رابطهٔ $A \subset B$ ، A سِت فرعی مناسب (proper subset) B است، در خصوص نشان باید داد که:

a). $A \subseteq B$ و b). $A \neq B$. لهذا اثبات مساله را در حرکات ذیل آغاز مینمائیم:

(a). . . . . فرضاً: $p \in \{x|x^2<1\}$

$$
\begin{aligned}
p \in \{x|x^2<1\} &\Rightarrow p^2<1 \\
&\Rightarrow -1<p<1 \\
&\Rightarrow -1 \leq p \leq 1 \\
&\Rightarrow p \in [-1,1].
\end{aligned}
$$

$\therefore \{x|x^2<1\} \subseteq [-1,1]$.

(b). . . . در حرکات (138) ثابت شد که:

$\{x|x^2<1\} \neq [-1,1]$

از مقایسه نتایج جزء (a): $\{x|x^2<1\} \subseteq [-1,1]$

و جزء (b): $\{x|x^2<1\} \neq [-1,1]$

ثابت میشود که: (c): $\{x|x^2<1\} \subset [-1,1]$.

140. باز در نظر بگیرید مشخصات زیر را: A = B آیا مجموعهٔ
مربوط حروف کلمهٔ «امان» و کلمهٔ «منان» با هم مساوی است
را هم بدو مجموعهٔ مربوط حروف کلمهٔ «امان» و کلمهٔ «امین» چه فکر میکنید

مجموعه حروف کلمهٔ «امان» عبارتست از: {ا، م، ن}
مجموعه حروف کلمهٔ «منان» عبارتست از: {م، ن، ا}
چون مجموعه دو مجموعه فوق دارای همین عناصر اند پس با هم مساوی اند.

مجموعه حروف کلمهٔ «امین» عبارتست از: {ا، م، ی، ن}
چون در مجموعه حروف کلمهٔ «امین» یک حرف «ی» موجود است که در مجموعه مربوط کلمهٔ «امان» نیست. همچنان تمام حروف مربوط کلمهٔ «امان» در مجموعه حروف مربوط کلمهٔ «امین» شامل است. پس مجموعه حروف کلمهٔ «امان» یک مجموعه فرعی مجموعه حروف کلمهٔ «امین» است.

فصل هفتم

الجبره ست ها

The Algebra of Sets

این یکموضوع دلچسپ است که بین ست های فرعی یک ست موضوعی بنابر عملیات: "∪"، "∩" و "ᶜ" قوانین الجبری حکمفرما است که از بسی جهات با قوانین الجبره که در بین اعداد حقیقی "R" موجود است شباهت دارد.

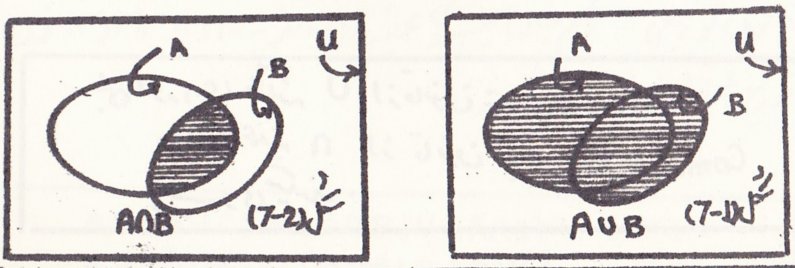
الجبره ست های فرعی یک قسمت مهم الجبر بولین Boolean Algebra را (که درین چند سال آخیر بنابر مورد زیاد تطبیق آن در ساحات ماشین های سریع السیر الکترونیکی حائز اهمیت زیاد گردیده است) تشکیل میدهد.

درینجا ما بصورت خلص آن طرق و اساساتی را که موجب انکشاف الجبره ست ها گردیده است ذیلاً توضیح مینمائیم:

141 . اگر سِت U را بحیث سِت کُلی Universal Set ، تمام سِت های فرعی U ، بشمول U و سِت خالی Φ ، در U و دو عملیه اتحاد Union و تقاطع intersection را در U بحیث عملیات دوگانه ای درنظر بگیریم ، درینصورت با قبولی ارائه عملیه اتحاد را به "$\cup$" و عملیه تقاطع را به "$\cap$" ما اتحاد دو سِت X و Y را به (a) ______ و تقاطع اینها را به (b) ______ ارائه نموده میتوانیم

(a) $X \cup Y$ ، (b) $X \cap Y$

142 . با استفاده از ترسیم وِن دیاگرام اتحاد و تقاطع دو سِت A و B را که بعضی عناصر مشترک را دارا اند علی الترتیب در شکل : (7-1) و شکل (7-2) ذیل نشان میدهیم ایا میدانید که کدام نواحی اشکال مربوط اتحاد و تقاطع سِت های A و B را ارائه میکند؟



بلی ، نواحی مخطط اشکال مربوط سِت های اتحاد و تقاطع را ارائه میکند

۱۴۳ . اجرای عملیات که توسط اتحاد «U» و تقاطع «∩»
در بین سِت‌ها صورت میگیرد با عملیات جمع «+» و ضرب «·»
که در بین اعداد اجرا پذیر اند مشابهت زیاد دارد. این تشابهات
بین این دو دسته عملیات دوگانه ای Binary Operation ریاضیات وقتی
بیشتر مورد علاقه و دلچسپی واقع میشود که پیروی آنها از بعضی
قوانین اساسی ریاضی مانند: انجمنی Associative ، تبدیلی
Commutative ، توزیعی Distributive که بر عملیات جمع و ضرب در
سِت اعداد حقیقی R حکمفرما است مورد مطالعه قرار گیرد.

برای سِت‌های A ، B و C آیا گفته میتوانید که روابط:

$$A \cup B = B \cup A \quad \ldots (a)$$
$$A \cap B = B \cap A \quad \ldots (b)$$

از کدام قانون اساسی ریاضیات پیروی میکند؟

> بلی، در (a) عملیه U از قانون تبدیلی (تبادلی)
> در (b) عملیه ∩ از قانون تبدیلی Commutative
> پیروی میکند.

۱۴۴ . برای سِت‌های A ، B و C حقیقت اینرا که عملیات «U» و «∩»

از خاصیت[۴] (قانون) تبدیلی Commutative پیروی میکنند در
چوکات های (۱۰۴) و (۱۱۰) ارائه شده است؛ اکنون
روابطی را که بنابراین بود آ پیروی عملیهٔ «U» و عملیهٔ «∩» از خاصیت
ویا قانون انجمنی Associative توضیح شده بتوانند بگذارید.

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) \quad \cdots (a)$$
$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) \quad \cdots (b)$$
(a) پیروی «U» را از قانون انجمنی، (b) پیروی «∩» را از انجمنی ارائه مینماید.

۱۴۵. تعقیب عملیات «U» و «∩» از خواص انجمنی در چوکات های
(103) و (109) علی الترتیب ارائه شده اند، حال روابطی
را که باشاتس اینها علی الترتیب پیروی عملیهٔ «∩» نظر به عملیهٔ «U» را از
قانون توزیعی، وهم چنان پیروی عملیهٔ «U» نظر به «∩» را از قانون
توزیعی ارائه نمائید بنویسید.

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \quad \cdots (a)$$
$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \quad \cdots (b)$$

---

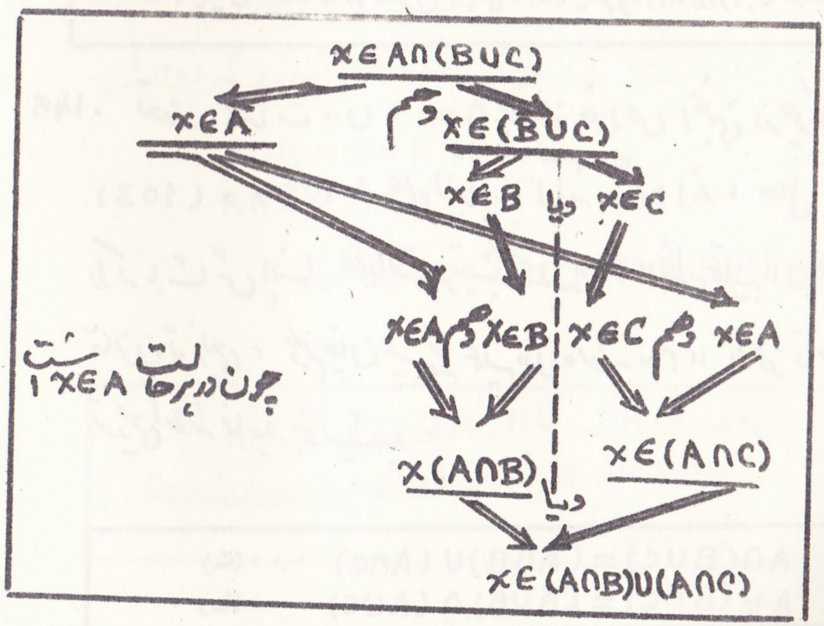
۴ بعضی نویسندگان حقایق فوق را بنام خواص وبعضی بنام قوانین یاد کرده اند.

146. اینک در ذیل باثبات رابطهٔ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ اقدام مینمائیم:

برای اثبات رابطهٔ فوق ضرور است تا نشان داد که:

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)\;\ldots\text{(i)}$$
$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)\;\ldots\text{(ii)}$$

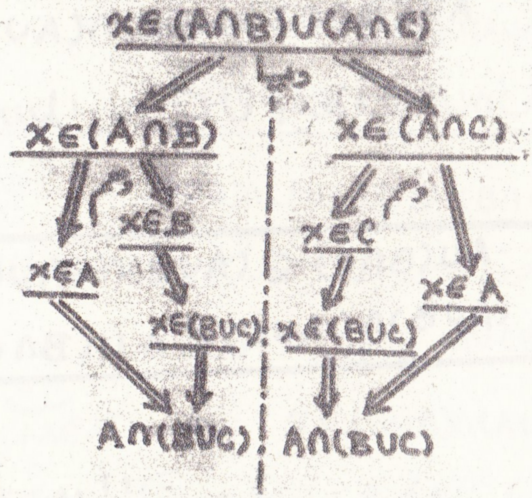
اینک در حرکات ذیل باراَئهٔ رابطهٔ (i) فوق اقدام میکنیم، طوریکه یک عنصر کیفی $x\in A\cap(B\cup C)$ را انتخاب و موجودیت آنرا در یک $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ جستجو مینمائیم.



ازینکه : $x \in A\cap(B\cup C) \Rightarrow x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

ازین نتیجه میشود که: $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C) \cdots (i)$

147 . اکنون برای اثبات رابطه (ii) $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C)$
یک عنصر کیفی $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$ را مورد نظر قرار داده و موجودیت آن را در $x \in A\cap(B\cup C)$ طبق ذیل جستجو مینمائیم:



ازینکه : $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C) \Rightarrow x \in A\cap(B\cup C)$

لذا $\therefore (A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C)$

148. نظر به حرکات (146): $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$

و هم چنان از حرکات (147): $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$

حاصل میشود. در نتیجه ادعا میتوان کرد که:

$$\boxed{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$$

149. حال با اثبات میرسانیم که:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\quad\ldots(b)$$

برای تثبیت رابطهٔ (b) نشان باید داد که:

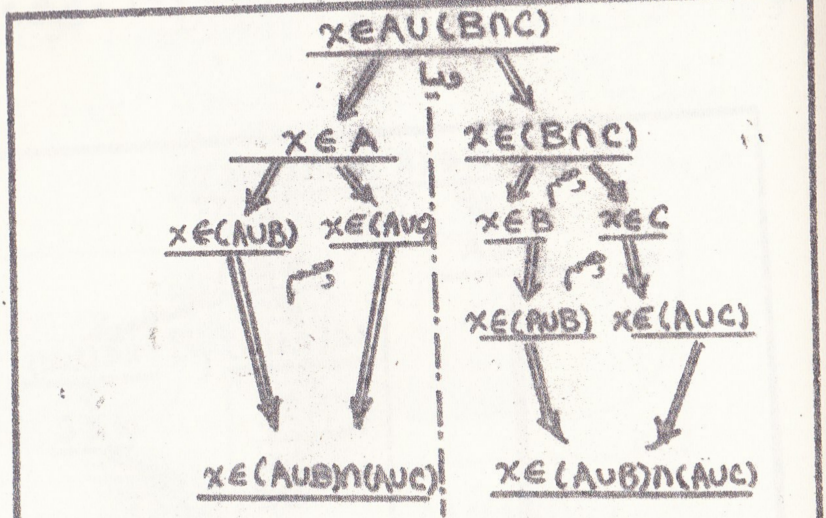
$$\boxed{\begin{array}{l} A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)\quad\ldots(iii)\\ (A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)\quad\ldots(iv)\end{array}}$$

150. برای اثبات رابطهٔ:

$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ، موجودیت

یک عنصر کیفی $x\in A\cup(B\cap C)$ را در $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

جستجو مینمائیم:



درینصورت: $x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

درنتیجه: $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

151 · حال ثبوت مینمایم که: $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$ .... (iv)

برای اثبات سطهٔ فوق موجودیت یک عنصر کیفی $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

را در ست: $A\cup(B\cap C)$ بررسی باید نمود.

در بررسی شرط: $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ دو حالت موجود است:

یا $x\in A$ ویا $x\notin A$. درصورتیکه: $x\notin A$

موجود گردد، درینصورت بالضرور:

$x\in B$ وهم $x\in C$ موجود میبود.

اینک در چوکات ذیل حقیقت رابطهٔ فوق را مورد بررسی قرار میدهیم:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \underline{x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)} \arrow[dll] \arrow[dr] & & \\
\underline{x\in A} \arrow[ddddd] & & \text{ویا} & \underline{x\notin A} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & \underline{x\in(A\cup B)} \arrow[d] & \text{هم} & \underline{x\in(A\cup C)} \arrow[d] \\
 & & \underline{x\in B} \arrow[dr] & & \underline{x\in C} \arrow[dl] \\
 & & & \underline{x\in(B\cap C)} \arrow[d] & \\
 & & & \underline{x\in A\cup(B\cap C)} & \\
\underline{x\in A\cup(B\cap C)} & & & &
\end{tikzcd}
$$

چون $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$

لذا: $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$

152. از چوکات (150) داریم:

$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

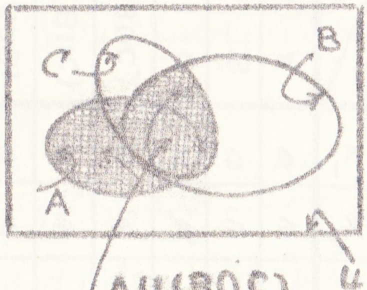
و از چوکات (151) داریم:

$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$

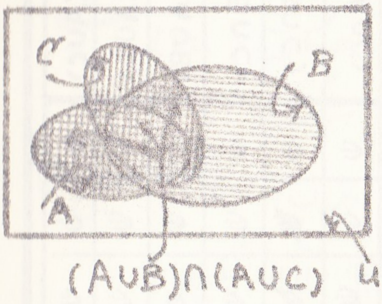
در نتیجه ادعا بود که: ____

$$\boxed{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).}$$

153. حقیقت رابطهٔ: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ را
توسط دیاگرام وین Venn Diagrams مبین دو شکل ذیل ارائه
نموده میتوانیم:



$A\cup(B\cap C)$



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

گفته میتوانید کدام قسمت دیاگرام های فوق حقیقت رابطهٔ مطلوب را ارائه میکنند؟

بلی، نواحی مخطط شده عمودی و افقی هردو دیاگرام فوق حقیقت رابطهٔ مطلوب را ارائه مینماید. حالانکه این نواحی باهم مساوی اند؛

154. حقیقت رابطهٔ: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ را
از مقایسهٔ ستون های: (5) و (8) جدول (I) جدول "حقیقت" و یا جدول "شمول عناصر" مطالعه میتوان کرد. بهمین ترتیب
حقیقت رابطهٔ: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ را از
مقایسهٔ ستون های: (15) و (13) جدول مذکور در صفحه (102)
مطالعه نموده میتوانیم.

جدول شمول عناصر ویا جدول حقیقت : (II) جدول

سیت ها / عناصر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	A	B	C	$(B\cup C)$	$A\cap(B\cup C)$	$(A\cap B)$	$(A\cap C)$	$(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$(B\cap C)$	$A\cup(B\cap C)$	$(A\cup B)$	$(A\cup C)$	$(A\cup B)\cap(A\cup C)$
x_1	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_2	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_3	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_4	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_5	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
x_6	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
x_7	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
x_8	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

از مقایسه ستون (5) و (8) وهمچنان از مقایسه ستون (10) و (13) نتیجه میشود که :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

155. برای هر ست کیفی A و ست خالی Φ، روابط :

$A \cup \Phi = A$ .... (a)

$A \cap \Phi = \Phi$ .... (b)

همیشه جایز است

حقیقت است؛ چنانچه حقیقت رابطه (a) در حرکات (101) و حقیقت رابطه (b) در حرکات (107) ارائه شده است.

با درنظرداشت عملیات جمع "+" و ضرب "·" در ست حقیقی IR روابط مشابه و معادل اینها را در IR ارائه کنید.

اگر صفر (0) با درنظرداشت عملیات "+" و "·" و کیفی دیگر x در IR درنظر گرفته شود درخصوص ما داریم :

$A \cup \Phi = A \ldots\ldots x + 0 = x$

$A \cap \Phi = \Phi \ldots\ldots x \cdot 0 = 0$

---

156. در مثال حرکات فوق Φ عنصر عینیت Identity عملیه "∪" در ست ها است و همین قسم 0 را (a) ________ عملیه "+" در IR می نامند. و نیز Φ حکم عنصر جذبان (جاذب) را نظر به عملیه "∩" در ست ها دارد، همین قسم صفر (0) (b) ________ عملیه ضرب را در IR تشکیل میدهد.

(a) عنصر عینیت identity ، (b) عنصر جذبان

157. اگر U بحیث سِت کلی مد نظر گرفته شود ، در ینصورت برای سِت فرعی A ای سِت U روابط ذیل عملیه جائز حقیقتاً ثابت است :

$$A \cup \phi = \phi \cup A = A \quad \ldots\ldots (a)$$
$$A \cap U = U \cap A = A \quad \ldots\ldots (b)$$

بنابر روابط (a) سِت ϕ بنام عنصر ـــــ عملیه ـــــ یاد میشود .
و بنابر روابط (b) سِت U بنام عنصر ـــــ عملیه ـــــ یاد میشود .

ϕ عنصر عینیت عملیه $\cup$
U عنصر عینیت عملیه $\cap$ یاد میشود .

158. در چند چوکات فوق بحث صورت گرفته رسید که عملیات « $\cup$ » و « $\cap$ » در سِت های فرعی از قوانین (خواص) : تبدیلی ، اتحادی ، توزیعی : $\cap$ بر $\cup$ و توزیعی : $\cup$ بر $\cap$ و موجودیت عناصر عینیت عملیه $\cup$ (یعنی ϕ) و عملیه $\cap$ (یعنی U) پیروی میکند . اکنون عملیه اکمال C را در بین سِت ها دوباره مورد بررسی قرار داده و ـ

و طبیعت این عملیه را در ست های فرعی U مطالعه مینمائیم

از مطالعه چوکات (95) خواص عمده عملیه تکمیل "C" طبق ذیل ارائه شده میتواند که :

$$A \cup (\sim A) = \_\_\_\_ \quad \ldots (a)$$
$$A \cap (\sim A) = \_\_\_\_ \quad \ldots (b)$$

(a) . U ، (b) ϕ

159 . از مطالعه چوکات (97) خاصیت عمده دیگر عملیه C طبق ذیل ارائه شده میتواند : $\sim(\sim A) = \_\_\_\_$.

$$\boxed{\sim(\sim A) = A}$$

160 . اینک در ذیل دو خواص مهم دیگر عملیه "C" تکمیل را که بنام قوانین دیمورگن De Morgan's Laws یاد میشوند میگذاریم.

$$\sim(A \cup B) = (\sim A) \cap (\sim B) \quad \ldots (a)$$
$$\sim(A \cap B) = (\sim A) \cup (\sim B) \quad \ldots (b)$$

اثبات رابطهٔ (a) فوق از مقایسهٔ ستون های : (6) و (8) و از رابطهٔ (b) فوق از مقایسهٔ ستون های : (5) و (10) جدول II شمول عنام در صفحهٔ (106) حاصل میشود .

جدول حقیقت یا جدول شمول عناصر : جدول (II)

عناصر \ ست ها	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	A	B	$\sim A$	$\sim B$	$\sim A\cup\sim B$	$\sim A\cap\sim B$	$(A\cup B)$	$\sim(A\cup B)$	$(A\cap B)$	$\sim(A\cap B)$
x_1	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
x_2	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
x_3	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
x_4	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$

غرض سهولت در جدول فوق ما علامه "$\in$" را بجای علامه "C" بکار برده ایم. از مقایسهٔ ستون های: (5) و (10) جدول، حقیقت رابطه:

$$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B \quad .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

و همچنان از مقایسهٔ ستون های: (6) و (8) جدول، حقیقت رابطهٔ:

$$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B \quad .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

بمشاهده میرسد.

161. حقیقت قوانین دمورگن De Morgan's Laws را

با استفاده از رابطهٔ شمول طبق ذیل ثابت نموده میتوانیم:

برای اثبات قانون: $\sim(A\cap B)=(\sim A)\cup(\sim B)$

اولاً (a) ________ $\sim(A\cap B)\subseteq$ ثابت باید نمود، و

برای رسیدن به این هدف (b) ________ را در نظر گرفته وجود آنرا در (c) ________ $(\sim A)\cup(\sim B)$

جستجو نمائیم.

(a) $(\sim A)\cup(\sim B)$ ، (b) یک عنصر کیفی x .
(c) $x\in\sim(A\cap B)$

162. بهمین قسم ثانیاً نشان باید داد که: $(\sim A)\cup(\sim B)\subseteq\sim(A\cap B)$.

و برای رسیدن به این مطلب یک عنصر کیفی (a) ________ را

انتخاب نموده و موجودیت آنرا در (b) ________ بررسی نمائیم.

در نتیجه حاصل میشود که: $\sim(A\cap B)\subseteq(\sim A)\cup(\sim B)$

$(\sim A)\cup(\sim B)\subseteq\sim(A\cap B)$.

(a) $(\sim A)\cup(\sim B)$ ، (b) $\sim(A\cap B)$

163. از بررسی روابط: (a) .... $\sim(A\cap B)\subseteq(\sim A)\cup(\sim B)$

$(\sim A)\cup(\sim B)\subseteq\sim(A\quad B)$ .... (b)

نتیجه میشود که: ______________________

$$\boxed{\sim(A\cap B)=(\sim A)\cup(\sim B)}$$

164. اینک در ذیل باثبات رابطهٔ (a) اقدام مینمائیم:

$$x\in\sim(A\cap B)$$
$$\Downarrow$$
$$x\notin(A\cap B)$$
$$\Downarrow$$

$x\in A$ و $x\notin B$	$x\notin A$ و $x\notin B$	$x\notin A$ و $x\in B$
$\Downarrow\quad\Downarrow$	$\Downarrow\quad\Downarrow$	$\Downarrow\quad\Downarrow$
$x\notin\sim A$ و $x\in\sim B$	$x\in\sim A$ و $x\in\sim B$	$x\in\sim A$ و $x\notin\sim B$
$x\in(\sim A)\cup(\sim B)$	$x\in(\sim A)\cup(\sim B)$	$x\in(\sim A)\cup(\sim B)$

در هر سه حالت رابطه برقرار شد که: (a). ______________________

در نتیجه ادعا میشود که: (b). ______________________

$$\boxed{\begin{array}{r} x\in\sim(A\cap B)\Rightarrow x\in(\sim A)\cup(\sim B)\ .\ (a) \\ \sim(A\cap B)\subseteq(\sim A)\cup(\sim B)\ ...\ (b)\end{array}}$$

165. حال نشان باید داد که: $(\sim A)\cup(\sim B)\subseteq \sim(A\cap B)$.

حل مطلب فوق را طبق چوکات ذیل ارائه نموده میتوانیم:

$$\boxed{\begin{tikzcd}[column sep=small] & x\in(\sim A)\cup(\sim B) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ x\notin A \arrow[dr, Rightarrow] & & x\notin B \arrow[dl, Rightarrow] \\ & x\notin(A\cap B) \arrow[d, Rightarrow] & \\ & x\in\sim(A\cap B) & \end{tikzcd}}$$

بملاحظه میرسد که: $x\in(\sim A)\cup(\sim B)\Rightarrow x\in\sim(A\cap B)$

بنا بران: $(\sim A)\cup(\sim B)\subseteq\sim(A\cap B)$

از مقایسهٔ دو رابطه: $(1)\cdots\ \sim(A\cap B)\subseteq(\sim A)\cup(\sim B)$

$(2)\cdots\ (\sim A)\cup(\sim B)\subseteq\sim(A\cap B)$

نتیجه میشود: $\sim(A\cap B)=(\sim A)\cup(\sim B)$

166. اکنون باثبات قانون: $\sim(A\cup B)=(\sim A)\cap(\sim B)$

اقدام مینمائیم بطوریکه یکعنصر کیفی x را در $\sim(A\cup B)$ انتخاب و وجود آنرا در $(\sim A)\cap(\sim B)$ طبق ذیل جستجو مینمائیم:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \in \sim(A \cup B) \arrow[d] & \\
 & x \notin (A \cup B) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \notin A \arrow[d] & & x \notin B \arrow[d] \\
x \in (\sim A) \arrow[dr] & & x \in (\sim B) \arrow[dl] \\
 & x \in (\sim A) \cap (\sim B) &
\end{tikzcd}$$

ازین نتیجه میشود که: $x \in \sim(A \cup B) \Rightarrow x \in (\sim A) \cap (\sim B)$

بنابرآن $\sim(A \cup B) \subseteq (\sim A) \cap (\sim B)$

167. اکنون طبق ذیل ثابت باید نمود: $x \in (\sim A) \cap (\sim B) \subseteq x \in \sim(A \cup B)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \in (\sim A) \cap (\sim B) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \notin A \arrow[dr] & & x \notin B \arrow[dl] \\
 & x \notin (A \cup B) \arrow[d] & \\
 & x \in \sim(A \cup B) &
\end{tikzcd}$$

درنتیجه : $x \in (\sim A) \cap (\sim B) \Rightarrow x \in \sim(A \cup B)$

پس $(\sim A) \cap (\sim B) \subseteq \sim(A \cup B)$

168. از مقایسه دو رابطهٔ: (1). $\sim(A\cup B)\subseteq(\sim A)\cap(\sim B)$

(2). $(\sim A)\cap(\sim B)\subseteq\sim(A\cup B)$

نتیجه میشود که:

$$\boxed{\sim(A\cup B)=(\sim A)\cap(\sim B)}$$

169. حقیقت رابطهٔ فوق را بطریق دیگر طبق ذیل نیز بدست میتوان آورد:

$$\sim((\sim A)\cap(\sim B))=\sim(\sim A)\cup\sim(\sim B)$$

ولی . . . . $\sim(\sim A)\cup\sim(\sim B)=A\cup B$ طبق (a)

پس . . . . $\sim((\sim A)\cap(\sim B))=A\cup B$ طبق (b)

$$\sim(\sim((\sim A)\cap(\sim B)))=\sim(A\cup B)$$

طبق (c) . . $(\sim A)\cap(\sim B)=\sim(A\cup B)$

در نتیجه:- $\sim(A\cup B)=(\sim A)\cap(\sim B)$

(a) بنابر حقیقت: $\sim(\sim A)=A$ ، (b) خاصیت انتقالی

(c) بنابر حقیقت توضیح شده جز (a).

170. ثابت کنید که: $(\sim A)\cap(A\cup B)=(\sim A)\cap B$.
یعنی در حرکات ذیل ثبوت مطلب فوق را استدلال ملاحظه نمائیم:

ثبوت:

$(\sim A)\cap(A\cup B)=[(\sim A)\cap A]\cup[(\sim A)\cap B]$ قانون توزیعی

$=\Phi\cup[(\sim A)\cap B]$ خاصیت اتحاد ست های مکمل

$=(\sim A)\cap B$ اتحاد Φ با یک ست

171. اگر P عبارت از ست تمام اعداد مثبت حقیقی بوده و Q ست اعداد نسبتی Rationals در $\mathbb{R}$ ارائه کند ، درینصورت:

(a). $\sim Q$ ست اعداد ______ را در $\mathbb{R}$ ارائه میکند.

(b). $\sim P$ ست اعداد ______ را در $\mathbb{R}$ » » .

(c). $Q\cap P$ ست اعداد ______ را در $\mathbb{R}$ » » .

(d). $\sim(Q\cap P)$ ست اعداد ______ را در $\mathbb{R}$ » » .

(e). $Q\cup P$ ست اعداد ______ را در $\mathbb{R}$ » » .

(a). غیر نسبتی Irrationals ، (b). اعداد منفی حقیقی ،
(c). هم نسبتی وهم مثبت ، (d). غیر نسبتی منفی
(e). یا نسبتی و یا مثبت

فصل ششم

موارد استعمال سِت‌ها

Applications of Sets

در مباحث بیشتر ما راجع به سِت های اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ ، سِت اعداد تام $\mathbb{Z}$ ، سِت اعداد نسبتی $\mathbb{Q}$ ، سِت اعداد غیر نسبتی $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ و سِت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ تا حدی معلومات تقدیم نمودیم . اینک درین فصل درباره استعمال سِت ها در مسائل حسابی ، الجبری و هندسی صحبت مینمائیم .

استعمال سِت ها در حساب :

Sets of Multiples : سِت مضرب ها

172 . اگر سِت تمام اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را که مضرب های عدد 3 اند به $3\mathbb{N}$ ارائه نمائیم ، درین صورت ما مینویسیم ،

که: $3\mathbb{N} = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$

بهمین قسم اگر ست تمام اعداد طبیعی که مضرب های 6 اند را به $6\mathbb{N}$ ارائه نمائیم، درینصورت ما میتوانیم بنویسیم که: ______

$$\boxed{6\mathbb{N} = \{6, 12, 18, 24, \dots\}}$$

173. میدانیم هر عدد که مضرب 6 باشد بالضرور مضرب 3 است، یعنی برای هر عنصر x: $x \in 6\mathbb{N} \Rightarrow x \in 3\mathbb{N}$

ازین نتیجه میشود که: ______

$$\boxed{6\mathbb{N} \subseteq 3\mathbb{N}}$$

174. بصورت عموم اگر ست تمام اعداد طبیعی ای که مضرب یک عدد طبیعی a اند به $a\mathbb{N}$ ارائه نمائیم، درینصورت: ______

$$\boxed{a\mathbb{N} = \{a, 2a, 3a, \dots\}}$$

بهمین قسم اگر ست تمام اعداد طبیعی ایکه مضرب یک عدد طبیعی b اند، درینصورت ما میتوانیم بنویسیم که: ______

$$b\mathbb{N} = \{b, 2b, 3b, 4b, \dots\}$$

175. بصورت عموم اگر عدد طبیعی b مضرب عدد طبیعی a باشد، د...
تمام مضرب‌های b مضرب a نیز میباشد. یعنی:

$$x \in b\mathbb{N} \Rightarrow x \in a\mathbb{N}$$

ازین نتیجه میشود که: ______

$$b\mathbb{N} \subseteq a\mathbb{N}$$

176. اگر c مضرب b و b مضرب a باشد، درینصورت وا...
ثابت کرد (a). ______ مضرب ______ نیز میباشد. پس ا...
ثبت تمام مضرب‌های a را به (b). ______ و از b را به
(c). ______ ارائه نمائیم، درینصورت داریم که:
(d). $x \in c\mathbb{N} \Rightarrow x \in$ ___ $\Rightarrow x \in$ ___ بوده ازین نتیجه
که (e). $c\mathbb{N} \subseteq$ ___ $\subseteq$ ___ میباشد.

(a). c ، a (b). $a\mathbb{N}$ ، (c). $b\mathbb{N}$

(d). $\Rightarrow x \in b\mathbb{N} \Rightarrow x \in a\mathbb{N}$ (e). $c\mathbb{N} \subseteq b\mathbb{N} \subseteq a\mathbb{N}$

بیست مضرب‌های مشترک Common Multiples دو عدد

177. میخواهیم که ست مضرب مشترک اعداد 6 و 9 را بدست آریم.
ما میدانیم که ست مضرب‌های اعداد 6 و 9 عبارت اند از:

$$6\mathbb{N}=\{6,12,18,24,30,36,\cdots\}$$
$$9\mathbb{N}=\{9,18,27,36,45,54,\cdots\}$$

178. از شرکت عناصر ست مضرب مشترک دو ست فوق را مضرب‌های مشترک اعداد 6 و 9 تشکیل میدهند، پس درینصورت ست مضرب مشترک مطلوب عبارت از ست تقاطع هر دو ست 6N و 9N میباشد. درینصورت مینویسیم:

$$6\mathbb{N}\cap 9\mathbb{N}=18\mathbb{N}=\{18,36,54,72,\cdots\}$$

179. ست مضرب مشترک اعداد 5 و 15 عبارت است از:

$$15\mathbb{N}\cap 5\mathbb{N}=15\mathbb{N}=\{15,30,45,60,\cdots\}$$

180. اگر بخواهیم ست مضرب های مشترک اعداد 3 و 9 را
بدست آریم، در صورت چون: $9\mathbb{N} \subseteq 3\mathbb{N}$ است،
پس واضح است که در صورت ست مضرب های مشترک اعداد
3 و 9 عبارت است از: ________

$$\boxed{9\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} = 9\mathbb{N} = \{9, 18, 27, 36, \ldots\}}$$

ست کوچکترین مضرب مشترک دو عدد:
Least Common Multiple (L.C.M)

181. از مثال مربوط جوکات های (177) و (178) معلوم میشود
که تمام عناصر ست: $18\mathbb{N}$، مضرب های اعداد 6
و 9 اند، ولی کوچکترین این مضرب های مشترک اعداد 6 و
9 عبارت از 18 است. پس ستی که (a) ــــ یگانه عنصر
آن است عبارت از ست کوچکترین مضرب هردو عدد 6 و 9 است.
بهمین قسم ستی که یگانه عنصر آن (b) ــــ است ست کوچکترین مضرب
مشترک اعداد 3 و 9 را تشکیل میدهد.

(a). 18 ، (b). 9 ،

182. هرگاه بخواهیم، کوچکترین مضرب مشترک دو عدد 6 و 8 را بدست آریم درین صورت اول ست مضرب های مشترک هر دو عدد 6 و 8 را بدست آورده وسپس آن ست فرعی این ست مضرب ها را که دارای کوچکترین عنصر باشد انتخاب مینمائیم. این ست منتخبه عبارت از ست کوچکترین مضرب مشترک اعداد 6 و 8 است. مسأله را طبق ذیل حل کرده میتوانیم:

$6\mathbb{N} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$

$8\mathbb{N} = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots\}$

$6\mathbb{N} \cap 8\mathbb{N} = \{24, 48, 72, 96, \dots\} = 24\mathbb{N}$

ست کوچکترین مضرب مشترک 6 و 8 عبارت است از: $\{24\}$.

183. ببینید کوچکترین مضرب مشترک اعداد: 3، 5 و 6 را طبق ذیل بدست آورده میتوانیم:

$6\mathbb{N} \cap 5\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} = 30\mathbb{N}$ ست مضرب های مشترک است

لذا ست کوچکترین مضرب مشترک اعداد 3، 5 و 6 عبارت است از: $\{30\}$.

ست قاسم‌ها Set of Divisors

184. میگویند که یک عدد طبیعی a قاسم یک عدد طبیعی b است
در صورتیکه عدد a عدد b را بالای خود پوره تقسیم کند.
مثلاً اعداد: 1 ، 2 ، 3 عدد (a) ——— را بالای خویش
پوره تقسیم میکنند ، که درینصورت هریک از اعداد 1
2 و 3 را (b) ——— عدد 6 مینامند.

(a) . 6 ، (b) . قاسم

185. اگر ست قاسم‌های عدد 6 را به D_6 ارائه نمائیم،
درینصورت: $D_6=\{1,2,3,6\}$ میشود. بهمین قسم
اگر ست قاسم‌های 24 را به D_{24} نشان دهیم، درینصورت
ما داریم که: ———

$$\boxed{D_{24}=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}}$$

دیده میشود که تمام عناصر ست D_6 شامل ست D_{24} نیز میباشند.
پس درینصورت ما میتوانیم بنویسیم که: ———

$$\boxed{\mathbb{D}_6 \subseteq \mathbb{D}_{24}}$$

186. بصورت عموم اگر یک عدد طبیعی a قاسم یک عدد طبیعی b باشد پس درینصورت : ———— میشود.

$$\boxed{\mathbb{D}_a \subseteq \mathbb{D}_b}$$

سِت قاسم های مشترک دو عدد Common Divisors

187. اگر دو سِت : $\mathbb{D}_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
$\mathbb{D}_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ را مدنظر گرفته
و بخواهیم سِت قاسم های مشترک اینده سِت را بدست آریم،
درینصورت واضح است که سِت قاسم های مشترک هر دو عدد
16 و 24 عبارت است از : $\mathbb{D}_{16} \cap \mathbb{D}_{24} = \{1, 2, 4, 8\}$.
حالانکه سِت حاصل شده از $\mathbb{D}_{16} \cap \mathbb{D}_{24}$ عبارت است از :
(a). ———— و درنتیجه داریم که (b). ————.

$$\boxed{\text{(a). } \{1, 2, 4, 8\} = \mathbb{D}_8 \quad \text{(b). } \mathbb{D}_{16} \cap \mathbb{D}_{24} = \mathbb{D}_8}$$

188. هرگاه ست قاسم های مشترک دو عدد 18 و 24 مطلوب باشد درینصورت ست مطلوب را طبق چکات ذیل بدست آورده میتوانیم : ________ .

$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$D_{18} \cap D_{24} = \{1, 2, 3, 6\}$

بنابران ست قاسم های مشترک اعداد 18 و 24 عبارت از : D_6 .

ست بزرگترین قاسم مشترک دو ویا چند عدد :

Greetest Common Divisor (L.C.D)

189. از چکات (188) بسرو خط میرسد که ست قاسم های مشترک دو عدد 24 و 18 عبارت است از ست D_6 . یعنی هر عنصر D_6 یک مشترک اعداد 24 و 18 است . ولی بزرگترین عنصر این عناصر عبارت از (a) ____ است . پس (b) {____} عبارت از ست بزرگترین قاسم مشترک اعداد 24 و 18 است .

(a) - 6 . (b) - {6}

190 . برای بدست آوردن ست بزرگترین قاسم مشترک دو عدد
اولاً ست قاسم های مشترک هر دو عدد مورد نظر را حاصل
کرده و سپس آن ست فرعی این ست قاسم های مشترک
انتخاب مینمائیم که محض دارای عنصر بزرگترین باشد .
بطور مثال اگر مطلب ما بدست آوردن ست بزرگترین قاسم مشترک
دو عدد 16 و 24 باشد ، درینصورت آنرا طبق ذیل
حاصل نموده میتوانیم : ———— .

$$D_{16} \cap D_{24} = D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$$

پس ست بزرگترین قاسم مشترک 16 و 24
عبارتست از : $\{8\} \subseteq D_8$.

191 . هرگاه بخواهیم بزرگترین قاسم مشترک دو عدد
18 و 42 را بدست آریم ، درینصورت آنرا طبق حرکات ذیل حاصل
کرده میتوانیم : ———— .

در مرحله اول : $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

را حاصل مینمائیم .

در مرحلهٔ دوم: $D_{18}\cap D_{42}=\{1,2,3,6\}$

را حاصل نمائیم. بالاخره ست فرعی آن $D_{18}\cap D_{42}$

که دارای بزرگترین عنصر است یعنی: $\{6\}$ را

انتخاب نمائیم. این $\{6\}$ عبارت از ست مطلوب است.

192. هرگاه بخواهیم بزرگترین قاسم مشترک اعداد: 24، 28 و 36 را حاصل نمائیم، درنخست می‌نویسیم:

$D_{24}=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

$D_{28}=\{1,2,4,7,14,28\}$

$D_{36}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

ست تقاطع هر سه ست فوق عبارت از ست مقسوم‌علیه‌های مشترک هر سه عدد 24، 28 و 36 میباشد. که درینصورت:

$D_{24}\cap D_{28}\cap D_{36}=\{1,2,4\}$.

بوده، و ست بزرگترین قاسم مشترک اعداد 24، 28 و 36 عبارت است از: ——.

$\boxed{\{4\}}$

استعمال ست‌ها در الجبره : (در معادلات)

مفکوره‌ای ست تیوری در شعبات مختلف الجبره بقدر کافی نفوذ کرده است. حتی در دو دهٔ اخیر بندرت اثری در شاخه الجبره عرض وجود کرده باشد که در آن ارزش نظریه ست و یا ست تیوری فراموش شده باشد. درین مبحث ما قدری درباره استعمال ست‌ها در حل معادلات صحبت نموده و در مبحث ما بعد اذکی درباره استعمال ست‌ها در موضوع غیر معادلات صحبت خود را دنبال خواهیم نمود.

193. اگر ست حل معادلهٔ:
$x^2-1=0 \ldots (1)$ را به A، و ست حل
معادله: $x^2+2x-3=0 \ldots (2)$ را به B نشان دهیم
درینصورت ست حل معادله:
$(x^2-1)(x^2+2x-3)=0 \ldots (3)$ عبارت از
$A \cup B$ است. زیرا: ... از ینکه A ست حل معادلهٔ (1)
پس هر عنصر A معادله (1) را تحقیق کرده و آنرا صفر میسازد.
چون A یکی از دو فکتور معادله (3) یعنی (x^2-1) را
صفر میسازد، پس ———— را صفر میسازد.

خود معادله (3)

194. بهمین قسم چون ست B ست حل معادله (2) است. یعنی
هر عنصر B معادله (2) را تحقیق نموده و آنرا صفر میسازد.
چون B یکی از فکتور معادلهٔ (3) را تحقیق مینماید پس B
(a). ——— را تحقیق مینماید. یعنی B آنرا صفر میسازد.
از اینکه یا A و یا B معادلهٔ (b). ——— را صفر میسازد
پس ادعا مینمایم که اتحاد هر دو (c) ——— A و B
معادلهٔ (3) را تحقیق میکند.

(a) معادله (3)، (b) معادله (3)، (c) است

195. بجز از عناصر مربوط ست (AUB) کدام عدد
دیگری موجود شده نمیتواند که معادلهٔ (3) مربوط جوابات (193)
را تحقیق کند. زیرا:

$$x \notin (A \cup B)$$

$$x \notin A \quad \text{و هم} \quad x \notin B$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x^2-1 \neq 0 \quad \text{و هم} \quad x^2+2x-3 \neq 0$$

$$(x^2+2x-3)(x^2-1) \neq 0$$

پس ادعا کرده میتوانیم :

$$\boxed{\text{که } A\cup B \text{ یگانه ست حل معادله : } (x^2-1)(x^2+2x-3)=0 \text{ است .}}$$

196 . چون $A=\{-1,1\}$ و $B=\{-3,1\}$ است ، پس ست حل معادلهٔ : $(x^2-1)(x^2+2x-3)=0$ عبارت است از ———— .

$$\boxed{A\cup B=\{-3,-1,1\}}$$

197 . بصورت عموم اگر ست حل معادلهٔ : $E(x)=0$ را به A و ست حل معادلهٔ : $F(x)=0$ را به B نشان دهیم پس ست حل معادلهٔ : $E(x)\cdot F(x)=0$ عبارت است از ———————— .

$$\boxed{A\cup B}$$

198 . اگر توابع : $x^2-4=0 \cdots (1)$
$x^2+x-6=0 \cdots (2)$ را در نظر بگیریم ، ما میدانیم که بر ترتیب نقطه تقاطع منحنیات مربوط توابع فوق با محور x عبارت از نقاطی است که y مربوط آن صفر ($y=0$) است .

هرگاه هر دو منحنی در بالای محور x یکدیگر را قطع کنند،
درینصورت ضرورت است که ابسیس‌ها (Abscissa) ویا فصله
نقاط مشترک شان حل همزمان سیستم معادلات :

____

______________________________ را صدق کند.

$$x^2-4=0$$
$$x^2+x-6=0$$

199. حل اگر ست حل Solution Set معادله : $x^2-4=0$ را
به A ، و ست حل معادله : $x^2+x-6=0$ را به B نشان
دهیم ، درینصورت ابسیس نقاط مشترک هر دو منحنی عبارت از
عنصر مشترک $A\cap B$ میباشد ، چون $A=\{\quad,\quad\}$
و $B=\{\quad,\quad\}$ است ، پس درینصورت : $A\cap B=\{\quad\}$
میشود.

$$A\cap B=\{2\} \text{ ، } B=\{-3,2\} \text{ ، } A=\{-2,2\}$$

200. از مطالعه دو حرکات فوق نتیجه میشود که فصله نقاط مشترک
هر دو منحنی بالای محور x عبارت از 2 بوده ، حالانکه
ترتیب نقاط مذکور عبارت از 0 است . بنابر آن

مختصات (Coordinates) نقطهٔ مذکور عبارت است از:

________ .

$$\boxed{(2,0)}$$

201. میخواهیم حل همزمان سیستم معادلات:

$$\begin{cases} x^2-4=0 \\ x^2-3x+2=0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases}$$

را بدست آوریم.

اکنون اگر ست حل Solution set معادله: $x^2-4=0$ را
به A و ست حل معادلهٔ: $x^2-3x+2=0$ را
به B و از معادله... $x^2-x-2=0$ را
به C ارائه کنیم، در صورت ست حل همزمان سیستم مذکور
عبارت از ________ میشود.

$$\boxed{A \cap B \cap C}$$

202. از حل هر یک از معادلات سیستم فوق حاصل میشود که: $A=\{-2,2\}$
و $B=\{1,2\}$ و $C=\{\ ,\ \}$ است، پس ست حل
همزمان سیستم مذکور عبارت است از: ________ .

$$A \cap B \cap C = \{2\} \quad , \quad C = \{-1, 2\}$$

۲۰۳ . میخواهیم ست حل همزمان سیستم معادلات :

$$\begin{cases} x^3 - x = 0 \quad \ldots\ldots (1) \\ x^3 - 8 = 0 \quad \ldots\ldots (2) \\ x^2 - x - 2 = 0 \quad \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

را حاصل نمائیم ، درصورتیکه ست حل معادله (1) را به A و از (2) را به B ، و از معادله (3) را به C ارائه نمائیم ، درینصورت ست حل همزمان سیستم (دستگاه) فوق عبارت است از :

$$A \cap B \cap C$$

۲۰۴ . از حل هریک از معادله فوق حاصل میشود که :

$A = \{\ ,\ ,\ \}$ و $B = \{\ ,\ ,\ \}$ و بالاخره

$C = \{\ ,\ \}$ میباشد . حالانکه : $A \cap B \cap C = \Phi$

درنتیجه گفته میتوانیم که سیستم معادلات فوق حل همزمان ندارد .

$$C = \{-2, 1\} \ , \ B = \{2, 1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\} \ , \ A = \{-1, 0, 1\}$$

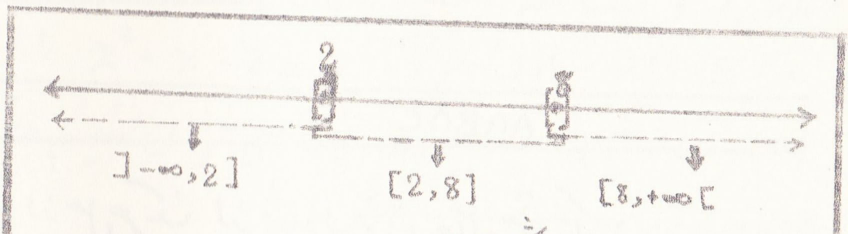
استعمال سِت‌ها در غیر معادلات

قبلاً در صفحات 35 الی 44 راجع به مفکورهٔ فاصله‌ها صحبت نمودیم، درین مبحث در ارائهٔ هندسی غیر معادلات از مفکورهٔ فاصله‌ها مستفید میشویم.

205. با استفاده از مفکورهٔ فاصله‌ها Intervals ما میتوانیم که:

$$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x\le 2\} =]-\infty, 2]$$
$$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ 2\le x\le 8\} = [2, 8]$$
$$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ 8\le x\} = [8, +\infty[$$

ارائه نموده و مطالب فوق را توسط شکل (8-1) ذیل ارائه نمائیم:

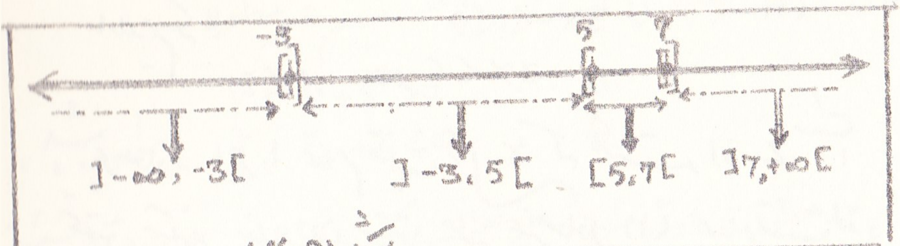


شکل (8-1)

206. به همین قسم:

$$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x<-3\} =]-\infty, -3[$$
$$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ -3<x<5\} =]-3, 5[$$
$$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ 5\le x<7\} = [5, 7[$$
$$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ 7<x\} =]7, +\infty[$$

مطلب فوق را توسط شکل (8-2) ذیل ارائه نموده میتوانیم:



شکل (8-2)

207. در افاده: $-3<x<5$ ، متحول x قیمت های 3- و 5 را بخود گرفته نمیتواند واین افاده مسافه (a) ______ گفته، درحالیکه در افاده: $5\le x<7$ ، x قیمت 5 را گرفته واز 7 را نمیگیرد که این افاده را مسافه (b) ______ ویا ______ میگویند. در افاده: $2\le x\le 8$ ، متحول x هر دو قیمت (نقاط انتها) یعنی 2 و 8 را میگیرد که این افاده را بنام مسافه (c) ______ یاد میکنند.

(a). مسافه باز open intervals ، (b). مسافه نیمه باز ویا نیمه بسته ، (c). مسافه بسته Closed intervals

208. میخواهیم آن ست فرعی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ که رابطه غیرمساوی: $3x-6<0$ را تحقیق کند بدست آوریم.

ما داریم که: $(1) \ldots \quad 3x-6<0$

$$3x<6 \Rightarrow x<2$$

غیر معادله اخیر را تمام قیمت های x که کمتر از 2 است، تحقیق میکند بنا بران ست حل غیر معادله (1) عبارت است از:

جواب مسئله $\{x \mid x \in R,\ x<2\} =]-\infty, 2[$

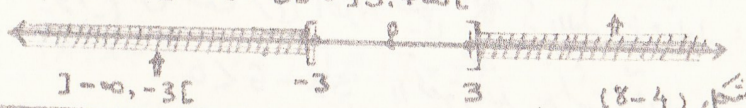
شکل (8-3)

209. ست حل غیر معادله: $x^2-9>0$ مطلوب باشد،

ما میتوانیم که غیر معادله مذکور را به شکل $(x+3)(x-3)>0$ بنویسیم،

ما میدانیم که غیر معادله فوق به قیمت های: $x=3$ و $x=-3$ مساوی به صفر (0) میشود. و به قیمت های: $x>3$ و $x<-3$ هر دو فکتور غیر معادله فوق هم اشاره میشود و حاصلضرب آنها بزرگتر از صفر میشود. با استفاده از مفکوره فوق ها، ست حل غیر مساوات $x^2-9>0$ طبق ذیل ارائه و بشکل (8-4) آنرا نشان میدهیم:

$]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$



شکل (8-4)

210 . اگر ست حل همزمان سیستم غیر معادلات :

مطلوب باشد $\begin{cases} x+8>0 \quad \dots (1) \\ x+6<0 \quad \dots (2) \end{cases}$

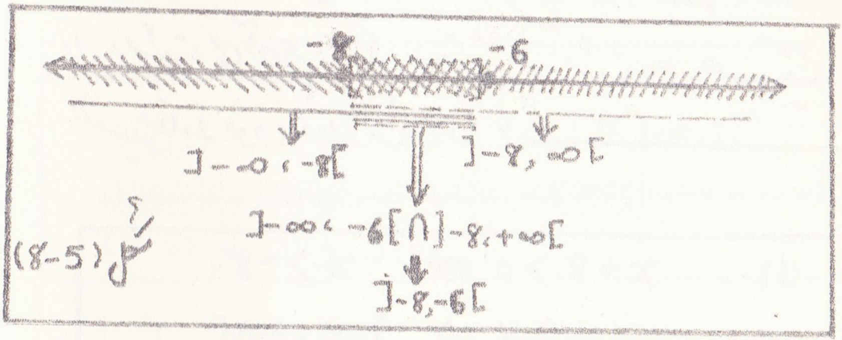
درینصورت اول ست حل هر یک از غیر معادلات سیستم را بدست می آوریم . که درینصورت ست حل هر یک از دو غیر معادله فوق عبارت است از :

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
(1). & x+8>0 \Rightarrow x>-8 \\
 & x>-8 \Rightarrow]-8,+\infty[\\
 & x+8>0 \Rightarrow]-8,+\infty[\\
(2). & x+6<0 \Rightarrow x<-6 \\
 & \Rightarrow]-\infty,-6[
\end{array}
}
$$

211 . حال غرض حل همزمان سیستم فوق ، دریافت ست حل مشترک هر دو غیر معادله (1) و (2) ، ست قسمت مشترک هر دو ست حل حاصل شده را طبق چوکات ذیل حاصل مینمایم :

$$\boxed{]-8,\infty[\cap]-\infty,-6[=]-8,-6[}$$

212. حل همزمان سیستم فوق بالای خط عدد طبق شکل (8-5) ذیل ارائه شده میتواند. حصه ای که دو مرتبه مخطط شده جواب مسأله را ایضاح مینماید:



شکل (8-5)

213. میخواهیم که سیت حل همزمان سیستم:

$$\begin{cases} x^2-9 \ge 0 \\ x^2-5x+4 \le 0 \end{cases}$$

را در $\mathbb{R}$ حل نماییم.

برای وضاحت بیشتر موضوع مسأله فوق را طبق ذیل به دو قسمت تحلیل مینماییم: اولاً سیت های حل هر دو نامعادلات فوق سیستم را حاصل نموده و سپس سیت حل مشترک آنها را بدست می آوریم. در جزء اول ما میدانیم که:

$$x^2-9 \ge 0 \Rightarrow (x+3)(x-3) \ge 0$$

حالا نکه ما میدانیم که ست حل: $(x+3)(x-3)\geq 0$

عبارتست از (a) ________________ .

به همین ترتیب ست حل غیر مساوات: $x^2-5x+4\leq 0$ که عبارت

از (b) ____________ است، بدست می‌آوریم.

$$\boxed{(a) \;]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[\quad (b) \; [1,4]}$$

214. تقاطع هر دو ست حل غیر مساوات:

$$x^2-9\geq 0$$
$$x^2-5x+4\leq 0$$

یا بعبارت دیگر: $[1,4]\cap\left(]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[\right)$

جواب مسأله است.

پس اگر ست: $]-\infty,-3]$ را به A

و ست: $[3,+\infty[$ را به B ، و ست: $[1,4]$ را به C

نشان دهیم در نتیجه ست حل سیستم عبارتست از:

$$(A\cup B)\cap C \; .$$

بنابر تطبیق قانون توزیعی «$\cap$» بالای «$\cup$» ما داریم که: ________

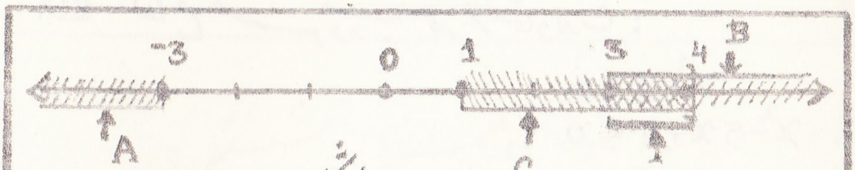
$$\boxed{(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)}$$

215 . حالانکه : $A \cap C = \emptyset$ بوده

و $B \cap C = [3,4]$ میشود .

پس درینصورت سِت حل همزمان سیستم عبارت از تمام عناصر سِت $[3,4]$ در $\mathbb{R}$ میباشد .

حل همزمان سیستم را در شکل (6-8) در جوابات ذیل روی خط عدد که قسمت مخطط شده آن جواب مسئله است افاده نموده میتوانیم : ________ .



شکل (6-8)

216 . میخواهیم که سِت حل سیستم :

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \quad \dots\dots (1) \\ x^2-2x-3 \geq 0 \quad \dots\dots (2) \end{cases}$$

را در $\mathbb{R}$ بدست آوریم .

اگر سِت حل افادهٔ : $x^2-1 \geq 0$ را به A ارائه نمائیم ،

درینصورت : $A =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ میشود . بهمین قسم

اگر سِت حل افادهٔ : $x^2-2x-3 \geq 0$ را به B نشان دهیم

پس درینصورت : $B =]-\infty,-1] \cup [3+\infty[$ میشود .

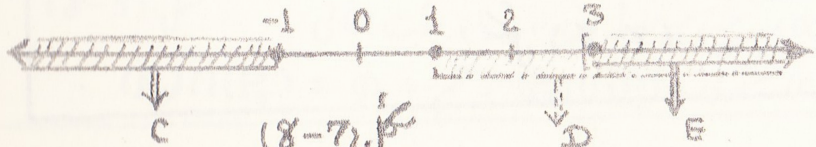
ما میدانیم که ست حل سیستم غیر معادلات فوق عبارت است از :

$$A\cap B=(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)\cap(]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[)$$

217 . حال اگر : $]-\infty ,-1]$ را به C ، $[1,+\infty[$ را به D
و ست $[3,+\infty[$ را به E ارائه نمائیم ، در نتیجه داریم :

$$\begin{aligned} A\cap B &= (C\cup D)\cap(C\cup E)\\ &= C\cup(D\cap E)\\ &= C\cup E \qquad (\text{زیرا : } D\cap E=E)\\ &=]-\infty,-1]\cup[-3,+\infty[\end{aligned}$$

218 . ست حل همزمان دستگاه فوق روی خط طبق شکل (8-7)
مانند چوکات ذیل ارائه شده میتواند :



شکل (8-7)

219. اکنون میخواهیم ست حل همزمان دستگاه:

$$\begin{cases} x^2-1\leq 0 & \dots\dots(1) \\ x^2-x-6\geq 0 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

را در $\mathbb{R}$ جستجو نمائیم.

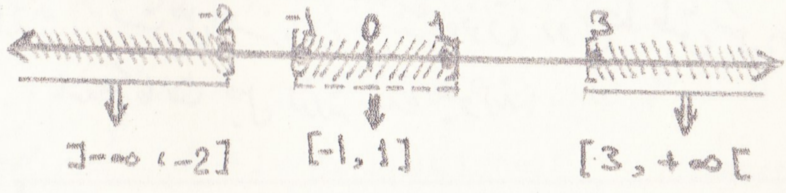
ما میدانیم که ست حل نامساوات (1) عبارت است از: $[-1,1]$؛

و ست حل نامساوات (2) عبارت از: $]-\infty,-2]\cup[3,+\infty[$ میباشد.

ست حل همزمان سیستم فوق عبارت از تقاطع ست های حل هر دو نامساوات بوده و آن عبارت است از:

$$\boxed{[-1,1]\cap(]-\infty,-2]\cup[3,+\infty[)=\phi}$$

220. ست حل همزمان دستگاه (سیستم) فوق روی خط عدد طبق شکل (8-8) در جهات ذیل ارائه نموده میتوانیم:



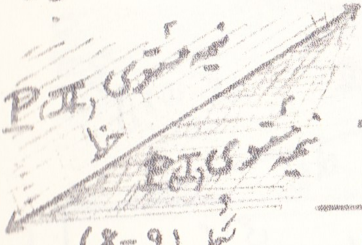
شکل (8-8)

استعمال ست‌ها در هندسه

221. اگر مستوی را بحیث ست نقاط در نظر بگیریم پس در صورت نیم مستوی ها، و تمام اشکال هندسی غیر هندسی دیگر در یک مستوی قرار گرفته میتوانند از قبیل: خطوط، نیم خط ها، قطعه خط ها، مثلث ها، چهار ضلعی ها و غیره همه بحیث ______ یک مورد مطالعه قرار داده میتوانند.

ست های فرعی مستوی

222. میدانیم که هر خط مستوی را به دو نیم مستوی تقسیم میکند که اتحاد این دو نیم مستوی عبارت از (a) ______ بوده و تقاطع آنها (b) ______ ست است. چنانچه در شکل (9-8) ما داریم: (c) ______



شکل (9-8)

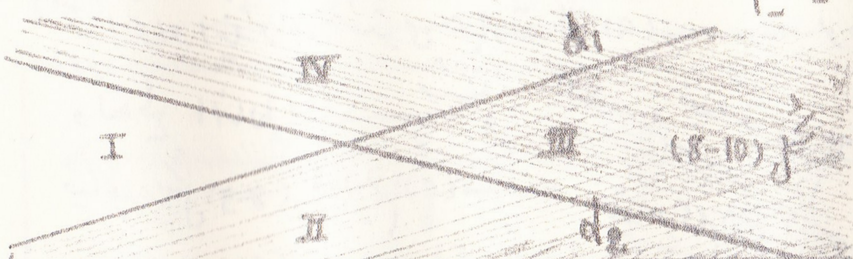
(a): خود مستوی بدون خط، (b). ست خالی

(c). مستوی = $(P_I) \cup (P_{II})$ و هم: $(P_I) \cap (P_{II}) = \Phi$.

223. دو نیم مستوی (P_I) و (P_{II}) که اتحاد اینها عبارت از مستوی (P) و تقاطع شان نیست خالی است، پس گفته میتوانیم که ست (P_I) مکمل (P_{II}) ست نظر به P. درینصورت ما میتوانیم بنویسیم که:-

$$P_{(I)} = C_P P_{(II)} \text{ ، ویا اینکه: } P_{(II)} = C_P P_{(I)}$$

224. هر دو خط مستقیم متقاطع مستوی مربوط شانرا به چهار ناحیه تقسیم میکنند. چنانچه دو خط d_1 و d_2 مانند شکل (8-10) مستوی P را به چهار ناحیه: I، II، III و IV تقسیم نموده است. اگر قسمت مخطط و یا هاشور شده شکل نیم مستوی مورد نظر بوده و اگر این دو نیم مستوی را به $P_{(I)}$ و $P_{(II)}$ ارائه نمائیم، درینصورت ما نوشته میتوانیم که: (a). ——— $= P_I \cup P_{(II)}$ ، (b) ——— $= P_{(I)} \cap P_{(II)}$.



شکل (8-10)

$$P_1 \cap P_2 = \overset{\text{ناحیه}}{(III)} \cdot (b) \text{ ، } P_1 \cup P_2 = (\overset{\text{نواحی}}{II \cup III \cup IV}) \cdot (a)$$

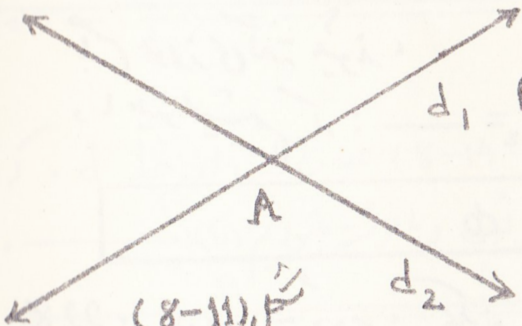
225 - در هندسه معمول است که نقطه را بحرف کلان لاتین نشان میدهد چنانچه نقطه: A و یا نقاط: C و D. ولی افاده:

{A} و هم چنان افاده: {C ، D} ______

.______

{A} ستی را که دارای یک عنصر بوده و آنهم عبارت از نقطه A است ارائه کرده و هم چنان افاده: {C ، D} ستی که عناصر نقاط: C و D اند نشان میدهد.

226 - از هندسه مسطحه میدانم که دو خط مستقیم d_1 و d_2 مشترک المستوی یکدیگر را در یک نقطه مانند A قطع میکند، در اینصورت انوشته میتوانیم که:



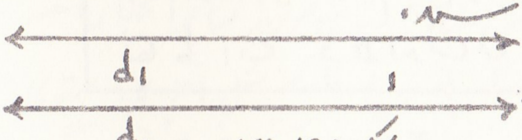
شکل (11-8)

$d_1 \cap d_2 =$ ______.

{A}

227 . دو خط مستقیم مشترک المستوی d_1 و d_2 یکی از دو حالت زیر را دارا میباشند: اول اینکه d_1 و d_2 محض در یک نقطه یکدیگر را قطع میکنند. مانند مساله مربوط چوکات (226) . دوم اینکه خطوط d_1 و d_2 در یک نقطه یکدیگر را قطع نمیکنند، که درین حالت دو صورت دیگر عرض وجود میکند:

درصورت اول؛ ممکن خطوط d_1 و d_2 مانند شکل (8-12) هیچیک نقطه مشترک نداشته باشند،

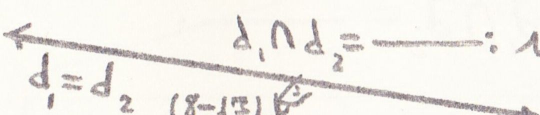


شکل (8-12)

که درینصورت خطوط مذکور باهم موازی گفته میشوند، و ما مینویسیم که: $d_1 \cap d_2 =$ ——

$$\boxed{d_1 \cap d_2 = \phi}$$

228 . درصورت دوم؛ ممکن خطوط d_1 و d_2 مانند شکل (8-13) باهم منطبق بوده و بینهایت نقاط مشترک باشند، که درینصورت می نویسند: $d_1 \cap d_2 =$ ——



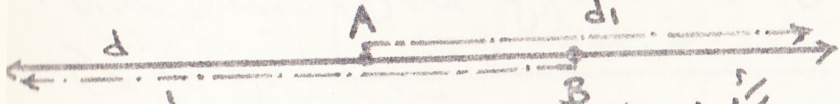
شکل (8-13)

$$\boxed{d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2}$$

تعریف: دو خط که در یک مستوی واقع بوده و یکدیگر را در یک نقطه قطع نکنند موازی گفته میشوند.

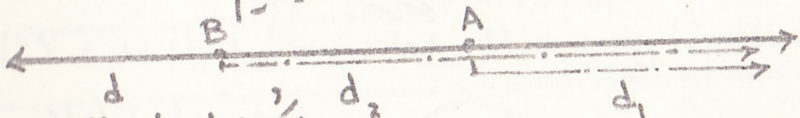
پس نظر به تعریف فوق خطوط متساوی و منطبق پذیر نیز با هم موازی گفته میشوند.

229. تقاطع دو نیم خط: d_1 و d_2 که بالای عین خط d واقع گردند، اول: نظر به شکل (8-14.a) عبارت است از قطعه خط "$\overline{AB}$". یعنی (a).



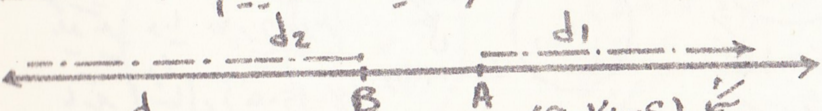
شکل (8-14.a)

دوم: نظر به شکل (8-14.b) عبارت است از نیم خط d_1. که درینصورت $d_1 \subset d_2$ بوده و ما نوشته میتوانیم که (b):



شکل (8-14-b)

سوم: نظر به شکل (8-14.c) نیم خط های d_1 و d_2 هیچ یک نقطه مشترک ندارند. پس درینصورت ما مینویسیم که (c):

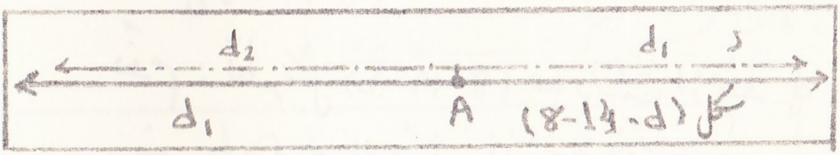


شکل (8-14-c)

$$d_1 \cap d_2 = \overline{AB} \quad .(a)$$
$$d_1 \cap d_2 = d_1 \quad .(b)$$
$$d_1 \cap d_2 = \Phi \quad .(c)$$

230 هرگاه تقاطع دو نیم خط مستقیم d_1 و d_2 که با عین خط d واقع اند محض دارای یک نقطه مشترک بوده، یعنی: $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ باشد.

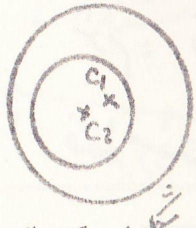
درینصورت حقیقت فوق توسط شکل (8-14-d) ذیل ارائه کرده میتوانیم:



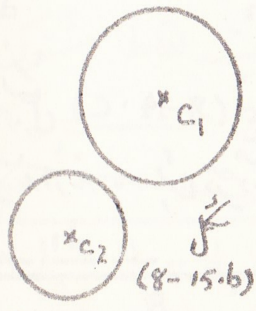
شکل (8-14-d)

231. دو دایره نظر بیکدیگر بالعموم یکی از حالات ذیل را دارا میباشند:

اول. اینکه دو دایره (c_1) و (c_2) یا داخل یکدیگر و یا خارج یکدیگر مانند اشکال (8-15-a) و (8-15-b) واقع بوده و هیچکدام یک نقطه مشترک نداشته باشند.



شکل (8-15-a)



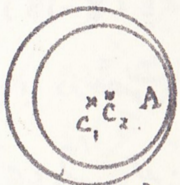
شکل (8-15-b)

درینصورت تقاطع هردو دایره (C_1) و (C_2) عبارت از ______ بوده

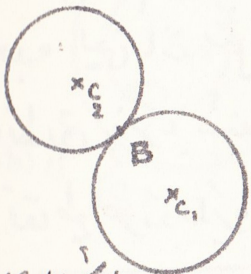
و آنرا چنین ______ ارائه مینمایند.

$(C_1) \cap (C_2) = \phi$	ست خالی بوده ،

232. دوم اینکه هردو دایره (C_1) و (C_2) یا داخلاً ویا خارجاً مماس بوده و محض دارای یک نقطهٔ مشترک میباشند. مانند شکل (8-16.a) و



شکل (8-16.a)

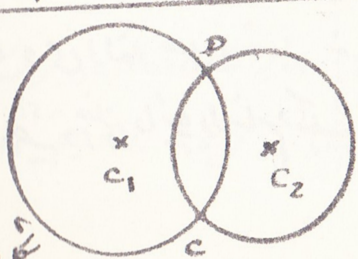


شکل (8-16.b)

شکل (8-16.b) . که درینصورت تقاطع دو دایره توسط علامهٔ ست طبق چوکات ذیل ارائه کرده میتوانیم: ______ :

$(C_1) \cap (C_2) = \{A\}$ ، $(C_1) \cap (C_2) = \{B\}$

233. سوم اینکه هردو دایره مانند شکل (8-17) در دو نقطهٔ مشخص قطع مینمایند که درینصورت



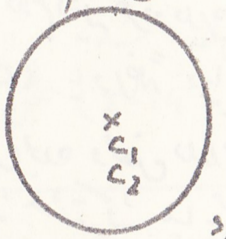
شکل (8-17)

هر دو دایرهٔ (C_1) و (C_2) دارای ـــــ نقطهٔ مشترک بوده ،
و تقاطع آنها توسط افاده سِت طبق حرکات ذیل افاده شده میتواند:

______ .

دوم ، $(C_1)\cap(C_2)=\{C, D\}$

234 . چهارم اینکه هر دو دایرهٔ (C_1) و (C_2) دارای همین مرکز و همین شعاع بوده یعنی مانند شکل (18-8) باهم انطباق پذیر باشند ؛ درین صورت تقاطع هر دو دایره عبارت است از:



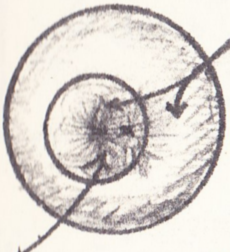
شکل (18-8)

______ .

$$\boxed{(C_1)\cap(C_2)=(C_1)=(C_2)\,.}$$

درین رساله هدف ما از دایره عبارت از سِت نقاط یک مستوی است ، که از یک نقطهٔ ثابت داخلی شان متساوی الفاصله اند ، نه ناحیهٔ داخلی دایره . ناحیهٔ داخلی دایره را بنام دیسک یاد مینمائیم.

235. اگر دو دسک (D_1) و (D_2) نظر بشکل (8-19.a) مد نظر گرفته شود، درینصورت دسک (D_1) سَت فرعی دسک (D_2) میشود.

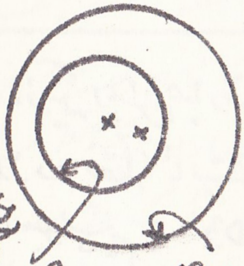


(D_2)
شکل: (8-19.a)
(D_1)

یعنی: (a) ______ .

حالانکه اگر دو دایره (C_1) و (C_2) قطر بشکل (8-19.b) منظور گرفته شوند، درینصورت دایره (C_1) (b) ______ دایرهٔ (C_2) نبوده

یعنی: (c) ______ میشود. چرا؟

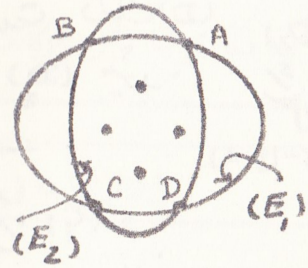


شکل (8-19.b)
(C_2) (C_1)

(a). $(D_1)\subset(D_2)$ ، (b). سَت فرعی ، (c) $(C_1)\not\subset(C_2)$

زیرا: دسک ها تمام نواحی داخلی اشکال (D_1) و (D_2) را احاطه کرده و دارای نقاط مشترک شده میتوانند، حالانکه دوایر (C_1) و (C_2) که عبارت از منحنی های بسته بوده و دارای نقاط مشترک شده نمیتوانند.

236. با در نظر داشت شکل (8-20) بنا بر استفاده از علایم سَت، سَت تقاطع بیضی ها (E_1) و (E_2) را توضیح نمائید.



از شکل، الیپس عبارت از یک نقاطی است که مجموعهٔ فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت داخلی همیشه ثابت است. در این صورت می‌نویسیم : $(E_1)\cap(E_2)=\{A,B,C,D\}$

237 . اگر یک دایره (C) با یک الیپس (E) در نظر گرفته شود، در صورتیکه دایره (C) با الیپس (E) متقاطع گردند، زیادترین عدهٔ عناصری که بین آنها مشترک واقع شده میتواند چند عنصر است ؟

حد اعظمی دارای چهار عنصر مشترک شده میتواند .

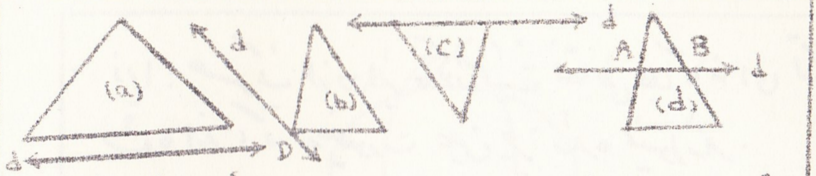
238 . در هندسه شکل دو دایره ای را که دارای عین اندازهٔ طول شعاع باشند باهم مساوی میگویند . ولی باید در نظر داشت که این دو دایره باهم مساوی نیستند بلکه انطباق پذیر اند . زیرا :

زیرا: هر یک از دوایر مذکور ست نقاطی جداگانه ای تشکیل شده اند، لذا درخصوصیت عین چیز شده نمیتوانند.

تبصره ۵: در اکثر کتب هندسه تعریف مثلث دقیق نیست، چنانچه از مطالعهٔ موضوعات مربوط آن معلوم میشود که گاهی مثلث بحیث ست نقاطی که از اتحاد سه قطعه خط که دو بدوی انها دارای یک نقطه مشترک اند تعریف شده است. بطور مثال گاهی میگویند که یک خط مثلث را در دو نقطه قطع میکند. ازین واضح است که مثلث باساس تعریف فوق قبول شده است. ولی یکعده زیاد توضیحات موجود است که باساس آن مثلث بحیث سطح تعریف میشود. چنانچه در اکثر کتب سابقه گفته میشود که: «مساحت مثلث مساویست بحاصل ضرب نصف قاعده در ارتفاع آن». ازین برمی آید که مثلث بحیث سطحی که توسط سه قطعه خط محدود شده است تعریف میشود.

درین رساله ما مثلث را بحیث ست نقاطی که از اتحاد سه قطعه خط که دو بدوی انها دارای یک نقطه مشترک باشد قبولدار میشویم.

239. با در نظرداشت تعریف قبول شده مثلث حالات مختلف تقاطع یک خط را با مثلث بررسی نمایید.



درشکل (a) خط d با مثلث نقطه مشترک ندارد. درشکل (b) یک نقطه مشترک D دارند. درشکل (c) بی نهایت نقاط مشترک دارند. و درشکل (d) دو نقطه مشترک A و B را دارا میباشند.

240. درهندسه گفته میشود که: «اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر یک بیک باهم مساوی باشند مثلث های مذکور باهم مساوی میباشند.» ولی با استفاده از مذکوره، مثلث ها را میدانیم که این دو مثلث (a) ______ بوده، زیرا دو مثلث درصورتی باهم مساوی میباشند که تمام نقاط آنها باهم مشترک باشند. پس اگر طول سه ضلع یک مثلث با طول سه ضلع مثلث دیگر یک بیک باهم مساوی باشند، میگوییم که مثلث های مذکور باهم (b) ______ اند.

(a). باهم مساوی

(b). انطباق پذیر Congruent

علائم معمول این کتاب

عضویت ویا شمول: .... $\in$

A ست فرعی B است: $A \subseteq B$

A ست فرعی مناسب B است: $A \subset B$

a کوچکتر از ویا مساوی به b است: $a \leq b$

c کوچکتر است از d: $c < d$

اگر a پس b: $a \Rightarrow b$

a مساوی است به b: $a = b$

A انطباق پذیر به B است: $A \cong B$

مسافه باز از a تا b: $]a, b[$

مسافه نیمه بسته وباز: $[a, b[$

ست خالی: $\{\ \} = \phi$

تکمله ست A در N: $-A = C_{\mathbb{N}}A$

ست اعداد نسبتی: $\mathbb{Q}$

ست مضرب های 5: $5\mathbb{N}$

ست قاسم های 2: $\mathbb{D}_2$

برای تمام x های ست A: $\forall x \in A$

A اتحاد B: $A \cup B$

طوریکه ویا درحالیکه: |

نیم خط AB: $\overrightarrow{AB}$

عدم عضویت ویا عدم شمول: .... $\notin$

A ست فرعی B نیست: $A \nsubseteq B$

A ست فرعی مناسب B نیست: $A \not\subset B$

a کوچکتر از ویا مساوی به b نیست: $a \nleq b$

e کوچکتر از f نیست: $e \nless f$

اگر a پس b واگر b پس a: $a \Leftrightarrow b$

c مساوی نیست به b: $c \neq b$

C انطباق پذیر به D نیست: $C \ncong D$

مسافه بسته از a تا b: $[a, b]$

مسافه نیمه باز وبسته: $]a, b]$

ستی که عنصر آن ست خالی است: $\{\phi\}$

ست اعداد طبیعی: $\mathbb{N}$، ست تام: $\mathbb{Z}$

ست اعداد غیر نسبتی $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$ یا حقیقی: $\mathbb{R}$

ست مضرب های a: $a\mathbb{N}$

ست قاسم های b: $\mathbb{D}_b$

برای بعضی y های ست B: $\exists y \in B$

A تقاطع B: $A \cap B$

قطعه خط CD: $\overline{CD}$

خط AB: .... $\overleftrightarrow{AB}$

اصطلاحات ریاضی

English	دری
Abscissa	فصله
Algebra of Sets	الجبر ستها
Application of Sets	تطبیق ستها
Associative Property	خاصیت تجمعی
Associativity	انجمنیت، شرکت پذیری
Binary Operation	عملیه دوگانه
Cartesian Product	حاصلضرب دیکارتی
Common Divisor	قاسم مشترک
Common Multiple	مضرب مشترک
Commutative	تبدیلی (یا تبادلی)
Commutativity ...	تبدیلیت
Complement	مکمله
Congruent	انطباق پذیر
Coordinates	مختصات
Disjoint sets ...	ستهای غیرمتقاطع
Distributive	توزیعی
Distributivity ..	خاصیت توزیعی
Divisor	قاسم
Element	عنصر
Greatest Common -Divisor (G.C.D.)	بزرگترین قاسم مشترک
Half Closed Interval	فاصله نیم بسته
-opened Interval	فاصله نیم باز
Identity Element	عنصر عینیت (یا عنصر بی تأثیر)

English	دری
Integers	اعداد تام
Intersection	تقاطع
Interval	مسافه
Inverse Elements ...	عناصر تضاد
Irrational Number	عدد غیرنسبتی
Least Common -Multiple (L.C.M.)	کوچکترین مضرب مشترک
Natural Number ...	عدد طبیعی
Prime Number ...	عدد اولیه
Properties of Int. ..	خواص تقاطع
-of Union ...	خواص اتحاد
Rational Number ..	عدد نسبتی
Real Number ...	عدد حقیقی
Set ..	ست (مجموعه، دسته)
Set of Multiples ..	ست مضربها
Set of Divisors ..	ست قاسمها
Set of Sets	ست ستها
Set - Empty (Empty Set)	ست خالی
Subset ..	ست فرعی (یا ست جزئی)
The Complement of Set	مکمله یک ست
Union	اتحاد
Union of Sets ..	اتحاد ستها
Universal Set ...	ست کلی
Venn-Diagram	دیاگرام ون

بعضی آثار دیگر نویسنده:

- سلسلهٔ ریاضیات معاصر: خودآموز ریاضی
در چهار قسمت: روابط دوگانه‌ای، عملیات دوگانه‌ای
گروه‌ها، وساحه‌ها

اثر مذکور حایز جایزهٔ مطبوعاتی اولین شاگرد نظام مترقی جمهوری گردیده است.
در مرکز فزیک نظری بین‌المللی، تریست، ایتالیا، در می، 1973 بطبع رسیده.

- سلسلهٔ ریاضیات معاصر: مبادی هندسهٔ معاصر
وانتقادات بر سیستم اقلیدسی، آمادهٔ چاپ است.

- سلسلهٔ ریاضیات معاصر، مبادی هندسهٔ عالی
کتاب درسی صنف سوم موسسهٔ تعلیم و تربیه سابق، طبع شعبهٔ نشرات موسسهٔ تعلیم و تربیه.

- ریاضیات معاصر: هندسهٔ تحویلی در مستوی اقلیدسی
آمادهٔ طبع است. ترجمه شده.

- ریاضیات معاصر: روابط و توابع. برای اولین بار در اوپان،
فرانسه نگاشته شد، آماده طبع است.

- ریاضیات معاصر: سِت‌ها و استعمال آنها
توسط: ایتیان ژیل و محمد امان نادی
طبع دستگاه نشراتی لیسهٔ عالی استقلال
قوس، ۱۳۵۴