سلسلهٔ ریاضیات معاصر

(۴)

جلد اوّل

هندسهٔ تحویلی

درستوی اقلیدسی

نگارش : پوهنمل محمّد امان نادری

Italy ایتالیا ، تریئیست Trieste

اکتوبر، October ، 1974

میزان، ۱۳۵۳

شناسنامه

به سلسلهٔ ریاضیات معاصر

(٤)

جلد اول، بخش نخست

هندسهٔ تحویله در مستوی اقلیدسی

نگارش پوهنمل محمد امان نادری

تریست ایتالیا Trieste, Italy

اکتوبر 1974 مسیحی

میزان ١٣٥٣ خورشیدی

نشر الکتریکی: بنیاد شاهمامه

www.shahmama.com

جولای ٢٠١٦، هالند

حق چاپ محفوظ است.

قوت افرنگ از علم و فن است
از همین آتش چراغش روشن است
اقبال

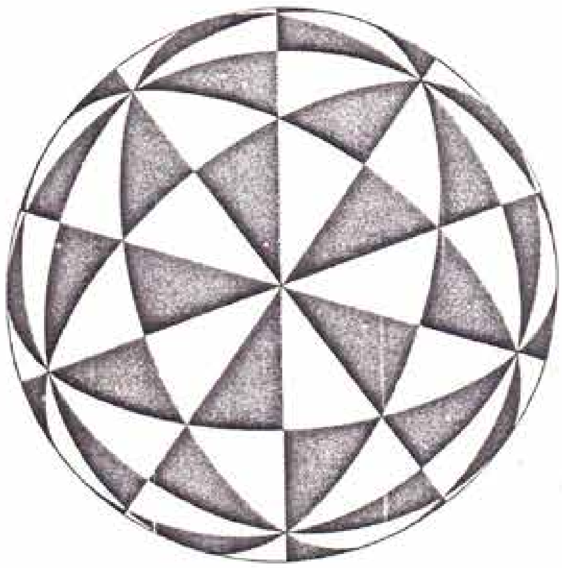
افغانستان زمانی در ساینس و ریاضیات استادی مانند
علامهٔ البیرونی بوجود آورده بود امید است که در اثر جد و جهد
فرزندان آن، این شمع فروزان دوباره روشن گردد و افغانستان
دوباره مقام سابق خویش را در علوم ساینس و ریاضیات
حاصل نماید

عبدالسلام

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

به سلسلهٔ ریاضیات معاصر

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com



" Mathematics is an art because it creates forms and patterns of pure thought that exhibit the noblest achievement of the human mind. It has become one of the great humanities because it is a method of expressing, explaining and communicating men's total behavior. It still reigns as queen of the sciences in its clear, rigorous, logical structure, and in doing so serves as an ideal and goal for the perfection of other sciences, as researchers in those fields seek to discover the laws of physical, biological and social phenomena of our universe. "

Howard F. Fehr

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

" Mathematics possesses not only truth, but supreme beauty – a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature . . . sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. "

BERTRAND RUSSELL (1872-1970)

" Oriental mathematics may be an interesting curiosity, but Greek mathematics is the real thing . . . So Greek mathematics is 'permanent', more permanent even than Greek literature. Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not. "

G. H. Hardy (1877 – 1947)

" Most people have some appreciation of mathematics, just as most people can enjoy a pleasant tune, and there are probably more people really interested in mathematics than in music. . . . A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas. . . . Beauty is the first test: there is permanent place in the world for ugly mathematics. "

G. H. Hardy.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

دیدگاه ناشر

پایان زندگانی هر کس به مرگ اوست
جز فرد حق که مرگ وی آغاز دفتر است

استاد نادری ریاضیات را «مادر علوم» میخواند، پرداخت و برخورد او با این علم نیز ژرفای تفکرش را در این ادعا ثابت می کند. شاید این توضیح برای یک دانشمند علوم اجتماعی بی مفهوم جلوه کند ولی ریاضیات بستریست که هر علم به گونه یی در آن آرمیده است، به عباره دیگر، بدون دانش نسبی ریاضی نمیتوان به هیچ علمی پرداخت، اساس ریاضیات را اعداد تشکیل میدهد و جای پای عدد در همه علوم ساینس و اجتماعیات ملموس و مشهود است.

استاد نادری دههء هفتاد قرن بیست را عصر انقلاب تکنالوژی میخواند و بازتابش را در همه علوم گواه است و با باورمندی تمام به تأثیر گذاری پیشرفت ریاضیات در ارتقای دیگر علوم تأکید میدارد و با این دیدگاه با نیرو و عشق به مسلکش نستوهانه میپردازد و ما تیراژهء تفکر و تجلی اندیشه اش را امروز با گذشت چهار دهه در آثارش مشاهده می کنیم.

افغانستان کشوری پر از استعداد هاست که به گونه های مختلف تبارز یافته اند، و زهی آنانی که نام شان را ثبت صفحات درخشان نموده اند. ما بزرگان متبحری داشته ایم که از دانش فراگیر و اندوخته های شایانی برخودار بوده اند، ولی چون داشته های شان صرف در محدودهء تماس ها و محیط اکادمیک خود شان پخش شده است و آن گونه که لازم بوده، ثبت و کتاب نشده است، دردمندانه میتوان گفت که با گذشت زمان، به خاموشی و فراموشی سپرده می شوند. استاد نادری آن ستارهء سفر کرده‌یی میباشد که امروز با گذشت بیش از ۲۵ سال از جاودانه شدنش، یکبار دیگر در دنیای ریاضیات می درخشد و آثار گرانسنگش پیشکش میشود. او به اهمیت نگارش و نیاز آن در افغانستان عمیقن پی برده بود و بیشترین توجه و تمرکزش را به نبشتن آثارش وقف کرد.

از این قلم توانا آثار بیشتری در International Atomic Energy Agency (IAEA), Trieste, Italy

به زبان فارسی وجود خواهد داشت که امیدوارم با دریافت و دسترسی به آن خدمت دانش پژوهان ریاضیات در کشور و همزبانان گرامی قرار دهیم.

به آرزوی فردای درخشان کشور

منیژه نادری

مسؤول انتشارات شاهمامه

۹ جولای ۲۰۱۶، هالند

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پیشگفتار

«زندگی جلوهٔ ناموس تحول باشد — هر کجا نیست تحول عدمش نام کنم»

عصریکه ما دران بسر می بریم عصر تحول و انقلاب ساینس و تکنالوجی است. این تحولات و انقلابات چه زادهٔ فکر مجادله برای تکافوی ضروریات حیات عالی تر بوده، چه نتیجهٔ رقابت های علمی دول و یا چه مولدهٔ تراوش افکار دانشمندان برای رفع عطش اقناع خاطر در پیمودن راه اسرار طبیعت است، خلاصه از هر منبع و یا منشأ ای که چشمه میگیرد در تمام شقوق مختلفهٔ علوم تبارز دارد. یا بالفاظ دیگر در دامن زدن این انقلاب بصورت عام تمام علوم ساینس و حتی اجتماعیات Social Studies سهیم بوده ولی بصورت خاص علم ریاضیات در توسعه و انکشاف این تحول سهم بارزی دارد. چه ریاضیات از یکطرف در انکشاف علوم دیگر داخل خدمت بوده و حتی در پیشرفت آنها بحیث یک زبان مشترک اجرای وظیفه نموده، و از جانب دیگر در توسعه و پیشرفت جریانات داخلی خود علم ریاضی مجادلات پی در پی را دنبال میکند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

علاوه از اینکه هندسهٔ سنتی Traditional Geometry نمی‌تواند ایجابات تکنولوژی این عصر را تکافو و ملاقات کند، علم هندسه را نیز از وسط جریان عمومی ریاضیات کشیده و برده و آنرا در گوشهٔ خلوت قرار داده است. ضمناً بیم آن میرود که اگر شاگرد (محصل) در طی مدت یکدو سال با ورزش و تمرین در این هندسهٔ عزلت نشینی عادت گرفت وی نیز عزلت پسند گشته و از فیض جریانات عمومی ریاضیات کمتر مستفید خواهد شد. بمنظور اینکه علم هندسه بیشتر در گوشهٔ عزلت نماند چه: «آب جمع میگردد از آن سود بسیار سبزه» عده از دانشمندان ریاضی در صدد آن شدند تا این علم را نیز بنابر طرق مختلف بررسی آن در مسیر جریان قرار دهند. درنتیجه طرق متعدد بررسی هندسه در میان آمد. یکی از جمله این کتاب مطالعهٔ طریقه تحویلی Transformational هندسه را متکی بمفکوره‌های توابع یک بیک one-to-one functions که ست sets نقاط مستوی را بر مستوی onto مپ maps میکند، بخوانندگان تقدیم می‌نماید. علاوه برآنکه طریقهٔ تحویلی بررسی هندسه، هندسه را در موج جریان ریاضیات افگنده و آنرا با توسعه و انکشاف معلومات شاگرد در رشته‌های مختلف ریاضی: حساب، الجبر، و مشتقات موازیاً در حرکت می اندازد؛ تطبیق مهمی را نیز در زمینهٔ فهمیدن عمیق مفکوره‌ها و مفاهیم انطباق پذیری Congruency و تشابهات Similarities دارا میباشد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

با وجود این انتقاد و انتقادات دیگری که بر سیستم هندسه عنعنوی اقلیدسی Traditionel Euclidean Geomet. وارد شده است، باز هم اعتراف باید کرد، که هندسه اقلیدسی هنوز هم حاوی مزایای زیاد است که باید برای شاگردان مکاتب تقدیم گردد، تا باشد آن ایشان بتوانند که از طرز استدلال آن مستفید شده و از اجرای مشق و تمرین آن مشعوف گشته و ضمناً طرز تفکر انتقادی در اذهان شان تنمیه و پرورش یابد. روی این ملحوظ اندیشه علمی را که در کشیدن اقلیدس از هندسه آواز:

«Euclid must go.»! مجادله دارند، همراهی نمیتوان کرد. چه هنوز هم این باغ کهن بیخ و ریشه، صدها شاخ و برگ فراوانی داشته، گلهای آن دیدنی و ثمر آن چیدنی است.

بلی:

"Euclid's work will live long after all the text-books of the present day are superseded and forgotten. It is one of the noblest monuments of antiquity."[1]

Sir Thomas L. Heath (1861–1940)

---

1. Coxeter, F. R. S.: Introduction to Geometry, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969, p. 3.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ازینکه برخورد تحویلی Transformational approach هندسه حایز مزیت بیشتر بوده و تا اندازهٔ میتواند که معیار ایجابات قرن بیست را ملاقات کند. پس لازم است تا محل برای تدریس این مضمون در سیستم نصاب تعلیمی جستجو گردد. برای اجرای این امر بهتر خواهد بود تا از مواد مربوط کورس یکسالهٔ هندسهٔ عنعنوی باندازهٔ دو ثلث کاسته شده و بجای آن مواد متن این کتاب تدریس شود. تدریس کامل مواد این کتاب لااقل پنجاه ساعت درسی را ایجاب میکند.

مواد مرتبهٔ این کتاب طوری تنظیم یافته که افکار شاگرد (محصل) را بعد از یک سیر و گردش کوتاهی در یک کورس مکمل معیاری هندسهٔ standard دوباره آنرا بنابر ارائهٔ جبری هندسه در جریان عمومی ریاضیات قرار میدهد.

بکسانیکه میخواهند از مطالعه این کتاب مستفید شوند، ضرورت است تا مفکوره های مفاهیم عمدهٔ هندسهٔ اقلیدسی آشنا بوده، و باندازه یکساله اندوختهٔ علمی در رشتهٔ الجبره داشته، و علاوه بر آن قسمتاً از مبادی نظریهٔ ابتدائی ست Elementary Set Theory آگاه — و معلومات کافی را در هندسهٔ تحلیلی Analytic Geometry دارا باشند. پس باین اساس با در نظر داشت شیوهٔ علمی فعلی متعارف، این کتاب بحیث یک کتاب درسی در صنوف اخیر

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

از لیسه‌های نسبتاً خوب افغانستان یافته (فرضاً لیسهٔ استقلال)، بصنوف دوم و سوم پوهنځی علوم، موسسات و اکادمی تربیهٔ معلم بصورت موثر استعمال شده میتواند. ضمناً مواد این کتاب بحیث یک کورس قبل از تدریس مشتقات مورد استفاده واقع شده میتواند. محل دیگر تطبیق و تدریس موثر این مواد در بلند بردن سویهٔ معلمان ریاضی داخل خدمت که در سمینارهای دوره‌ای پوهنځی ساینس در ریاضی (که بسویه مکاتب ثانوی و لیسه‌ها دایر شده) سهم میگیرند، جستجو شده میتواند.

نیمهٔ اول این کتاب مفکورهٔ مفاهیم توابع را تعمیم داده و ابزار از نگاه هندسه که یک شیوهٔ تازه است مورد بررسی قرار داده است. تار و پود فصل اول این کتاب با در نظرداشت حکم ترتیب و تسلسل طوری بهم تنیده شده که انقطاع و بریدگی در هر مبحث آن موجب عدم درک مفاهیم مباحث بعدی شده میتواند. دانشکه بمطالعهٔ این کتاب علاقه میگیرند؛ از اول باید خویش را برای مطالعهٔ کلی هر فصل اول آن با در نظرداشت تعقیب امر تسلسل آماده سازند. چه در صورت عدم بررسی کامل هر فصل، خواننده از درک

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

واقعیت با توسعه دانش فنی در پی مفاهیم ایزومتریها و یا هم‌طولگی که Isometries بی نصیب خواهند ماند.

در فصل چهارم خلاصه بررسی دو دستهٔ مهم دیگر تحولات Transformations که اولی بنام تجانس و یا سیمیلیتود Similitudes و دستهٔ دومی آن بنام افینیتی Affinities معروف اند، تقدیم میشود. امید است که مطالعهٔ این فصل نیز بنوبت خویش بتواند مایهٔ علاقمندی و مسرت خواننده را در زمینهٔ داشتن مفاهیم تشابهات Similarities فراهم نماید. ولی حذف کردن این فصل در توحید دانش مندرج فصل اول کتاب به کدام شکستگی ~~وقفه‌ای~~ رخنه‌ای وارد نمیکند.

برای جلوگیری از ایجاد مغالطه لفظی در نوشتن دری این اثر سعی بعمل آمده تا اصطلاحات علمی در آن بشکل اصلی شان حفظ شود. برخلاف روشی که در اکثر کتب هندسه معمول است، درین کتاب شیوهٔ بکار رفته که اکثراً در اول حقایق را با اثبات رسانیده و سپس نتیجهٔ آن در عبارات بحیث قضیه بیان گردیده است.

ترتیب تمرینات مربوط هر مبحث طوری است که تمرینات از سوال نسبتاً ساده و آسان بطرف مسایل نسبتاً پیچیده بشکل درجه بندی شده است. سوالاتی که به علامهٔ ستاره نشانی شده اند مطلبی را که موضوعاً مربوط هیچ مسایل داده را برای آغاز مطالعات مفاهیم بعدی هموار میسازد، ارائه میکنند. بهتر خواهد بود که موضوعات مسایل ستاره دار در درس صنف مورد مباحثه قرار داده شود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

در اخیر وجیبه‌ام میدانم تا از تمام کارکنان محترم مرکز بین‌المللی فزیک نظری
"I.C.T.P." که در تهیهٔ فرصت نگاشتن این کتاب بمن منت گذاشته‌اند بصورت عام،

و از عزتمند پروفیسور عبدالسلام — Professor Abdus Salam,
رئیس این مؤسسه علمی، — Director General ;

و عزتمند پروفیسور پ. بودینی — Professor P. Budini,
نایب رئیس (معاون) آن، — Deputy Director; of I.C.T.P.

که ذوات محترم ایشان چه در تشکل و تأسیس این مؤسسه علمی عام المنفعه،
و چه در توسعه و انکشاف این دانشکدهٔ پرفیض خدمات قابل قدری را انجام
داده اند، بصورت خاص اظهار قدردانی نمایم. و همچنان

از عزتمند دکتور الف. م. همنده — Dr. A. M. Hamende,
آمر علمی و اداری این مؤسسه — Administrative and Scientific, Information Officer;
و همین قسم از منسوبین محترم کتابخانه — And the Library Staff;
و از اعضای محترم شعبه طباعتی — And also the Printing Office Staff
مرکز بین‌المللی فزیک نظری، که چه در تهیه مواد و کتب، و چه در زیراکس
و کاپی کردن نسخ نوشته‌ایم از هیچگونه مساعدت خود داری نفرموده‌اند
ابراز امتنان میکنم.

پوهنمل محمد امان نادری

October, 1974 اکتوبر،
Trieste, Italy

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

صورت استعمال علائم

ست set	$\{\quad\}$
ست set A	$A = \{\quad\}$
علامه ست جزئی (فرعی) subset	$\subset$
A یک ست جزئی B است یا A یک subset B است	$A \subset B$
C یک ست جزئی (فرعی) B نیست	$C \not\subset B$
علامهٔ عضویت و یا شمول	$\in$
a یک عنصر set A است و یا a شامل set A است	$a \in A$
c یک عنصر set B نیست	$c \notin B$
علامه اتحاد دو و یا چند sets (Union)	$\cup$
A اتحاد B و یا A union B	$A \cup B$
علامه تقاطع دو و یا چند set (intersection)	$\cap$
B تقاطع C و یا B intersection C	$B \cap C$
علامه توصیف کمیت مقداری. (برای تمام x ها)	$\forall x$
علامهٔ توصیف موجودیت. (یک x موجود است)	$\exists x$
علامهٔ افادهٔ شرطیهٔ طوریکه	":" و یا "|"
اگر x پس y. (و یا وجود شرط در x مستوجب وجود آن شرط در y)	$x \Rightarrow y$
اگر s پس t و همچنان اگر t پس s	$t \Leftrightarrow s$
علامهٔ عمودیت Perpendicularity	$\perp$
عدم عمودیت	$\not\perp$
علامهٔ متوازیت Parallelism	$\parallel$
عدم متوازیت	$\nparallel$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

صورت استعمال علایم

علامهٔ مساوات بین کمیات عددی .... $=$

عدم مساوات .... $\neq$

علامهٔ انطباق پذیری بین کمیات هندسی .... $\cong$

عدم انطباق پذیری .... $\ncong$

علامهٔ تشابهات similarity .... $\sim$

عدم تشابهات .... $\nsim$

علامهٔ افادهٔ خط AB .... $\overleftrightarrow{AB}$

افادهٔ شعاع AB .... $\overrightarrow{AB}$

افادهٔ مستقیم (قطعه) موجه (وکتور) AB .... $\overrightarrow{AB}$

افادهٔ مستقیم (قطعه) موجه BA .... $\overrightarrow{BA}$

افادهٔ طول بین دو نقطه A و B .... AB

افادهٔ قطعه خط AB .... $\overline{AB}$

علامهٔ افادهٔ روابط متعادل بین مستقیم‌های موجه .... $\doteq$

مثلاً: وکتور $\overrightarrow{AB}$ متعادل وکتور $\overrightarrow{CD}$ است: .... $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$

عدم تعادل مستقیم‌های موجه (وکتورها) .... $\not\doteq$

جورهٔ مرتب a و b ordered pairs .... (a, b)

سه‌گانهٔ مرتب triplets .... (A, B, C)

چهارگانهٔ مرتب .... (A, B, C, D)

دومین یک تابع Domain .... Dmn

رینج یک تابع Range .... Rng

ترکیب دو تابع G و F برای x .... GF(x)

انعکاس حول خط t .... M_t

انعکاس حول خط s .... M_s

ترکیب دو انعکاس خطی .... $M_t M_s$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

صورت استعمال علائم

انتقال کد باندازه $\overrightarrow{AB}$ .... S_{AB}

نیم دور H حول نقطه A .... H_A

ترکیب نیم دور H با انتقال کد .... $S_{AB} H_A$

دوران حول نقطهٔ B باندازه زاویه θ .... $R_{B,\theta}$

ترکیب دو دوران .... $R_{A,\theta} R_{B,\varphi}$

ترکیب یک انعکاس خطی M_t و یک دوران $R_{A,\theta}$ .... $M_t R_{A,\theta}$

انعکاس گلیدی (گلایدی) یا لغزانی .... $G = S_{AB} M_D$

ارائه سکیل فکتور Scale Factor .... r

دایلیشن D از نقطهٔ A به اندازه سکیل فکتور r .... $D_{A,r}$

ترکیب دو دایلیشن Dilations نقطهٔ (P) .... $D_{A,r} D_{B,d}(P)$

ترکیب یک دوران با یک دایلیشن .... $R_{A,\theta} D_{B,r}(P)$

ترکیب یک نیم دور با یک دایلیشن .... $H_G D_{G,1/2}$

ترکیب سه جنبه .... $M_c S_{AB} D_{B,r}$

ضریب افینیتی Affinity .... $\frac{AP}{AB} = k$

افینیتی پرسپکتیف Prespective Af. .... $L(P) = P'$

زاویه ABC .... $\angle ABC$

اندازهٔ وسعت زاویه ABC .... $m\angle ABC$

زاویهٔ موجه ABC .... $\measuredangle ABC$

جهت مثبت دوران حول نقطهٔ A .... $A \circlearrowleft$

جهت منفی دوران حول نقطهٔ A .... $A \circlearrowright$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

محتـــــویات

صفحات

فصل اول؛ انعکاسات خطی:

فصل دوم؛ ترکیب تحویلات:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

محتـــویـات

صفحات

فصل سوم: دورانها و انعکاسات گلیدی (گلاید):

فصل چهارم: سیمیلیتود ها و یا تجانس:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

«... a sea-change into
something rich and strange.»
W. Shakespeare (1564-1616)
(The Tempest, Act I, Scene 2)

فصل اوّل
انعکاسات خطی
Line Reflections

1-1. مقدمه Introduction

گرچه بررسی و مطالعه هندسه به همان شیوه و اسلوب که زیاده از دو هزار سال قبل (در حوالی 300 قبل المیلاد مسیح[۴]) اقلیدس Euclid ازآن پی ریزی و انجام نموده بود معمول است، چنانچه هندسه ای که با آن آشنا هستید کم و بیش شکل و فارم همان هندسه عنعنوی اقلیدسی Traditional Euclidean را دارد، ولی باید دانست که یگانه طریقهٔ بررسی علم هندسه همان طریقهٔ اقلیدسی نبوده بلکه طرق زیاد موجود شده میتواند تا باساس آن ها مفکوره ها و مفاهیم هندسی بررسی گردد.

در نوشتن این کتاب شیوه بکار برده میشود که از طریقهٔ یونانیهای قدیم ancient Greeks متفاوت بوده - هندسهٔ مربوط این نوع بررسی را بنام: هندسه حرکی Motion Geometry ویا هندسهٔ تحویلی Transformational Geometry یاد میکنند.

مفکوره مطابقت ها بین نقاط مشخص یک مستوی بشما نو نبوده و شما میدانید که افاده: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

توجه ما را به مطابقت که نقطه D را به A،
نقطه E را به B و
نقطه F را به C ارتباط می بخشد، عطف مینماید.

با استفاده از روش تحویلی Transformational Approach توجه خویش را

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

فصل اول

انعکاسات خطی

Line Reflections

1-1. مقدمه Introduction

گرچه بررسی و مطالعه هندسه به همان شیوه و اسلوب که زیاده از دو هزار سال قبل (در حوالی 300 قبل المیلاد مسیح) اقلیدس Euclid از آن پیروی و استفاده نموده بود معمول است، چنانچه هندسه‌ای که با آن آشنا هستید کم و بیش شکل و فارم همان هندسهٔ عنعنوی اقلیدسی Traditional Euclidean را دارد، ولی باید دانست که یگانه طریقهٔ بررسی علم هندسه همان طریقهٔ اقلیدسی نبوده بلکه طرق زیاد موجود شده میتواند تا با شناسائی آنها مفکوره‌ها و مفاهیم هندسی بررسی گردد.

در نوشتن این کتاب شیوه بکار برده میشود که از طریقهٔ یونانیهای قدیم ancient Greeks متفاوت بوده - هندسهٔ مربوط این نوع بررسی را بنام: هندسهٔ حرکی Motion Geometry و یا هندسهٔ تحویلی Transformational Geometry یاد میکنند.

مفکورهٔ مطابقت‌ها بین نقاط مشخص یک مستوی بشما نو نبوده و شما میدانید که اگر:

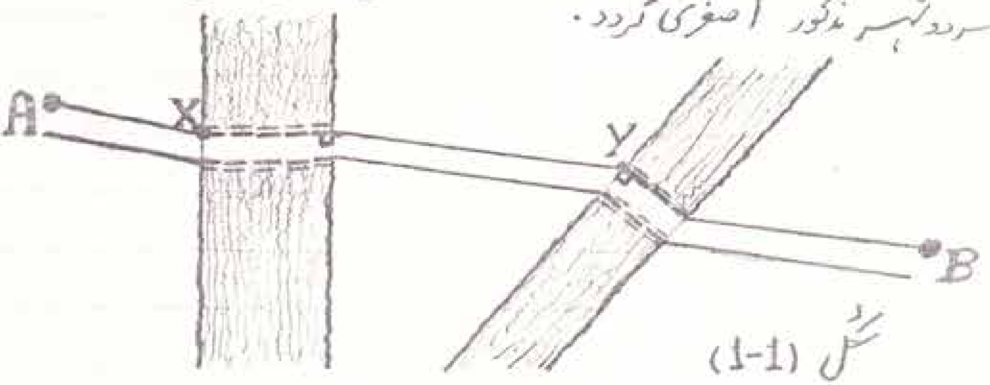
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

توجه‌ها را به مطابقت که نقطه D را به A،
نقطه E را به B،
نقطه F را به C ارتباط می‌بخشد، معطوف نمائید.
استفاده از روش تحویلی Transformational Approach توجه خویش را

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

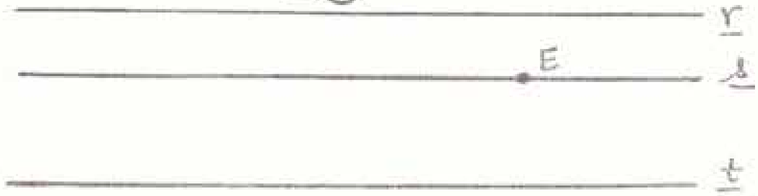
روی چند نوع از مطابقت‌ها که تمام نقاط مستوی را دربرداشته باشد تمرکز خواهیم داد. به پیروی این روش اگرچه سروکار ما با اشیای هندسی از قبیل: نقاط، خطوط، مثلث‌ها، و امثال این‌ها سروکار خواهیم داشت ولی با آنهم طرز تفکر ما بیشتر طبیعت جبری را بخویش اختیار خواهد نمود. فعلاً یکعده مسایل را مطالعه خواهیم کرد که حل آنها با شائش روش و متود هندسهٔ مستوی اقلیدسی مشکل بوده — حالانکه با استفاده از طریق هندسهٔ تحویلی حل آنها ساده و آسان است. اینک دو مسألهٔ همچو مسایل را بطور نمونه ذیلاً بیان میکنیم:

مثال اول: بالفرض دو دریا بین دو شهر A و B طوریکه در شکل (1-1) در ذیل ارائه شده موقعیت دارد. اعمار یک سرک و دو پل بین شهرهای A و B در نظر است. برای اینکه قیمت ساختن پل‌ها اصغری گردد باید که هر دو پل عموداً به سمت کناره‌های دریا اعمار شود. با در نظر داشت این شرط نقاط متغیر X، Y کنار هر دو دریا را تعیین نمائید طوریکه فاصلهٔ سرک بین هر دو شهر مذکور اصغری گردد.



شکل (1-1)

مثال دوم: سه خط موازی r، s و t را با یک نقطهٔ معینهٔ E بالای خط s طبق شکل (1-2) ذیل مد نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ΔEFG را رسم نمائید طوریکه راس F بالای خط r در راس G آن بالای خط t واقع گردد.



شکل (1-2)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

اگرچه یکی از آغاز یک هندسهٔ تحویلی کاملاً جدید را، حتی با اساس قاعده اولیات و متعرفات تازه که از اولیات و متعرفات اقلیدسی متفاوت باشند، انتخاب میتوان داد؛ ولی پسندیده ترست که انکشاف هندسهٔ تحویلی مورد نظر ما با ادامهٔ کار روی سابق (هندسه) صورت گیرد. بنابران با در نظر داشت حقایق هندسهٔ اقلیدسی و با شایان معلومات حاصل شده از آن - ما آزادانه به بیان تعریفات و اثبات قضایای ابتدائی هندسهٔ تحویلی Transformational Geometry می پردازیم.

قبل از آنکه بمطالعه واقعی هندسهٔ تحویلی آغاز نمائیم بهتر است که بتکرار قسمتی از علامه گذاری سِت Set Notations که برای مطالعات آینده ممد و مثمر واقع میشود اقدام نمائیم.

هرگاه مطلب ما افاده چهار نقطهٔ مشخص A ، B ، C و D بصورت یکدسته باشد، درینصورت ازا توسط $\mathcal{A}$ set طبق ذیل نمایش میدهیم:

$$\mathcal{A} = \{A, B, C, D\} .$$

و اگر منظور از افادهٔ یکی ازین نقاط جایگاه فرضا A نظر به $\mathcal{A}$ set باشد، درینصورت ما مینویسیم: $A \in \mathcal{A}$. این افاده میکند که نقطهٔ A یک عنصر Element ست $\mathcal{A}$ است. از نگر بجز از چهار نقطهٔ فوق کدام نقطهٔ دیگری مانند E عنصر set $\mathcal{A}$ نیست این مطلب چنین افاده میکنیم: $E \notin \mathcal{A}$. اگر کدام نقطهٔ A بالای خط $\underline{s}$ واقع باشد، درینصورت ما مینویسیم: $A \in \underline{s}$. بهمین قسم اگر دو خط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع کنند درینصورت ما ازا توسط $\underline{s} \cap \underline{t} = \{Q\}$ افاده میکنیم. اگر نقطهٔ R یا روی خط $\underline{s}$ و یا روی خط $\underline{t}$ واقع گردد، درینحالت ما مینویسیم:

$$\{R\} = \underline{s} \cup \underline{t} .$$

این افاده میکند که نقطهٔ R در اتحاد Union خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ واقع است. هرگاه مطلب ما افاده ناصف عمودی قطعه خط $\overline{AB}$ باشد، درینصورت ما ازا توسط:

$\underline{Y} = \{P : PA = PB\}$ افاده مینمائیم.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

واین افاده ارائه میکند که ناصف عمودی قطعه خط $\overline{AB}$ عبارت از خط ℓ ویا ست (Set) نقاط است که از هردو انجام A و B آن متساوی الفاصله اند.

با یک مثال ساده تکمیل خط مستقیم $\overleftrightarrow{AB}$ که از نقاط $A(2,-1)$ و $B(3,-4)$ عبور میکند توسط معادله:

$$3x + y - 5 = 0$$

ارائه شده میتواند.

با استفاده از استعمال علامه گذاری ست Set Builder Notation خط مذکور را توسط افاده:

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(x,y) \mid 3x+y-5=0\}$$

نشان میدهیم. پس درینصورت اگر کدام نقطه $P(p,q)$ شامل $\overleftrightarrow{AB}$ باشد، پس کمیات وضعیه نقطه P معادله خط مذکور را تحقیق نموده — وبالعکس اگر کمیات وضعیه یا مختصات نقطه P معادله خط تحقیق کند پس درینصورت نقطه P عنصر خط $\overleftrightarrow{AB}$ است.

درصورتیکه $P(p,q) \in \overleftrightarrow{AB}$ باشد، پس بالضرور

$$3p + q - 5 = 0$$

میشود.

واگر $R(-4,17)$ باشد، درینصورت کمیات وضعیه نقطه R معادله خط را تحقیق نموده یعنی:

$$3(-4) + 17 - 5 = 0$$

گردیده؛ که درنهایت

$$R(-4,17) \in \overleftrightarrow{AB}$$

نتیجه میشود.

تمرینات: Problem Set. 1-1

1. هریک از ستهای ذیل را توضیح کنید:

(a). $\{(x,y) : y=0\}$

(b). $\{(x,y) : x \geq 0 \text{ و } y \leq 0\}$

(c). $\{(x,y) : x \geq 2 \text{ و } y \leq 3\}$

(d). $\{(x,y) : y=x\}$.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

2. با استفاده از استعمال افادهٔ علامه‌گذاری سِت set builder notation هریک از سِت‌های ذیل را ارائه کنید:

(a). محور X را،

(b). ناحیهٔ دوم The Second Quadrant را،

(c). خط مستقیمی که از نقطهٔ $(-2, 3)$ عبور نموده و عمود بر محور X باشد،

(d). خط مستقیمی که از نقطهٔ $(1, 2)$ گذشته و موازی به محور X باشد.

3. درصورتی که $\underline{r}=\{(x,y): x=2\}$ و $\underline{t}=\{(x,y): y=3\}$ باشد، در آن‌صورت $\underline{r}\cap\underline{t}$ را توضیح نمایید.

4. هرگاه $\underline{s}=\{(x,y): 3y=2x-7\}$ بوده کدام یک از نقاط: $A(0,4)$ ، $B(2,-1)$ ، $C(-3,-4)$ در خط $\underline{s}$ واقع است؟

5. k را دریافت کنید درصورتی که $P(3,k)$ یک نقطهٔ خط $\underline{t}$ در حالیکه $\underline{t}=\{(x,y): 2x+3y-1=0\}$ سِت، باشد.

6. قیمت k را دریافت کنید درصورتی که: $Q(-1,-2)\in\{(x,y): 2x-ky=4\}$ باشد.

7. معادلهٔ هریک از خطوط مستقیم ذیل را بنویسید:

(a). خط مستقیم که از نقطهٔ $A(2,5)$ گذشته و دارای میل 3 باشد.

(b). خط مستقیمی که از نقطهٔ $C(3,0)$ گذشته و موازی به خط $3x+4y=7$ باشد.

8. معادلهٔ هریک از خطوط مستقیم ذیل را بنویسید:

(a). خط مستقیمی که از نقاط $A(-2,4)$ و $B(1,-1)$ میگذرد.

(b). خط مستقیمی که از نقطهٔ $C(-1,-3)$ گذشته و به خط $\underline{t}$ ، $\underline{t}=\{(x,y): 3x+y=8\}$ عمود باشد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

9. اگر $A(2,-1)$ و $B(6,5)$ مفروض باشد معادله خط ℓ را بدست آرید درصورتیکه $\ell = \{P : \overline{PA} = \overline{PB}\}$ باشد.

10. هریک از ست‌های (sets) ذیل را توضیح نمائید:

(a). $\{(x,y) : (x-2)^2+(y-1)^2 = 4\}$ ؛

(b). $\{(x,y) : x^2+y^2-4y-9=0\}$.

11. اگر $C(-1,3)$ و $K(-4,4)$ باشد، آیا $K \in \{P : PC^{(1)} = 3\}$ شده میتواند؟

12. اگر $A(-3,2)$ و $B(5,6)$ مفروض باشند باستفاده از ذیل علامه‌گذاری شده دایره‌ای را توضیح نمائید که قطر آن $\overline{AB}$ باشد.

13. اگر $P(4,3)$ و $\mathscr{C} = \{(x,y) : x^2-2x+y^2-4y-5=0\}$ بوده معادله خط ℓ را بنویسید درصورتیکه $\mathscr{C} \cap \ell = \{T\}$ باشد.

14. معادله هریک از خطوط مستقیم ذیل را بنویسید:

(a). خط مستقیمیکه از نقطه $(0,5)$ گذشته موازی به $t = \{(x,y) : 2y-x-3=0\}$ باشد.

(b). خط مستقیمیکه از نقطه $(-3,\frac{1}{2})$ عبور نموده وعمود بخط t فوق باشد.

15. اگر $t = \{(x,y) : 2x-y=3\}$ و $\ell = \{(x,y) : x+2y=0\}$ باشد

(a). $\ell \cap t$ را بدست آرید.

(b). راجع به وسعت زاویه بین ℓ و t چه فکر میکنید؟

---

1. درصورتیکه مطلب باافاده قطعه خط PC باشد از اشکال: $\overline{PC}$ واگر خط PC باشد از اشکال: $\overleftrightarrow{PC}$ ، واگر فاصله بین نقاط P و C باشد از اشکال: PC افاده نمائیم.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

×

"Modern Algebra does not seem quite so terrifying when expressed in these geometrical terms!"
G. de B. Robinson (1909–).

1-2. توابع [1] Functions

اکنون ما مطالعهٔ هندسهٔ تحویلی Transformational را با اساس معرفی مفکورهٔ تابع Function که حقیقتاً یکی از مفاهیم و مفکوره‌های عمده و مهم ریاضیات معاصر بوده و بالخاصه در مطالعهٔ هندسهٔ تحویلی Transformational Geometry رول بارزی دارد شروع میکنیم. شاید شما با مفکورهٔ توابع در هندسه و حتی در حیات روزمره بآن سابقه داشته باشید ولی بآن شکلی که تابع درینجا معرفی میشود آشنائی نخواهید داشت.

اصل موضوعهٔ اندازه گیری زاویه = The angle measurement Postulate

یک مثال برجستهٔ تابع هندسی شده میتواند. بموجب این اصل موضوع Postulate هر زاویه در یک مستوی محض بیک عدد حقیقی Real اجماع و تقابل کرده میتواند؛ که این عدد بنام اندازهٔ زاویه یاد شده و بین صفر (0) و یکصد و هشتاد (180) واقع میشود. باساس این فرضیه ما تابع اندازه گیری زاویه را، که یک set تمام زوایا را با یک set اعداد حقیقی Reals که بین صفر (0) و (180) واقع اند مطابقت میدهد، تأسیس میکنیم. اگر توجه نمائید دیده میشود که باساس تابع اندازه گیری زاویه بهر یک از زوایا در یک مستوی معینه تنها و محض تنها بیک عدد حقیقی اجماع و مطابقت کرده میتواند و بس.

برای توضیح غیر ریاضی مفهوم تابع ذیلاً ما به تشریح مفکوره ای که اورا بنام « تابع حرف اول نام » یاد شیوان نمود می پردازیم. ما میدانیم که حرف اول نام هر افغان بالضروره یکی از حروف الفبا است. بعبارهٔ دیگر همین لست کردن نام - حرف اول نام هر افغان را یکی از حروف الفبا تشکیل میدهد. پس درینصورت بین set تمام تبعهٔ دولت جمهوری افغانستان و set تمام حروف الفبا (که از "الف" و یا "A" شروع و به "ی" و یا "Z" ختم میشود) یک رابطه موجود

---

1. در آثار جدیدی که در عربی نگاشته شده تابع را بنام "علاقة دالية" یاد کرده اند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

موجود گردیده . که این رابطه یک تابع (از set تمام افغانها در set حروف الفبا) را ارائه میکند. اکنون ما در موقف قرار داریم که به تعریف تابع ذیلاً بپردازیم :

تعریف : یک تابع Function از یک set A بطرف یک set B عبارت از مطابقت (رابطه) ایست که به هر یک از عناصر set A محض وتنها محض یک عنصر set B را اتباع (ارتباط) می بخشد.

اکثراً یک تابع را توسط یک حرف مانند: f ویا G وندرتاً انرا توسط حروف subscripts دار مانند: f_1 ویا G_1 نمایش میدهند. درتعریف فوق set A را بنام دومین Domain یاد کرده وانرا به Dmn ارائه مینمایند. درمثال تابع اندازه گیری زاویه ، Domain انرا set تمام زوایای یک مستوی تشکیل میدهد. درصورتیکه تابع عموماً را به F ارائه کنیم درینصورت دومین Domain تابع مذکور طبق ذیل ارائه شده میتواند:

Dmn F = { x : ، در حالیکه x یک خزان ثبت } .

نکته مهمی که یک تابع را از یک رابطه متمایز میسازد اینست که به هر یک از عناصر set دومین A فقط وفقط یک عنصر Element ، set B ارتباط میگیرد. وجود این شرط وقیود است که توابع را از انواع دیگر روابط ممتاز میسازد.

موضوع جفت کردن وتقابل که در اصل موضوع اندازه گیری زاویه توضیح شد یک تابع را از set تمام زوایا به set B طوریکه: $B=\{b : 0<b<180\}$ است تعریف میکند، زیرا محض یک عنصر B با یک زاویه تقابل وجفت میکند ولی. از طرف دیگر اگر اصل موضوع اندازه گیری زاویه ابتدا از set B

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

از طرف [illegible] زوایا تعریف شود در اینصورت واضح است که روابط مذکور یکتا بودن را ارائه کرده نمیتوانند. زیرا برای هریک از عدد داده شده فرضاً 90 بی‌شمار زوایا موجود شده میتوانند که بعدد مذکور (90) مطابقت نمایند.

برای بهتر روشن ساختن موضوع مثال ذیل را از نظر میگذرانیم:

بالفرض هریک از محصلان شعبه ریاضی پوهنځی علوم با شناسائی حرف اول نام شان محض و فقط محض یکی از چهار پروفیسور: بولیای Bolyai، گوس Gauss، لوباچوسکی Lobatchewsky، و ریمان Riemann جهت فرا گرفتن هندسه معرفی میشوند. اگر این تعارف با شناسائی حرف اول نام شان طور صورت بگیرد محصلانیکه حرف اول نام شان از A تا به D باشد نزد بولیای Bolyai – و آنانیکه حرف اول نام شان از E الی L است نزد گوس Gauss – و آنانیکه از M الی P است نزد لوباچوسکی Lobatchewsky و بالاخره آن عده محصلان که حرف اول نام شان از O الی Z است نزد ریمان Riemmen مراجعه نمایند.
یا بعبارت دیگر:

A – D → Bolyai

E – L → Gauss

M – P → Lobatchewsky

O – Z → Riemann باشد.

چون در اینصورت هر محصل محض و تنها محض نزد یک پروفیسور مراجعه کرده یعنی به هر محصل محض یک پروفیسور ارتباط دارد؛ هویدا است که رابطه فوق یکتا بودن را از [illegible] محصلان بطرف [illegible] پروفیسوران ارائه میکند. بعبارت دیگر اگر ما این ارتباط را به F ارائه کنیم، در اینصورت F یکتا بودن را از: $A = \{x :$ x یک محصل ریاضی پوهنځی علوم است $\}$ بطرف:
$B = \{Bolyai, Gauss, Lobatchewsky, Riemann\}$ تعریف میکند.
پس پروفیسور مربوط محصلی بنام امین Amin را طبق ذیل معرفی کرده میتوانیم:

F(Amin) = Bolyai

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

و همچنان پروفیسور مربوط فرید Fereed طبق ذیل:
$F(\text{Fereed}) = \text{Gauss}$. نشان داده شده میتواند.

طوریکه در مثال فوق set کمبودن شعبه ریاضی پوهنځی علوم بنام Dmn تابع F یاد گردید بهمین قسم set پروفیسوران مذکور را بنام Range تابع (یا Rng) تابع F یاد مینمایند.

آن عناصر set تابع Range یک تابع که در مطابقت حصه میگیرند بنام تصاویر images (یا تصویر image) و همچنان عناصر مربوط set Dmn آنرا بنام منشأ تصاویر Pre-images (یا منشأ تصویر Pre-image) یاد میکنند. باین اساس در مثال فوق Bolyai تصویر image امین Amin و Amin منشأ تصویر Pre-image، Bolyai را بنابر تابع F تشکیل میدهد.

بصورت عموم اگر f یک تابع از A بطرف B بوده و f یک عنصر y، set B را به یک عنصر مفروض $x \in A$ اجتماع در ارتباط می بخشد پس درینصورت ما مینویسیم:

$$y = f(x)$$

تمام توضیحات فوق تابع یک غیر عددی را دارا بوده ولی اگر توابع که در ریاضیات ابتدائی مورد بحث قرار میگیرند اینچنین نبوده بلکه معمولاً از یک set اعداد حقیقی Reals بطرف set دیگری اعداد حقیقی Reals صورت میگیرند. بطور مثال اگر g یک تابعیکه Dmn آنرا set: $\{3, 4, 5, 6\}$ تشکیل داده و شرط مطابقت چنان باشد که هر یک از عناصر set Dmn یک عدد یکه باندازهٔ مربع آن عنصر باضافه 3 میباشد ارتباط یابد درینصورت ما میتوانیم بنویسیم:

$g(3) = 12$ ، $g(4) = 19$ ،
$g(5) = 28$ ، $g(6) = 39$.

تابع فوق را طبق ذیل نیز میتوان نمایش داد:

$$g = \{(3,12), (4,19), (5,28), (6,39)\} .$$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

اینطور ارائهٔ تابع افاده میکند که مرکبهٔ دوّم هر جوره مرتب ordered pairs عبارت از قیمت مرکبهٔ اوّل آن است که تحت تابع مفروض (در مثال فوق g) به آن داده شده است. چنانچه در مثال فوق 39 عبارت از آن قیمتی است که تابع g به 6 داده است.

اگر f یک تابع از A بطرف B را ارائه کند درینصورت ضروری نیست که هر دو set های A و B یکی از هم متمایز باشند. (چنانچه از مثال اخیر فوق ثابت هم میرسد که هر دو set های Dmn و Rng تابع g عبارت از set اعداد تام است.) ممکن که هر دو set Dmn و Rng یک تابع قسماً مشابه و یا یکی عین set باشند.

اگر F یک تابعی را که برای هر عدد تام (Integer) n یک عدد دیگر تام (Integer) n+1 را ارتباط میدهد ارائه کند درینصورت گفته میشود که F یک تابع از set اعداد تام بر set اعداد تام یعنی:
From the Integers onto the Integers را تعریف میکند.
درینصورت دیده میشود که هر عدد تام تصویر image کدام یک عدد تام شده میتواند. مثلاً اگر x یک عدد تام باشد درینصورت:

$$F(x-1) = x$$

میشود.

تعریف: یک تابع f از A بطرف B، onto «بر» گفته میشود درصورتیکه برای هر عنصر $y \in B$ یک عنصر $x \in A$ موجود گردد طوریکه $f(x) = y$ شود.

اگر G یک تابعی را که برای هر عدد تام Integer، n یک عدد تام n^2 را ارتباط میبخشد ارائه کند، درینصورت گویند که G یک تابع از set اعداد تام در set اعداد تام یعنی:
From the Integers into the Integers را تعریف میکند.
درینصورت دیده میشود که در set Rng بعضی اعداد مثلاً 3 و 5 موجود شده میتوانند که تصاویر کدام یک از عناصر set Dmn نگردند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

تعریف: یک تابع g از A بطرف B، «در» into گفته میشود در صورتیکه لااقل یک عنصر $y \in B$ موجود گردد طوریکه $\forall x \in A$، $f(x) \neq y$ شود.

یا بعبارت دیگر: یک تابع g از A بطرف B، «در» into گفته میشود در صورتیکه لااقل یک عنصر در set یا Range B موجود گردد که تصویر هیچیک از عناصر set در Dmn A نگردد.

همین قسم: یک تابع f از A بطرف B، «بر» onto گفته میشود در صورتیکه هر عنصر $y \in B$ تصویر یک ویا چند عنصر set Dmn A باشد.

هرگاه دومین Dmn یک تابع دارای عناصر زیاد باشد درینصورت ارائه تابع مذکور به شکل لست جوره های ترتیب شده مربوط آن دشوار میشود. بنابر رفع این مشکل اولاً دومین Dmn تابع مذکور را تا حد امکان بصورت موجز و دقیق تشخیص نموده دستور قانونی را که باساس آن قیمت هر عنصر set دومین تعیین شده میتواند بیان میکنیم. بدینطور قوانین معمولاً توسط افاده فورمول توضیح میشود. بطور مثال اگر یک تابع H به هر یک از اعداد یکه بین 0 و 1 واقع است جذر مثبت آن عدد را باضافه (جمع) 2 را مطابقت بخشد، درینصورت تابع H طبق ذیل بصورت واضح افاده شده میتواند:

$$\mathrm{Dmn}\, H = \{x : 0 < x < 1\}$$

و

$$H(x) = \sqrt{x} + 2$$

که درینصورت:

$$H(\tfrac{1}{4}) = \sqrt{\tfrac{1}{4}} + 2 = \tfrac{1}{2} + 2 = \tfrac{5}{2}$$ بوده،

و

$$\mathrm{Rng}\, H = \{y : 2 < y < 3\}$$ میشود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

از بررسی مثال اخیر نتیجه میشود که هر عنصر ست دومین set Dmn دارای یک تصویر image منفرد در ست رنج set Rng میباشد. این نوع خاص تابع را بنام تابع یک بیک one-to-one function (و یا مطابقت یک بیک) یاد میکنند. برای بهتر روشن ساختن موضوع مثال ذیل را از نظر میگذرانیم.

مثال :- اگر C یک تابعی را که هر یک از ولایات افغانستان را با مرکز مربوط آن ولایت ارتباط بخشد، ارائه کند درینصورت دیده میشود که هر ولایت افغانستان محض دارای یک مرکز بوده و همچنان هر مرکز مربوط بیک ولایت میباشد. درینحالت گفته میشود که تابع C یک تابع یک بیک one-to-one است.

خصوصیت که در تابع C موجود است اینست: هر عنصر ست set Rng تصویر image محض یکعنصر ست set Dmn را تشکیل نموده است. بالعبارت دیگر هیچ دو عنصر متمایز set Dmn تحت تابع یک بیک one to-one دارای عین تصویر در ست رنج set Rng شده نمیتوانند.

تعریف: یک تابع f یک بیک one-to-one میباشد درصورتیکه برای هر جوره عنصر متفاوت p و q ست set Dmn

$f(p) \neq f(q)$ باشد.

ثابت میشود که در یک تابع یک بیک one-to-one اگر $f(p) = f(q)$ باشد،

پس درینصورت $p = q$ میباشد.

مثال: اگر تابع f باساس $f(x) = 2x+1$ طوریکه Dmn آنرا set Reals تشکیل داده تعریف شود ثابت سازید که f یک تابع یک بیک one-to-one است.

ثبوت :- بالفرض $f(a) = f(b)$

پس $2a+1 = 2b+1$

یا $2a = 2b$

در نتیجه $a = b$ گردیده،

بنابرین f یک تابع one-to-one میباشد.

Q. E. D.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

برای اینکه عدم یک‌به‌یک بودن یکتابع را ثابت کنیم کافی است تا نشان دهیم
که دو عنصر متفاوت set Dmn دارای عین تصویر (در set Rng) اند.

مثال: اگر تابع g در ست اعداد تام Integers توسط افاده:
$g(x) = x^2$ تعریف شود، دیده میشود
که g یکتابع یک‌به‌یک One-to-one نیست.

زیرا:
$$g(-2) = (-2)^2 = 4$$
$$g(2) = (2)^2 = 4$$
چون
$$g(-2) = g(2) = 4$$
حالانکه $-2 \neq 2$ بوده
بنابرآن g یکتابع یک‌به‌یک one-to-one نمیباشد.

Q.E.D.

تمرینات: Problem-Set . 1-2

1. در مثال محصلان شعبه ریاضی پوهنځی علوم و پروفیسوران: Bolyai، Gauss، Lobatchewsky، Riemmen که قبلاً توضیح شده:

(a). بگو Rng تابع F کدام است؟

(b). اگر محصلی بنام باقی در شعبه ریاضی پوهنځی علوم باشد، تصویر او (Baqui) تحت تابع F کیست؟

(c). تصاویر عنصر کسی از محصلان را بنام‌های: دلیل (Dalil)، واحدی (Wahidi)، کبیر (Kabeer)، فتاح (Fattah) و غفور (Gafoor) را نظر بتابع F تعیین کنید.

(d). تابع F کدام نوع تابع است؟ یعنی آیا تابع F یکتابع:
(1). "در" into است؟ یا
(2). "بر" onto است؟ ویا
(3). یک‌به‌یک One-to-one است؟ موضوع را بررسی کنید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

2. اگر تابع c هر یک از ولایات دولت جمهوری افغانستان را با مرکز ولایت آن ارتباط ببخشد درینصورت:

(a). $c($پکتیا$) = ____$ را بدست آرید.

(b). تصویر ولایت بلخ را بدست آرید.

(c). نقش تصویر شهر جلال آباد کدام است؟

(d). x را معلوم کنید درصورتیکه:

(1). $c(x) =$ لوگر

(2). $c(x) =$ کابل

(3). $c(x) =$ بادغیس باشد.

(e). آیا c یک تابع one-to-one شده میتواند؟ چرا؟

3. اگر F یک تابعی را که به هر یک از اعداد که بین 10 و 500 واقع شده مجموعهٔ ارقام مربوط آنرا اتصال ببخشد ارائه کند درینصورت:

(a). $F(20)$ را بدست آرید.

(b). Rng تابع F کدام است؟

(c). تمام اعداد را که نقش تصویر Pre-image عدد 2 شده میتوانند بدست آرید.

(d). F کدام نوع تابع است؟

4. اگر تابع f توسط افاده: $f(x) = x+4$ تعریف شود درصورتیکه Dmn آن: $\{-3, 1, 5, 6, 7\}$ باشد Rng f را بدست آرید.

5. اگر تابع g که توسط افاده: $g(x) = 3x-2$ تعریف شده و $Dmn\ g = \{x : -1 \leq x \leq 3\}$ باشد، درینصورت:

(a). قیمت $g(-\frac{1}{2})$ را بدست آرید.

(b). قیمت c را بدست آرید طوریکه: $g(c) = -1$ گردد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

(c) • Rng c را با استفاده از عرضه کننده set builder notation set تعیین کنید.

(d) • آیا تابع c یک‌تابع one-to-one شده میتواند؟ چرا؟

6. در صورتیکه $Dmn\,h=\{x: -2\le x\le 4\}$ و $h(x)=(x-3)^2+1$ باشد:

(a) • $h(-1)$ و همچنان $h(3)$ حاصل نمایید.

(b) • k بدست آرید درصورتیکه $h(k)=3$ گردد.

(c) • Rng h کدام است؟

(d) • یک‌بیک بودن ویا عدم یک‌بیک بودن تابع h را ثابت کنید.

(e) • عدد c را طوری تعیین نمایید که: $h(c)=c$ شود.

7. بالفرض d یک‌تابع باشد که Dmn آن set تمام نقاط مستوی تشکیل داده و توسط اعداد که فاصلهٔ هر نقطه را از مبدأ تعیین میکند تعریف شود:

(a) • اگر یک نقطهٔ $A(2,3)$ در آن مستوی منظور گرفته شود $d(A)$ را حاصل نمایید.

(b) • Rng d را بدست آرید.

(c) • نشانهٔ تصاویر 5 Preimages را حاصل نمایید.

8. اگر m یک‌تابع را ارائه کند که Dmn آن را set تمام خطوطی که از نقطهٔ $A(2,4)$ عبور نموده و عمود به محور x نیستند تشکیل داده و هر خط این Dmn میل Slope مربوط آنرا ارتباط دهد؛ درینصورت:

(a) • اگر s یک خط بوده طوریکه: $s=\{(x,y): y-3x=-2\}$ آیا $s\in Dmn\,m$ است؟

(b) • $m(t)$ را بدست آرید درصورتیکه: $t=\{(x,y): 2y-x=6\}$ باشد.

(c) • بگو Rng m کدام است؟

(d) • آیا m یک‌تابع one-to-one شده میتواند؟ چرا؟

9. اگر G یک‌تابع را نمایش دهد که هر خط غیرموازی بمحور x نقطهٔ تقاطع آنرا با محور x ارتباط بخشد، درینصورت:

(a) • اگر $t=\{(x,y): 3x+2y=12\}$ باشد، $G(t)$ را بدست آرید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

(b) . $Rng\, G$ کدام است؟

(c) . آیا G یک تابع one-to-one شده میتواند؟ چرا؟

(d) . اگر $(2,7)\in\underline{s}$ و $\underline{l}$ تحت تابع G یک نشانهٔ تصویر یا Pre-image نقطهٔ $(-3,0)$ باشد، معادلهٔ $\underline{l}$ را بنویسید.

10 . اگر $Dmn\, F=\{-2,-\frac{1}{2},1,2,3\}$ بوده و برای هر عنصر $n\in Dmn\, F$
$F(n)=\{(x,y):\ x^2+y^2=n^2\}$ گردد؛

(a) . $Rng\, F$ را توضیح کنید.

(b) . آیا F یک تابع one-to-one میباشد؟

(c) . آیا F یک تابع است؟

11 . فرضاً $\underline{l}$ یک خط مستقیم که معادلهٔ آن $x=y$ است را فرض نمائید. یک تابع f را طوری که هر خط مستقیم که از کدام نقطهٔ P شروع عبور نموده و به خط $\underline{l}$ عمود باشد و درینصورت $f(P)=\underline{l}\cap\underline{t}$ گردد درنظر بگیرید:

(a) . $Dmn\, f$ کدام است؟

(b) . $Rng\, f$ کدام است؟

(c) . اگر $B(0,3)$ باشد، $f(B)$ را بدست آرید.

(d) . اگر $C(2,1)$ باشد، $f(C)$ را حاصل نمائید.

(e) . آیا کدام نقطه‌ای موجود شده میتواند که تصویر Image خودش شود؟

12 . تعریف مفاهیم ذیل را بعبارات خود بیان کنید:

(a) . توابع را تعریف کنید.

(b) . تابع onto و تابع into را تعریف کنید.

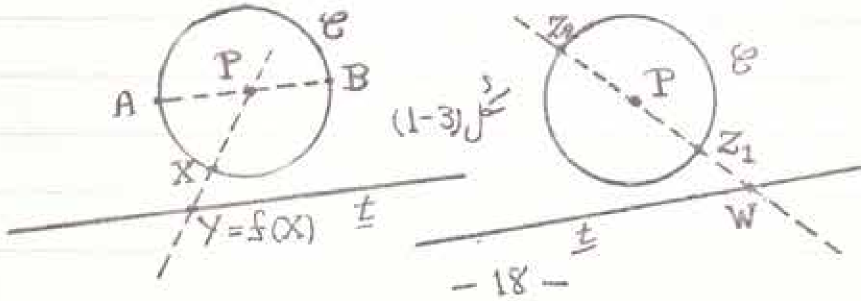
(c) . تابع و یا مطابقت one-to-one را تعریف کنید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

1-3. تحویلات Transformations

تعریف تابع را که در مبحث پیشتر بیان نمودیم عمومی بوده و وسعت آن زیاد است. این تعریف مختص به دو سِت sets و قانون مطابقت بین اینها تحقق میگیرد. این قانون مطابقت بین دو مجموعه sets مذکور طوری ایضاح میگردد که بنابران هر عنصر element، set دومی با یک عنصر element معین set اولی ارتباط می یابد؛ در حالیکه هیچگونه نوع شرط و قیود دیگر عناصر elements هر یک از دو sets مفروض کدام نوع شی (کدام چیز) تشکیل دهنده آن وضع نشده است. ازین به بعد ما بمطالعه و بررسی آن نوع توابع که دومین Dmn اینها و هم چنان رنج Rng اینها را sets نقاط تشکیل میدهند علاقمندیم. برای اینکه در شیوه افاده خویش بیشتر طعم هندسی داده باشیم بپهلوی کلمه "تابع" کلمه: مپینگ mappings (تصویر کشی) را بکار می بریم. درینصورت ما میگوییم که یک تابع مشخص یک set نقاط را "در"، "into" و یا "بر" "onto" set دیگر نقاط مپ map میکند. ذیلاً چند مثال مپینگ را تقدیم مینمائیم:

مثال اول: یک دایره $\mathcal{C}$ را که مرکز آن نقطه P است با یک خط $\underline{t}$ که با قطر $\overline{AB}$ دایره مذکور موازیست در نظر بگیرید، اگر f یک مپینگ mapping (mpg) را از $\mathcal{A} = \mathcal{C} - \{A, B\}$ (set نقاط دایره $\mathcal{C}$ بجز از دو نقطه A و B آن) به خط $\underline{t}$ ارائه کند، طوریکه اگر X کدام نقطه $\mathcal{A}$ باشد پس تصویر X تحت f عبارت از تقاطع خط $\overleftrightarrow{PX}$ با $\underline{t}$ پیدا شد. پس اگر $Y=\overleftrightarrow{PX}\cap \underline{t}$ طبق شکل (1-3) باشد، درینصورت $f(X)=Y$ میشود.



شکل (1-3)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

اگر دقت شود فهمیده میشود که f ، A را onto به t مپ map میکند،
زیرا اگر هر نقطه کیفی W خط t را انتخاب نمائیم متقابلاً همیشه ما یک
نقطه z_1 را روی دایره $\mathscr{C}$ پیدا کرده میتوانیم طوریکه:

$f(z_1)=W$ شود.

نقطه z_1 توسط اتصال نقطه W با P حاصل میشود طوریکه ازین اتصال
$z_1=\mathscr{C}\cap\overleftrightarrow{WP}$ بدست می آید.

حقیقت دیگری که درین مثال بمشاهده میرسد اینست اگرچه f یک مپینگ mpg، onto از A به t است ولی f یک مپینگ One-to-one نیست. این حقیقت را توسط تقاطع خط $\overleftrightarrow{WP}$ که دایره $\mathscr{C}$ را در دو نقطه متفاوت z_1 و z_2 قطع میکند توضیح نموده میتوانیم.
چون $\overleftrightarrow{WP}\cap\mathscr{C}=\{z_1,z_2\}$ بوده و دو نقطه متفاوت z_1 و z_2 عرض وجود میکنند، حالانکه: $f(z_1)=f(z_2)$ است،
بنابرین گفته میتوانیم که f یک-یک One-to-one نیست.

Q.E.D.

مثال دوم: فرضاً A یک نقطه مشخص یک مستوی بوده و یک mpg مپینگ T را که Dmn آن از ست تمام نقاط مستوی تشکیل داده مدنظر بگیرید طوریکه مپینگ طبق ذیل تعریف میشود:

(1). $T(A)=A$ بوده و

(2). اگر P کدام نقطهٔ دیگر مستوی بجز از A باشد درینصورت $T(P)=M$ گردیده درحالیکه M نقطه وسطی قطعه‌خط $\overline{PA}$ است.

از تعریف T معلوم میشود که هر نقطه ویا عنصر مستوی تصویر image کدام یک عنصر element ست set Dmn شده میتواند. این ادعا را توسط انتخاب کدام نقطهٔ Q که بجز از A باشد اثبات کرده میتوانیم. یک قضیه در هندسه موسوم به «قضیهٔ تعیین (ترسیم) نقطه» "Point Plotting Theorem" موجودیت وتعین (انفراد) نقطه را برای هر شعاع داده شده

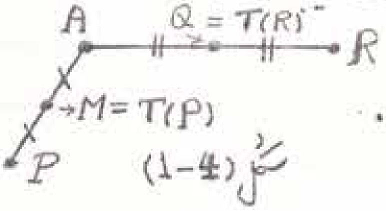
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

$\overrightarrow{AQ}$ و برای هر عدد مثبت مفروض $2AQ$ ، محض یک نقطه R روی شعاع $\overrightarrow{AQ}$ موجود شده میتواند طوریکه $AR = 2AQ$ گردد."
این قضیه بما اجازه میدهد تا بنویسیم که:

$T(R) = Q$ میشود.

ازینکه تصویر image نقطه A خود نقطه A است، ازین نتیجه استنتاج کرده میتوانیم که تمام نقاط مستوی شامل Rng T است.
بنابران گفته میتوانیم که T مستوی onto "بر" مستوی میپا میکند.

برخلاف شکل اول T یک تابع one-to-one است. زیرا اگر دو نقطه متفاوت E و F در مستوی انتخاب گردد، واضح است که نقاط وسطی قطعات $\overline{AE}$ و $\overline{AF}$ نیز متفاوت میباشند.



شکل (1-4)

چون $E \neq F$ بوده، ازین $T(E) \neq T(F)$ نتیجه میشود.
بنابران T یک تابع (میپنگ) یک بیک است.

Q.E.D.

در شکل فوق بحث شده رسید که هر نقطه مستوی plane در Dmn T بوده و همچنان تمام نقاط این مستوی شامل Rng T نیز میباشند، و بر علاوه T یک میپنگ one-to-one نیز میباشد. این سه صفت فوق T را بصفت تحویل مستوی Transformation of the plane امتیاز میبخشد. تحویل مستوی Trans. of the plane عبارت از نوع تابعی است که مطالعه و بررسی هندسه تحویلی Transformational Geom. با آنها اتکا دارد.

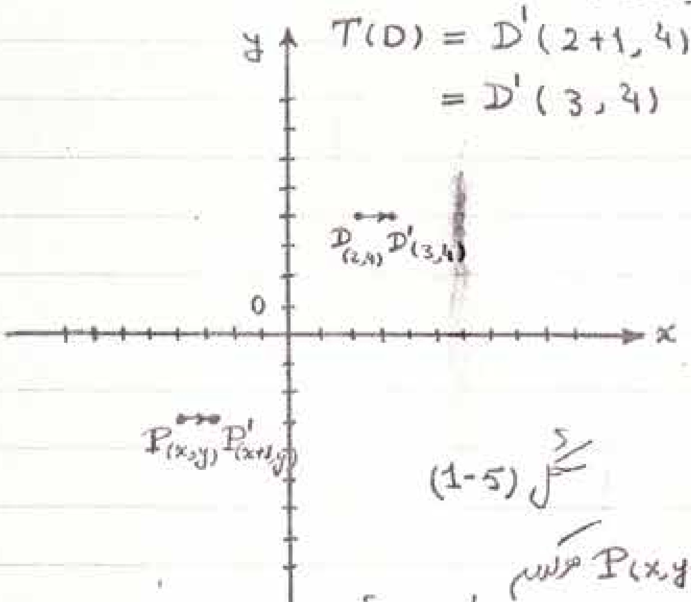
تعریف: تحویل یک مستوی عبارت از یک تابع one-to-one از مستوی onto "بر" مستوی است.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

در عبارت تعریف فوق (تحویل یک مستوی) ما یکنوع مخصوص تحویل Transformation را تعریف نمودیم. در آینده اصطلاح تحویل Transformation را بدون استعمال کلمهٔ «مستوی» بمفهوم اینکه رنج Rng و دومین Dmn تابع را مستوی تشکیل میدهد افاده خواهیم نمود.

مثال سوم: بالفرض در یک سیستم دکارتی .Coordinate syst یک مپنگ T طوری است که هر نقطهٔ P مستوی را بر onto یک نقطهٔ P' آن انتقال میدهد طوریکه P' بجهت مثبت محور x باندازهٔ یک واحد موقعیت داشته باشد. بطور مثال اگر نقطهٔ $D(2,4)$ مستوی مدنظر گرفته شود، پس درینصورت:

$$T(D) = D'(2+1, 4)$$
$$= D'(3, 4)$$ میشود.



شکل (1-5)

بصورت عموم اگر $P(x,y)$ هرکدام یک نقطهٔ مستوی بوده و $P' = T(P)$ باشد، درینصورت مختصات $P' = (x+1, y)$ میشود.

نشان میتوان داد که رنج Rng T ست تمام نقاط مستوی است. زیرا هرکدام نقطهٔ مستوی تصویر کدام یک نقطهٔ مستوی بنابر مپنگ mpg T شده میتواند. چنانچه اگر کدام نقطه $Q(r,s)$ مستوی مدنظر

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

مد نظر گرفته شود، درینصورت یک نقطهٔ R که دارای کمیات وضعیه (ه، ۲-۱) باشد در مستوی موجود شده میتواند و درینصورت

T(R) = ([۲-۱]+۱ ، ه)

= (۲ ، ه)

= Q .

قبل ازآنکه باثبات رسانیم که T یک mpg یک‌بیک one-to-one است، اندکی مکث نموده و حقایق اساسی هندسه تحلیلی را از نظر میگذرانیم. در تأسیس یک سیستم هندسهٔ تحلیلی از همه اولتر موجودیت محورات کمیات وضعیه، که معمولاً دو محور X و Y عموداً انتخاب میشوند، ضرورست. بعد از انتخاب محورات کمیات وضعیه coordinate system، یک مطابقت یک‌بیک one-to-one correspondence بین ست نقاط set مستوی و جوره‌های مرتب ordered pairs اعداد حقیقی Reals موجود میشود. اگر گفته شود که کمیات وضعیه ویا مختصات نقطهٔ P عبارت از (2,3) است، این عبارت مفهومی را که (2,3) یگانه جوره مرتب ordered pairs ای است که به نقطهٔ معینه P مستوی مطابقت میکند. اگر بسیار دقیق نباشیم بصورت آزادانه ما نوشته میتوانیم:

$$P = (2, 3) .$$

بنابرنتیجه این مطابقت one-to-one دو نقطهٔ A(a,b) و B(c,d) باهم مساوی شده میتوانند،

در صورتیکه اگر $a = c$

وهم $b = d$ گردد .

اکنون دوباره T mpg را مورد مطالعه قرار داده و برای اینکه آنرا one-to-one ثابت نمائیم، دو نقطه E(e,f) و F(g,h) طوریکه T(E) = T(F) باشد مدنظر میگیریم.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

درینصورت چون: $T(E)=T(F)$ . . . (مفروض)

و یا $(e+1, f)=(g+1, h)$

چون: $f=h$

ازینی نتیجه میشود که: $e+1=g+1$

و یا اینکه: $e=g$

چون $f=h$ ، $e=g$ است ،

بنابران $E(e,f)=F(g,h)$ میشود.

ازینکه از رابطهٔ: $T(E)=T(F)$ ، $E=F$ منتج گردید ،

بنابرآن گفته میتوانیم که T یکتا به یک یک one-to-one است.

چون mpg مذکور موجودیت یک تصویر image را برای هر نقطهٔ مستوی تضمین نموده و Rng ازا تمام نقاط مستوی تشکیل میدهد ضمناً یکتا به یک یک است ، بنابران مشخصات شرگانهٔ T گفته میتوانم که T یک تحویل Transformation است.

Q. E. D.

Problem Set. 1-3. تمرینات

1. دو خط موازی $\underline{s}$ و $\underline{t}$ و یک نقطهٔ A که در حصهٔ وسطی $\underline{s}$ و $\underline{t}$ واقع است مفروض اند. یکتا به f با $\underline{s}$ Dmn طبق ذیل تعریف گردیده که برای هر $P \in \underline{s}$ پس $P'=f(P)=\overleftrightarrow{PA}\cap \underline{t}$ میشود.

(a). رنج $Rng\, f$ را توضیح کنید.

(b). اگر D و E دو نقطهٔ متفاوت خط $\underline{s}$ باشند درینصورت نشان دهید که $D'E'=DE$ میشود درحالیکه $E'=f(E)$ ، $D'=f(D)$ میباشد.

(c). آیا f یکتا به one-to-one شده میتواند؟ چرا؟

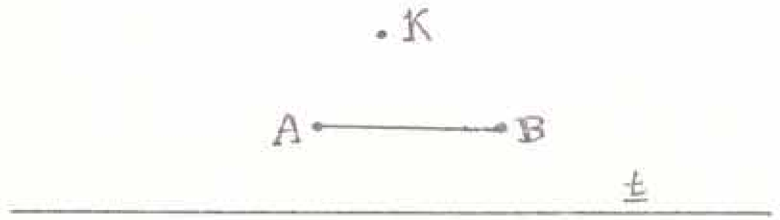
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

2. یک نقطه K ، یک قطعه خط $\overline{AB}$ و یک خط $\underline{t}$ طوریکه موقعیت نقطه K چنان است که فاصله آن از خط $\underline{t}$ دو چند فاصله آن از $\overline{AB}$ است مفروض اند. یک تابع h از $\overline{AB}$ بطرف بر $\underline{t}$ را طوریکه هر نقطه $P \in \overline{AB}$ را onto بر نقطه P' در حالیکه $P' = \overleftrightarrow{KP} \cap \underline{t}$ میپ میکند در نظر بگیرید:

(a). Rng h را توضیح نمائید.

(b). ثابت کنید که h یک تابع one-to-one است.

(c). اگر E و F دو نقطه در دومین h انتخاب شوند راجع به فاصله بین E' و F' چه گفته میتوانید؟



3. سه نقطه A ، R و S طبق شکل ذیل داده شده یک میپنگ T را که به شکل: $T(A) = A$ و در صورتیکه $P \neq A$ باشد $T(P) = P'$ در حالیکه P' نقطه وسطی قطعه خط $\overline{AP}$ است تعریف شده مد نظر بگیرید:

(a). نقطه $R' = T(R)$ را تعیین کنید

(b). نقطه Z را تعیین کنید طوریکه $T(Z) = S$ گردد.

(c). آیا T یک تحول را Transformation آماده کرده میتواند؟

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

4. نقطه $C=(0,0)$ در دو دایره $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ که توسط معادلات ذیل تعریف شده مفروض اند:

$$\mathcal{C}_1=\{(x,y):\ x^2+y^2=1\}$$

$$\mathcal{C}_2=\{(x,y):\ x^2+y^2=25\}$$

اگر g یک مپنگ mpg از $\mathcal{C}_1$ بطرف $\mathcal{C}_2$ طوری تعریف شود که برای هر $P\in\mathcal{C}_1$ بین $g(P)=P'=\overrightarrow{CP}\cap\mathcal{C}_2$ گردد. درینصورت:

(a). اگر $A(0,1)$ باشد، $g(A)$ را تعیین کنید.

(b). نشان تصویر یا pre-image نقطه $(3,4)$ را بدست آرید.

(c). برای هر یک نقطه P دومین فاصله PP' را حاصل نمایید.

(d). اگر E و F دو نقطه دومین Dmn باشند باشند راجع بفاصله بین E' و F' چه فکر میکنید؟

5. یک مپنگ mapping f از مستوی بطرف مستوی برای هر نقطه $P(x,y)$ مستوی طوری تعریف شده که: $f(P)=(|x|,|y|)$ میشود.

(a). $f(A)$ را بدست آرید درصورتیکه $A(-3,6)$ باشد.

(b). نشان تصویر $B(4,3)$ را حاصل کنید.

(c). رنج $Rng\ f$ را توضیح کنید.

(d). آیا f یک تحویل Transformation شده میتواند؟

6. یک تابع g را از محور x بطرف مستوی برای هر نقطه $P(x,0)$ مربوط دومین Dmn که با شاش $g(P)=(x,x^2)$ تعریف شده در نظر گیرید:

(a). $g(A)$ را حاصل نمائید درصورتیکه $A(3,0)$ باشد.

(b). آیا $R(14,196)\in Rng\ g$ میشود؟

(c). آیا g محور x را به مستوی مپ میکند؟

(d). رنج $Rng\ g$ را سکیچ (رسم) کنید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

7. فرضاً f یک تابع را که دومین Dmn آن کلیهٔ تمام نقاط مستوی است ارائه کند. اگر این تابع f برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ مستوی توسط افاده $f(P)=(x+2, 2y-3)$ تعریف شود:

(a). $f(A)$ را حاصل نمائید درصورتیکه $A=(1,-6)$ باشد.

(b). یک نشانهٔ تصویر pre-image نقطهٔ B را بدست آرید درصورتیکه $B=(-2,4)$ باشد.

(c). یک بیک (یا عدم یک بیک بودن f) را ثابت کنید.

(d). آیا تابع f یک تحویل .Trans شده میتواند؟

8. یک مپنگ T از مستوی بطرف مستوی برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ طبق ذیل تعریف شده:

(i). درصورتیکه $x \geq 0$ باشد پس: $T(P)=(x+1, y)$ میشود،

(ii). واگر $x<0$ باشد درنصورت: $T(P)=(x-1, y)$ میشود.

(a). آیا P یک مپنگ one-to-one میباشد؟

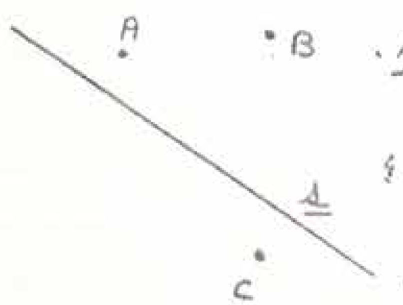
(b). آیا T یک تحویل .Trans شده میتواند؟ استدلال کنید.

9. خط l نقاط A، B و C طبق ذیل مفروض اند. یک مپنگ M برای هر نقطهٔ P مستوی قرار ذیل تعریف شده:

(i). اگر $P \in l$ باشد پس $M(P)=P$ میشود.

(ii). اگر $P \notin l$ باشد، درنصورت $M(P)=P'$ میشود، درحالیکه خط l قطعهٔ $\overline{PP'}$ را عموداً تنصیف میکند.

(a). نقاط A' و B' را درحالیکه $A'=M(A)$ و $B'=M(B)$ رسم کنید.



(b). نشانهٔ تصویر C را حاصل کنید.

(c). آیا M یک تحویل شده میتواند؟

(d). ثابت کنید که: $A'B' = AB$ میشود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

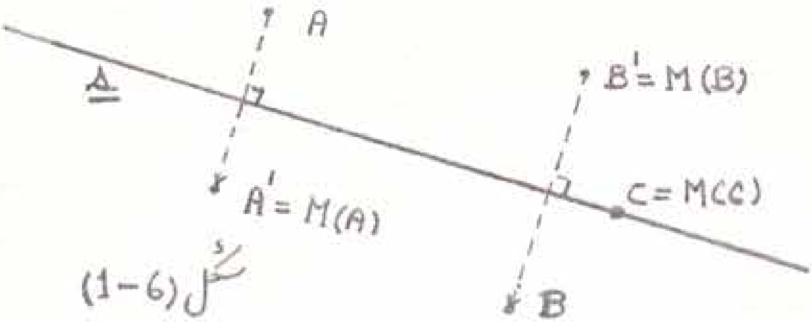
1-4. همفاصله گی ها Isometries

در مثال آخر دستهٔ [illegible] مسایل که بیشتر ذکر شده مفکوره یکنوع تابع که بنام انعکاس خطی Line Reflection یاد میشود بصورت تمرین تقدیم نمودیم. بعداً ملاحظه خواهیم نمود که این نوع مپینگ mapping اساس و بنیان مطالعات هندسه تحویلی Trans. Geo. مورد نظر ما را تشکیل خواهد نمود.

تعریف: انعکاس خطی حول یک خط مفروض Δ عبارت از یک تابع M است که برای هر نقطه P مستوی قرار ذیل تعریف میشود:

(1). اگر $P \in \Delta$ باشد پس درینصورت $M(P) = P$ میشود،

(2). اگر $P \notin \Delta$ باشد درینصورت $M(P) = P'$ گردیده درحالیکه خط Δ ناصف عمودی قطعه خط $\overline{PP'}$ میباشد.



شکل (1-6)

هر خط انعکاس خطی خود را تشکیل میدهد. برای آسانی انعکاس حول یک خط Δ را به M_Δ ارائه میکنیم. درینصورت خط Δ را بنام محور انعکاس axis of reflection ویا Reflecting axis یاد میکنند.

از نگاه انعکاس خطی Line Reflection در مطالعه هندسه تحویلی Trans. Geo

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

اهمیت زیاد دارد ، پس بالضرور ما میل داریم تا بدانیم که آیا این نوع توابع انعکاسات خطی یک تحول Transformation شده میتواند ویا خیر! برای یافتن این مطلب باید که سه سوال ذیل درباره هر انعکاس خطی M_s جواب داده شود:

(1). آیا Dmn آن یک set تمام نقاط مستوی را دربر دارد؟

(2). آیا هر نقطهٔ مستوی تحت M_s تصویر کدام نقطه شده میتواند؟

(3). آیا M_s یک تابع one-to-one یک بیک است؟ یا بعبارت دیگر: آیا نقاط مشخصه و متفاوت دارای تصاویر مشخصه و متفاوت میباشند ویا خیر؟

واضح است که هر یک از نقاط مستوی یا بالای خط $\underline{s}$ قرار دارد ویا بالای خط $\underline{s}$ قرار ندارد. از اینکه بنابر قانون تعریف شده: برای هر یک از نقاط مستوی خواه روی $\underline{s}$ باشد ویا نباشد یک تصویر حاصل شده میتواند پس دومین Dmn آن تمام نقاط مستوی را احتوا میکند.

برای جواب سوال دوم، فرض میکنیم که P یک نقطهٔ مستوی باشد.
اگر $P \in \underline{s}$ ، پس قرار تعریف : $M_s(P) = P$ میشود.
درصورتیکه $P \notin \underline{s}$ ، پس درینصورت یک ومحض یک نقطهٔ Q موجود شده میتواند طوریکه خط $\underline{s}$ ناصف عمودی $\overline{PQ}$ گردد.
بنابران $M_s(Q) = P$ میشود.
در هردو حالت (خواه P روی خط $\underline{s}$ واقع شود ویا نشود) ما نشان دادیم که P تصویر کدام نقطهٔ مستوی میشود. پس ما گفته میتوانیم که M_s یک میپنگ مستوی بر onto مستوی است.

برای اینکه اثبات نمائیم که M_s یک میپنگ one-to-one است، طریق ثبوت غیر مستقیم را طبق ذیل افاده میکنیم:- بالفرض دو نقطهٔ متفاوت: R و S موجود است طوریکه: $R \neq S$ بوده اما $M_s(R) = M_s(S) = K$ است.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

درینجا دو حالت موجود است: (i). یا $K \notin \underline{s}$
(ii). ویا $K \in \underline{s}$.

درحالت (i) که $K \notin \underline{s}$، درینصورت نظر به تعریف خط $\underline{s}$ نا صف عمودی دو قطعه خط: $\overline{KR}$ و $\overline{KS}$ که دارای یک انجام مشترک K اند میشود. حالانکه این محال است که یک خط بدو خط متقاطع عمود باشد.

درحالت (ii) اگر $K \in \underline{s}$ درینصورت:

$$R = M_s(R) = K = M_s(S') = S$$

یعنی $R = S$ میشود. حالانکه این نیز محال بوده وخلاف فرضیهٔ که $R \neq S$ میباشد. پس $M_s(R) \neq M_s(S)$ است.

بنابرین برای $R \neq S$ رابطهٔ: $M_s(R) \neq M_s(S)$ موجود گردیده درنتیجه گفته میتوانیم که M_s یک چنین mapping one-to-one بوده واز نتیجه این تشریحات اثبات قضیه ذیل اکمال شده میتواند.

قضیه Theorem 1.1

هر انعکاس خطی Line Reflection یک تحول Trans. است.

یک خاصیت مهم وعمده انعکاس خطی حفظ فواصل preserve distances است. این عبارت مفهوم اینرا که فاصل بین حدود تصویر باندازه فاصل بین عناصر اصلی آنها است بکند، اداه این حقیقت را کمی پسانتر باثبات میرسانیم.

بهرحال انعکاسات خطی Line Reflections یگانه تحولات Transformations نیستند که حاوی این صفت باشند. برای دیگر بیشتر دقیق باشیم به تحولی که خاصیت حفظ فاصله را داشته باشد بنام همنامرگی (هم اندازگی) Isometry یاد میکنیم.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

تعریف :- یک تحویل T .Trans ، یک Isometry است
درصورتیکه برای هر جوره نقاط P و Q

$P'Q' = PQ$ باشد ،

درحالیکه $P' = T(P)$ و $Q' = T(Q)$ میباشد.

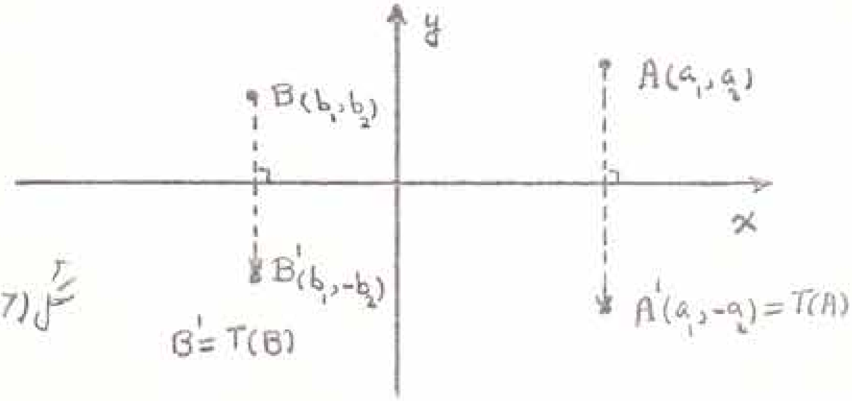
اگر دقت شود معلوم میشود که تعریف فوق وجود رابطهٔ $PP' = QQ'$ را ایجاب نمیکند. یا بعبارت دیگر یک Isometry فاصله بین تصویر و نشان تصویر را حفظ نمیکند.

مثال: بالفرض یک سیستم کمیات وضعیه در یک مستوی یک mapping T برای هر نقطه $P(x, y)$ طبق ذیل تعریف شود:

$$T(P) = P'$$
$$= (x, -y)$$

درینصورت T یک Isometry است.

بسهولت ثابت شده میتواند که T یک تحول .Trans است.
برای اینکه ثابت نمود که T یک Isometry است دو جوره نقاط کیفی $A(a_1, a_2)$ و $B(b_1, b_2)$ مستوی را انتخاب نموده و علی الترتیب تصویر انها $A'(a_1, -a_2)$ و $B'(b_1, -b_2)$ را نظر T حاصل مینمائیم. حال اثبات باید کرد که $A'B' = AB$ است.



شکل (1-7)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

برای اثبات $A'B'=AB$ از استعمال فورمول فاصله بین نقاط طبق ذیل مستفید میشویم:

$$A'B'=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(-a_2-[-b_2])^2}$$
$$=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$
$$=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$
$$=AB$$

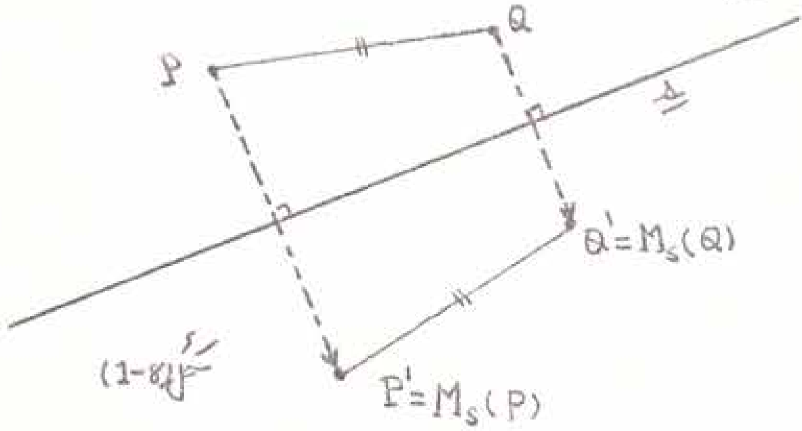
چون $A'B'=AB$ است.
بنابران گفته میتوانیم که T یک Isometry است.
Q.E.D.

ممکن متوجه شده باشید که مثال فوق یک انعکاس خطی Line Ref. است. حال با استفاده ازین حقیقت قضیهٔ ذیل را اقامه میکنیم:

قضیه Theorem 1.2

هر انعکاس خطی یک ایزومتری Isometry است.

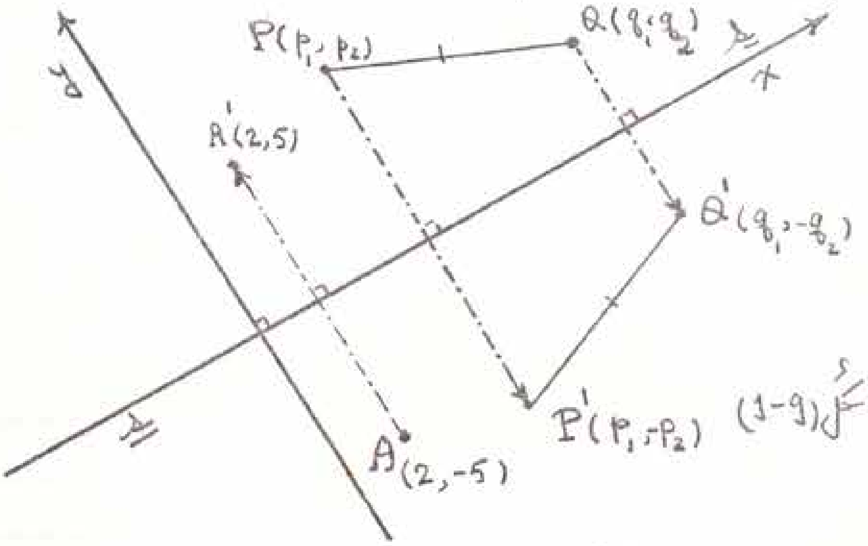
بعبارت دیگر: فرضاً s یک خط و M_s یک انعکاس خطی بوده و P و Q دو نقطهٔ مستوی باشند طوریکه $P'=M_s(P)$ و $Q'=M_s(Q)$ گردد. ثبوت مینمائیم که $P'Q'=PQ$ است.



شکل (1-8)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ثبوت : برای ثبوت این قضیه از استعمال هندسهٔ تحلیلی استفاده مینمائیم. بخاطر خواهید داشت که سیستم کمیات وضعیه توسط ترسیم محور دو خط مستقیمیکه بر یک دیگر عمود باشند تأسیس شده میتوانند. انتخاب واحدات طول درین سیستم اختیاری بوده و انتخاب سمت (و یا جهت مثبت محورها) نیز در آن اختیاری است. حال با استفاده ازین آزادی که در انتخابات خویش داریم برای حل این مسأله محور x را طوری انتخاب مینمائیم که منطبق خط ل بوده و هر خط عمود بآن را بحیث محور y می پذیریم.



شکل (9-1)

بطور مثال : اگر نقطهٔ $A(2,-5)$ در مستوی مد نظر گرفته شود، درینصورت $M_s(A) = A' = (2,5)$ میشود. بصورت عموم اگر $W(x,y)$ هر کدام یک از نقاط مستوی باشد درینصورت $M_s(W) = W' = (x,-y)$ میشود.

در سیستم مختصات انتخابی فوق اگر نقطهٔ P دارای کمیات وضعیه (p_1, p_2) و نقطهٔ تصویر آن $P'(p_1,-p_2)$ بوده و اگر نقطهٔ Q دارای کمیات وضعیه (q_1,q_2) بوده پس تصویر آن $Q'(q_1,-q_2)$ میشود.
از حل شکل بیشتر ما نتیجه و حاصل شده میتوانند که :

$P'Q' = PQ$ میشود.

این رابطهٔ اخیر ایضاح مینماید که M_s یک Isometry است.

Q.E.D.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

Problem Set . 1-4 : تمرینات

1. دو نقطهٔ A و B مفروض اند یک خط s را رسم کنید طوریکه: $M_s(A) = B$ گردد. $M_s(B)$ را تعیین کنید.

2. اگر $A(1,3)$ و $B(-2,-1)$ دو نقطهٔ مستوی بوده معادلهٔ خط s را بنویسید طوریکه: $M_s(A)=B$ گردد.

3. اگر $s=\{(x,y):\ x=-3\}$ مفروض باشد:
   (a). A' را تعیین کنید درصورتیکه: $A'=M_s(A)$ و مختصات نقطهٔ A عبارت از $(5 ، 2)$ باشد.
   (b). اگر $C=(-1,7)$ باشد، $M_s(C)$ را بدست آرید.
   (c). نقطهٔ D را طوری تعیین نمائید که $M_s(D)=(-2,5)$ گردد.
   (d). $M_s(P)$ را برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ تعیین نمائید.

4. اگر $t=\{(x,y):\ y=2\}$ داده شده باشد:
   (a). $A'=M_t(A)$ را درصورتیکه $A=(3,\sqrt{2})$ باشد تعیین نمائید.
   (b). نقطهٔ D را تعیین کنید درحالیکه $M_t(D)=(2,-4)$ باشد.
   (c). بصورت عمومی $M_t(P)$ را برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ تعیین دارید.

5. خط $s=\{(x,y):\ y+2x=3\}$ و نقطهٔ $A=(2,k)$ را در نظر گرفته k را تعیین دارید طوریکه $M_s(A)=A$ گردد.

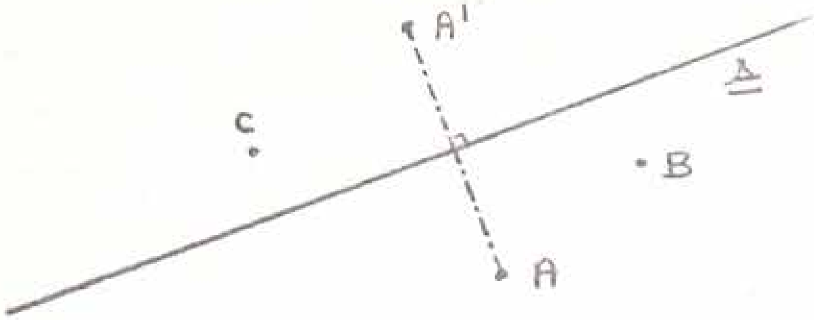
6. خط $t=\{(x,y):\ kx-3y=-1\}$ و نقطهٔ $B=(3,-1)$ داده شده k را طوری تعیین نمائید که $M_t(B)=B$ گردد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

۷. اگر S یک تحول Transformation ای که برای تمام نقاط $P(x,y)$ توسط $S(P) = (x-5, y+3)$ تعریف شده افاده کند. همنهشتی Isometry ویا عدم همنهشتی بودن S را ثابت کنید. آیا این نتیجه‌ها صفر خود را عمومیت داده میتوانید؟

۸. ثابت کنید که تحول T Transformation که برای تمام نقاط $P(x,y)$ توسط افاده: $T(P) = (2x, y-1)$ تعریف شده یک همنهشتی Isometry است.

۹. خط s و نقاط A، A'، B و C طبق شکل ذیل داده شده اند طوریکه: $A' = M_s(A)$ است؛



(a). بنا همراه یک خط کش (که مندرج نباشد) نقاط B' و C' را تعیین کنید طوریکه: $M_s(C) = C'$ و $M_s(B) = B'$ گردد.

(b). ثابت نمائید که ترسیمات شما صحت دارد.

۱۰. اگر خط $s = \{(x,y) : y = x\}$ و تحول T Transformation طوری تعریف شود که برای هر نقطهٔ $P(x,y)$؛ $T(P) = P' = (y,x)$ شود، درینصورت:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ثابت کنید که T یک انعکاس خطی است حول $\underline{\ell}$. و این هدف توسط نشان دادن صحت روابط ذیل برآورده شده میتواند :

(a) . اگر $P(x,y) \in \underline{\ell}$ باشد، پس $T(P) = P$ است.

(b) . اگر $P(x,y) \notin \underline{\ell}$ باشد، درینصورت خط $\underline{\ell}$ ناصف عمودی قطعه خط $\overline{PP'}$ میشود .

11 . اگر $\underline{t}$ خط مستقیمی که از مبدأ گذشته و دارای میل Slope -1 بوده مفروض با شد، با درنظرداشت $\underline{t}$ نقاط ذیل را تعیین کنید :

(a) . $M_t(A) = ?$ درصورتیکه $A = (-2,3)$ باشد ؟

(b) . اگر $P = (x,y)$ باشد . $M(P)$ را حاصل کنید .

12 . خط $\underline{t}$ و تابع S که برای هر نقطهٔ P مستوی قرار آتی تعریف شده مفروض اند :

(i) اگر $P \in \underline{t}$ باشد، درینصورت $S(P) = P$ میشود . و

(ii) اگر $P \notin \underline{t}$ است، درینصورت $S(P) = P'$ میشود ، طوریکه P' نقطه وسطی قطعه خطی است که از P به $\underline{t}$ عمود رسم میشود.

(a) . آیا S یک تحویل Transfor. شده میتواند ؟

(b) . آیا S یک Isometry است ؟ استدلال کنید .

(c) . اگر A و B دو نقطهٔ مستوی بوده طوریکه $A'B' = AB$ گردد ؛ راجع به نقاط A و B چه فکر میکنید ؟

13 . فرضاً $\underline{u} = \{(x,y) : y = 3x\}$ بوده مختصات : $A' = M_u(A)$ را بدست آرید درصورتیکه $A = (4,3)$ باشد . (کمک : از حقیقت اگر $\overline{AA'} \perp \underline{u}$ بوده واگر B نقطهٔ وسطی $\overline{AA'}$ باشد پس $B \in \underline{u}$ استفاده نمائید.)

14 . نقاط : $A(1,-1)$ ، $B(4,0)$ ، $C(-4,1)$ و $D(-2,h)$ داده شده اند . اگر T یک Isometry را که نقاط A را به C و B را به D مپ میکند ارائه کند، قیمت h را حاصل دارید .

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

1-5. خواص بیشتر ایزومتری‌ها (هم‌فاصلگی‌ها)

Additional Properties of Isometries

طوریکه در مبحث پیشتر مطالعه نمودیم که انعکاسات خطی Line Reflections دارای خواص و صفات ذیل میباشند:

(1). اینها میپنگ یک به یک one-to-one که مستوی را بر onto خودش میپ میکنند میباشند.

(2). اینها تحفظ کننده فاصله اند.

این خواص با شاش نقاط و تصویر آنها بصورت انفرادی مطالعه و توضیح شد. اغلباً ما میخواهیم بدانیم که راجع به یک ست set مشخص نقاط، تحت یک تحول Transformation مفروض چه واقع میشود! بطور مثال ما علاقمندیم تا بدانیم که چطور یک مثلث مشخص، حول محور y تحول داده شده Transformed میتواند! درینصورت ما راجع به تصویر ست set مفروض نقاط صحبت خواهیم نمود؛ ضمناً علامه گذاری مورد بحث ما علایم نوع $T(\triangle ABC)$ مانند و $M_s(\underline{t})$، و امثال اینها را احتوا خواهد کرد.

چنانچه برای اینکه نشان دهیم که ست set $\mathscr{C}$ بنا بر (تحت) مپنگ T عبارت از تصویر image مثلث $\triangle ABC$ است درینصورت این مطلب را چنین ارائه میکنیم:

$$\mathscr{C} = T(\triangle ABC).$$

این علامه گذاری افاده میکند که هر نقطه دایره $\mathscr{C}$ تصویر یک نقطه $\triangle ABC$ است. و یا بعبارت دیگر تصویر هر نقطه $\triangle ABC$ یک عنصر element دایرهٔ $\mathscr{C}$ است. بهمین قسم هر عنصر $T(\triangle ABC)$ تصویر بعضی نقاط $\triangle ABC$ را افاده میکند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

همچنان زمانیکه مینویسیم: $P \in \ell' = T(\ell) \cdots$ این افاده میکند که یک نقطه R بالای ℓ موجود شده میتواند طوریکه: $T(R) = P$ گردد.

برعلاوه دو خاصیت که در بالا ذکر شد انعکاسات خطی Line Reflections دارای سه خاصیت برجستهٔ دیگر نیز میباشند، و الخصوصیات اند:

(3) . انها خطوط مستقیم را بر (onto) خطوط مستقیم مپ میکنند.
(4) . انها خاصیت تحفظ اندازه زاویه بین خطوط را حایز اند.
(5) . انها خاصیت تحفظ موازات و عمودیت بین خطوط را حایز اند.

مفهوم اینکه انعکاسات خطی حافظ موازات است این معنی دارد که اگر دو خط موازی باشند تصاویر انها نیز موازی است.

برای اثبات وجود این سه حقیقت فوق در شان انعکاسات خطی منطقی جلوه میکند که از ان مشخصات و صفات که در تعریف انعکاس خطی متضمن است استفاده بعمل آید. بهر حال باید تذکر داده شود که انعکاسات خطی Line Reflections یگانه توابع نیستند که حاوی صفات و خواص فوق الذکر باشند.

باشمول تعریف که یک ایزومتری (همفاصلگی) Isometry یک مپنگ mpg یک به یک از مستوی بر onto مستوی بوده و تحفظ کننده (حافظ) فاصله است، خواص: (3)، (4) و (5) فوق ثابت شده میتواند. اما از اینکه انعکاسات خطی Line Reflections یگانه دسته و تابع توابع که ایزومتری Isometry اند نمیباشند، بنابران برای عمومیت دادن بیشتر/ اثبات خواص: (3)، (4) و (5) ما یک تحول T Transform.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

Transformation T را که تنها حافظ فاصله است درنظر بگیریم.
پس اگر قادر شدیم تا نشان دهیم که T حائز تمام خواص وصفات
که در فوق لست شده اند میباشد، درینصورت ما ادعا کرده
میتوانیم که تمام ایزومتری ها (حفظ فاصله گی ها) Isometries دارای
خواص فوق الذکر میباشند. چون انعکاسات خطی یکنوع خاص
ایزومتری اند، درینصورت انعکاسات خطی نیز دارای خواص
وصفات فوق الست شده میتوانند. پیروی ازین
طریقه ثبوت (که ایزومتری ها حاوی خواص فوق الست اند) درآینده
ما را از اجرای یکعده کارخسته کن زیاد باز میدارد. زیرا
با شناختن این طریقه جامع اثبات موضوع، درآینده اگر تحول جدیدی
حافظ فاصله برخورد کنیم، با حکم میتوانیم تحول مذکور را
حاوی صفات: حافظ موازات، حافظ عمودیت، و حافظ اندازه
زاویه نیز بوده و خط را بر (onto) خط مپ میکند.

ازینکه موضوعات: تحفظ اندازه زاویه، تحفظ موازات،
و تحفظ عمودیت بین خطوط مربوط بحقیقتیکه تصویر یک خط عبارت از
یک خط است اتکاء دارد، بنابران اولاً با اثبات این حقیقتیکه
ایزومتری ها خطوط را بر (onto) خطوط مپ میکنند میپردازیم.

قضیه 3-1. Theorem

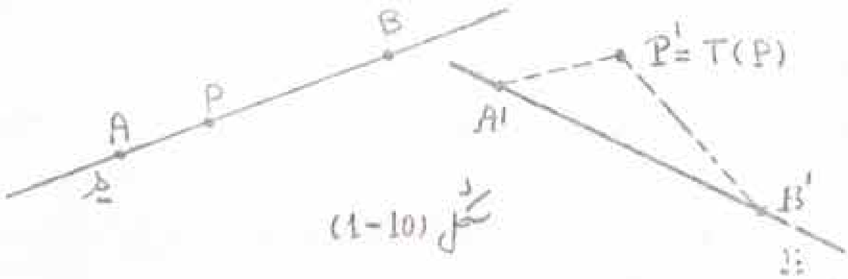
تصویر هر خط بنابر (تحت) یک ایزومتری Isometry یک خط است.

یا با الفاظ دیگر:
فرضاً T یک ایزومتری و $\underline{l}$ کدام خط باشد
پس $\underline{l}' = T(\underline{l})$ یک خط میباشد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ثبوت : Proof

اولاً یک خط t را تولید نموده سپس نشان باید داد که $\ell' = t$.
بخاطر خواهید داشت که دو set ثابت مساوی یکدیگر میباشند در صورتیکه هر دو set دارای عین عناصر elements باشند.
حال اگر ثابت نمائیم که $\ell' = t$ است، نشان باید داد که هر نقطهٔ خط ℓ' بالای خط t واقع بوده و هر نقطهٔ خط t روی خط ℓ' واقع میشود. یا با اصطلاح دیگر ما باید نشان دهیم که : $t \subset \ell'$ و $\ell' \subset t$ میباشد.



شکل (1-10)

خط t را در اثر انتخاب دو نقطهٔ A و B خط ℓ حاصل مینمائیم طوریکه خط t از دو نقطهٔ تصویر آنها عبور میکند. پس در اینصورت $t = \overleftrightarrow{A'B'}$ میشود.

چون ℓ' عبارت از set تصاویر تمام نقاط خط ℓ است، برای ثبوت اینکه $\ell' \subset t$ است ما یک نقطهٔ معین P خط ℓ را انتخاب نموده و نشان میدهیم که تصویر P یعنی P' شامل t است.

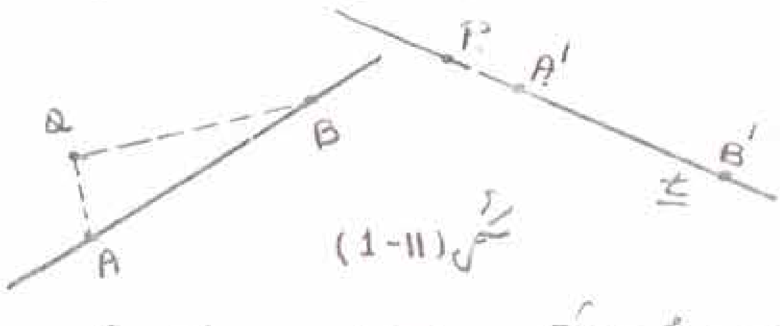
اگر نقطهٔ P بین A و B انتخاب شود، در اینصورت $AP + PB = AB$ گردیده ؛ و از اینکه T یک ایزومتری است (که خاصیت حفظ فاصله در آن موجود است) بنابران $A'P' + P'B' = A'B'$ میشود. چه در صورتیکه اگر P' شامل t نباشد پس در اینصورت شکل $\triangle A'P'B'$ بوجود می آید که در نتیجه $A'P' + P'B' > A'B'$ میشود. (زیرا مجموعهٔ طول

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

دو ضلع یک مثلث بزرگتر از طول ضلع سوم آن است.) حالانکه دیدیم مساوی است.
زیرا دارای خاصیت بودن حفظ فاصله توسط T نقض میشود.
پس درصورت $P' \in \underline{t}$ میشود. اکنون حالتی را بررسی میکنیم که P بین A
و B واقع نبوده خارج انها واقع شد: فرض کنید B بین A و P واقع
شود، درین حالت نیز مانند سابق ثبوت شده میتواند که نقطه
P' یعنی تصویر P بالای خط $\underline{t}$ واقع میشود. ازینکه ثابت شد هر نقطه
P' خط $\underline{L}'$ مربوط خط $\underline{t}$ است بنابران ادعا میتوان کرد که:

$\underline{L}' \subset \underline{t}$ است.

برای اثبات قسمت دوم مساله یعنی ثبوت $\underline{t} \subset \underline{L}'$. یک نقطه کیفی
R را روی $\underline{t}$ انتخاب نموده و ثبوت مینمائیم که R تصویر یک نقطه
خط $\underline{L}$ است: که درصورت ثبوت خود بخود $R \in \underline{L}'$ گردیده واز ان
نتیجه میشود که $\underline{t} \subset \underline{L}'$ است. چون T یک ایزومتری است،
پس T یک میپنگ یک بیک one-to-one mapping که مستوی را بر
مستوی منطبق میکند میباشد. onto پس بنابر اساس یک نقطه
Q موجود شده میتواند طوریکه $T(Q) = R$ گردد. درصورتیکه
$Q \in \underline{L}$ باشد درینصورت $R \in \underline{L}'$ گردیده و $\underline{t} \subset \underline{L}'$
ثابت میشود. بالفرض $Q \notin \underline{L}$ باشد،
درینحالت یک $\triangle QAB$ بوجود می آید. مانند شکل (1-11).



شکل (1-11)

ازینکه T یک ایزومتری است، حقایق ذیل لازماً نتیجه میشود:
$AQ = A'R$ ، $BQ = B'R$ و $AB = A'B'$.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

با استفاده از رابطهٔ تساوات: $RA' + A'B' = RB'$

و رابطهٔ نامساوی: $QA + AB > QB$

و با در نظر داشت حقیقت: $AQ = A'R$ ، $BQ = B'R$ و $AB = A'B'$

نتیجه می‌شود که $Q \notin \underline{l}$ محال بوده، پس $Q \in \underline{l}$ می‌باشد.

در نتیجه $R \in \underline{l'}$ میشود. چون یک نقطهٔ دلخواه (عنصر کیفی) $\underline{l}$ شامل $\underline{l'}$ ثابت گردید، بهمین وتیره ثابت شده میتواند که تمام نقاط (عناصر) $\underline{l}$ شامل $\underline{l'}$ بوده، پس $\underline{l} \subset \underline{l'}$ است.

چون $\underline{l'} \subset \underline{l}$ و $\underline{l} \subset \underline{l'}$ است،

بنابران $\underline{l} = \underline{l'}$.

ازین نتیجه میشود که تصویر یک خط $\underline{l}$ تحت ایزومتری T یک خط[1] است.

Q. E. D.

تاکنون ثابت نمودیم که ایزومتری‌ها Isometries خطوط را به خطوط onto مبدل میکنند. ذیلاً ما دیگر خواص تحفظ ایزومتری‌ها را مطالعه و بررسی می‌نمائیم:

قضیـــهٔ ۹-۱ . Theorem

تصویر هر زاویه تحت یک ایزومتری یک زاویه است که وسعت زاویهٔ مفروض را دارا است.

یا بالفاظ دیگر:

اگر T یک ایزومتری Isometry و $\angle ABC$ مفروض باشند، پس $m\angle ABC = m\angle A'B'C'$ میشود.

(غرض از نوشتن m مبین زاویه یا اندازهٔ وسعت زاویه میباشد.)

(1) در اینجا مقصد ما از خط، خط مستقیم است.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ثبوت : Proof

ازینکه T یک ایزومتری است ، ازینجا داریم :

$AB = A'B'$ ، $BC = B'C'$ و $AC = A'C'$.

پس $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ بوده

و ازین نتیجه میشود که : $m\angle ABC = m\angle A'B'C'$ ،

Q.E.D.

نتیجه مهم 1-4 . Corollary

تصویر دو خط تحت یک Isometry ایزومتری باهم عمود اند در صورتیکه خود خطوط باهم عمود باشند .

قضیه ※ Theorem 1-5 .

تصویر دو خط تحت یک ایزومتری باهم موازی است در صورتیکه اگر و اگر خود اندوخط باهم موازی باشند .

یا بعبارهٔ دیگر :

اگر T یک ایزومتری و $\underline{l}$ و $\underline{t}$ دو خط طوریکه : $\underline{l}' = T(\underline{l})$ و $\underline{t}' = T(\underline{t})$ اند مفروض باشند ،

پس $\underline{t}' \parallel \underline{l}'$ است در صورتیکه اگر و اگر $\underline{t} \parallel \underline{l}$ باشد .

ثبوت : Proof

در قدم اول : اگر $\underline{t} \parallel \underline{l}$ بوده و $\underline{t}' \nparallel \underline{l}'$ باشد ،

درینصورت یک نقطه X موجود شده میتواند طوریکه $X \in \underline{t}'$ و هم $X \in \underline{l}'$ باشد . ازین نتیجه میشود که نقاط P و Q موجود شده میتواند طوریکه $P \in \underline{l}$ و $Q \in \underline{t}$ بوده و $T(P) = X$ و هم $T(Q) = X$ باشد !

ازینکه $\underline{t} \parallel \underline{l}$ است ، پس باید که P و Q دو نقطه متفاوت باشند .

حالانکه این محال بوده ، زیرا T را از ایزومتری بودن میکشد .

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ازین نتیجه میشود که فرضیه $\underline{t}' \nparallel \underline{s}$ محال بوده بنابران $\underline{t}' \parallel \underline{s}$ است.
قسمت دوم اثبات همانند را که از فرضیه $\underline{t}' \parallel \underline{s}$ اثبات $\underline{t} \parallel \underline{s}$ مطلوب است بحیث تمرین برای خواننده گذاشته میشود.

این مبحث را توسط حل مثال ذیل که تطبیق یک ایزومتری Isometry را درموضوع انعکاس تصویر یک خط را یک خط ارائه میکند ختم مینمایم.

مثال: اگر $\underline{t} = \{(x,y): y = 2x-3\}$ و $\underline{s} = \{(x,y): y = -x\}$ باشد معادله $\underline{t}' = M_s(\underline{t})$ را بنویسید.

حل:-
اولاً تصویر دو نقطهٔ خط $\underline{t}$ را تحت انعکاس M_s بدست آریم. از اینکه قضیه (3-1) تضمین میکند که $\underline{t}'$ یک خط مستقیم است، پس این خط عبارت از ان خطی است که از دو تصویر حاصل شده دو نقطهٔ که انتخاب آن ها بالای خط $\underline{t}$ مطلوب است عبور میکند. مطلوب خواهد بود که اگر نقاط تقاطع خط $\underline{t}$ را با محور y: $A(0,-3)$ و با محور x: $B(\frac{3}{2},0)$ بحیث نقاط طور انتخاب نمایم.
در سوال (11) سیت مسایل Problem set بیشتر از شما سوال گردیده بود اینکه: نشان دهید که برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ مستوی $M_s(P) = (-y,-x)$ میشود.
با استفاده ازین حقیقت ما نوشته میتوانیم:

$$M_s(A) = A' = (3,0)$$

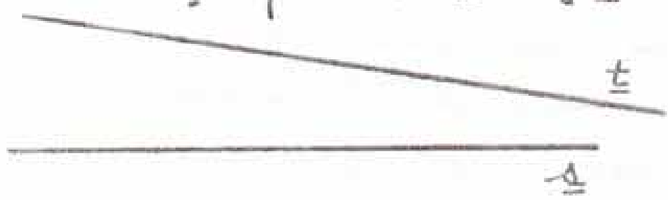
و همچنان $M_s(B) = B' = (0,-\frac{3}{2})$ میشود.
پس میل slope خط $\overleftrightarrow{A'B'}$ عبارت است از: $\frac{-3/2 - 0}{0-3} = \frac{1}{2}$.
و معادلهٔ خط $\underline{t}'$ عبارت از:
$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ میشود.

Q.E.D.

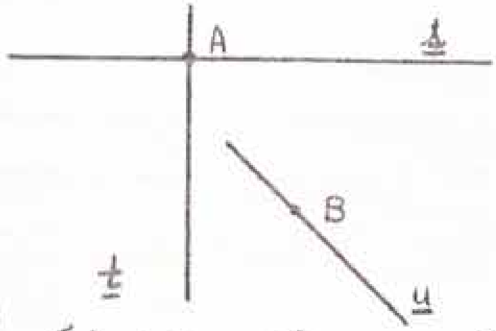
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

Problem Set . 1-5 تمرینات

1. دو خط $\underline{t}$ و $\underline{s}$ طبق شکل ذیل داده شده همراه با پرگار، خط‌کش $\underline{t}' = M_s(\underline{t})$ را رسم نمائید.



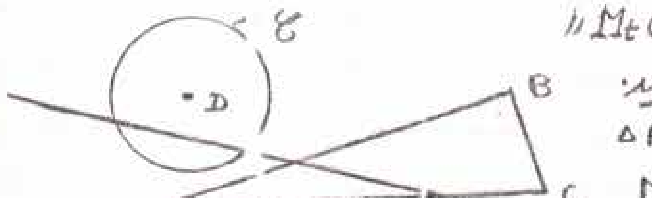
2. خطوط $\underline{s}$ ، $\underline{t}$ و $\underline{u}$ با نقاط A و B قرار ذیل داده شده‌اند. یک ایزومتری T را isometry طوریکه $B = T(A)$ و $\underline{u} = T(\underline{s})$ است، در نظر بگیرید.
$\underline{t}' = T(\underline{t})$
را رسم کنید در صورتیکه $\underline{t} \perp \underline{s}$ باشد.



3. خط $\underline{t}$ ، دایره C با مرکز D و مثلث ΔABC طوریکه در پایان ترسیم شده مفروض اند:

(a). $M_t(\Delta ABC)$ را رسم کنید.

(b). مثلث ΔABC با $M_t(\Delta ABC)$ چه رابطه دارد؟



(c). $M_t(C)$ را رسم کنید.

4. خط $\underline{t}$ مفروض است:

(a). یک مثلث را رسم کنید که روی خودش (بر خودش) تحت M_t منطبق شود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

(b). یک دایره را رسم کنید که بنابر M_t روی خودش (برخودش) منطبق شود،

(c). یک چهارضلعی را رسم کنید که تحت M_t برخودش منطبق شود.

5. اگر $\underline{s}=\{(x,y): x+2y=1\}$ و $\underline{t}=\{(x,y): x=-1\}$ موجود باشد، معادله $\underline{s}'=M_t(\underline{s})$ را بنویسید.

6. اگر $\underline{t}=\{(x,y): 3x+4=y\}$ و $\underline{s}=\{(x,y): y=2\}$ بوده، معادله: $\underline{t}'=M_s(\underline{t})$ را بنویسید.

7. اگر $\underline{s}=\{(x,y): y=0\}$ و $\underline{t}=\{(x,y): y=x\}$ و $\underline{r}=\{(x,y): x=2\}$ باشند، معادله هر یک از افاده‌های ذیل را بنویسید:

(a). $M_s(\underline{t})$ ، (b). $M_t(\underline{s})$ ،

(c). $M_s(\underline{r})$ ، (d). $M_t(\underline{r})$ را.

8. اگر $\underline{s}=\{(x,y): y=x\}$ و $\underline{t}=\{(x,y): y=-3x+2\}$ باشند، معادله $\underline{t}'=M_s(\underline{t})$ را بنویسید.

9. اگر $\underline{u}=\{(x,y): y=-x\}$ و $\underline{v}=\{(x,y): 3y=x+3\}$ باشند، مشخص کنید که آیا نقطهٔ $A(-2,-4)$ روی خط $\underline{v}'=M_u(\underline{v})$ واقع میشود ویا خیر؟

10. اگر $\mathcal{C}=\{(x,y): (x-2)^2+(y-3)^2=4\}$ و T عبارت از یک انتقال مستوی که نقطهٔ $(2,3)$ به نقطهٔ $(1,-7)$ منتقل میگردد باشد، معادله $T(\mathcal{C})$ را بنویسید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

11. پنج عدد خط: $\underline{t}$، $\underline{t'}$، $\underline{s}$، $\underline{s'}$ و $\underline{r}$ داده شده اند طوریکه $\underline{t'}=M_r(\underline{t})$ و $\underline{s'}=M_r(\underline{s})$ میباشند؛ اگر $\underline{s'}\parallel\underline{t'}$ باشد ثابت کنید که $\underline{s}\parallel\underline{t}$ نیز میباشد.

12. خطوط $\underline{t}$، $\underline{s}$ و $\underline{s'}$ طوریکه $\underline{s'}=M_t(\underline{s})$ است مفروض اند، نشان دهید که کدام یک از افاده های ذیل حقیقت دارد:
(a). اگر $\underline{s}\parallel\underline{s'}$ باشد، پس $\underline{t}\parallel\underline{s}$ است.
(b). اگر $\underline{s}=\underline{s'}$ باشد، پس $\underline{t}=\underline{s}$ میشود.
(c). اگر $\underline{s}\cap\underline{s'}=\{A\}$ باشد پس $A\in\underline{t}$ میباشد.

13*. قضیه اینکه: "اگر $\underline{s}\perp\underline{t}$ باشد، پس $\underline{t}=M_s(\underline{t})$ میشود" را ثابت کنید.

14. اگر $\underline{s}=\{(x,y): y=2x-1\}$ باشد معادله خط $\underline{t}$ را طوریکه $\underline{t}\neq\underline{s}$ بوده و $M_s(\underline{t})=\underline{t}$ میشود، بنویسید.
آیا $\underline{t}$ یگانه unique است؟

15. اگر $\underline{s}=\{(x,y): y=2x+3\}$ و $\underline{t}=\{(x,y): y=2x+1\}$ باشد، معادلهٔ $\underline{t'}=M_s(\underline{t})$ را بنویسید.

16. یک تحویل T Transformation را تمام نقاط $P(x,y)$ توسط $T(P)=(x+1, 2y)$ تعریف شده؛
(a). اگر $A=(0,3)$ و $B=(1,-1)$ باشد
(i) $A'=T(A)$ و $B'=T(B)$ را تعیین کنید.
(ii) معادله خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{A'B'}$ را بنویسید.
(b). اگر نقطهٔ $C(c,d)$ یک نقطه خط $\overleftrightarrow{AB}$ باشد، ثابت کنید که آیا نقطه C' آن بالای $\overleftrightarrow{A'B'}$ واقع شده میتواند یا نمیتواند؟

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

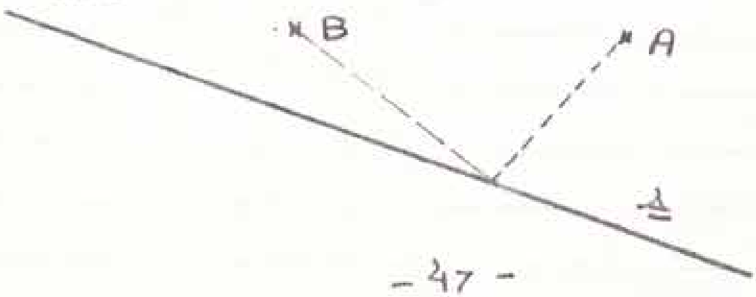
(c). اگر D(e,f) یک نقطهٔ خط $\overleftrightarrow{A'B'}$ باشد، ثابت کنید که D' شامل $\overleftrightarrow{AB}$ بوده میتواند ویا نمیتواند؟

(d). قضیهٔ (3-1) بیان میکند که «اگر یک تحویل T ایزومتری باشد درینصورت تصویر یک خط تحت T یک خط میباشد.» آیا عکس این قضیه نیز حقیقت دارد؟

17. یک نقطهٔ A و یک تحویل T که برای تمام نقاط P طبق ذیل تعریف شده اند، فرض کنید:
اگر P=A باشد پس T(P) = P میشود،
اگر P≠A باشد، درینصورت T(P) = P' بوده درحالیکه P' نقطهٔ وسطی $\overline{AP}$ است.
(a). آیا T یک ایزومتری است؟
(b). کدام ها از خواص: 3، 4 و 5 که درمتن ذکر شده اند T دارا میشود؟
(c). اگر C یک دایره به شعاع r، مرکز C باشد، T(C) را توضیح کنید.

18. چند انعکاس خطی افاده های ذیل را ایجاب خواهند کرد:
(a). یک مثلث متساوی الاضلاع مفروض را بر (روی) خودش؟
(b). یک مستطیل مفروض را بر (روی) یا onto خودش؟
(c). یک چندضلعی (n ضلعی) منتظم مفروض را برخودش؟

19*. نقاط A، B و خط L طبق شکل ذیل مفروض اند:
(a). با استفاده از ایزومتری مناسب نقطهٔ P را بالای خط L تعیین کنید طوریکه ناصله AP + PB اصغری گردد.
(b). ثابت کنید اگر Q کدام نقطهٔ دیگری خط L باشد، درینصورت AP + PB < AQ + QB میشود.



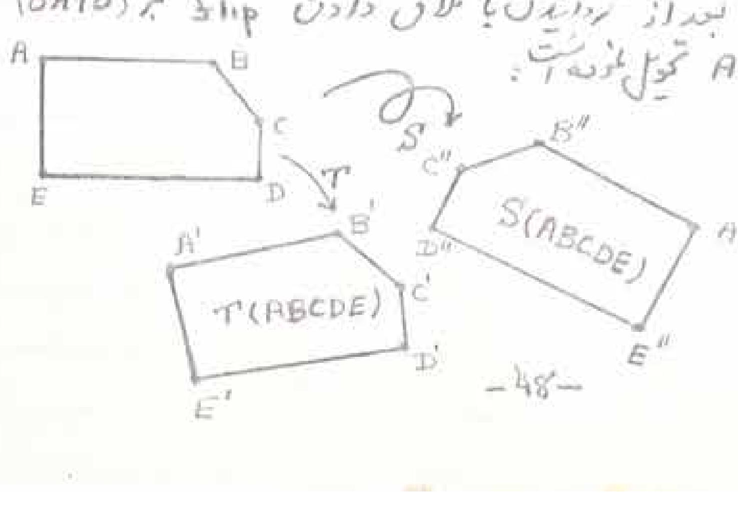
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

1-6. هم‌فاصلگی و یا ایزومتری‌های هم‌جهت و مخالف

Direct And Opposite Isometries

در مبحث پیشتر با خواص تحفظ ایزومتری‌ها Isometries را مطالعه نمودیم. بنابر این خواص با ایزومتری‌ها را بحیث تحول و حرکت دهنده: نقاط، خطوط و مضلعات در یک مستوی تصور میتوان نمود. از اینکه ایزومتری‌ها حافظ طول قطعات خط، حافظ اندازهٔ وسعت زوایا بین خطوط اند؛ پس انها را بحیث حرکات ویا حمالان صادق که بارشان را بدون کم و کاست و بدون تخریب و شکست بمنزل میرسانند میتوان تصور نمود. یا بعبارت دیگر ایزومتری‌ها اشکال سپرده شانرا بدون تغییر شکل تحول و نقل میدهند.

اساساً دو نوع ایزومتری‌ها وجود دارند. یکی اندسته ایزومتری‌ها است که اشکال، مستقیماً از یک محل (حالت) به محل (حالت) تحول و نقل میدهند. دیگر اندسته ایزومتری‌ها است که اشکال را حین تحول و انتقال از یک حالت بحالت دیگر flip و تلاق میدهند. در شکل (1-12) خط خواهید کرد که ایزومتری T مضلع ABCDE مستقیماً بر (onto) مضلع A'B'C'D'E' تحول داده، حالانکه ایزومتری S انرا بعد از گردانیدن یا تلاق دادن flip بر (onto) A"B"C"D"E" تحول نموده است:

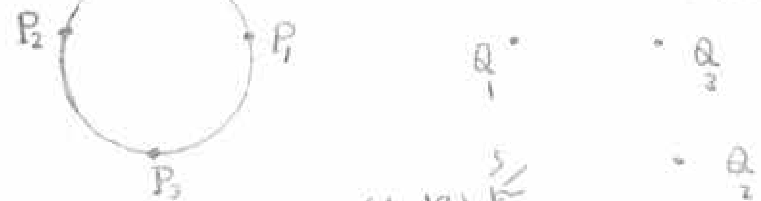


شکل (1-12)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

تا الحال با یک مفکوره خیره و غیر دقیق درباره فرق تناسبی که بین اشکال هندسی موجود است درک نموده‌ایم. اکنون سعی میورزیم تا یک توضیح دقیق که شکل ریاضی را داشته باشد درینباره عرضه نمائیم. برای رسیدن باین هدف اولاً مفکوره ترتیب و orientation یک سه گانه ordered triple سه نقطه که مشترک الخط collinear نباشند توضیح میدهیم.

اگر (P_1, P_2, P_3) یک سه گانه مرتب ordered triple که مشترک الخط نیستند بوده باشد، درینصورت یک دایره C که از سه نقطه مذکور عبور کند موجود شده میتواند. حال اگر از نقطه P_1 حرکت نموده اولاً به نقطه P_2 و متعاقباً به نقطه P_3 برسیم و این حرکت ما به سمت حرکت عقربه ساعت باشد درینصورت ما میگوئیم که سه گانه (P_1, P_2, P_3) به ترتیب جهت دوران ساعت ترتیب یافته اند. این نوع ترتیب را بنام جهت دوران ساعت Clockwise orientation یاد میکنند. و اگر این جهت حرکت ما از P_1 به P_2 و به P_3 خلاف سمت حرکت عقربه ساعت باشد، درینصورت میگویند که سه گانه مرتب (P_1, P_2, P_3) خلاف دوران ساعت ترتیب یافته و این نوع ترتیب را بنام خلاف جهت دوران ساعت Counter Clockwise Orientation یاد مینمایند. در شکل (1-13) سه گانه مرتب (P_1, P_2, P_3) یک ترتیب جهت دوران ساعت clockwise orientation را دارا است؛ در حالیکه ترتیب سه گانه (Q_1, Q_2, Q_3) خلاف دوران ساعت Counter Clockwise Orientation میباشد.



شکل (1-13)

گفته میشود که یک تحویل حافظ ترتیب (حفظ کننده ترتیب) است در صورتیکه برای هر سه گانه مرتب (P_1, P_2, P_3) که مشترک الخط نیستند تصویر دنبال یعنی (P_1', P_2', P_3') دارای همان ترتیب سه گانه موضوع باشند.

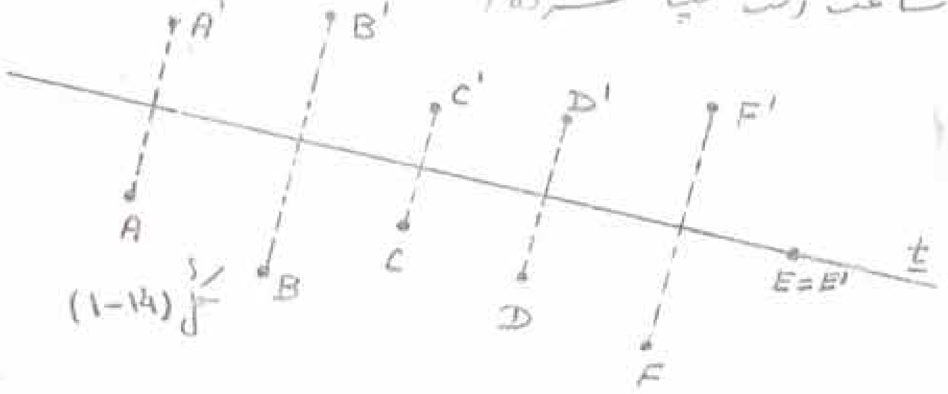
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

بهمین قسم گفته میشود که یک تحویل یک ترتیب را چپه میسازد - reverses the orientation - درصورتیکه برای هر سه گانه مرتب ordered triple که مشترک الخط نباشند ترتیب تصویر سه گانه مذکور خلاف ترتیب orientation opposite آنها باشد.

یک مپینگ mapping هم جهت (مستقیم) direct گفته میشود درصورتیکه ترتیبا orientation را حفظ کند.

یک مپینگ mapping مخالف opposite گفته میشود، درصورتیکه ترتیب orientation را سرچپه (معکوس) سازد.

در شکل (۱-۱۴) ذیل ملاحظه میرسد که انعکاس خطی M_t یک سه گانه مرتب (A,B,C) خلاف دوران ساعت ترتیب یافته oriented را به یک سه گانه مرتب (A',B',C') هم جهت دوران ساعت ترتیب نموده است. و بهمین قسم یک سه گانه (D,E,F) که به جهت دوران ساعت ترتیب یافته به یک سه گانه مرتب (D',E',F') که ترتیب آن خلاف جهت دوران ساعت است مپ گردیده است.



شکل (۱-۱۴)

اگر شما چند سه گانه مرتب که مشترک الخط نباشند انتخاب نموده و تصویر آنها را تحت انعکاس خطی بدست آورید ملاحظه خواهید نمود

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

که انعکاسات خطی ترتیب orientation تصاویر را چپه (معکوس) میسازند.
حقیقت این موضوع را بحیث اصل موضوعه Postulate ذیلاً بیان میکنیم:

اصل موضوعه : Postulate
هر انعکاس خطی یک isometry ایزومتری مخالف است.

هر ایزومتری یک ایزومتری مخالف نیست؛ ولی یک زیبائی که در ایزومتری isometry موجود است اینست که اگر ترتیب orientation یک سه گانهٔ مرتب ordered triple را چپه ساخت، پس ترتیب تمام سه گانه های مرتب را چپه میسازد؛ و اگر ترتیب orientation یک سه گانهٔ مرتب ordered triple را حفظ نمود، پس ترتیب تمام سه گانه های مرتب را حفظ میکند. یا بالفاظ دیگر قضیهٔ ذیل اقامه شده میتواند:

قضیه theorem . 1-6:
هر ایزومتری isometry یا تحویل مستقیم (صریح) direct و یا تحویل مخالف opposite میباشد.

حال باید در موقعی قرار نداریم که ثبوت قضیهٔ فوق را بسهولت اثبات نمائیم؛ چه ثبوت قضیهٔ فوق بعداً نزد ما خیلی سهل خواهد بود. فعلاً آنرا بتعویق می اندازیم.

چون هر ایزومتری بیکی ازین دو دسته قرار داده شده میتواند، چه موضوع با آن ارتباط دارد که چنین تحویل و انتقال آیا «گردانیدن» و یا «قلاق» "flip over" صورت میگیرد و یا خیر!

اگر در شکل (1-12) پیشتر دوباره مراجعه شود دیده میشود که اگر مخمس ABCDE را توسط یک قطعهٔ مقوا که باندازهٔ آن بریده شود بپوشانیم.

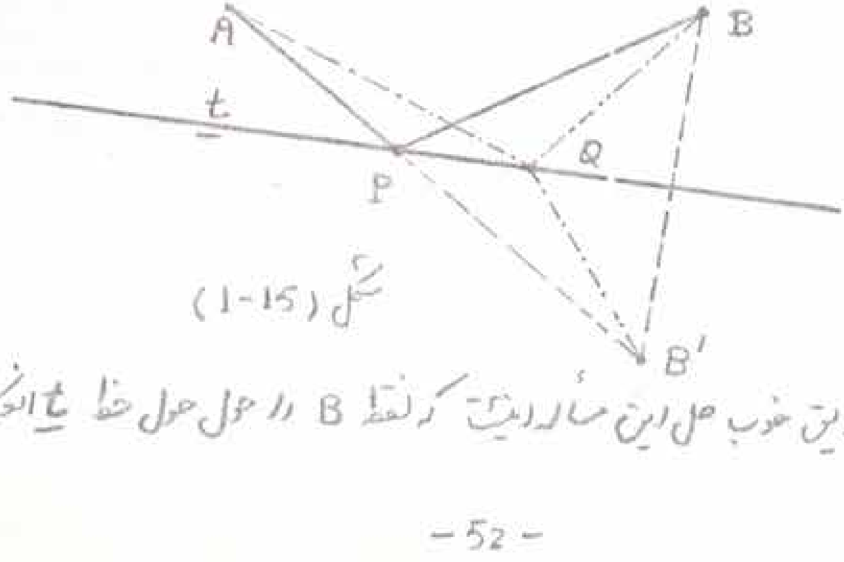
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

توسط عین مقوا با لغزانیدن آن روی صفحه ما میتوانیم که مضلع همگون آن $A'B'C'D'E'$ را نیز بپوشانیم، حالانکه بدون ملاق دادن مقوا نمیتوانیم که مضلع $A''B''C''D''E''$ را بپوشانیم. بنابران گفته میشود که T یک تحویل هم جهت و مستقیم Direct بوده درحالیکه S یک تحویل مخالف opposite میباشد.

گرچه تاکنون قضیه (1-6) را با اثبات نرسانیده توانسته ایم موقتاً حقیقت آنرا میپذیریم. درحال حاضر برای دریافتن اینکه آیا یک ایزومتری هم جهت و مستقیم Direct است و یا مخالف opposite؟ کافی است تا بدانیم که ترتیب تصاویر یک سه گانهٔ مرتب ناشی از ایزومتری مذکور با ترتیب خود آن سه گانه چه رابطه دارد!

برای نحوهٔ مطالعه و بررسی مفکورهٔ ترتیب و orientation را کنار گذاشته و بحل مسأله که در دستهٔ شامل problem set بحث بیشتر قرار داده شده می پردازیم.

مسأله مورد نظر تعیین یک نقطه بالای خط مطلوب t است که توسط اتصال آن فاصله بین دو نقطه که بیک طرف خط موجود واقع اند اصغری شود.



شکل (1-15)

یک طریق خوب حل این مسأله اینست که نقطه B را حول خط t انعکاس داده

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

و نقطه B' را طوری که: $B' = M_t(B)$ باشد بدست آریم. بعداً

نقطه P را طوری که: $P = \overleftrightarrow{AB'} \cap t$ حاصل می‌نماییم. این P نقطه‌ای است

که مجموعه فواصل بین A و B را اصغری minimum می‌سازد.

برای اینکه ثابت سازیم که P نقطهٔ مطلوب است ما یک نقطهٔ دیگر

خط $\underline{t}$ فرضاً Q را انتخاب نموده و طول $(AQ+QB)$ را با طول

$(AP+PB)$ مقایسه می‌نماییم. چون $\underline{t}$ ناصف عمودی قطعه خط

$\overline{BB'}$ است، درینصورت ما داریم:

$$AP+PB = AP+PB'$$
$$= AB'$$

از طرف دیگر: $AQ+QB = AQ+QB'$

باساس غیر مساوات مجموعهٔ اضلاع یک مثلث ما داریم:

در مثلث $\triangle AB'Q$: $AQ+QB' > AB'$

ازین نتیجه می‌شود که:

$$AQ+QB > AP+PB$$

Q.E.D.

مسألهٔ فوق از دستهٔ مسایلی که بنام مسایل اعظمی Maximum و

اصغری Minimum یاد می‌شوند می‌باشد. این دستهٔ سوالات موضوعات مانند ذیل را

می‌پرسند:

یک توپ اگر بسرعت 10 متر فی ثانیه عموداً بالا پرتاب شود

چقدر بلند رفته می‌تواند؟ ویا اینکه:

کلانترین ساحهٔ مستطیل شکلی که توسط جال که باندازه

5000 متر طول دارد احاطه شده می‌تواند چقدر ساحت دارد؟

ویا اینکه: از چند راه موجود در شخص کدام یک از آن‌ها کمترین وقت را

ایجاب میکند که پیموده شود؟

موضوعات اعظمی و اصغری Maximum & Minimum خود موضوع دیگر

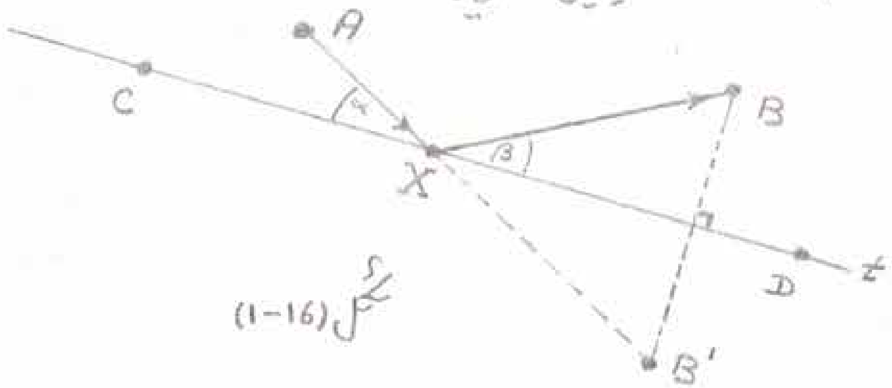
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ریاضیدانان بوده و در آخر این مبحث یکعده از این قبیل مسائل بحیث تمرین ذکر میکنیم.

قابل توجه است که طریقه حل اصولی ساختن مسأله فوق بحل چندین مسأله دیگر که ظاهراً به مسأله فوق بی رابطه به نظر میرسد قابل تطبیق است. اینک چند همچو مسایل را ذیلاً بیان میکنیم:

(1). اگر یک دسته اشعه از نقطه (روشن) A منشأ گرفته و توسط یک آئینه t منعکس ساخته میشود. محل t را طوری تعیین کنید تا اشعه منعکسه از نقطه (روشن) B عبور کند.

(2). در یک بازی بلیارد: میل داریم یک توپ را که در نقطه A قرار دارد ضربه زنیم طوریکه به دیوار برخورد و بکدام نقطه X دیوار میز بلیارد (توپ) عودت نموده و با یک توپ دیگر که در نقطه B روی میز قرار دارد تصادم (برخورد) کند. نقطه X را تعیین کنید.



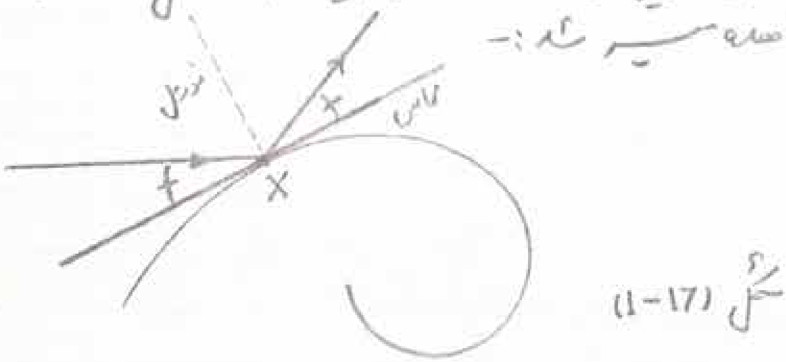
شکل (1-16)

(3). بصورت مجرد و Abstract بعضاً پرسیده میشود که نقطه X را بالای خط t تعیین نمائید طوریکه $\angle AXC \cong \angle BXD$ گردد.

از اینکه حرکت عودت برخورد یک توپ در یک سطح هموار و منعکس شدن اشعه نور توسط یک آئینه حصر کردیم اینها عین اصل اساسی

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

عین اصل ریاضی را که بعبارت انطباق پذیری زاویهٔ وارده $\angle AXC$
incidence angle با زاویهٔ منعکسه $\angle BXD$ reflection angle
ثابت پیروی میکنند. باز کمی توضیح و تشبیه بیشتر این اصل
ریاضی بالا موضوعات انعکاسات در سطوح منحنی نیز
قابل تطبیق میباشد. توضیح بیشتر که حل همچو مثال
ایجاب میکند اینست: که درینصورت زاویای وارده و منعکسه
در سطوح منحنی با شعاع مماس tangent و نورمل
درنقطه تماس تعیین میشوند. چنانچه این موضوع در شکل (1-17)
در ذیل بخوبی مشاهده شد:-



شکل (1-17)

تمرینات: 1-6. Problem Set

1. با ملاحظهٔ شکل ذیل فرضاً: $T(P)=P'$، $T(Q)=Q'$، $T(R)=R'$ و $S(P)=P''$، $S(Q)=Q''$ و $S(R)=R''$ بوده درصورتیکه T و S ایزومتری ها باشند اینها را بدسته های direct و opposite دسته بندی کنید:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

2. یک ایزومتری T که نقطه A را بر X، B را بر Y و C را بر Z تصویر میکند. اگر T یک ایزومتری مخالف opposite باشد نقطه Z را تعیین کنید.

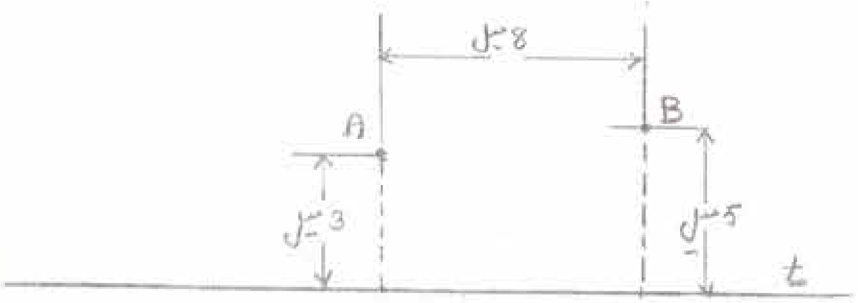
3. یک ایزومتری S، D را بر W، E را بر Z و F را بر U تصویر میکند. اگر S یک ایزومتری هم‌جهت مستقیم direct باشد نقطه U را تعیین کنید.

4. یک نقطه A و دو تحویل Transform های T و S که بطریق ذیل تعریف شده اند مفروض اند:
$T(A) = A$ و $S(A) = A$ است. درصورتیکه $P \neq A$ باشد،
درصورت $T(P) = P'$ و $S(P) = P^*$ میشود درحالیکه P' نقطه وسطی $\overline{AP}$ و A نقطه وسطی $\overline{PP^*}$ میباشند. نوعیت ایزومتری‌های T و S را از حیث مستقیم (هم‌جهت) و مخالف تعیین کنید.

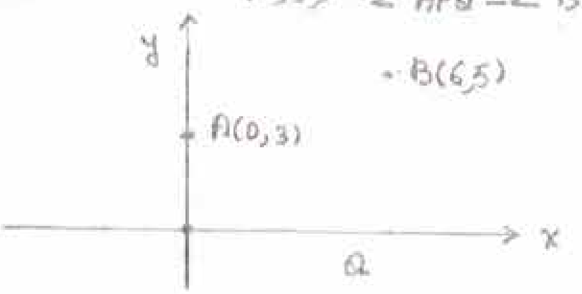
5. یک دسته اشعه از نقطه $A(6,4)$ بطرف نقطه $P(2,2)$ روی یک آیینه که توسط افاده: $L=\{(x,y) : y=x\}$ ارائه میشود فرستاده شده است.
بکدام نقطه دیوار که توسط افاده: $t=\{(x,y): x=-1\}$ ارائه شده میتواند اشعه منعکسه می‌تابد؟

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

6. A و B دو منزل در طرف لین عمومی برق را طبق شکل ذیل ارائه مینماید. محلی را تعیین نمایید که در آن ترانسفارمر برای هر دو منزل A و B نصب گردد طوریکه مصرف مجموع طول سیم اصغری گردد. ضمناً اندازه طول سیمی را که به هریک از منازل A و B تمدید میشود حساب کنید.



7. در شکل ذیل مختصات نقطهٔ P را روی محور x تعیین نمایید طوریکه $\angle APQ \cong \angle BPQ$ گردد.



8. یک توپ از نقطهٔ A طبق شکل ذیل یک سطح استوانه‌ای را در نقطهٔ B اصابت میکند بعداً از اصابت مسیر آنرا تعیین کنید.

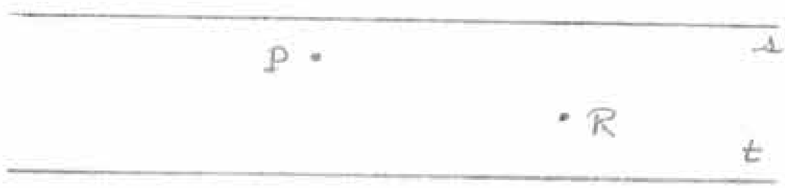
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

9. دو خطوط موازی s و t با دو نقطه P و R طبق شکل زیر داده شده‌اند.

(a). کوتاه‌ترین مسیر بین نقاط P بطرف R را رسم کنید طوریکه اول: خط s و بعدش به t اصابت کند.

(b). ثابت کنید که ترسیمات شما حقیقت دارد.

(c). آیا فاصله از P بطرف R که اول s و بعدش t را اصابت میکند عین فاصله ای است که از P بطرف R بعداً اول t و بعدش s را اصابت نماید! این هر دو فاصله را باهم مقایسه کنید.

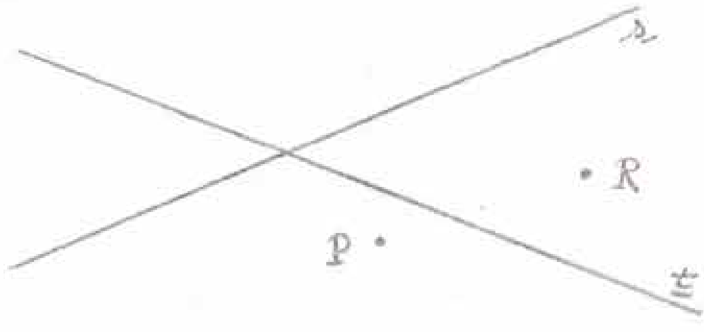


10*. خطوط: t، s و نقاط P و R مفروض اند:

اگر $P'=M_s(P)$ ، $P''=M_t(P)$ ، $R'=M_s(R)$ و $R''=M_t(R)$ باشند:

(a). P'' و R'' را رسم کنید.

(b). فواصل: PR و $P''R''$ را مقایسه کنید.



11*. اگر T و S دو تحویل مفروض باشند طوریکه برای تمام نقاط P ، $T(P) = P'$ و $S(P) = P''$ گردد. اگر تحویل W منظور گرفته شود طوریکه برای تمام نقاط P ، $W(P) = P''$ گردد. آیا W نیز یک تحویل میباشد؟ و یا خیر؟ نتیجه را خود استدلال کنید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

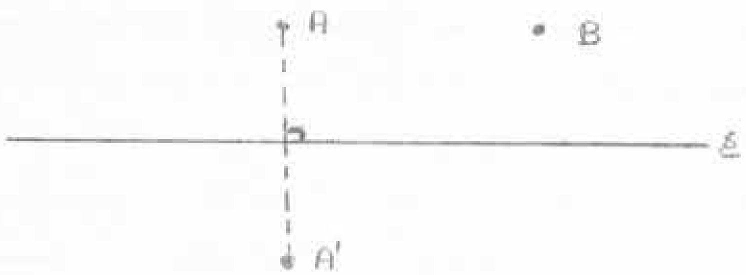
12. فرضاً R یک تحول Transformation باشد که برای تمام نقاط $P(x, y)$ توسط رابطه: $R(P)=(-y, x)$ تعریف شود:

(a). ایزومتری بودن ویا ایزومتری نبودن R را ثابت کنید.

(b). آیا R یک ایزومتری Direct است ویا opposite ایزومتری؟

(c). تأثیر هندسی R را به هر یک از نقاط مفروض توضیح کنید.

13. یک خط s، نقاط A، B و A' مفروض اند، طوریکه $A'=M_s(A)$ بوده و $\overleftrightarrow{AB}$ موازی به s است. تنها همراه خط کش (غیر مندرج) نقطهٔ B' را تعیین نمائید طوریکه: $B'=M_s(B)$ گردد.



14. اگر $s=\{(x,y): y=x+1\}$ و $t=\{(x,y): 2y=5x\}$ و نقطه A
$A(0,3)$ مفروض باشند

(a). دریابید: $A_1'=M_s(A)$ و $A_1''=M_t(A_1')$ را بدست آرید.

(b). ثانیاً: $A_2'=M_t(A)$ و $A_2''=M_s(A_2')$ را حاصل کنید.

(c). آیا فاصله $A_1'A_1''$ با فاصله $A_2'A_2''$ همین طول است؟

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

21 Sept., 1979. Trieste

فصل دوم

ترکیب تحویلات

Composite Transformations

2-1 . تصویرکشی های پی در پی

Mappings Taken In Succession

درین فصل مطالعات خویش را درباره تحولات (تحول ها) Transformations باساس بررسی امکانات تطبیق دو و یا چند تصویرکشی (میپنگ ها) ی پی در پی توسعه و انکشاف میدهیم . برای افاده بهتر موضوع ابتدا یک مثال غیر عددی را قرار ذیل توضیح مینمائیم .

یک تابع M را طوری تعریف مینمائیم که هر نفر را با مادرش ارتباط بخشد ؛ بهمین قسم یک تابع F را بنام «تابع پدری» که ارتباط هر نفر را با پدرش ارتباط میدهد تعریف میکنیم . با استفاده از ترکیب این دو تابع یک تابع نوعی بوجود می آید که توسط آن یک نفر تشخیص شده میتواند . بطور مثال اگر بخواهیم شخصی را بنام «داود محمد» اولاً بنام مادرش و سپس زیرا بنابر نام پدر مادرش (پدرکلان مادری) معرفی نمائیم درینصورت مینویسیم :-

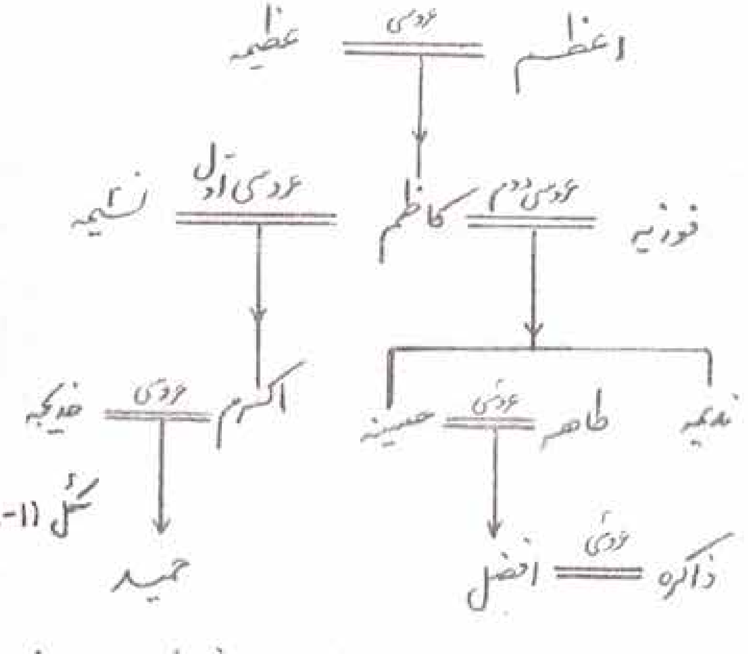
FM(داود محمد)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

این علامه گذاری افاده میکند: که اولاً «داد محمد» باشناس اسم مادرش وثانیاً بنابر نام پدر مادرش معرفی میشوند. بهمین قسم اگر معرفی شخصی بنام «فاطمه» اولاً باشناس نام پدر وثانیاً باشناس نام مادر مطلوب باشد درینصورت موصوفه را چنین معرفی میداریم:

$$M[F(\text{فاطمه})] \quad \text{ویا} \quad MF(\text{فاطمه}) \;.$$

برای تنویر کردن بیشتر این موضوع شجرهٔ یک فامیل خیالی را طبق ذیل ارائه نموده وباشناس آن مفکورهٔ فوق را بررسی مینمائیم:



شکل (2-1)

حال اگر بخواهیم که FM(افضل) را بدانیم بنابر شجرهٔ فامیلی شان انرا طبق ذیل تعیین نموده میتوانیم:

$$
\begin{aligned}
FM(\text{افضل}) &= F[M(\text{افضل})] \\
&= F(\text{حسینه}) \\
&= \text{کاظم}
\end{aligned}
$$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

اگر بجملهٔ گفته فوق دقت شود ملاحظه میشود: تابعی که تطبیق آن اولتر مورد نظر است بدومین Dmn مربوط ترکیب نگاشته شده است. چنانکه در جملهٔ گذاردن (وصل) FM چون تطبیق M (تابع مادری) اولتر مورد نظر است، پس M را بدومین مربوط؛ [وصل] ترکیب نگاشته اند.

با استفاده از شجرهٔ فامیلی شان ما میتوانیم که: MF(حمید) را بشناسیم؛ درینصورت:

$$\begin{aligned} MF(\text{حمید}) &= M[F(\text{حمید})] \\ &= M[\text{اکرم}] \\ &= \text{ناهید} \end{aligned}$$

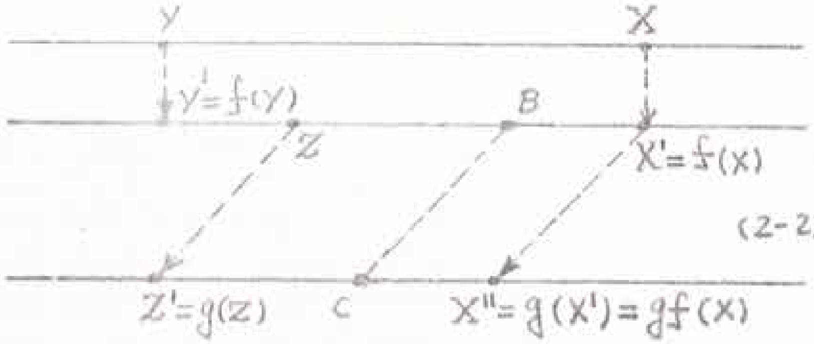
آیا گفته میتوانید که MF(حمید) با حمید و هم چنان FM(وصل) با وصل چه قرابت دارند؟

مثال دیگر ترکیب دو تابع:

سه خط $\underline{s}$، $\underline{t}$، و $\underline{u}$ با دو نقطهٔ B و C طوریکه B بالای $\underline{t}$ و C بالای $\underline{u}$ واقع اند طبق شکل ذیل مفروض اند.
تابع f برای تمام نقاط $Y \in \underline{s}$ بنابر $Y'=f(Y)$ از $\underline{s}$ بطرف $\underline{t}$ تعریف شده طوریکه هر نقطهٔ Y خط $\underline{s}$ را به یک نقطهٔ Y' خط $\underline{t}$ درحالیکه Y' پای عمودی (مرتسم عمودی) Y بالای $\underline{t}$ است مرتسم میکند.
هم چنان g یک تابعی است که بنابر افادهٔ: $Z'=g(Z)$ از $\underline{t}$ بطرف $\underline{u}$ تعریف شده طوریکه هر نقطهٔ Z خط $\underline{t}$ یک نقطهٔ Z' خط $\underline{u}$ مرتسم میکند، درحالیکه Z' نقطهٔ تقاطع $\underline{u}$ با دستهٔ قطعات $\overline{ZZ'}$ که موازی به $\overline{BC}$ رسم میشوند میباشند. توجه نمائید که مپنگ f از دومین $\underline{s}$ Dmn به رنج Rng $\underline{t}$ بوده؛ حالانکه مپنگ g از دومین $\underline{t}$ Dmn به رنج Rng $\underline{u}$ صورت میگیرد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ترکیب دو تابع f و g که تابع f توسط g تعقیب میشود توسط علامه gf ارائه میشود. تابع مرکب gf مذکور (در شکل فوق) بهر نقطه X خط a یک X'' خط c را که تعیین آن قرار ذیل صورت گرفته میتواند ارتباط میدهد. برای تعیین نقطه X'' (که عبارت از تصویر تصویر X است) اولاً X' را از تطبیق f بنابر رابطه $X'=f(X)$ بدست آورده و سپس از اثر تطبیق g بالای X'، نقطه X'' را از رابطه: $X''=g(X')$ حاصل مینمائیم.



شکل (2-2)

استخراج تصویر نهائی طبق ذیل ارائه شده میتواند:

$$\begin{aligned} gf(X) &= g[f(X)] \\ &= g[X'] \\ &= X'' \end{aligned}$$

ملاحظه میشود که تابع مرکب gf فوق دارای دومین f یا Dmn و رنج g یا Rng میباشد. حال تعریف ذیل را راجع به تابع ترکیب و یا ترکیب توابع که این تعریف عمومیت همین مفکوره افاده و بیان میکند اظهار میکنیم:

تعریف:

اگر دو مپنگ F و G طوری که رنج F یا Rng F شامل دومین Dmn G بوده در نظر گرفته شود، پس ترکیب GF عبارت از مپنگ ای است که برای هر نقطه P دومین F توسط افاده: $GF(P) = G[F(P)]$ تعریف میشود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ملاحظه میشود که تعریف فوق بیشتر اطراف موضوع رنج Rng و دومین Dmn پیچیده است. هدف این پیچیدن اینست که به هر نقطهٔ دومین Dmn F موجودیت یک تصویر خوب مشخص شده را تضمین کند. زیرا اگر برای بعضی نقاطی مانند K ، اتفاق افتد که F(K) خارج دومین Dmn G واقع گردد، پس درینصورت G[F(K)] غیر قابل تعریف (لاتعین) undefined میگردد.

اگر به مثال اخیر بالا دوباره مراجعه شود ملاحظه میشود تابعی که از ترکیب "fg" حاصل شود موجود شده نمیتواند. زیرا نقاط مربوط رنج Rng g در دومین Dmn f (که عبارت از یک بُنت) واقع نمیشوند.

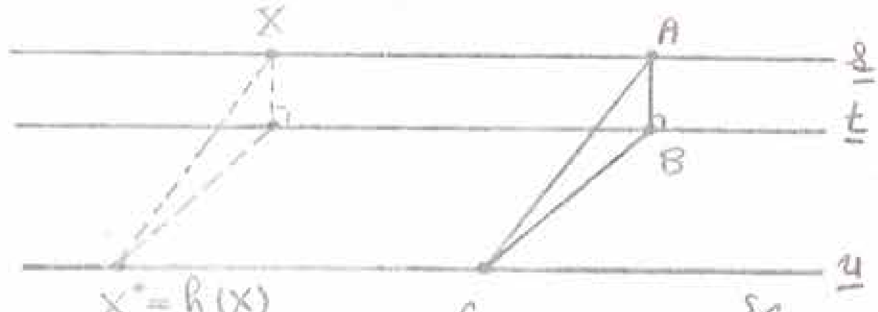
زمانیکه راجع بترکیب توابع که تحویل (تبدیل) Transformation از صحبت میشود درینصورت مشکل غیرقابل تعریف شدن تابع ترکیب بروز نمیکند. زیرا تحویلات (تحویل ها) تمام نقاط مستوی را بر مستوی onto مپ میکنند. پس تحت یک تحویل Transformation تصویر هر نقطه (آن) بالضرور در دومین تحویل Transformation دومی واقع میشود.

قبل از نتیجه (بررسی) به توابع F ، M ، f و g که بیشتر توضیح شد خاتمه بخشیم؛ قابل ملاحظه است حقیقت اینکه نتیجه ویا ترکیب های FM و fg (هر دو اینها) بدون مراجعه به توابع مرکبه شان توضیح شده میتوانند. چنانچه FM بحیث یک تابعی که به هر نفر پدرکلان مادری او را ارتباط میدهد توضیح یافته میتواند.

بهمین قسم تابع ترکیب fg بصورت ذیل توضیح شده میتواند:
دادن یک نقطه A خط s را انتخاب مینمائیم طوریکه $\overline{AB}$ بالای نقطه B خط t عمود گردد. پس یک تابع h را تصور مینمائیم

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

طوریکه برای هر نقطهٔ X خط $\underline{s}$ توسط آن دو. $h(X) = X^*$ تعریف گردیده
و در حالیکه X^* یک نقطهٔ خط $\underline{u}$ است که از تقاطع $\underline{u}$ با قطع خط
$\overline{XX^*}$ موازی $\overline{AC}$ بدست می آید.



شکل (2-3)

در صورتیکه $X'' = gf(X)$ باشد بسهولت ثابت شده میتواند که:
$\overline{XX''}$ موازی $\overline{AC}$ است و از این نتیجه میشود که:
$X^* = X'$ است.

چون تابع h دارای همین دومین Dmn تابع ترکیب gf است و علاوه بر آن
برای هر نقطه X این دومین: $h(X) = gf(X)$ میشود.
پس ما میگوییم که توابع h و gf باهم مساوی equal اند.

تعریف:

دو تابع L و T باهم مساوی گفته میشوند درصورتیکه هردو آنها
دارای همین دومین Dmn بوده و برای هر عنصر X این دومین
$L(X) = T(X)$ گردد.

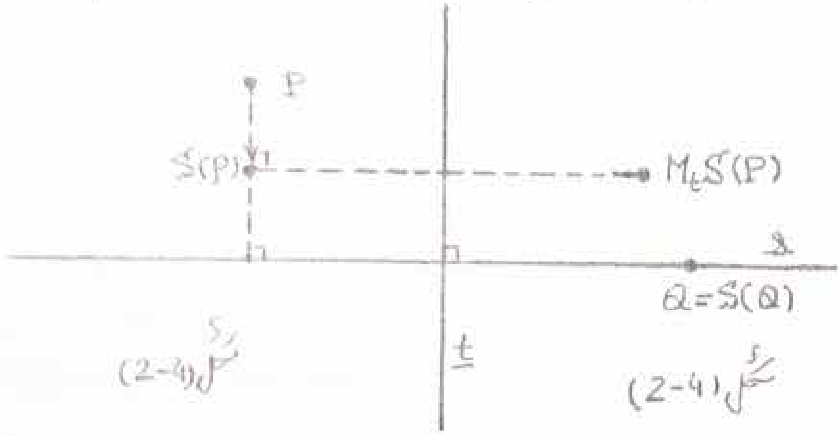
برای اینکه عدم مساوات دو تابع را ثابت نمود کافی است اگر بتوان تا حداقل
یک نقطهٔ P را بدست آورد طوریکه $L(P) \neq T(P)$ شود.
یا بعبارت دیگر برای اثبات عدم مساوات دو تابع دریافت یک نقطه
در دومین (که بتوانند) کافی است طوریکه تحت هردو تابع دارای
همین تصویر نباشد.
در آن نقطه

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

مثال سوم: یک ترکیب مپینگ را توسط دو یک چهره تحول Transform طبق آتی توضیح میدهیم: فرضاً s یک خط را و S یک مپینگ را که طبق ذیل تعریف شده ارائه کنید:

(i) . اگر $P \in s$ باشد، درینصورت: $S(P)=P$ بوده

(ii) . اگر $P \notin s$، درینحالت: $S(P)$ نقطه وسطی قطعه خطی را ارائه میکند که از P به s عمود رسم شود.



شکل (2-4)

شکل (2-4)

از تعریف فوق بنظر میرسد که S یک مپینگ یک به یک one-to-one بوده و تمام نقاط مستوی را بر onto مستوی مپ میکند، پس S یک تحول است.

برای نشان دادن تحول دومی Transform، یک خط t را که بر s عمود باشد تصور نموده و انعکاس M_t را حول خط t در نظر میگیریم. چون که S و M_t هر دو تحولها (تحولات) بوده پس برای هر نقطه P مستوی تعیین یک نقطه مربوطه $M_t[S(P)]$ آن موجود است. بنا یک ترکیب مپینگ (مپینگ مرکب) M_tS که تمام (نقاط) مستوی بخود همان آن باشد موجود شده میتواند.

علاوه بر آن اگر Z یک نقطه مستوی در نظر گرفته شود، چون M_t یک تحول است پس یک نقطه Y در مستوی موجود شده میتواند

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

که تحت M_t عنصر منشأ تصویر Z Pre-image گردد.
بهمین قسم چون S که یک تحویل است پس بالضروره یک نقطهٔ X موجود شده میتواند طوریکه: $S(X)=Y$ گردد.
بنابرآن میتوان نوشت:

$$Z = M_t(Y)$$
$$= M_t[S(X)]$$
$$= M_tS(X).$$

ازین نتیجه میشود که هر نقطهٔ مستوی تحت منگ M_tS تصویر کدام یک نقاط دیگر مستوی شده میتواند.

برای اینکه منگ M_tS را یک تحویل گفته بتوانیم نشان باید داد که M_tS یک بیک one-to-one است. وازین نتیجه میشود که ترکیب ویا نتیجه دو تحویل Transform یک تحویل Trans است.

برای ثبوت یک بیک بودن M_tS فرض میکنیم که:
$$M_tS(A) = M_tS(B)$$
است، واز آن ثابت باید نمود که $A = B$ میشود،
ثبوت این مطلب سهل است. زیرا چون M_t یک بیک است.
بنابران ما نوشته میتوانیم که:
$$M_t[S(A)] = M_t[S(B)]$$
که از آن: $S(A) = S(B)$ نتیجه شده،
وبالنوبت: $A = B$ نتیجه میشود،
(زیرا: S نیز یک تحویل Trans. است.)
چون از فرضیه رابطه: $M_t[S(A)]=M_t[S(B)]$ رابطه: $A=B$ ثابت شد،
بنابرآن گفته میشود که M_tS یک بیک One-to-one میباشد.
ازینکه M_tS مستوی را بر onto مستوی میبرد،
بنابرآن M_tS یک تحویل Transform. است.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

توجه نمایید که در اثبات فوق یگانه حقیقتی که بکار برده شده عبارت از تحویل Transform بودن S و M_t است و بس. ما بخصوص صفات دیگر این مپینگ‌ها خاص تماس نگرفتیم. در نتیجه/ فی الحقیقه ما یک حکمی را که از تحویل Trans. بودن M_tS بیشتر حاصل است با اثبات رسانیده‌ایم. نتیجهٔ مطالعات فوق را بحیث تئوری ذیلاً بیان میکنیم.

قضیه ※ Theorem . 2-1

ترکیب دو تحویل Trans. یک تحویل Trans. است.

حال با اساس فوق/ ما میتوانیم که ترکیب هر دو تحویل Trans. داده شده را بحیث یک تحویل Trans. افاده کنیم. اگر L و T دو تحویل Trans. معروض باشند، بسیار بجاست اگر پرسان شود که آیا LT و TL را یکی بجای دیگر استعمال میتوان نمود؟ هر اگر تعریف ترکیب LT را در نظر بیاوریم، چنین توضیح مینماید: که در ترکیب LT اول تطبیق T بکار برده شده و بعداً بالای نتیجه‌اش L تطبیق میشود. اما سوال فوق کاملاً جواب داده نشده است، چه سوال در اینجاست که آیا تابع LT و تابع TL عین تابع را ارائه میکنند؟ و یا خیر؟ از اینکه LT و TL هر دو تمام مستوی را بحیث دومین خودش دارند پس حقیقت مسأله در اینجاست که آیا برای هر نقطهٔ P مستوی صحت رابطهٔ:

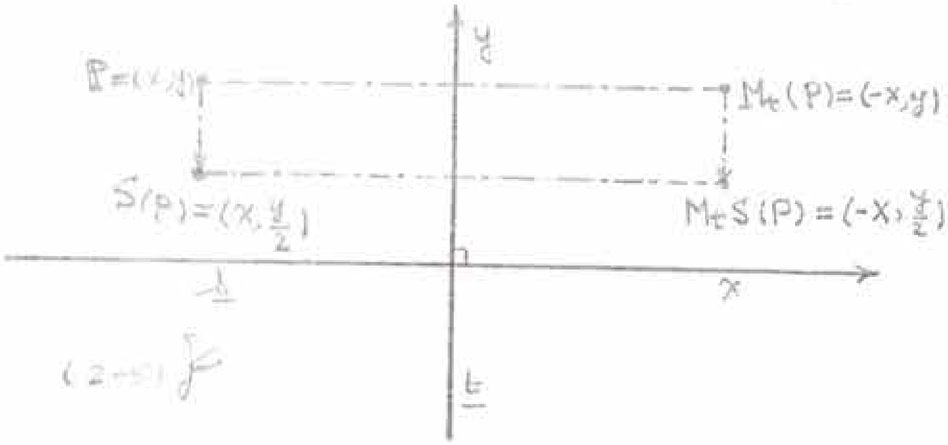
$$LT(P) = TL(P)$$

صحیح دارای حقیقت شده میتواند؟

برای امتحان صحت حقیقت این موضوع مطلب میان دو تحویل M_t و S را که قبلاً (در صفحه 67) بررسی نمودیم دوباره مورد مطالعه قرار میدهیم. در اینجا یک سیستم کمیات وضعیه را چنان انتخاب مینماییم که خط s بحیث محور x (محور افقیه) و خط t بحیث محور y (محور ترتیب) ایفای وظیفه کنند. پس اگر P(x,y) کدام نقطه

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

مستوی در نظر گرفته شود، در نتیجه : $M_t(P) = (-x, y)$ گردیده،



و به همین قسم : $S(P) = (x, \frac{y}{2})$ می‌شود.

پس ما نوشته میتوانیم که :

$$\begin{aligned} M_tS(P) &= M_t[S(P)] \\ &= M_t[(x, y/2)] \\ &= (-x, y/2). \end{aligned}$$

از طرف دیگر :

$$\begin{aligned} SM_t(P) &= S[M_t(P)] \\ &= S[(-x, y)] \\ &= (-x, y/2). \end{aligned}$$

ازین نتیجه میشود که برای هر نقطه $P(x, y)$ مستوی t که

$$M_tS(P) = SM_t(P)$$

است. بنابران

$$M_tS = SM_t$$

میشود.

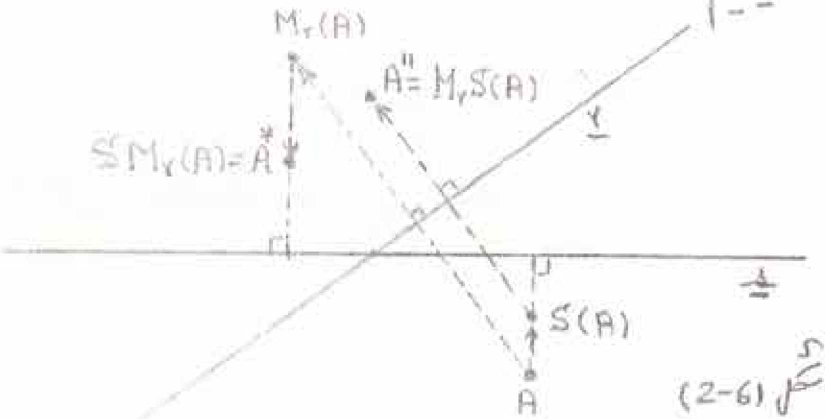
Q.E.D.

قابل تذکر است که بنا بر حل و نتیجه یک مثال در تمام ریاضیات عمومیت دادن یک موضوع قابل قبول نیست. پس اگر ما از نتیجه حل یک مثال فرق موضوع (اینکه آیا جای ترکیبات در ترکیب تحویلات Transformations تغییر داده در قیمت آنها کدام فرق وارد نمیکند.) یا به عبارت دیگر

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

با عبارت دیگر: «در ترکیب دو تحول جای ترتیبات آن قابل تبدیل Commutative نیست.» عمومیت دهیم اشتباه خواهیم نمود. بهتر و گواراتر آنست که انواع و اشکال مختلف تحول‌ها (تحویلات) .Trans را با هم ترکیب نموده و موضوع را بررسی نمائیم.

حال دوباره مپینگ که را مورد مطالعه قرار دادیم آنا منعکس $\underline{t}$ یک خط $\underline{r}$ را که به خط $\underline{t}$ عمود نیست مورد بررسی قرار میدهیم. لطفاً در یک نقطه A مختوی را تحت حاصل دو مپینگ $M_r S$ و SM_r قرار داده در شکل ذیل مطالعه میکنیم:



شکل (2-6)

از شکل بوضاحت دیده میشود که: $A''=M_rS(A)$ بوده
و $A^*=SM_r(A)$ میباشد.
حالانکه A'' و A^* دو نقطه متفاوت اند.
ازینکه مختص یک نقطه A در مختوی موجود است که دارای عین تصویر تحت حاصل دو تحول .Trans M_rS و SM_r شده نمیتوانند. بنابران گفته میتوانیم که: $M_rS \neq SM_r$. بصورت عموم اگر جای ترتیبات یک تحول مرکب تغیر داده شود در آن فرق وارد میشود. یا بعبارت دیگر ترتیبات یک تحول .Trans مرکب قابل تبدیل Commutative نمیباشند.

Q.E.D.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

تا حال ما ترکیب دو مپینگ mpg را در مطالعه تعریف نموده ایم . اکنون ما ساحهٔ مطالعهٔ خود را دربارهٔ ترکیب بیشتر از دو ترکیب سه و یا چند مپینگ توسعه داده و کشاف میدهیم . اگر T_1 ، T_2 و T_3 سه تحویل مفروض باشند ، ما میدانیم که اولاً ترکیب دو تحویل T_2T_1 را بدست آورده و سپس محصلهٔ این ترکیب را با T_3 ترکیب نموده و یک محصلهٔ نهائی $T_3(T_2T_1)$ را تشکیل نمائیم . در صورتیکه P کدام یک نقطهٔ مستوی در نظر گرفته شود در مفکورت ما داریم :

$$P' = T_1(P)$$

و هم چنان : $$P'' = T_2(P)$$ بوده ،

بهمین قسم : $$P''' = T_3(P)$$ میشود .

پس با استفاده از تعریف ترکیب دو تحویل ما نوشته میتوانیم :

$$[T_3(T_2T_1)](P) = T_3[T_2T_1(P)]$$

زمانیکه $$T_2T_1(P) = T_2[T_1(P)] = T_2(P') = P''$$ است ،

پس $$[T_3(T_2T_1)](P) = T_3(P'') = P'''$$ میشود .

طریق دیگر ترکیب سه مپینگ این خواهد بود که اولاً ترکیب دو مپینگ T_3T_2 را حاصل نموده و سپس محصلهٔ این ترکیب را با T_1 ترکیب نمود تا یک ترکیب نهائی : $(T_3T_2)T_1$ حاصل شود . دوباره با اساس تعریف ترکیب دو مپینگ ما نوشته میتوانیم :

$$\begin{aligned}[(T_3T_2)T_1](P) &= T_3T_2[T_1(P)] \\ &= T_3T_2(P') \\ &= T_3[T_2(P')] \\ &= T_3(P'') \\ &= P'''\end{aligned}$$

بنابران ما داریم که : $[T_3(T_2T_1)](P) = [(T_3T_2)T_1](P)$.

پس برای هر نقطهٔ P مستوی نتیجه میشود که :

$$(T_3T_2)T_1 = T_3(T_2T_1)$$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

نتیجه اخیر افاده میکند که کدام فرق پیدا نمیشود که در ترکیب سه تحویل: T_1، T_2 و T_3 خواه اولاً ترکیب T_3T_2 را بدست آورده و نتیجه را با T_1 ترکیب نموده و یک ترکیب نهائی $(T_3T_2)T_1$ را حاصل نمائیم، و یا اینکه اولاً مختصر ترکیب T_2T_1 را حاصل نموده و نتیجه را با T_3 ترکیب کرده و ترکیب نهائی $T_3(T_2T_1)$ را بدست آوریم.
در نتیجه ـ ترکیب سه تحویل T_1، T_2 و T_3 که ترتیباً (T_1 تعقیب میشود توسط T_2 و این تعقیب میشود توسط T_3) را افاده میکند بدون استعمال قوس که توسط افاده $T_3T_2T_1$ ارائه شده میتواند.
بصورت خلص برای هر نقطه P یک مستوی و برای تمام تحویلات Trans. T_1، T_2 و T_3 ما داریم:

$$
\begin{aligned}
T_3T_2T_1(P) &= [(T_3T_2)T_1](P) \\
&= [T_3(T_2T_1)](P) \\
&= T_3\{T_2[T_1(P)]\} .
\end{aligned}
$$

و بهمین قسم:

$$
\begin{aligned}
T_3T_2T_1 &= (T_3T_2)T_1 \\
&= T_3(T_2T_1) .
\end{aligned}
$$

این خاصیت ترکیب تحویلات ما را بیاد خاصیت حاصل ضرب اعداد حقیقی Reals می اندازد طوریکه:

$$
\begin{aligned}
3(2\cdot 4) &= (3\cdot 2)4 \\
&= 3\cdot 2\cdot 4 \\
&= 24 \quad \text{.......میشود}
\end{aligned}
$$

بصورت عمومی اگر ما قانون انجمنی Associative Law را برای اعداد حقیقی Reals، x، y و z بخاطر بیاوریم، در نتیجه ما داریم که: $x(yz)=(xy)z$ بوده و ما دیدیم که این

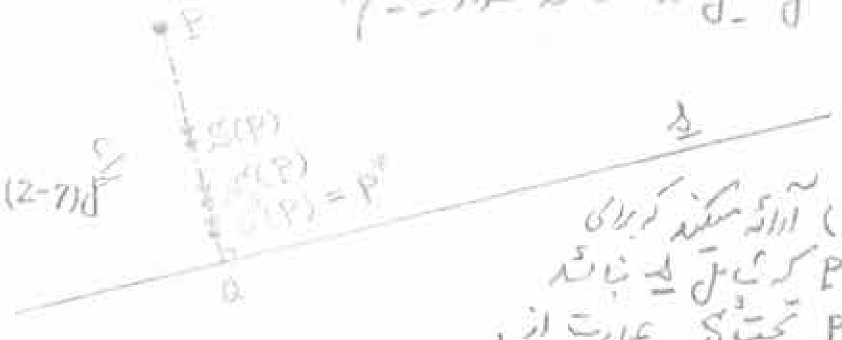
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

و ما دیدیم که این قانون انجمنی (اشتراکی) Associative
درباره ترکیب تحولات (تحویل‌ها) .Trans هم صدق‌پذیر است.

قضیه ※ 2-2 .Theorem

عملیه ترکیب تحولات (تحویل‌ها) در مجموعه تحولات یک عملیه انجمنی است associative operation

تاکنون مباحث ما دور موضوع تشکیل مجموعه (یا سیستم) تحولات (تحویل‌ها) که باهم مساوی نیستند می‌چرخد. حال میخواهیم حاصل ترکیب یک تحویل را که تکرار آن با خودش تعامل میکند مطالعه نمائیم. اگر T یک تحویل مفروض گرفته شود، در صورتیکه علاقمندیم که ترکیب TT و همچنین از TTT را تشکیل نمائیم، این مطلوب خواهد بود که از اشتمال عبارت طولانی احتراز نمائیم، بطوریکه در سیستم اعداد حقیقی مروج است در مثبت‌ها استفاده بعمل آید. بنابراین میتوانیم که بعوض TT، T^2 را و بجای TTT، T^3 را بکار ببریم. برای توضیح این مطلب یکبار دیگر تبدیل مشابه S را طبق شکل ذیل مورد مطالعه قرار میدهیم:



شکل (2-7)

شکل (2-7) ارائه میکند که برای هر نقطه P که بر خط ℓ نباشد تصویر P تحت S عبارت از P^* است طوریکه P^* بالای قطعه خط $\overline{PQ}$ که عمود بر ℓ است رابطه: $\frac{PP^*}{PQ}=\frac{7}{8}$ را تعقیب میکند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

Problem Set . 2-1 : تمرینات

1. خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ ونقاط P و Q طوریکه در شکل داده شده‌اند مفروض‌اند. ترسیمات ذیل را اجرا کرده ونقاط مطلوب را بدست آرید:

(a). $A = M_s M_t(P)$

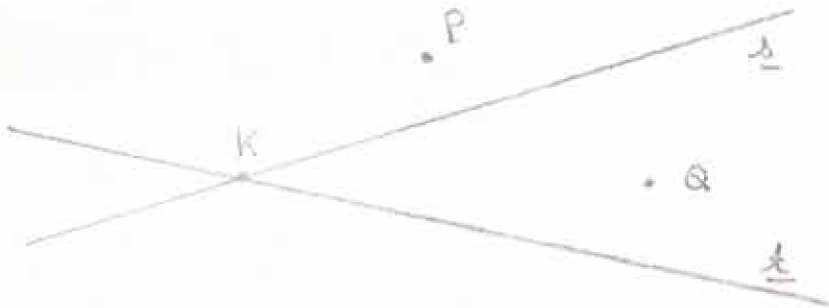
(b). $B = M_t M_s(P)$

(c). $C = M_s M_s(P)$

(d). $D = M_s M_t(K)$

(e). نقطه R را بدست آرید طوریکه $M_t M_s(R) = Q$ باشد.

(f). آیا $M_t M_s = M_s M_t$ میشود؟ استدلال کنید.



2. بالفرض T و L دو ایزومتری isom. باشد، نشان دهید که کدام از افاده‌های ذیل حقیقت دارد. نتیجه را استدلال کنید:

(a). TL نیز یک ایزومتری isom. است.

(b). $TL = LT$ است.

(c). اگر $\underline{s}$ یک خط باشد پس $\underline{s}' = TL(\underline{s})$ نیز یک خط است.

(d). اگر $\underline{s} \parallel \underline{t}$ و $\underline{s}' = TL(\underline{s})$ و $\underline{t}' = TL(\underline{t})$ باشند، پس $\underline{s}' \parallel \underline{t}'$ میباشد.

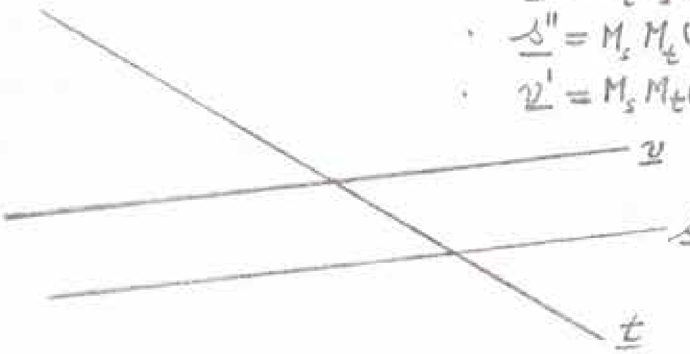
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

3. خطوط $\underline{s}$، $\underline{t}$ و $\underline{v}$ طبق شکل ذیل مفروض اند، ترسیمات مطلوبه را اجرا کنید:

(a). $\underline{s}' = M_t M_s(\underline{s})$.

(b). $\underline{s}'' = M_s M_t(\underline{s})$.

(c). $\underline{v}' = M_s M_t(\underline{v})$.



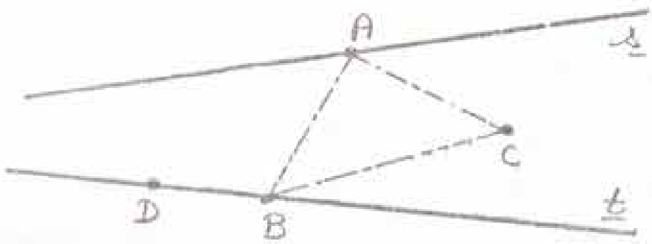
4. خطوط $\underline{t}$ و $\underline{s}$ طبق شکل مفروض اند، ترسیمات مطلوبه را اجرا نمائید:

(a). $M_s M_t(\triangle ABC)$.

(b). $M_t M_s(\triangle ABC)$.

(c). K را بدست آرید طوریکه: $M_s M_t(K) = K$ باشد.

(d). R را حاصل دارید طوریکه: $M_t M_s(R) = D$ گردد.

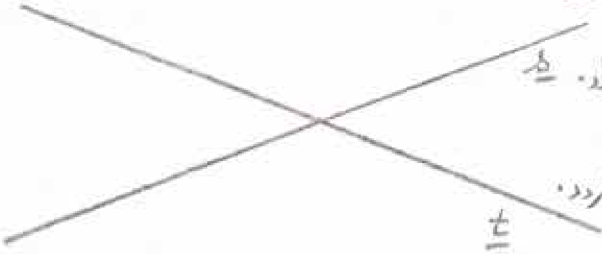


5. خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ قرار ذیل داده شده و ترسیمات مورد نظر را انجام دهید:

(a). خط $\underline{v}$ را طوریکه $M_s M_t(\underline{v}) = \underline{s}$ گردد.

(b). $\underline{v}$ را طوریکه $M_t M_s(\underline{v}) = \underline{s}$ گردد.

(c). $\underline{w}$ را طوریکه $M_t M_s(\underline{w})$ ناصف الزاویه زاویه حادهٔ بین $\underline{s}$ و $\underline{t}$ گردد.



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

6. خط $\underline{s}$ ، نقطهٔ A ، دایره $\mathcal{C}$ با مرکز B قرار شکل ذیل داده شده.
تابع‌های f و g را تعریف نمائید طوریکه:

(1). $Dmn\ f = \underline{s}$ ، $f(X)$ نقطهٔ وسطی $\overline{AX}$ باشد.

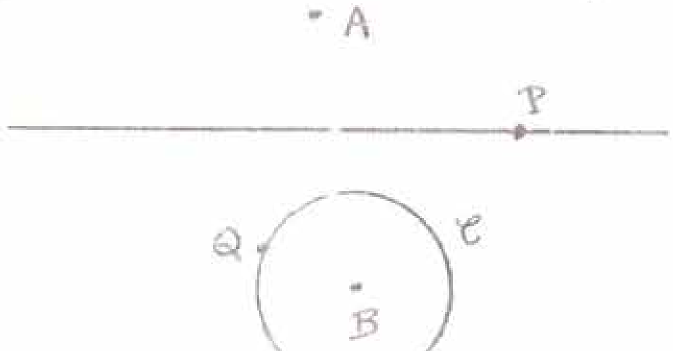
(2). $Dmn\ g$ ست set نقاط ناحیهٔ خارجی دایره $\mathcal{C}$ بوده و $g(X) = \overline{BX} \cap \mathcal{C}$ باشد.

(a). $gf(P)$ را بدست آرید.

(b). دومین و رنج Rng ، gf را مشخص کنید.

(c). R را تعیین کنید طوریکه $gf(R)=Q$ شود.

(d). آیا یک ترکیب تابع fg موجود شده میتواند؟ درصورتیکه موجود شود، دومین و رنج آن کدام است؟



7. اگر $\underline{s}$ عبارت از محور x و $\underline{t} = \{(x,y) : x = y\}$ باشد افاده‌های ذیل را تعیین کنید:

(a). یک معادله برای افاده $M_t M_s(\underline{s})$.

(b). برای $P=(0,3)$ ، $P'' = M_t M_s(P)$ را.

(c). برای $Q=(3,-1)$ ، $Q'' = M_s M_t(Q)$ را.

(d). برای $R=(x,y)$ ، $R'' = M_s M_t(R)$ را.

8. اگر دو خط متمایز $\underline{s}$ و $\underline{t}$ در نقطه P قطع کنند ثابت کنید که:
$M_s M_t(A) = P$ میشود درصورتیکه اگر و اگر $P=A$ باشد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

9. اگر t عبارت از محور x و $g=\{(x,y): y=x\}$ بوده و S یک تحویل که طبق ذیل تعریف می‌گردد:-

اگر $P\in t$ ، پس $S(P)=P$

اگر $P\notin t$ ، در نتیجه $S(P)$ نقطهٔ وسطی قطعه خط مستقیم که از P به t عمود رسم می‌گردد پیدا شده، فرض باشد:

پس مطالب ذیل را بررسی نمایید:

(a). برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ مختصات نقطهٔ $SM_g(P)$ را دریابید.

(b). حقیقت و یا عدم حقیقت بودن: $SM_t=M_tS$ را ثابت کنید.

(c). حقیقت و یا عدم حقیقت داشتن: $SM_g=M_gS$ را ثابت کنید.

10. اگر $t=\{(x,y): y=0\}$ و $g=\{(x,y): y=x\}$ و S عبارت از تحویل که در سوال (9) تعریف شد، باشند. اگر $A=(3,-8)$ و $P=(x,y)$ در نظر گرفته شود، مختصات هر کدام یک از نقاط ذیل را دریافت آرید:

(a). $M_gM_tS(A)$.	(b). $M_tSM_g(A)$.

(c). $SM_gS(A)$.	(d). $M_gSM_t(P)$.

(e). $S^2M_g(P)$.	(f). $SM_t^2(P)$.

11. اگر g و t دو خط متقاطع (عمود بر یکدیگر) بوده و A یک نقطهٔ دلخواه، B و C طوری واقع شوند که: $M_g(A)=B$ و $M_t(A)=C$ باشد، صورت هر یک از افاده‌های ذیل را تعیین کنید:

(a). $M_g^3(A)$ را.

(b). $M_tM_gM_t(A)$ را.

(c). $M_tM_gM_tM_tM_g(A)$ را.

(d). $M_g^2M_t^3(A)$ را.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

*12. طبق شکل ذیل فرضاً $s \parallel t$ است:

(a). $P''=M_sM_t(P)$ و $Q''=M_sM_t(Q)$ را رسم کنید.

(b). راجع به چهارضلعی $PP''Q''Q$ چه گفته میتوانیم؟

(c). نتیجه خویش را استدلال کنید.

13. اگر $s=\{(x,y): y=3\}$ و $t=\{(x,y): y=-1\}$ و w عبارت از خطی که از $A(1,4)$ و $B(-1,-2)$ عبور میکند باشد؛ هر یک از داده‌های ذیل را تعیین کنید:

(a). معادله w' را بنویسید در صورتیکه $w'=M_sM_t(w)$ باشد.

(b). مساحت چهارضلعی $AA''B''B$ را بدست آرید در صورتیکه $A''=M_sM_t(A)$ و $B''=M_sM_t(B)$ باشد.

(c). برای یک نقطه $P(x,y)$ مختصات $P''=M_sM_t(P)$ را حاصل نمائید.

(d). اگر $s=\{(x,y): x=2\}$ و $t=\{(x,y): x=k\}$ باشد، قیمت k را بدست آرید در صورتیکه: $A=(5,1)$ و $A''=M_tM_s(A)=(-3,1)$ باشد.

*14. نقاط P و Q و خطوط t و s طبق شکل ذیل داده شده‌اند طوریکه $t \perp s$ است:

(a). $A=M_sM_t(P)$ را رسم کنید.

(b). ثابت کنید که P نقطه وسطی $\overline{AP}$ است.

(c). $B=M_tM_s(P)$ را رسم کنید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

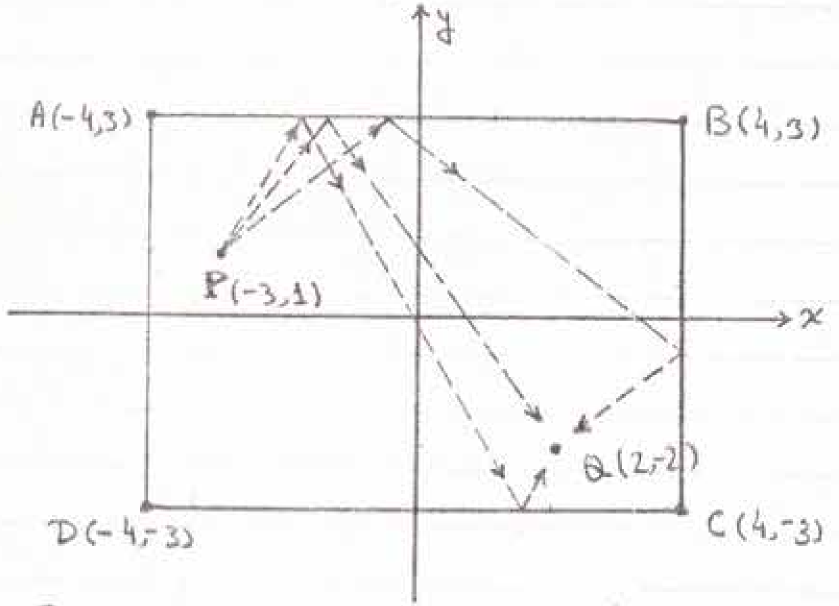
15. اگر t عبارت از محور x و s عبارت از محور y بوده و هم چنان $A=(4,-3)$ و $P=(x,y)$ باشند، افاده‌های ذیل را تعیین کنید:

(a). کمیات وضعیه $M_tM_s(A)$ و کمیات وضعیه $M_sM_t(A)$ را.

(b). کمیات وضعیه $M_tM_s(P)$ را.

(c). آیا رابطه: $M_tM_s = M_sM_t$ حقیقت دارد؟

تصور ۸: در حل مسایل ذیل، فرض نمایید که یک سیستم کمیات وضعیه روی یک میز بلیارد طبق شکل ذیل گسترده شده است:



شخصی میل دارد توپی را که به نقطه P موقعیت دارد توسط ضربه به توپی که در نقطه Q واقع است در تصادم آورد. این توپ نقطه P طی نمودن یک از مسیری که در شکل دیده می‌شود به توپ نقطه Q تصادم کرده می‌تواند.

حال در هر از مسایل ذیل مطالب ذیل را تعیین کنید:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

حال در هر یک از مسائل مطالب ذیل را تعیین کنید:

(a) . فاصله‌ای را که توپ اولی در مسیر خویش قبل از رسیدن به توپ دومی پیموده است.

(b) . مختصات X نقطه اصابت توپ اولی را با طرف $\overline{AB}$ میز بلیارد تعیین نمائید.

16. جواب (a) و (b) فوق را بنا بر مسیری دریافت نمائید که طی آن توپ اولی قبل از رسیدن به دومی محض با دیوار $\overline{AB}$ میز برخورد مینماید.

17. جواب (a) و (b) فوق را بنا بر آن مسیر دریافت کنید که طی آن توپ اولی قبل از اصابت با توپ دومی اولاً دیوار $\overline{AB}$ میز را و ثانیاً دیوار $\overline{CD}$ میز را برخورد نمائید.

18. جواب (a) و (b) فوق طی مسیری که توپ اولی اولاً به دیوار $\overline{AB}$ و ثانیاً به دیوار $\overline{BC}$ تصادم مینماید، حاصل نمائید.

19. مسأله فوق را طوری ترتیب دهید که توپ اولی قبل از تصادم به توپ دومی مسیری را طی نماید که اولاً دیوار $\overline{AB}$ میز را، ثانیاً دیوار $\overline{BC}$ میز را، و بالآخره دیوار $\overline{CD}$ میز را اصابت کرده و به توپ دومی تصادم کند. اولاً رسم هندسی مسأله را تکمیل نموده و ثانیاً طول مسیر آنرا حساب کنید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

2-2 . تحویلات معکوس

Inverse Transformations

ممکن متوجه شده باشید در صورتیکه M_s یک انعکاس خطی باشد پس برای هر نقطهٔ P: $M_sM_s(P) = P$ میشود. درینصورت گفته میتوانیم که M_s^2 عبارت از یک تحویل ثابت که هر نقطه را روی خود آن نقطه مپ میکند.

گرچه مباحثه دربارهٔ اینطوریک تحویلی که مصدر کدام تحویل شده نتوانسته و کدام عملی را انجام نمیدهد بی فائده به نظر میرسد. ولی باآنهم شناخت این نوع خاص تحویل .Trans عاری از فائده نخواهد بود.

تعریف :
یک مپینگ I که برای هر نقطهٔ P مستوی توسط $I(P) = P$ تعریف شود بنام مپینگ عینیت Identity mapping یاد میشود.

واضحاً I یک تحویل .Trans ثابت . توجه نماید که مپینگ عینیت .Id.map در تشکل ترکیب مپینگ‌ها همان رولی را بازی میکند که عدد (1) یک (عنصر عینیت ضرب) بنابر عملیه ضرب در سیستم اعداد حقیقی Reals بازی میکند.
برای هر تحویل .Trans T و برای نقطهٔ P ما داریم:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ما داریم:

$$TI(P) = T[I(P)] = T(P) \;.$$

و همچنین:

$$IT(P) = I[T(P)] = T(P) \;.$$

چنانچه در سیستم اعداد حقیقی: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ بود، به همین صورت در ترکیب تحولات: $IT = TI = T$ میشود، ولی حقیقت درباره هر تحول Transformation T صدق کند.

اگر f یک نگاره‌ای را ارائه کند که دومین آن تمام مستوی را احتوا نکند، اما برای هر نقطه P دومین f: $f(P) = P$ گردد، در این صورت گفته میشود که f یک نگاشت عینیت Identity است.

ما سمبول و علامه I را برای ارائه تحول عینیت Identity Trans. که عبارت از تحولی است که هر نقطه مستوی را روی خودش می‌برد، حفظ نگاه میکنیم. بعداً خواص دیگر که ما عینیت‌های Identities دیگری غیر از I را نیز معرفی خواهیم کرد.

مفکوره تحول معکوس تعریف عینیت را از نزدیک تعقیب میکند.

دوباره ما مفکوره‌های مشابه در سیستم اعداد حقیقی را برای تنویر موضوع از نظر میگذرانیم. اگر n و x دو عدد مفروض سیستم اعداد حقیقی Reals در نظر گرفته شوند طوریکه

$$n \cdot x = x \cdot n = 1$$

باشد، پس گفته میشود که x معکوس ضربی (یا معکوس ضربی) n است. و آنرا بشکل n^{-1} ارائه مینمائیم. قبل از آنکه به تعریف نگاشت معکوس بپردازیم چند مثال را از نظر میگذرانیم:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

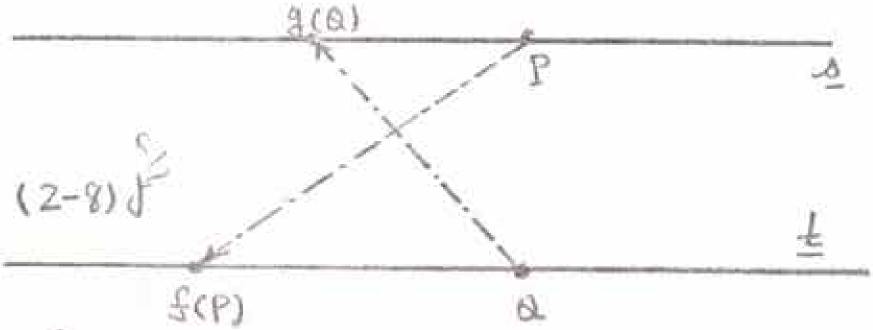
مثال اول: بالفرض $\underline{s}$ و $\underline{t}$ دو خط موازی و A یک نقطه‌ای بین دو خط باشد. دو مپینگ f و g طبق آتی تعریف شده‌اند:

برای هر نقطهٔ $P \in \underline{s}$:

$$f(P) = \overleftrightarrow{PA} \cap \underline{t}.$$

و برای هر نقطهٔ $Q \in \underline{t}$:

$$g(Q) = \overleftrightarrow{QA} \cap \underline{s}.$$



شکل (2-8)

با این شناسایی دومین Dmn f را خط $\underline{s}$ و رنج Rng f را $\underline{t}$ تشکیل میدهد.
و به همین قسم دومین Dmn g عبارت از $\underline{t}$ و رنج Rng g عبارت از $\underline{s}$ است.

پس برای $P \in \underline{s}$ داریم:

$$\begin{aligned} gf(P) &= g[f(P)] \\ &= P. \end{aligned}$$

به همین طور برای $Q \in \underline{t}$ داریم:

$$\begin{aligned} fg(Q) &= f[g(Q)] \\ &= Q. \end{aligned}$$

حال اگر i_1 یک مپینگ عینیت که دومین آنرا $\underline{s}$ تشکیل داده، و به همین قسم i_2 یک مپینگ عینیت که دارای دومین $\underline{t}$ است باشند؛
در اینصورت: $fg = i_2$ و $gf = i_1$ میشود.
درینحالت ما میگوییم که مپینگ‌های f و g معکوس‌های یکدیگر اند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

توجه نمائید که ن$_1$ و ن$_2$ عین یکدیگر (آیا) نیستند زیرا دومین‌های شان از هم فرق دارد.

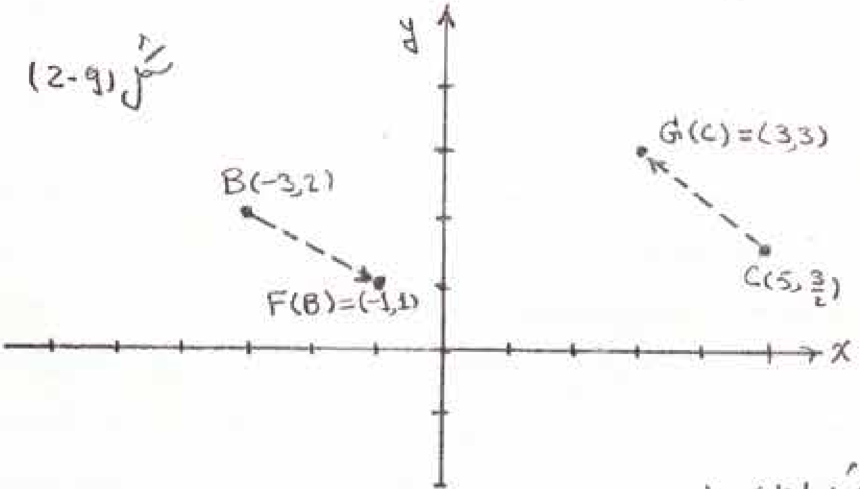
مثال دوم: دو تحویل F و G را قرار آتی تعریف مینمائیم:
برای هر نقطهٔ (آ) مستوی $P(x, y)$:

$$F(P) = \left(x+2, \frac{y}{2}\right).$$

و هم چنان:

$$G(P) = (x-2, 2y).$$

شکل (9-2)



پس ما داریم:

$$\begin{aligned} FG(P) &= F[(x-2, 2y)] \\ &= ([x-2]+2, \tfrac{1}{2}[2y]) \\ &= (x, y) \\ &= P \end{aligned}$$

به همین قسم:

$$\begin{aligned} GF(P) &= G[F(P)] \\ &= G[(x+2, y/2)] \\ &= ([x+2]-2, 2[y/2]) \\ &= (x, y) \\ &= P. \end{aligned}$$

در نتیجه: $FG = GF = I$ بوده، پس ما میگوئیم G و F معکوس یکدیگر اند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

تعریف :- اگر F و G دو مپینگ را ارائه کند طوریکه FG یک مپنگ عینیت Indentity بوده و هم چنان GF یک مپنگ عینیت Indentity باشد، پس F و G معکوس Inverse یکدیگر اند.

از تعریف فوق بوضاحت معلوم میشود که رنج F، Rng در دومین Dmn G بوده و بالعکس رنج Rng G در دومین Dmn F واقع میشود، والا حقیقت اینکه هر دو، یعنی: FG و GF صحیح تعریف شده defined باشد صدق نمیکرد. برای تحویلات Transformations تعریف معکوس طبق ذیل تفسیر و تعمیم شده میتواند:

تعریف : اگر T یک تحویل را و هم چنان L یک تحویل را ارائه کند طوریکه $TL=LT=I$ باشد پس T و L معکوس Inverse یکدیگر گفته میشوند.

هر مپینگ یک بیک one-to-one معکوس یکدیگر اند. در حالت خاص هر تحویل .Trans یک معکوس Inverse دارد. برای اثبات حقیقت فوق یک تحویل L را طبق ذیل تعریف مینمائیم: بالفرض X کدام یک نقطهٔ مستوی باشد. چون T یک تحویل است و هر تحویل مستوی را بر onto مستوی مپ کرده و ضمناً (تابع) یک بیک one-to-one میباشد؛ بناءً موجودیت یک نقطهٔ A طوریکه: $T(A)=X$ گردد ادعا شده میتواند. حال یک تحویل L را طوریکه $L(X)=A$ گردد تعریف مینمائیم؛ بعبارت دیگر ما $L(X)$ را مساوی به

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

را مساوی به نقطهٔ تصویر X تحت Pre-image (بنابر) T قرار میدهیم .
برای نشان دادن T بحیث معکوس L inverse بنابر تعریف معکوس
نشان باید داد که برای نقطهٔ P مشتوی :

$$LT(X) = TL(X)$$

$$= X$$ میشود.

حقیقت فوق طبق آتی اثبات شده میتواند : اگر X کدام نقطهٔ
مشتوی باشد پس یک نقطهٔ Y موجود شده میتواند طوریکه :
$T(Y) = X$ شود. وهمچنان یک
نقطهٔ Z موجود شده میتواند طوریکه : $T(X) = Z$ گردد.
وقرار تعریف L ما داریم: $L(Z) = X$ و $L(X) = Y$ میشوند.
پس ما داریم :

$$LT(X) = L[T(X)]$$
$$= L(Z)$$
$$= X$$

وهمچنان :

$$TL(X) = T[L(X)]$$
$$= T(Y)$$
$$= X$$

بنابرآن

$$TL(X) = LT(X)$$
$$= I(X)$$

ویا اینکه :

$$TL = LT$$
$$= I$$

Q.E.D.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پس نشان دادیم که هر تحویل دارای یک معکوس است.
آیا یک تحویل معیّنه میتواند که بیشتر از یک معکوس را دارا شود؟
برای اینکه به سؤال فوق جواب آنرا بگیریم فرض میکنیم که دو تحویل
L_1 و L_2 هر دو معکوس inverse یک تحویل T
باشند، پس درینصورت:

$$TL_1 = L_1T$$
$$= I$$ میشود.

بهمین قسم:

$$TL_2 = L_2T$$
$$= I$$

با استفاده از معادلات فوق درمعادله: $L_1 = L_1I$ ما نوشته
میتوانیم که: . . . .

$$L_1 = L_1I$$
$$= L_1(TL_2)$$
$$= (L_1T)L_2$$ باستفاده از قانون اتحادی:
$$= IL_2$$
$$= L_2$$

ازین نتیجه بدست میآید که $L_1 = L_2$ بوده، پس گفته میتوانیم که هر تحویل
بیشتر از یک معکوس نمیتواند داشته باشد. نتیجه فوق در
قضیه ذیل خلاصه شده میتواند:

قضیه: Theorem 2-3:

هر تحویل محض دارای یک معکوس Inverse میباشد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

برای هر تحویل T معکوس T را توسط علامه: T^{-1} ارائه نمایم.

یک صفت خاص را که انعکاسات خطی دارا میباشند اینست که هر انعکاس خطی معکوس خودش میباشد. و برای اثبات این حقیقت که $M_s = M_s^{-1}$ است برای هر نقطه P مستوی نشان باید داد که :-

$$M_s M_s(P) = P \quad \text{میشود.}$$

اگر $P' = M_s(P)$ انتخاب شود، پس

$$M_s M_s(P) = M_s[M_s(P)]$$

$$= M_s(P').$$

چون s ناصف عمودی خط قطعه خطی که P' نقطه انجام آنست شده میتواند. نقطه انجام دیگر آن P است.

چون $M_s(P') = P$ است،

پس $M_s M_s(P) = P = I(P)$ برای هر نقطه P میشود.

بناءً $M_s M_s = I$ بوده،

دازینجا $M_s = M_s^{-1}$ مطلوب حاصل میشود.

Q. E. D.

قضیه Theorem . 2-4 :

هر انعکاس خطی معکوس خودش میباشد.

یا به الفاظ دیگر: عبارت فوق را طبق ذیل بیان میتوانیم:

برای هر خط s، $M_s^2 = I$.

هر تحویل بجز از عینیت Identity که معکوس خود است بنام انولوشن Involution یاد میشود. پس هر انعکاس خطی واضحاً

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پس واضحاً هر انعکاس خطی یک involution انولوشن است.

ما میدانیم که برای هر دو تحویل L و T یک تحویل ترکیب LT موجود میشود. از آنکه هر تحویل دارای یک معکوس میباشد؛ پس LT نیز دارای یک معکوس میباشد. حال میخواهیم بدانیم که $(LT)^{-1}$ به L^{-1} و T^{-1} و یا اینکه $(TL)^{-1}$ به T^{-1} و L^{-1} چه رابط دارد؟

بصورت سرسری ما میتوانیم که مفکورهٔ معکوس را بحیث مفکورهٔ اختصار کردن، و یا عکس عمل اجرا شده را انجام دادن، فکر کنیم. بطور مثال: معکوس جمع کردن 3 عبارت از طرح کردن 3 است. معکوس پوشیدن بوت ها کشیدن اینها است. اگر S_h عملیه پوشیدن بوت ها را — و همین قسم S_o عملیه پوشیدن جراب ها را ارائه کند. پس عملیه ترکیب هر دو عملیه توسط سمبول [illegible] S_hS_o و یا سمبول S_oS_h ارائه شده میتواند. با در نظر داشت ترتیب، سمبول S_hS_o افاده میکند که: «اولاً جراب ها را و سپس بوت ها را بپوشید.» حالانکه سمبول S_oS_h که بیان میکند که: «اولاً بوت ها و سپس جراب ها را بپوشید.» اکثر مردم حین پوشیدن لباس این ترتیب عملیه را مراعات میکنند. اگر S_hS_o ترکیب عملیه پوشیدن «اولاً جراب ها و سپس بوت ها را» ارائه نمائید واضح که عملیه کشیدن «اولاً بوت ها و سپس جراب ها را» عکس عملیهٔ فوق را تشکیل میدهد. با در نظر داشت ترتیب باید که نتیجه: $(S_hS_o)^{-1} = S_h^{-1}S_o^{-1}$ را [illegible]

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

با گرفتن الهام از مثال فوق بآسانی ثابت شده میتواند که:

$$(TL)^{-1} = L^{-1}T^{-1}$$

برای اثبات این مطلب ما چنین آغاز مینمائیم:

$$\begin{aligned}(TL)(L^{-1}T^{-1}) &= [(TL)L^{-1}]T^{-1} \\ &= [T(LL^{-1})]T^{-1} \\ &= [TI]T^{-1} \\ &= TT^{-1} \\ &= I\end{aligned}$$

بهمین قسم: $(L^{-1}T^{-1})(TL) = I$

ازطرف دیگر ما داریم: $(TL)(TL)^{-1} = I$

از نتیجه این قضیه ذیل اقامه شده میتواند:

قضیه Theorem. 2-5:

برای هر دو تحویل L و T رابطهٔ: $(TL)^{-1} = T^{-1}L^{-1}$ حقیقت دارد.

در یک تعداد زیاد مثال تمرینات لوری Problem Set حل همچو مسایل پرسیده شده است. بطور مثال اگر B یک نقطهٔ مفروض و T یک تحویل مفروض باشند، نقطهٔ D را دریافت دارید طوریکه:

$T(D) = B$ گردد.

از نیکه شما به هندسه های ساده و منبسط سروکار دارید در فهمیدن همچو مسایل بصورت Intuitively (فهمیدن فوری و حواسی) کدام مشکلات نخواهید داشت.

اما با استفاده از اشتقال معکوس تحویل معکوس Inverse Trans. حل دقیق همچو مسایل را با شرح و یا شیوه ریاضی بدست آورده میتوانید.

چنانچه حل مسائل فوق طبق ذیل حاصل شده میتواند:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

چنانچه مثال فوق طبق ذیل حاصل شده میتواند :

چون T یک تحول است ، پس T^{-1} موجود شده میتواند ، پس درینصورت :

$$T^{-1}[T(D)] = T^{-1}(B)$$

از طرف دیگر : $$T^{-1}[T(D)] = TT^{-1}(D) = I(D) = D$$

بنابرآن $$T^{-1}(B) = D$$

Q.E.D.

مثال ، Example :

اگر t عبارت از محور x بوده و $z=\{(x,y) : x=y\}$ باشد .

نقطه D را تعیین نمائید طوریکه $M_t M_z = (2,7)$ شود .

حل : از تحلیل فوق ما داریم :

$$D=[M_t M_z]^{-1}[(2,7)]$$

با شناسی قضیه 5-2 ما نوشته میتوانیم که :

$$[M_t M_z]^{-1} = M_z^{-1} M_t^{-1}$$

چون M_t و M_z هردو انعکاس خطی است

بنابرآن $M_t^{-1}=M_t$ و $M_z^{-1}=M_z$ میشود .

پس درینصورت : $(M_t M_z)^{-1} = M_t M_z$ میباشد .

برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ ما داریم :

$$M_t(P) = (x,-y)$$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

دهم خاطر $M_g(P)=(y,x)$ گردید

پس $M_g M_t(P)=M_g(x,-y)$

$=(-y,x)$ میشود.

با این اساس $D=(-7,2)$ میشود.

Q.E.D.

Problem Set. 2-2: تمرینات

درحل مسایل این مبحث نکات ذیل را درنظر بگیرید:

(i). اگر t یک خط مفروض باشد، W_t عبارت از تحویلی است که برای تمام نقاط P مستوی قرار ذیل تعریف میشود: اگر $P\in t$، پس $W_t(P)=P$ میشود. واگر $P\notin t$، درینصورت $W_t(P)$ عبارت از نقطه وسطی قطعه خط است که از P به t عمود رسم شده است.

(ii). اگر t یک خط مفروض باشد، V_t عبارت از تحویلی است که برای تمام نقاط P مستوی قرار ذیل تعریف میشود: اگر $P\in t$، درینصورت $V_t(P)=P$ بوده واگر $P\notin t$، پس درینصورت: $V_t(P)=P'$ طوریکه P نقطه وسطی قطعه خط است که از P' به t عمود رسم شده است.

(iii). اگر A یک نقطه مفروض باشد، U_A عبارت از تحویلی است که برای تمام نقاط P مستوی طبق ذیل تعریف میشود: اگر $P\neq A$ پس $U_A(P)=P'$ است، طوریکه P' نقطه وسطی قطعه خط $\overline{PA}$ است و $U_A(A)=A$ است.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

1. اگر t یک خط و A یک نقطهٔ مفروض باشد معکوس هر یک از تحویلات transformations ذیل را تعیین کنید:

(a). W_t ، (b). V_t ،

(c). M_t ، (d). U_A .

2. هر یک از افاده‌های ذیل را ساده کنید:

(a). $(M_t U_t)^{-1}$ ، (b). $(W_t V_t)^{-1}$ ،

(c). $(W_t M_s)^{-1}$ ، (d). $(V_t W_s)^{-1}$ ،

(e). $(M_t M_s)^{-1}$ ، (f). $(V_s M_t)^{-1} W_s$.

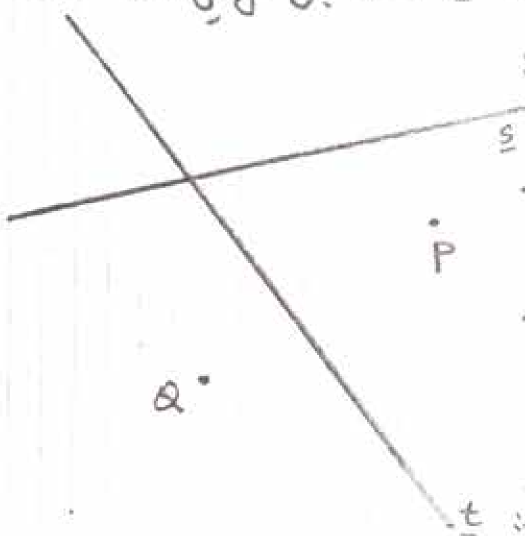
3. بالفرض t یک خط باشد:

(a). آیا W_t یک ایزومتری isometry میباشد؟

(b). آیا W_t یک انولوشن involution شده میتواند؟

(c). اگر A ، B و C مشترک الخط باشند راجع به تصاویر images آنها چه گفته میتوانید؟

4. خطوط s و t و نقاط P و Q طبق شکل ذیل داده شده اند، ترسیمات ذیل را انجام دهید:



(a). R را تعیین کنید طوریکه $M_s M_t(R) = P$ باشد.

(b). K را حاصل کنید طوریکه $W_t M_s(K) = Q$ باشد.

(c). E را پیدا کنید طوریکه $V_t W_s(E) = P$ باشد.

(d). D را حاصل کنید در صورتیکه $W_t M_s(D) = D$ شود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

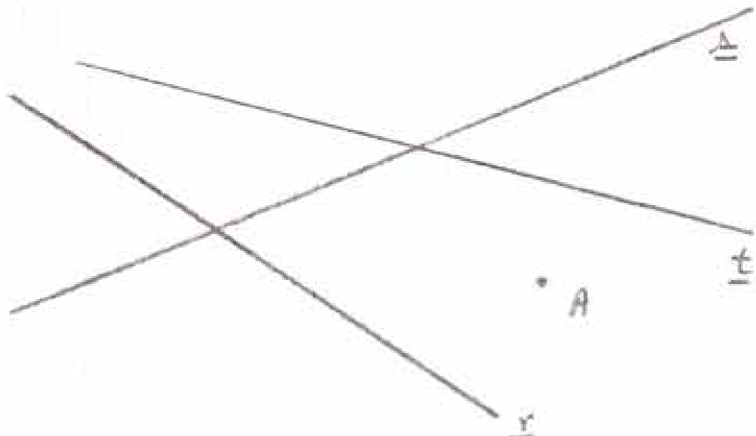
5. خطوط $\underline{s}$، $\underline{t}$ و $\underline{r}$ و نقطهٔ A مفروض‌اند. ترسیمات ذیل را انجام دهید:

(a). $\underline{v}$ را رسم کنید در صورتی که: $W_t(\underline{v})=\underline{v}$ و $A\in\underline{v}$ باشد.

(b). $\underline{u}$ را رسم کنید در صورتی که: $V_sW_t(\underline{u})=\underline{r}$ گردد.

(c). $\underline{z}$ را رسم نمائید در صورتی که: $U_AV_t(\underline{z})=\underline{s}$ شود.

(d). $\underline{w}$ را رسم نمائید در صورتی که: $W_s^2(\underline{w})=\underline{t}$ گردد.



6. نقاط $A(2,3)$ و $B(-2,9)$ داده شده‌اند:

(a) مختصات $U_A(B)$ را بدست آرید.

(b). مختصات $U_A(P)$ را حاصل نمائید در صورتی که $P(x,y)$ یک نقطهٔ مستوی باشد.

(c). آیا U_A یک ایزومتری isometry شده میتواند؟
آیا U_A یک involution انولوشن شده میتواند؟

(d). مختصات $U_A^{-1}(P)$ را بدست آرید.

7. اگر $\underline{t}=\{(x,y): x=3\}$ باشد، مطالب ذیل را حاصل دارید:

(a). مختصات $W_t(P)$ را برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ بدست آرید.

(b). مختصات $W_t^{-1}(P)$ را حاصل کنید.

(c). اگر $\underline{s}$ عبارت از محور y و $B=(-1,6)$ باشد، C را پیدا کنید طوری که $V_sW_t(C)=B$ گردد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

8. با استفاده از خاصیت انجمنی Associativity تحولات Transformations نشان دهید که برای هر تحولات مفروض: T، L و S ما داریم: $(TLS)^{-1}=S^{-1}L^{-1}T^{-1}$.

9. انعکاس‌های ذیل را ساده کنید:

(a). $(W_s V_t M_s)^{-1}$،

(b). $(M_t V_t W_s V_s)^{-1}$ را.

10. اگر A (نقطهٔ) مبدا و $\underline{s}=\{(x,y): y=-2\}$ باشد، مختصات نقطهٔ D را طوریکه: $U_A V_s(D)=(-3,4)$ بدست آرید.

(11). اگر $\underline{t}=\{(x,y): 3x-y=6\}$ و $\underline{s}$ عبارت از محور y و A عبارت از مبدا فرض شود معادله خط $\underline{u}$ را بنویسید در صورتیکه $V_s U_A(\underline{u})=t$ شود.

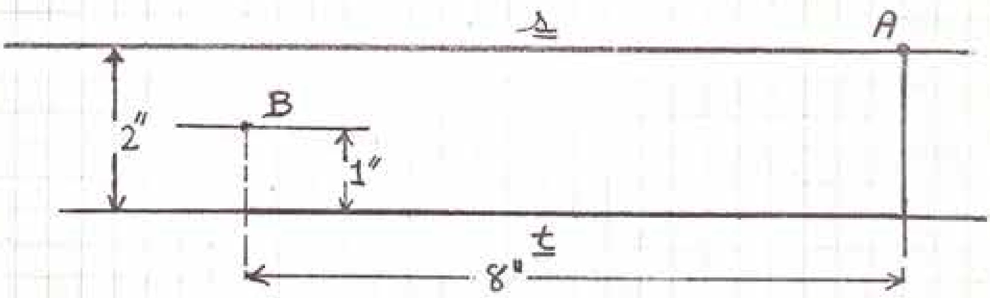
(12). اگر $\underline{g}=\{(x,y): y=x\}$ باشد، انعکاس‌های ذیل را تعیین کنید:

(a). مختصات ...... $W_g(A)$ را در صورتیکه $A=(6,2)$ باشد.

(b). برای هر نقطهٔ P مستوی مختصات $W_g^{-1}(P)$ را بدست آرید.

(13). اگر $\underline{t}\parallel\underline{s}$ باشد با شکل ذیل کوتاهترین طول مسیر A الی B را تعیین کنید طوریکه نقطهٔ متحرک از A الی B بصورت مجموعی به ترتیب خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ را تماس نماید. (نقطهٔ A در حساب این تماس‌های متعدد شامل نیست.)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com



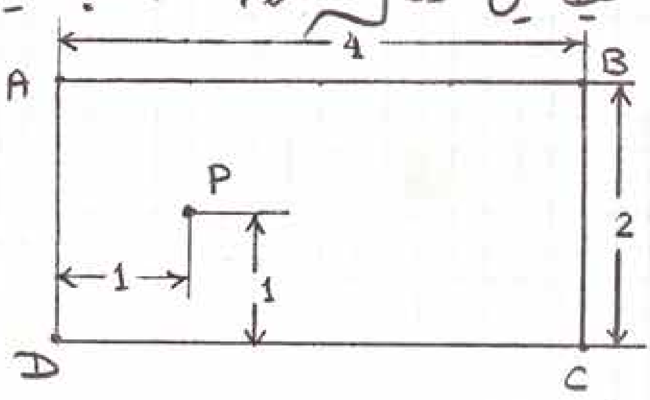
شکل مربوط سؤال 13 فوق

14. بمراجعه بسؤال (13) یک فارمول استخراج کنید که با شمارش آن n دفعه تماس که نقطهٔ متحرک بگیرد بخطوط s و t محاسبه شده بتواند.

15. مستطیل ABCD و نقطهٔ P در آن طبق شکل ذیل داده شده:

(a) یک متوازی الاضلاع که توسط مستطیل ABCD احاطه شده باشد (متوازی الاضلاع محاطی مستطیل ABCD را) رسم کنید، طوریکه یکضلع آن از نقطهٔ داده شده P عبور کند.

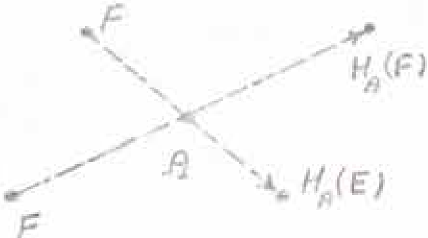
(b). محیط این متوازی الاضلاع را محاسبه کنید.



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

2-3. نیم دورها Half Turns

در بحث پیشتر تذکر داده شده که انعکاس خطی مثال خوب یک انولوشن "involution" که عبارت از یک مپینگ که معکوس خویش است" میباشد. نوع دیگر مپینگ‌ها که معکوس خود شده بتوانند یعنی شکل انولوشن involution را دارا شده بتوانند عبارت از نیم دورها Half Turns اطراف یک نقطهٔ ثابت میباشد.
نیم دور عبارت از مپینگ است که مستوی را حول یک نقطهٔ ثابت منعکس میسازد. طبق شکل (2-10). از نیرو بعضی وقت نیم دورها را بنام انعکاس حول یک نقطه Point Reflection (1) نیز یاد میکنند.



شکل (2-10)

تعریف :- یک نیم دور Half Turn حول یک نقطهٔ مفروض A عبارت از مپینگ H_A است که برای هر نقطهٔ P مستوی قرار ذیل تعریف شده است:

(i). اگر $P \neq A$، پس $H_A(P) = P'$ طوری که A نقطهٔ وسطی قطعه خط $\overline{PP'}$ است،

(ii). $H(A) = A$ است.

---

(1). نیم دورها یا انعکاس حول یک نقطه عیناً منعکرهٔ متناظر نظر به یک نقطه را توضیح نموده هم چنان انعکاس خطی منعکرهٔ متناظر نظر به یک خط را ایضاح میکند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

بنابر تعریف نیم دور بسر نقطه K مستوی یک نقطهٔ $H_A(K)$ تقابل میکند.
چون اثبات این حقیقت بسیط است آنرا بحیث تمرین گذاشته میشود.

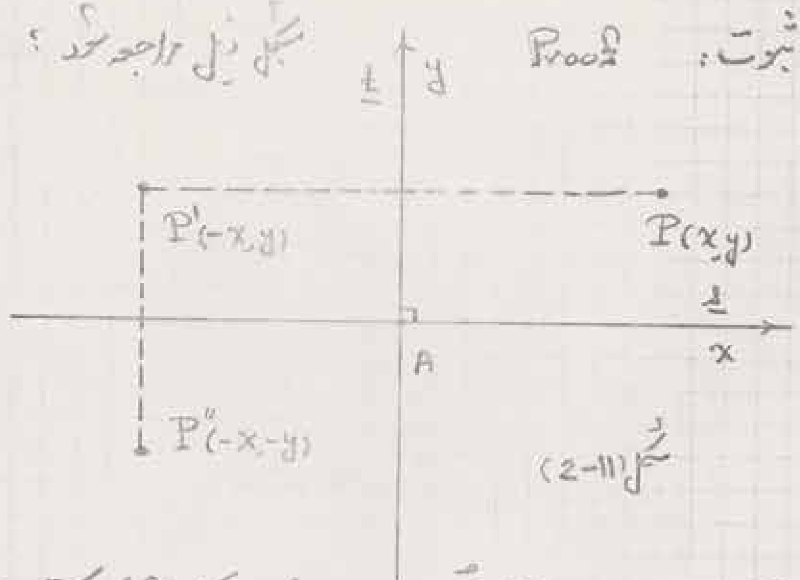
قبلاً گفته شد که انعکاسات خطی Line Reflections محور مرکزی مطالعات ما را در بارهٔ تحویلات Transformations تشکیل میدهد؛ این حقیقت دارد؛ زیرا هر ایزومتری Isometry یا یک انعکاس خطی است ویا از ترکیب دو ویا چند انعکاس خطی تشکیل میشود. چند لحظه بعد نشان خواهیم داد که یک نیم دور half turn بحیث حاصل ترکیب دو انعکاس خطی افاده شده میتواند. این حقیقت تضمین میکند که تمام نیم دورها half turns ایزومتری ها میباشند؛ وچون حاصل ایزومتری ها isometries یک ایزومتری است، پس بدون کدام شک وتردید ما بحقیقت اینکه: "نیم دورها خطوط را بر onto خطوط میپ کرده، اندازهٔ زاویه را حفظ نموده، و حافظ خاصیت موازات و عمودیت میباشند." تضمین شویم. حال باثبات قضیه اساسی که رابطه بین نیم دورها half turns و انعکاسات خطی را قایم میسازد اقدام میکنیم:

قضیه 2-6: Theorem

اگر A یک نقطه، t و s دو خط متعامد که یکدیگر را در نقطهٔ A قطع نموده اند مفروض باشند، پس
$H_A = M_s M_t$ میشود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ثبوت: Proof به شکل ذیل مراجعه شود؛



شکل (2-11)

ازانکه t و s دو خط متعامد اند، پس ما یک سیستم کمیات وضعیه را تأسیس نموده میتوانیم طوریکه در آن s بحیث محور x و t بحیث محور y و نقطهٔ A بحیث مبدا، قرار داده شوند. برای اینکه قضیه فوق را باثبات برسانیم نشان باید داد که برای هر نقطهٔ P مستوی:

$$H_A(P) = M_s M_t(P)$$ میشود.

فرض میکنیم که $P(x,y)$ کدام نقطهٔ دیگر مستوی بجز از A باشد. اگر ما تصویر P را به P^* افاده کرده یعنی:

$$P^*(x^*, y^*) = H_A(P)$$ افاده کنیم،

پس درینصورت A نقطهٔ وسطی $\overline{P^*P}$ میشود، و ما نوشته میتوانیم:

$$(0,0) = \left(\frac{x^*+x}{2}, \frac{y^*+y}{2}\right)$$

ازینجا: $\frac{x^*+x}{2} = 0$ و $\frac{y^*+y}{2} = 0$ گردیده

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

در نتیجه: $x^* = -x$ و $y^* = -y$ حاصل میشود.

بنابراین: $H_A(P) = P^* = (-x, -y)$.

از طرف دیگر ما داریم:

$$M_s M_t(P) = M_s(-x, y) = (-x, -y).$$

پس برای $P \neq A$ ما داریم:

$$M_s M_t(P) = H_A(P).$$

چون: $H_A(A) = A$ بوده

و هم: $M_s M_t(A) = M_s(A) = A$

پس اثبات کامل گردیده است، و ما داریم که:

$$M_s M_t(P) = H_A(P)$$

Q.E.D.

یک مدل تطبیقی واضح قضیه فوق اینست که هر نیم دور بحث نقطه دو انعکاس خطی به بی نهایت طریق اداره میگردد. پس اگر u و v هر جوره خطی را که از نقطه A گذشته و با هم عمود باشند ارائه کنند، در نتیجه ما تحقیق میباشیم که:

$$M_u M_v = M_s M_t = H_A$$ ... میشود.

قبلاً ما دیدیم که عمل ترکیب دو نگاشت تبدیلی Commutative نیست. به عبارت دیگر شما موجودیت دو تحویل L و T را که $TL \neq LT$ باشد را تصور کرده میتوانید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ولی با در نظر داشت عمود بودن خطوط، ترکیب انعکاسات ظلی تبدیلی بوده و بنابراین قضیهٔ (2-6) که قبلاً با ثبات رسیده از خاصیت تبدیلی commutativity پیروی میکند.

ثبوت این حقیقت خیلی ساده است، زیرا اگر $\underline{t}$ و $\underline{s}$ در نقطهٔ A عمود با همدیگر باشند، پس $\underline{s}$ و $\underline{t}$ در نقطهٔ A باهم عمود میباشند. از عمودیت $\underline{t}$ و $\underline{s}$ داریم: $M_t M_s = H_A$. و همچنان از عمودیت $\underline{s}$ و $\underline{t}$ داریم: $M_s M_t = H_A$.

در نتیجه: $M_t M_s = M_s M_t = H_A$.

با اساس این حقیقت نتیجهٔ مهم ذیل استنتاج شده میتواند:

نتیجهٔ مهم: Corollary. 2-6-A:

اگر $\underline{s}$ و $\underline{t}$ دو خط باهم عمود باشند، پس در نتیجه:

$M_s M_t = M_t M_s$ میشود.

ما نیم دوران را بحیث یک نوع دیگر انولوشن involution معرفی نمودیم. قضیهٔ (2-6) ثابت کرده میکند که هر نیم دور عبارت از معکوس inverse خودش میباشد. اگر H_A کدام یک نیم دور و $\underline{s}$ و $\underline{t}$ دو خط متعامدی که در نقطهٔ A یکدیگر را قطع میکنند، ارائه کنند؛ پس در نتیجه داشته میتوانیم:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ما نوشته میتوانیم:

$H_A = M_s M_t \quad \cdots$ قضیه 2-6

$H_A^{-1} = (M_s M_t)^{-1} \quad \cdots$ تعریف تساوات

$H_A^{-1} = M_s^{-1} M_t^{-1} \quad \cdots$ قضیه 2-5

$H_A^{-1} = M_s M_t \quad \cdots$ قضیه 2-4

$H_A^{-1} = H_A \quad \cdots$ قضیه 2-6

بنابران . . . $H_A^{-1} = H_A$

نتیجه مهم: 2-6-B . Corollary

اگر H_A یک نیم دور باشد، پس $H_A^{-1} = H_A$ میباشد.

ما این مبحث را توسط بیان کردن یک قضیه مهم که از نتیجه آن استخراج فارمولی که با آن مختصات تصویر یک نقطه مفروض تحت یک نیم دور Half Turn تعیین شده میتواند ختم میکنیم. اثبات این قضیه را بحیث تمرین واگذار میشویم.

قضیه Theorem . 2-7 :

اگر $A = (a, b)$ بوده برای هر نقطه $P = (x, y)$ مشتوی، $H_A(P) = (2a-x, 2b-y)$ میشود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

تمرینات : Problem Set 2-3

۱. نقاط A، B و P طوری که در شکل تعیین شده مفروض اند؛ ترسیمات ذیل را اجرا کنید:

(a). $H_A(P)$،

(b). R را بدست آرید طوری که $H_B(R)=A$ گردد.

(c). $H_A H_B(P)$،

(d). $H_B H_A(P)$،

(e). $H_A^2(P)$ را ترسیم نمایید.

۲. خط ℓ و نقطه A مفروض اند،

(a). $\ell' = H_A(\ell)$ را ترسیم کنید؛

(b). ثابت کنید که $\ell \parallel \ell'$ است.

۳. اگر $A=(2,3)$ باشد، افاده های ذیل را تعیین کنید:

(a). $H_A(C)$ را در صورتیکه $C=(2,3)$ باشد.

(b). $H_A(D)$ را در صورتیکه $D=(-2,7)$ باشد.

(c). $H_A^{-1}(E)$ را در صورتیکه $E=(4,-1)$ باشد.

(d). $H_A(P)$ را در صورتیکه $P=(x,y)$ باشد.

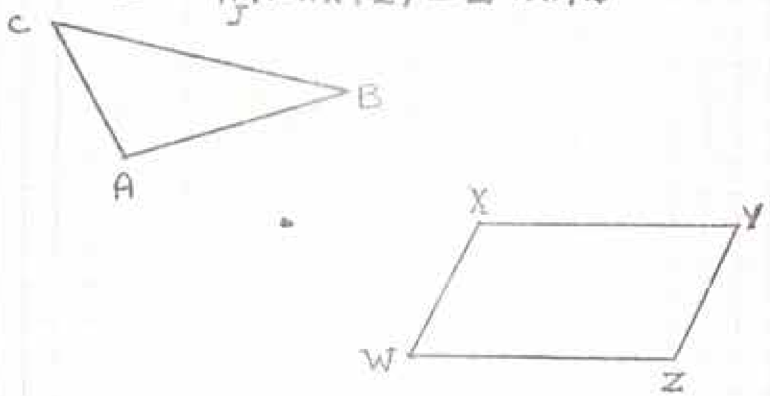
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

4. مثلث $\triangle ABC$، متوازی‌الاضلاع $\square WXYZ$ و نقطهٔ K طوریکه در شکل ذیل تذکر داده شده اند مفروض اند:

(a). $H_K(\triangle ABC)$ را رسم کنید.

(b). نقطهٔ J را تعیین کنید طوریکه:

$H_J(\square WXYZ) = \square WXYZ$ شود.



5. نقاط A ، B و C طوریکه در شکل ذیل نشان داده شده اند مفروض اند، ترتیبات ذیل را انجام دهید:

(a). خط s و t را در صورتیکه: $M_s(B)=B$ و $H_A=M_sM_t$ شود.

(b). خط u و v را طوریکه: $M_v^{-1}(C)=C$ و $H_A=M_uM_v$ شود.

6. اگر $B=(1,-3)$ باشد، معلوم کنید:

(a). $H_B(D)$ را در صورتیکه: $D=(-3,4)$ باشد.

(b). E را در صورتیکه: $H_B(E)=(-2,5)$ گردد.

(c). $H_B(P)$ را در صورتیکه: $P=(x,y)$ باشد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

d. معادلات خطوط $\underline{d}$ و $\underline{t}$ را طوریکه $H_B = M_d M_t$ گردد، بدست آرید.

7. نشان دهید که برای نقطهٔ $P(x,y)$ مستوی درصورتیکه $A=(a,b)$ باشد $H_A=(2a-x,\ 2b-y)$ میشود.

8. اگر $A=(0,-3)$ و $E=(2,6)$ باشد هریک از افاده های ذیل را تعیین کنید:

(a). $H_D H_E(E)$، (b)- $H_D H_E(K)$ را درحالیکه $K=(1,-4)$ باشد،

(c). $H_E H_D(K)$، (d)- $(H_D H_E)^{-1}(K)$،

(e)- اگر $P=(x,y)$ ، $H_D H_E(P)$ را.

9. اگر $C=(-4,3)$ و $g=\{(x,y) : y=-x\}$ باشد، افاده های ذیل را تعیین کنید:

(a). $M_g M_c(2,-1)$، (b)- $M_g H_c(P)$ برای $P=(x,y)$،

(c). آیا $M_g H_c = H_c M_g$ ؟ (d)- $(M_g H_c)^{-1}(P)$ را.

10. برای هریک از بیانیه های ذیل نتیجه استخراج کنید و به عبارت دیگر نتیجهٔ هرکدام از بیانیه های (a تا e) ذیل را بیرون کنید.

(a). $H_A(K)=H_A(J)$، (b)- $H_A(\underline{a})=\underline{a}$،

(c)- $H_A(D)=H_B(D)$، (d)- $H_A(E)=E$،

(e) $H_A H_B(\underline{a}) \parallel \underline{a}$ و $A\neq B$.

11. کدام یک از بیانیه های ذیل صحیح و کدام آنها غلط است:

(a)- برای دو نقطهٔ متفاوت A و B: $H_A H_B = H_B H_A$ است،

(b)- هر شی دوران یک ایزومتری isometry هم جهت مستقیم است،

(c)- برای $\underline{a} \perp \underline{t}$ مستقیم: $H_A H_B(\underline{a}) \perp H_A H_B(\underline{t})$ صحیح است.

(d)- اگر $A^*=H_B(A)$ و $B^*=H_A(B)$ باشد پس در نتیجه $A^*B^*=2AB$ میشود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

(e). اگر $A \in \underline{s}$ بوده و P یک نقطهٔ دیگر خط $\underline{s}$ باشد پس در نتیجه $H_A(\underline{s}) = \underline{s}$ و $H_A(P) = P$ میشود.

12. اگر $A=(-1,0)$ باشد معادلات خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ را بدست آرید درصورتیکه $B(3,2) \in \underline{s}$ بوده $H_A = M_s M_t$ گردد.

13. اگر $\underline{s}=\{(x,y): y=2\}$ و $\underline{t}=\{(x,y): x=-3\}$ باشد، معادلات خطوط $\underline{u}$ و $\underline{v}$ را بنویسید درصورتیکه $\underline{u}$ از مبداء عبور نموده و $M_u M_v = M_s M_t$ باشد.

14. نقاط A و B در خط $\underline{s}$ مفروض اند، اگر نقاط R، S و T یک سه گانهٔ مرتب که بدان ترتیب (R,S,T) بوده و جهت دوران شان Clockwise orientation را تعقیب بدارند، راجع به تصادیر این سه گانهٔ مرتب تحت هر یک از حرکات ذیل چه گفته میتوانید؟

(a). H_A ، (b). $H_A H_B$ ، (c). $M_s H_A$ ،

(d). $H_A M_s H_B$ ، (e). H_A^{-1} ، (f). $(M_s H_B)^{-1}$.

15. نقاط A، B و C مفروض اند ثابت کنید که:

(a). $(H_A H_B)^{-1} = H_B H_A$ ،

(b). $(H_A H_B H_C)^{-1} = H_C H_B H_A$.

16. معکوس هر یک از تحویلات مرکب ذیل را بدست آرید:

(a). $M_s H_A$ ، (b). $M_s H_A M_t$ ،

(c). $H_A M_t H_B$ ، (d). $T^{-1} H_A$ در حالیکه T یک تحویل است.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

17. (a). اگر $A=(0,0)$ و $B=(-4,1)$ باشند، K را تعیین کنید طوریکه: $H_A H_B(K)=(6,2)$ باشد.

18. اگر $A=(-1,4)$ و $\underline{l}=\{(x,y): y=2x-1\}$ و $\underline{t}=\{(x,y): y+4x=0\}$ باشند:

(a). معادله: $\underline{t}'=H_A(\underline{t})$ را بدست آرید.

(b). در صورتیکه $\underline{u}$ عبارت از محور x باشد معادلهٔ $H_A(\underline{u})$ را بدست آرید.

(c). آیا $(-5,6)$ بالای $H_A(\underline{l})$ واقع میشود؟ جواب خویش را استدلال کنید.

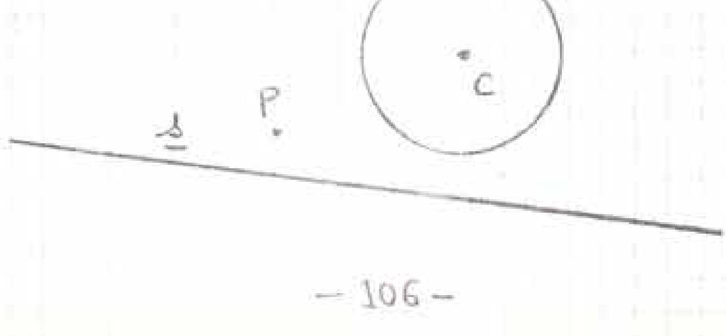
19. اگر $\mathscr{C}=\{(x,y): x^2+(y-3)^2=4\}$ و $\underline{g}=\{(x,y): y=x\}$ و $A=(3,2)$ باشد؛ آیا: $D(2,5)\in M_g H_A(\mathscr{C})$ میباشد؟

20. خط $\underline{l}$، نقطهٔ P، دایرهٔ $\mathscr{C}$ طبق شکل ذیل مفروض اند:

(a). با استفاده از استعمال یک نیم دور مناسب یک قطعه خط $\overline{AB}$ را رسم نمائید طوریکه: $A\in\mathscr{C}$ و $B\in\underline{l}$ و P نقطهٔ وسطی $\overline{AB}$ باشد.

(b). ثابت کنید که ترسیمات شما شرایط مطلوب را تحقیق میکند.

(c). مسأله مذکور دارای چند حل بوده میتواند؟



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

۴-۲. ادامهٔ نیم دورها
Half Turns Continued

تاکنون مطالعات ما دربارهٔ نیم دورها (half turns) حقایق مهم ذیل را احواکر ده :

(1) . هر نیم دور به حاصل دو انعکاس خطی تحلیل و تجزیه شده میتواند .

(2) . بنابر خاصیت فوق نیم دورها ایزومتری های جهت مستقیم Direct isometries میباشند .

(3) . هر نیم دور معکوس خویش است .

ازینکه نیم دورها ایزومتری اند ، ازین نتیجه میشود که تصویر image خط تحت یک نیم دور یک خط میباشد . علاوه‌ازان نیم دورها دارای خاصیتی که تصویر یک خط بنابر یک نیم دور یا خود خط مفروض بوده و یا یک خط دیگر که موازی با آن است میباشد نیز میباشند .

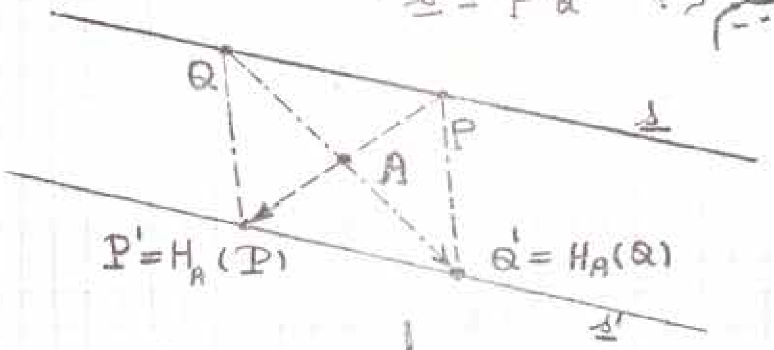
برای اثبات این حقیقت مفید ، یک خط کیفی $\underline{l}$ و یک نیم دور کیفی H_A را مدنظر میگیریم :

درمرحلهٔ اول فرض مینمایم که $A \notin \underline{l}$ بوده ، پس دو نقطهٔ کیفی P و Q را بالای خط $\underline{l}$ انتخاب میکنیم طوریکه :

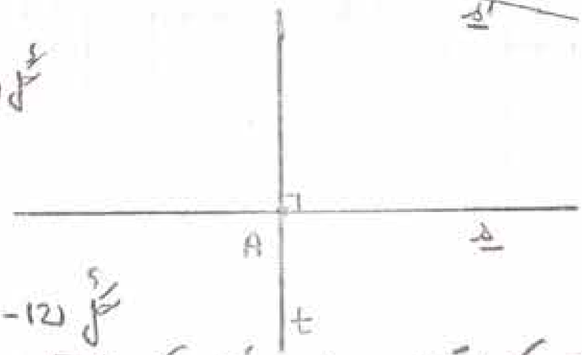
$P' = H_A(P)$ ، $Q' = H_A(Q)$ و $\underline{l}' = H_A(\underline{l})$ گردد .

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

چون Δ' خطی است که نقاط P' و Q' را در بر دارد، پس ما میتوانیم بنویسیم که: $\Delta' = \overleftrightarrow{P'Q'}$.



شکل (2-12)



شکل (2-12)

اما شکل $PQP'Q'$ یک متوازی الاضلاع است که $\overline{PP'}$ و $\overline{QQ'}$ اقطار آنرا تشکیل داده و از هندسهٔ (ابتدائی) میدانیم که قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را تنصیف میکنند؛ چون $\overline{PP'}$ و $\overline{QQ'}$ یکدیگر را در نقطهٔ A تنصیف نموده اند، بنابران $\overline{P'Q'} \parallel \overline{PQ}$ بوده، و ازین نتیجه میشود که $\Delta \parallel \Delta'$ است .

حال فرض مینمائیم که $A \in \Delta$ باشد . اگر t یک خط که بنقطهٔ A خط Δ عمود باشد درنظر گرفته شود ، درینصورت ما داریم:

$$H_A = M_t M_\Delta$$

که ازین نتیجه: $\Delta' = H_A(\Delta) = M_t M_\Delta(\Delta) = M_t(\Delta)$ استخراج شده میتواند .

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

از طرف دیگر چون $\underline{s} \perp \underline{t}$ بوده ،

و $M_{s}(\underline{s}) = \underline{s}$ است ،

بنابران $\underline{s} = \underline{s}'$ میشود .

نتیجهٔ مباحثات فوق بقسم قضیهٔ ذیل بیان شده میتواند :

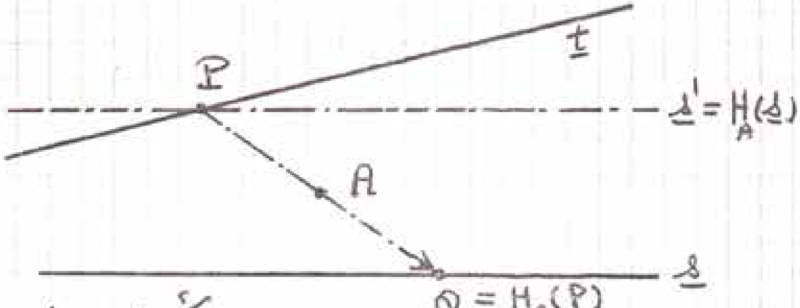
قضیه Theorem $2-8$:

اگر H_A یک نیم دور و $\underline{s}$ یک خط و $\underline{s}' = H_A(\underline{s})$ مفروض باشند ،
درصورتیکه $A \in \underline{s}$ باشد ، پس درینصورت $\underline{s}' = \underline{s}$ بوده
واگر $A \notin \underline{s}$ باشد ، پس $\underline{s} \parallel \underline{s}'$ میشود .

تطبیق مؤثر این قضیه درحل مسایل مانند مثال ذیل بیان شد :

مثال ؛ دو خط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ که باهم موازی نیستند ! نقطهٔ A که بالای یکی از دو خط مفروض واقع نیست طبق شکل ذیل داده شده ؛
نقاط X و Y را تعیین کنید طوریکه : $X \in \underline{s}$ و $Y \in \underline{t}$
بوده و A نقطهٔ وسطی قطعه خط $\overline{XY}$ را تشکیل دهد.

حل :- فرضاً $\underline{s}' = H_A(\underline{s})$ باشد ، پس $\underline{s} \parallel \underline{s}'$ است.



شکل (2-13)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ما میدانیم که $\underline{\ell}'$ خط $\underline{t}$ را فقط در یک نقطه قطع میکند، که ما آنرا به P نشان میدهیم. حال نقطهٔ Q را طوری که $Q=\overleftrightarrow{PA}\cap\underline{\ell}$ باشد بدست می‌آوریم. اکنون نشان میدهیم که Q عبارت از نقطهٔ X و P عبارت از نقطهٔ Y مطلوب است.

چون $P\in\underline{\ell}'$ بوده و $H_A(\underline{\ell}')=\underline{\ell}$ است، (چرا؟) ازین نتیجه میشود که $H_A(P)\in\underline{\ell}$ است. بهمین قسم از تعریف نیم دور میدانیم که: $H_A(P)\in\overleftrightarrow{PA}$ ، پس

$$H_A(P)=\underline{\ell}\cap\overleftrightarrow{PA}$$
$$=Q$$
... میشود.

بنابرآن A نقطهٔ وسطی $\overline{PQ}$ است. پس P و Q نقاط مطلوب است. اگر بجای $H_A(\underline{\ell})$ ما $\underline{t}'=H_A(\underline{t})$ را مدنظر میگرفتیم باز بعین نتیجه که P و Q را بحیث نقاط مطلوب/جواب ارائه میشود میرسیدیم. شما میتوانید که موضوع را بیشتر بررسی نموده و نشان دهید که P و Q یگانه جواب مطلوب است.

بعده زیاد مسایل در تمرینات آخر این مبحث قرار داده شده اند و مانند این را پرسیده شده که اگر T یک تحویل موضوعی باشد؛ نقطهٔ K را بدست آرید طوریکه: $T(K)=K$ گردد.

نقطهٔ مانند K (مثال فوق) بنام نقطهٔ ثابت میپنگ fixed Point of mpg یاد میشود. نیم دور یک مثال تحویلی است که صرف دارای یک نقطهٔ ثابت fixed point میباشد. انعکاسات خطی صرف گردیده دارای بی نهایت نقاط ثابت fixed Points

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

نقاط ثابت fixed points بوده، وحتی یک تحول موجود است که برای آن هر نقطه‌ای چنین یک نقطه ثابت میباشد. آیا میدانید که این نوع از کدام تحول است؟ بعداً خواهید دید که فهمیدن نقطه ثابت fixed point در حل مسائل در اثبات قضایا خیلی مفید واقع میشود.

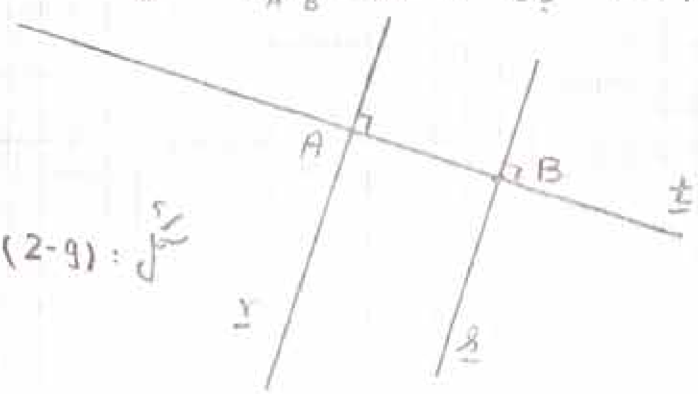
درحقیقت، تا الحال هر تحولی را که خواه در متن کتاب و یا در حل مسائل تمرینات نام برده ایم لااقل دارای یک نقطهٔ ثابت میباشد. حال نشان خواهیم داد که تعداد کثیری تحول موجود اند که هیچ دارای کدام یک نقطه ثابت نمیباشند. در طی این مباحثه، بحقیقت اینکه افاده نیم دور با ساختن انعکاسات خطی تا چه اندازه موثریت دارد متوجه خواهیم شد.

Theorem . 2-9 : قضیه

ترکیب دو نیم دورها حول نقاط متمایز (متفاوت) دارای نقاط ثابت fixed points نمیباشد.

یا بعبارت دیگر:

فرضاً A و B دو نقطه متفاوت و K نقطهٔ کیفی باشد، پس $H_A H_B(K) \neq K$ میباشد.



شکل: (2-9)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ثبوت : Proof

اگر $\overleftrightarrow{AB}=t$ بوده خطوط r و s علی الترتیب در نقاط A و B عمود بآن فرض گردند پس با ساس قضیه 2-۶ ما داریم:

$$
\begin{aligned}
H_A H_B &= (M_r M_t)(M_t M_s) \\
&= [(M_r M_t) M_t] M_s \\
&= [M_r (M_t M_t)] M_s \\
&= [M_r I] M_s \\
&= M_r M_s
\end{aligned}
$$

با استفاده از طریق ثبوت غیرمستقیم فرض میکنیم که:

$H_A H_B(K) = K$ باشد،

پس بموجب اینکه چون:

$H_A H_B = M_r M_s$ ثابت شد، داشته میتوانیم:

$$M_r M_s(K) = H_A H_B(K) = K$$

پس درینصورت:

$$M_r[M_r M_s(K)] = M_r(K)$$

$$
\begin{aligned}
M_r[M_r M_s(K)] &= [M_r(M_r M_s)](K) \\
&= [(M_r M_r) M_s](K) \\
&= [I M_s](K) \\
&= M_s(K)
\end{aligned}
$$

چون: $M_r(K) = M_s(K)$

حال اگر $K^* = M_r(K) = M_s(K)$ را وضع کنیم دیده میشود:

اگر $K^* \neq K$ باشد، پس درینصورت هر دو خط r و s ناصف عمودی $\overline{KK^*}$ میشود. ولی $\overline{KK^*}$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

محض دارای یک نا صف عمودی بوده میتواند ولی . از طرف دیگر ی و ه دو خط متقاطع و (موازی) اند که بدو نقطه متفاوت A و B بر خط ت عمود اند . بنابرآن نتیجه اینکه ی و ه هر دو $\overline{KK^*}$ را عموداً تنصیف نموده اند محال است .

درصورتیکه $K^*=K$ باشد ، درینصورت :

$$M_{ه}(K)=K$$

$$M_{ی}(K)=K$$ میشود .

ازین نتیجه شده میتواند که $K\in ی$ و هم $K\in ه$ میشود .
چون تمام نقاط ثابت در یک انعکاس خطی بالای محور انعکاس واقع میشوند و $K\in ی\cap ه$ است . این نتیجه دوباره متقاطع و موازی بودن خط ه و ی را که بدو نقطه مشخص B و A خط ت عمود اند نقض میکند . پس در هر دو صورت فرضیه اینکه :

$H_AH_B(K)=K$ غلط است .

پس حقیقت اینکه : $H_AH_B(K)\neq K$ ثابت شد .

Q.E.D.

بنابر تطبیق نتیجه قضیه 9-9 نشان میتوان داد که صرف یک نیم دور موجود میشود که یک نقطه مفروض A را یک نقطه مفروض B میپ میکند . یعنی بیشتر از یک نیم دور موجود شده نمیتواند که یک نقطه مفروض A را onto بر یک نقطه مفروض B میپ کنند . برای اینکه در حقیقت رو به اثبات برسانیم با فرض میکنیم که دو نیم دور H_D و H_E موجود شده میتوانند طوریکه :

$H_D(A)=B$ و هم $H_E(A)=B$ گردد .

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پس ما داریم که :

$$H_D(A) = H_E(A)$$

با بکار بردن تطبیق معکوس H_D نسبت به هر دو طرف معادله فوق ما داریم :

$$H_D^{-1}[H_D(A)] = H_D^{-1}[H_E(A)]$$

آنگاه ما میدانیم که ... $H_D = H_D^{-1}$ است.

پس ما داریم :

$$A = H_D H_E(A).$$

در حالیکه قضیه 2-9 ارائه میکند : اگر D و E نقاط متمایز و متفاوت باشند ، درینصورت $H_D H_E$ دارای نقاط ثابت Fixed Point شده نمیتوانند . در نتیجه $D = E$ گردیده و ازین جا ادعا شده میتواند که یک و فقط محض یک نیم دور موجود شده میتواند که نقطهٔ A مفروض را بر یک نقطهٔ B مفروض ضب کند.
علاوه بر آن اگر M یک نقطه وسطی $\overline{AB}$ باشد درینصورت واضح است که $H_M(A) = B$ میشود.
حال ما میتوانیم که نتیجهٔ مهم ذیل را باثبات برسانیم :

نتیجهٔ مهم Corollary. 2-9:

اگر A و B دو نقطه مفروض باشند ، یک و تنها محض یک نیم دور موجود شده میتواند که A را onto بر B ضب کند.

در دو مبحث گذشته ما بقدر کافی اطراف موضوع تحویل معکوس (و یا معکوس تحویل) پیچیدیم . حال میخواهم که صورت استفاده بهتر و تطبیق مؤثر ترین میتینگ را مطالعه و بررسی نمائیم .

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

درحقیقت پرابلم و مسأله‌ای را که ما میخواهیم آنرا مورد حمله قرار دهیم طبق ذیل بیان شده میتواند: یک مجموعه نقاط ص و یک تحویل T و یک نقطه A مفروض اند؛ معلوم کنید که آیا A تحت T در مجموعه تصویر ص واقع شده میتواند ویا خیر؟

اگر ص یک خط بوده و T یک تحویلی را ارائه کند که خطوط را بر خطوط onto منطبق میکنند، درینصورت جواب مسأله فوق سهل بوده، محض دو نقطه خط ص را انتخاب نموده و تصاویر آنها را تحت T حاصل مینمائیم و سپس می بینیم که آیا نقطه A بالای خطیکه ازین دو نقطه تصویر میگذرد واقع شده میتواند ویا خیر! اما این طریقه حل مسأله درصورتیکه تصویر ص یک خط مستقیم نباشد ویا آنکه تحویل T خطوط را بر خطوط onto منطبق نکند منجر بناکامی میشود؛ درینصورت طریقه تطبیق تحویلات معکوس درحل همچو مسایل مثمرتر و موثرتر است. این طریق حل مسایل ~~کلی~~ بیک اصل ساده ایکه بقسم قضیه ذیلاً بیان میشود اتکا دارد:

قضیه Theorem 2-10:

اگر T یک تحویل Transformation و ص کدام یک ست مجموعه نقاط و A یک نقطه مفروض باشد، پس $A \in T(\text{ص})$ است، درصورتیکه $T^{-1}(A) \in \text{ص}$ باشد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ثبوت: Proof

اگر $A \in T(\mathcal{S})$ باشد، پس یک نقطه $B \in \mathcal{S}$ موجود شده میتواند طوریکه $T(B) = A$ گردد.

چون T یک تحویل است، پس دارای یک معکوس بوده،

درینصورت: $T^{-1}[T(B)] = T^{-1}(A)$ میشود.

اما:

$$\begin{aligned} T^{-1}[T(B)] &= [T^{-1}T](B) \\ &= I(B) \\ &= B. \end{aligned}$$

چون: $B = T^{-1}(A)$ بوده،

هم: $B \in \mathcal{S}$ است.

درنتیجه: $T^{-1}(A) \in \mathcal{S}$ میشود.

وبالعکس اگر: $T^{-1}(A) \in \mathcal{S}$ باشد؛

از تعریف $T(\mathcal{S})$ نتیجه میشود که:

$T[T^{-1}(A)] \in T(\mathcal{S})$ است.

اما: .... $T[T^{-1}(A)] = A$ است،

پس: $A \in T(\mathcal{S})$ میشود.

که درنتیجه اثبات قضیه را تکمیل میکند.

Q.E.D.

حالا یک مثال مشخص را درنظر گرفته دیده میتوانیم که چطور از تطبیق دو طریقه معکوس در حل همچو مسایل صورت میگیرد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

مثال: Exemple:

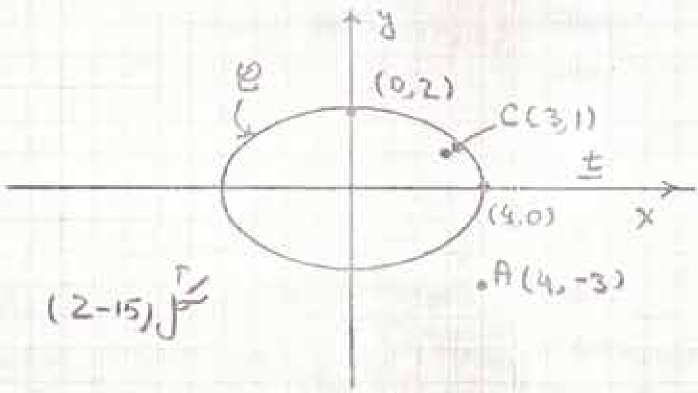
فرضاً $\mathcal{E}=\{(x,y): x^2+4y^2=16\}$ و $A=(4,-3)$

و $C=(3,1)$ بوده t عبارت از محور x باشد؛

معلوم کنید که آیا نقطه A تصویر کدام نقطه $\mathcal{E}$ تحت تحویل

تحویل M_tH_c شده میتواند و یا خیر؟

$\mathcal{E}$ عبارت از یک بیضوی Ellipse است که در شکل ذیل ارائه شده است.



شکل (2-15)

حل Solution:

اولاً ما میبینیم که:

$$(M_tH_c)^{-1} = H_c^{-1}M_t^{-1}$$
$$= H_cM_t$$

برای هر نقطه $P(x,y)$ مستوی داریم:-

$$M_t(P) = (x,-y)$$

و هم چنان:

$$H_c(P) = (2\cdot3-x,\ 2\cdot1-y)$$
$$= (6-x,\ 2-y)$$

بنابران

$$(M_tH_c)^{-1}(P) = H_cM_t(P)$$
$$= H_c(x,-y)$$
$$= (6-x,\ 2+y)$$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

چون:

$$(M_t H_c)^{-1}(A) = (6-4\,,\,2-3)$$
$$= (2,-1)$$

اما از شکل: $2^2+4(-1)^2 \neq 16$ است،

از این نتیجه میشود که: $(M_t H_c)^{-1}(A) \notin \mathcal{E}$ بوده

و بنابران قضیه 2-10:

$A \notin M_t H_c(\mathcal{E})$ میشود

Q.E.D.

با اندک تغییر/ از تکنیک (از این طریق حل مسایل) برای تعیین معادله تصویر یک ellipse درصورتیکه معادله خود ellipse معروض معلوم (وتعریف شده) باشد استفاده شده میتواند.

بمراجعه درشکل فوق برای هر نقطه $P(x,y)$ ما گفته میتوانیم که: $P \in M_t H_c(\mathcal{E})$ است.

درصورتیکه: $(M_t H_c)^{-1}(P) \in \mathcal{E}$ باشد.

اما: $(M_t H_c)^{-1}(P) = (6-x\,,\,2+y)$ است.

پس: $(M_t H_c)^{-1}(P) \in \mathcal{E}$ میشود،

درصورتیکه اگر واگر: $(6-x\,,\,2+y) \in \{(x,y) : x^2+4y^2=16\}$ باشد؛

و این درحالتی حقیقت دارد که اگر واگر:

$(6-x)^2+4(2+y)^2=16$ گردد.

پس $P(x,y) \in M_t H_c(\mathcal{E})$ میشود،

درصورتیکه اگر واگر:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پس $P(x,y) \in M_t H_c(\mathcal{E})$ میشود، (تکرار است)

درصورتیکه اگر واگر :

$P(x,y) \in \{(x,y): x^2+4y^2-12x+16y+36=0\}$ باشد.

واین افاده میکند که :

$$x^2+4y^2-12x+16y+36=0$$

یک معادله معلوم وتعریف شدهٔ تصویر $\mathcal{E}$ تحت جفتگ $M_t H_c$ است.

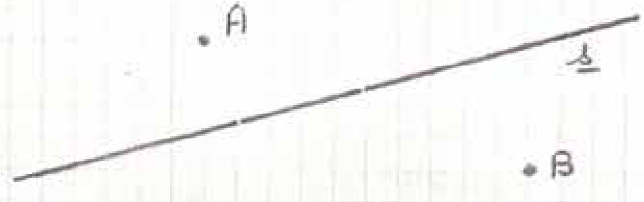
تمرینات : 2-4 . Problem Set

1. نقاط A ، B و خط $\underline{s}$ مفروض اند ؛ ترسیمات ذیل را اجرا کنید:

(a). $\underline{s}' = H_A H_B(\underline{s})$ را.

(b). $\underline{t}$ را رسم کنید درصورتیکه ؛ $H_A H_B(\underline{t}) = \underline{s}$ گردد.

(c). $\underline{v}$ را رسم کنید درصورتیکه ؛ $H_A H_B(\underline{v}) = \underline{v}$ شود.

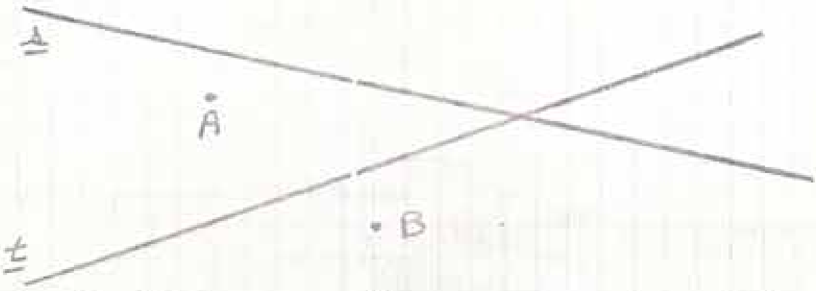


2. خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ ونقاط A و B طبق شکل ذیل مفروض اند: ترسیمات ذیل را اجرا کنید :

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

(a). $M_s H_A H_B(\underline{t})$ را رسم کنید.

(b). $\underline{Y}$ را رسم کنید طوریکه: $H_B H_A H_t(\underline{Y}) = \underline{s}$ شود.



3. اگر $\underline{s}=\{(x,y): 2x-5y=4\}$ و $A=(1,4)$ مفروض باشند:

(a). آیا $C(-1,6)\in H_A(\underline{s})$ میباشد؟

(b). معادلهٔ $\underline{s}'$ را بنویسید.

4. اگر $\underline{s}=\{(x,y): 3x+2y=4\}$ و $A=(-2,1)$ مفروض باشند:

(a). کدام قیمت k، $D(3,k)\in \underline{s}'=H_A(\underline{s})$ میگردد؟

(b). معادلهٔ $\underline{s}'$ را بنویسید.

(c). معادلهٔ یک خط $\underline{t}$ را بنویسید طوریکه $H_A(\underline{t})=\underline{s}$ شود.

5. اگر: $\wp=\{(x,y): y=x^2\}$ و $A=(3,1)$ مفروض باشند:

(a). آیا $D(3,-7)\in \wp'=H_A(\wp)$ میباشد؟

(b). معادلهٔ $\wp'$ را بنویسید.

6. اگر $\wp=\{(x,y): y=\frac{1}{x}\}$ و $A=(2,0)$ و $\underline{t}$ عبارت از محور x باشند:

(a). کدام قیمت k میگردد درحالیکه $C(6,k)\in\wp'$ و $\wp'=M_t H_A(\wp)$ است؟

(b). معادلهٔ $\wp'$ را بنویسید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

7. درصورتیکه $C=(2,-1)$ ، $\underline{s}=\{(x,y):\ y=x\}$ و $\underline{t}=\{(x,y):\ y=3-2x\}$ مفروض باشند، معادله $\underline{\ell}=H_C M_{\underline{s}}(\underline{t})$ را بنویسید.

8. یک تبدیل را مشخص سازید که:

(a). دارای نقاط ثابت fixed points نباشد.

(b). فقط دارای یک نقطهٔ ثابت باشد (نیم دوران را استعمال نکنید).

(c). بی‌نهایت نقاط ثابت را دارا باشد (انعکاس خطی را استعمال نکنید).

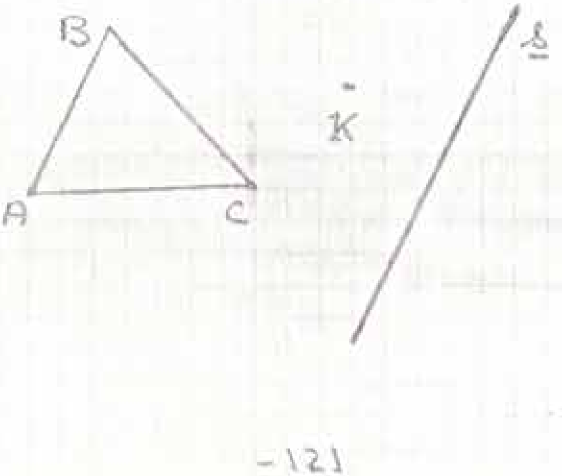
(d). هر نقطهٔ آن تحت آن یک نقطهٔ ثابت باشد. (کدام نقطهٔ ثابت را داشته باشد).

9. ثابت کنید که:

(a). درصورتیکه $\underline{t}\parallel\underline{\ell}$ باشد، پس $H_t M_{\underline{t}}$ دارای نقاط ثابت نیست.

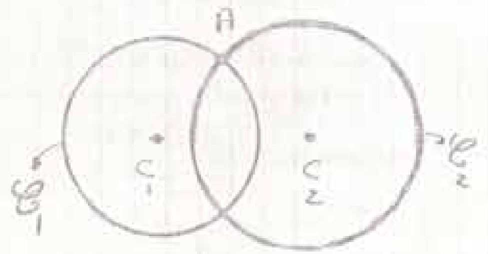
(b). اگر $A\notin\underline{\ell}$ ، پس $H_A M_{\underline{\ell}}$ دارای نقاط ثابت نیست.

10. مثلث $\triangle ABC$ ، خط $\underline{\ell}$ و نقطهٔ K طبق شکل مفروض اند:
تمام جوره نقاط $X\in\underline{\ell}$ و $Y\in\triangle ABC$ را بدست آورید طوریکه
K نقطهٔ وسطی قطعه خط $\overline{XY}$ باشد.



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

11. دو دایره $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ که در نقطهٔ A طبق دیاگرام یکدیگر را قطع نموده اند مفروض اند. یک قطعه خط $\overline{CD}$ را رسم کنید طوری که $C \in \mathcal{C}_1$ و $D \in \mathcal{C}_2$ بوده و A نقطهٔ وسطی $\overline{CD}$ باشد. صحت جواب خود را استدلال کنید.



12- (a). اگر $A \in \underline{s}$ باشد نشان دهید که $H_A M_s$ یک انعکاس خطی بوده و محور انعکاس آنرا توضیح کنید.

(b). اگر $\underline{s}$ و $\underline{t}$ به نقطهٔ A باهم عمود باشند و $\underline{t}$ به نقطهٔ B به $\underline{u}$ عمود باشد، ثبوت کنید که:

$$H_A M_u = M_t H_B .$$

13*. اگر A، B و C نقاط مفروض طبق شکل ذیل باشد،

(a). کدام نقطهٔ P را انتخاب نموده و P^* را رسم کنید طوری که:
$P^* = H_A H_B H_C(P)$ باشد.

(b). اگر M نقطهٔ وسطی $\overline{PP^*}$ باشد نقطهٔ M^* را رسم کنید طوری که: $M^* = H_A H_B H_C(M)$ باشد.

(c) کدام روابط بین M و M^* نشان دهید که چه نوع [illegible] $H_A H_B H_C$ بوجود می آورند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

14. بالفرض A ، B و C سه نقطه اند که مثلث ABC را یک مثلث قایم الزاویه در نقطه B میسازد. نشان دهید که حاصل ترکیب $H_A H_B H_C$ یک نیم دوره در حول کدام یک نقطه D است. نقطه D را تعیین کنید.

15. اگر $A=(0,0)$ و $B=(3,-1)$ مفروض باشند:

(a) در صورتیکه $C=(-2,4)$ باشد. $C''=H_B H_A(C)$ را معلوم کنید.

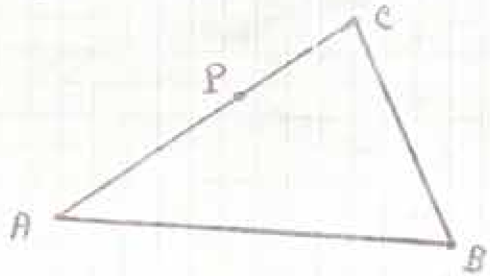
(b). اگر $P=(x,y)$ باشد، $P''=H_B H_A(P)$ را معلوم کنید.

(c). قطعات: CC'' ، PP'' و AB را مقایسه کنید.

16. (a). نشان دهید که اگر ایزومتری حداقل سه نقطهٔ ثابت که مشترک الخط نیستند باشد، پس ایزومتری مذکور یک تبدیل عینیت Identity mapping است.

(b). نشان دهید که اگر یک ایزومتری (غیر از ایزومتری عینیت) دارای دو نقطهٔ ثابت باشد، ایزومتری مذکور یک انعکاس خطی است.

17. مثلث ΔABC و نقطهٔ P طبق شکل ذیل داده شده اند؛ یک مثلث دیگر را در داخل مثلث ΔABC رسم کنید طوریکه یک رأس به نقطهٔ P بوده و دارای محیط اصغری باشد. (راهنمایی: که دو رأس دیگر مثلث مطلوب بالای قطعات $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ قرار خواهد داشت.)



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

2-5 . قطعه مستقیم‌های موجه (1)

Directed Segments

برای اینکه راه را برای مطالعه نوع مهمی دیگر از ایزومتری‌ها هموار سازیم ذیلاً مفکورهٔ قطعه مستقیم‌های موجه directed segments را معرفی می‌نمائیم:

تعریف:

یک قطعه مستقیم موجه directed segment عبارت از قطعه خط مستقیم است که یک نوک آن بحیث مبدأ و نوک دیگر آن بحیث انجام آن اراده میشود.

اگر دو نقطهٔ A و B مد نظر گرفته شود سمبول "$\overrightarrow{AB}$" برای نشان دادن قطعه مستقیم موجه که مبدأ آن را نقطهٔ A و انجام آن را نقطهٔ B تشکیل میدهند بکار می‌بریم. توجه نمائید که بین علایم قطعه مستقیم موجه "$\overrightarrow{AB}$" و شعاع "$\overrightarrow{AB}$" یک فرق موجود است: آن فرق کدام است؟

دو قطعه مستقیم‌های موجه باهم مساوی اند، درصورتیکه انها عین قطعه خط باشند؛ پس $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ است درصورتیکه اگر و اگر $A=C$ و $B=D$ باشند.

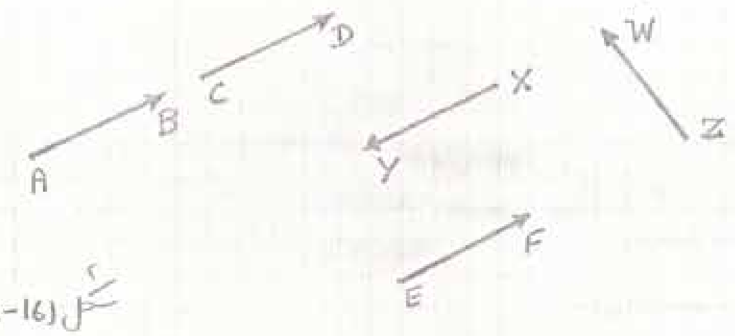
بخاطر باید داشت که $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{BA}$ است.

---

(1). قطعه مستقیم‌های موجه را "وکتورها" میتوان نامید؛ اما برای اینکه بموضوع بیشتر طعم هندسی داده باشیم این مفکوره را بنام فوق یاد نمودیم.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

معمولاً یک قطعه مستقیم را توسط یک قطعه خط تیری (وکتور) که نقطه انجام آن توسط تیر نشان داده میشود (یعنی نوک پیکان و یا تیر به نقطه انجام قرار میگیرد)، ارائه میکنند.



شکل (2-16)

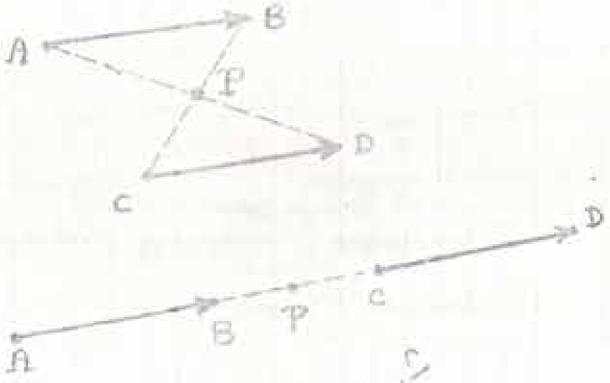
اگر دو قطعه خط متوالی دارای عین طول باشند، میگوییم که قطعات مذکور باهم انطباق پذیر congruent اند.
زمانی که ما بمطالعه قطعه مستقیم های موجه (وکتورها) شروع بکار داریم رابطه مهمی که بین اینها موجود است عبارت از رابطه متعادل equivalent relation است. بصورت آزادانه و سرسری میگوییم:
دو قطعه مستقیم موجه متعادل equivalent یکدیگر گفته میشوند درصورتیکه اگر دارای همین طول بوده و بهمین جهت موجه باشند؛ یا بعبارت ساده: دارای همین طول و عین جهت باشند.
با مراجعه بشکل (2-16) فوق گفته میتوانیم که: $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$ هر متعادل $\overrightarrow{AF}$ بوده حالانکه $\overrightarrow{XY}$ و $\overrightarrow{ZW}$ متعادل $\overrightarrow{AB}$ نیستند. توضیح غیر رسمی و انفارمل informal که در بالا راجع به متعادل بودن دو قطعه مستقیم موجه داده شده بصورت کلی قناعت بخش نیست؛ زیرا عبارت: بهمین جهت موجه بودن، ...

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

"تعیین جهت موجه بودن (یا دارای عین جهت بودن)" خوب روشن نیست. بتعقیب این ما ذیلاً به بیان یک تعریفی که در مرحلهٔ اول عجیب بنظر جلوه میکند ولی درحقیقت برای اثبات قضایا نظر به توضیح غیر رسمی ماقبل الذکر بیشتر مفید است اقدام مینمائیم :

تعریف :

یک قطعه مستقیم موجه $\overrightarrow{AB}$ معادل equivalent به $\overrightarrow{CD}$ گفته میشود اگر $H_P(A)=D$ بوده و در حالیکه P نقطهٔ وسطی $\overline{BC}$ است.



شکل (2-17)

برای اینکه $\overrightarrow{AB}$ را معادل $\overrightarrow{CD}$ افاده کنیم مینویسیم که :

$$\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$$

برای نشان دادن حقیقت اینکه تعریف فوق الذکر "معادل" مفهوم توضیح غیر رسمی ماقبل الذکر را افاده کرده میتواند به اقامهٔ قضیه ذیل اقدام مینمائیم :-

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

قضیه : Theorem . 2-11

دو قطعه مستقیم موجه غیر مشترک الخط $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مفروض اند
چهارضلعی ABDC یک متوازی الاضلاع میشود در صورتیکه
اگر و اگر $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ باشد.

در مرحله اول ما فرض میکنیم که $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ باشد. اگر P نقطهٔ وسطی $\overline{BC}$ باشد، پس بنابر تعریف تساوی قطعه مستقیم های موجه $H_P(A) = D$ میشود. چون اقطار $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ ~~چهارضلعی~~ چهارضلعی $\square ABDC$ یکدیگر را تنصیف مینمایند.
بنابران چهارضلعی مذکور یک متوازی الاضلاع است.

بالعکس اگر چهارضلعی ABDC یک متوازی الاضلاع باشد؛ پس اقطار $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ آن یکدیگر را در نقطهٔ تقاطع خویش یعنی P تنصیف مینمایند. چون $H_P(A) = D$ بوده و P نقطهٔ وسطی $\overline{BC}$ است.
بنابرآن $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ میشود.

Q.E.D.

نتیجهٔ مهم : Corollary . 2-11

اگر $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ باشد، پس $AB = CD$ وهم چنان $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ یا موازی اند و یا مشترک الخط میباشند.

توجه نمائید! که عکس این نتیجهٔ مهم صدق نمیکند. زیرا ما میتوانیم

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

زیرا ممکن است داشته باشیم: $AB = CD$ و هم چنان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$، ولی ممکن است قطعه مستقیم های موجه (وکتورها) $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ دارای جهات مخالف باشند (جهات مخالف را ارائه کنند).

قضیه ذیل سه خاصیت مهم را راجع به قطعه مستقیم های موجه متعادل بیان میکند:

قضیه Theorem 2-12:

سه قطعه مستقیم موجه $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$ مفروض اند:

(1). $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{AB}$ .... (خاصیت انعکاسی Reflexive)

(2). اگر $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ باشد،

پس $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{AB}$ میباشد... (خاصیت تناظری Symmetric)

(3). اگر $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$، $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{EF}$ باشد؛

پس $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{EF}$ میباشد.. (خاصیت انتقالی Transitive)

حقیقت خاصیت (1) اول روشن است. حقیقت خاصیت (2) دوم را باتوجه به دو تعریف اینکه اگر $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ باشد،

پس $H_p(A) = D$ بوده، درحالیکه P نقطهٔ وسطی $\overline{BC}$ است

از اینکه $H_p(C) = B$ بوده و P نقطهٔ وسطی $\overline{AD}$ است،

ازین منتج میگردد که $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{AB}$.

اثبات خاصیت انتقالی transitivity را بحیث تمرین واگذار میشویم.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

از اینکه متعادل بودن قطعه مستقیم های موجه صفات و خواص : انعکاسی reflexive ، تناظری symmetric و انتقالی Transitive را که در تفتیش پیشتر تذکر داده شده دارا است؛ و هر رابطه که دارای هر سه مشخصه صفات و خواص فوق باشد بنام رابطه متعادل equivalence relation یاد میشود؛ بنابران متعادل بودن قطعه مستقیم های موجه نیز یک رابطه متعادل equivalence relation میباشد.

تعریف :

فرضاً S یک set بوده # یک رابطه را در S تعریف کند. پس اگر برای هر عنصر a ، b و c در set S خواص سه گانه ذیل موجود شود :

(1). $a \# a$ . . . . انعکاسی

(2). اگر $a \# b$ باشد پس $b \# a$ شود . . . . . تناظری

(3). اگر $a \# b$ و $b \# c$ باشد، پس $a \# c$ شود . . انتقالی

گفته میشود که # یک رابطه متعادل equivalence relation در set S است.

ساده ترین نوع رابطه متعادل آنست که همین رابطه مساوات equality است. وقتیکه گفته میشود A مساوی به B یا $(A=B)$، این افاده میکند که A و B صرف دو نام مختلف است برای عین چیز است، بهمین قسم : $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{PR}$ میشود،

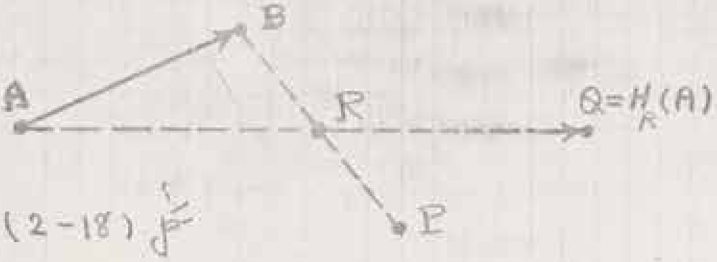
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

درصورتیکه $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{PR}$ عین set نقاط باشند. با بهبود مفهوم
رابطهٔ مساوات "=" equality شاید واضح شده باشد که این رابطه در set
هر نوع اشیاء حائز هر سه صفت و خاصیت: انعکاسی،
تناظری، و انتقالی میباشد. از طرف دیگر
رابطهٔ "$\leq$" طوریکه در set اعداد حقیقی Reals تعریف
شده یک رابطهٔ متعادل equivalence relation نیست. زیرا
فاقد خاصیت تناظری است. شما چند رابطهٔ دیگر را که
متعادل باشد نام بگیرید!

درمعامله با قطعه مستقیم‌های موجه (وکتورها) ثبوت قضیهٔ ذیل
و نتایج مهم آن ضروری پنداشته میشود. ذیلاً با اقامه و اثبات
قضیهٔ مورد نظر اقدام مینمائیم، ولی اثبات نتایج مهم آنرا
بحیث تمرین واگذار میشویم:

قضیه: * Theorem - 2-13

اگر P یک نقطه و $\overrightarrow{AB}$ یک قطعه مستقیم موجه مفروض
باشد، پس محض یک نقطهٔ Q موجود شده میتواند
طوریکه: $\overrightarrow{PQ} \doteq \overrightarrow{AB}$ گردد.



شکل (2-18)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ثبوت : Proof

برای اثبات موجودیت نقطهٔ Q ، نقطهٔ R را بحیث نقطهٔ وسطی $\overline{BP}$ انتخاب مینمائیم ، پس اگر $Q = H_R(A)$ را بدست آوریم ، پس از این منتج میشود که :

$$\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{PQ}$$

و یا : $\overrightarrow{PQ} \doteq \overrightarrow{AB}$ است .

برای ثبوت وحدانیت و یگانگی نقطهٔ Q با فرض مینمائیم که کدام نقطهٔ دیگر S نیز موجود شده میتواند طوریکه : $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{PS}$ گردد .

پس با شناسائی تعریف میدانسته باشیم که :

$$H_R(A) = S$$

زیرا R نقطهٔ وسطی $\overline{BP}$ است .

اما از اینکه A محض دارای یک تصویر بنابر (تحت) H_R شده میتواند ، پس $S = Q$ میشود .

بنابر آن $\overrightarrow{PQ}$ یگانه قطعه مستقیم متجه است که مبدأ آن P بوده و معادل $\overrightarrow{AB}$ است .

Q.E.D.

نتیجه ※ مهم ※ Corollary . 2-13.A

اگر نقاط : $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ و $P_3(x_3, y_3)$ معروض باشند ، پس نقطهٔ : $P(x_3+x_2-x_1, y_3+y_2-y_1)$ یگانه نقطه ای است که با شرط : $\overrightarrow{P_3P} \doteq \overrightarrow{P_1P_2}$ میشود .

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

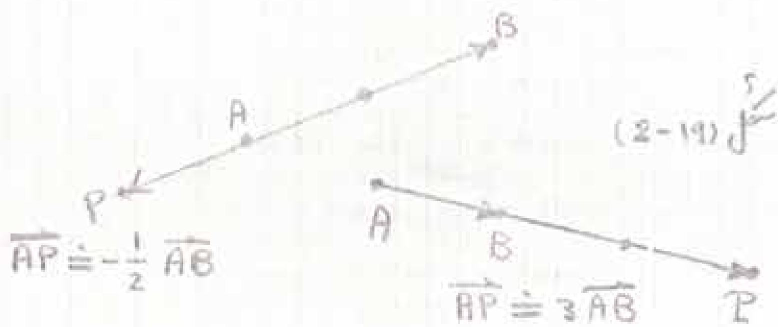
نتیجه مهمه : 2-13B Corollary

$\overrightarrow{P_1P_2} \doteq \overrightarrow{P_3P_4}$ میشود، در صورتیکه اگر و اگر $x_2-x_1 = x_4-x_3$ و $y_2-y_1 = y_4-y_3$ شود.

برای $P_n=(x_n,y_n)$ ، $n=1,2,3,4$.

آخرین مفکوره قطعه مستقیم موجه عبارت از حاصل ضرب سکالر scalar یک قطعه مستقیم موجه موزون است. حاصل ضرب سکالر یک قطعه مستقیم موجه عبارت از یک قطعه مستقیم موجه است که دارای عین نقطه مبداء قطعه مستقیم موزون بوده و مسیر آن مشترک الخط میباشد.

تعریف: اگر $\overrightarrow{AB}$ یک قطعه مستقیم موجه و k یک عدد حقیقی طوریکه $k>0$ موزون باشد؛ پس $k\overrightarrow{AB}$ عبارت از یک قطعه مستقیم موجه $\overrightarrow{AP}$ است طوریکه شعاع $P\in\overrightarrow{AP}$ بوده و فاصله $AP = k(AB)$ گردد. اگر $k<0$ درینصورت $k\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{AP}$ بوده تا نقطهٔ P در شعاع $\overrightarrow{AP}$ به جهت مخالف $\overrightarrow{AB}$ قرار داشته و طول $AP=|k|(AB)$ میشود. بهر دو صورت: $\overrightarrow{AP}$ بنام حاصل ضرب سکالر $\overrightarrow{AB}$ Scalar multiple یاد میشود.



شکل (2-19)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

Problem Set 2-5: تمرینات

1. نقاط A، B، C و D در ذیل داده شده؛ هر یک از تمرینات ذیل را اجرا کنید:

(a). E را تعیین کنید طوری که $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ شود.

(b). F را تعیین کنید طوری که $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BA}$ شود.

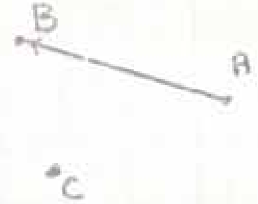
(c). $H_A(\overrightarrow{AB})$.

2. نقاط A، B و C طبق شکل ذیل داده شده‌اند؛ ترسیم کنید:

(a). نقطهٔ D را طوری که $\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB}$ باشد.

(b). نقطهٔ E را طوری که $\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ باشد.

(c). نقطهٔ F را طوری که $\overrightarrow{CF} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{AB}$ باشد.



3. کدام یک از بیانیه‌های و افاده‌های ذیل حقیقت دارد:

(a). $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

(b). $H_A(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$

(c). $H_A(\overrightarrow{AB}) = -H_B(\overrightarrow{BA})$

(d). اگر $A' = H_B(A)$ باشد، پس $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$ میشود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

(c). اگر $B'=H_AH_B(B)$ و $A'=H_AH_B(A)$ باشد ، پس $\overrightarrow{A'B'} \doteq \overrightarrow{AB}$ می‌شود.

4. (a). نتیجهٔ مهم 2-13-A را ثابت کنید.
(b). نتیجهٔ مهم 2-13-B را ثابت کنید.

5. اگر $A(0,0)$ ، $B(5,3)$ و $C(-2,4)$ مفروض باشند:
(a). R را مشخص کنید طوری‌که $\overrightarrow{AR} \doteq \overrightarrow{BC}$ شود.
(b). S را مشخص کنید طوری‌که $\overrightarrow{CS} \doteq \overrightarrow{AB}$ شود.
(c). T را مشخص کنید طوری‌که $\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{AC}$ شود.

6. اگر $A(2,1)$ ، $B(3,-4)$ و $C(-1,5)$ نقاط مفروض باشند:
(a). D را مشخص کنید طوری‌که $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{AB}$ شود.
(b). E را مشخص کنید طوری‌که $\overrightarrow{AE} \doteq \overrightarrow{BC}$ شود.
(c). F را مشخص کنید طوری‌که $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ شود.

7. اگر $A(1,3)$ ، $B(2,7)$ و $C(-1,4)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع $\square ABCD$ باشند مختصات نقطهٔ D را بدست آرید.

8. اگر $A(-2,4)$ ، $B(h,3)$ ، $C(3,0)$ و $D(5,k)$ رؤس یک متوازی‌الاضلاع $\square ABCD$ را ارائه کنند، قیمت h و k را حاصل نمائید.

9. اگر $A(-h,-k)$ ، $B(5,-2\sqrt{3})$ ، $C(k,8\sqrt{3})$ و $D(-4,h)$ نقاط مفروض شده بصورتیکه $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ ، قیمت‌های k و h را بدست آرید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

10. مشخص کنید که کدام روابط ذیل رابطهٔ معادل بوده و ضمناً نشان دهید ~~...~~ در آنهایی که روابط معادل نیستند کدام خاصیت را نقض میکنند:

(a). موازات: در set تمام خطوط؛

(b). انطباق پذیری: در set تمام زوایا؛

(c). تشابه: در set تمام مثلث‌ها؛

(d). عبارت «...... به همان اندازه زیبا است که ......» در set مجسمه‌ها؛

(e). رابطه ③ در set تمام اعداد تام Integers با این مفهوم که a ③ b اگر و اگر $(a-b)/3$ عدد تام باشد.

11. ثابت کنید که اگر $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{EF}$ باشد، پس $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{EF}$ میشود. با استفاده از هندسهٔ تحلیلی اگر $A=(a,b)$، $B=(c,d)$، $C=(0,0)$ و $E=(e,f)$ وضع شود (با استفاده از تعریف قطعه خط جهت‌دار) مسئله را بررسی کنید. (از دیگر از نتایج قضایا و یا نتایج هایی آن استفاده نشود) مسئله را حل کنید.

12. اگر $A(0,0)$، $B(1,-3)$ و $C(5,7)$ نقاط مفروض یا معلوم باشند، پیدا کنید:

(a). D را، در صورتیکه $\overrightarrow{AD} \doteq 3\overrightarrow{AB}$ باشد.

(b). E را، در صورتیکه $\overrightarrow{AE} \doteq \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ باشد.

(c). F را، در صورتیکه $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB}$ باشد.

13. اگر $P_0(x_0,y_0)$، $P_1(x_1,y_1)$، $P_2(x_2,y_2)$ و $P_3(x_3,y_3)$ نقاط مفروض و $k>0$ باشد:

(a). P را مشخص کنید طوریکه $\overrightarrow{P_0P}=k\overrightarrow{P_0P_1}$ باشد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

(b). P را معلوم کنید طوریکه: $\overrightarrow{P_1P} = k\,\overrightarrow{P_1P_2}$ باشد.

(c). نشان دهید در صورتیکه: $\overrightarrow{P_2P} \doteq k\,\overrightarrow{P_1P_2}$ باشد،
این در وضعیت: $P = [x_2 + k(x_2 - x_1),\ y_2 + k(y_2 - y_1)]$ میشود.

(d). آیا نتیجهٔ فوق جز (c) برای $k < 0$ نیز تحقیقات دارد؟

14. اگر $A(0,0)$ ، $B(1,3)$ ، $C(-2,5)$ و $D(4,-2)$ نقاط
موجود باشند؛ با استفاده از اشتمال نتیجهٔ سؤال پیشینه
مختصات هریک از نقاط ذیل را بدست آرید:

(a). P : طوریکه $\overrightarrow{AP} = 4\,\overrightarrow{AC}$ باشد.

(b). R : طوریکه $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$ باشد.

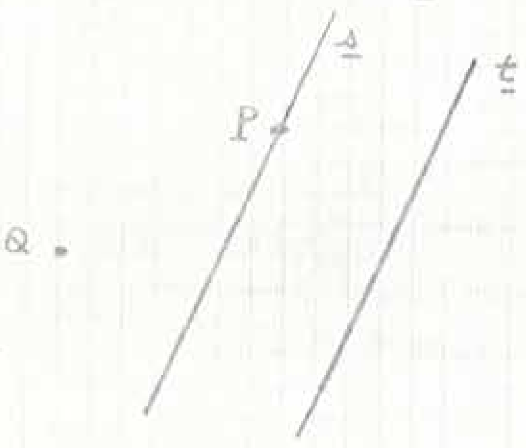
(c). S : طوریکه $\overrightarrow{DS} \doteq 3\,\overrightarrow{BC}$ باشد.

(d). T : طوریکه $\overrightarrow{CT} \doteq -2\,\overrightarrow{DB}$ باشد.

15. نقاط P و Q و خطوط موازی s و t طبق شکل ذیل مفروض اند:

(a). P' را رسم کنید طوریکه: $P' = M_t M_s(P)$
و $Q' = M_t M_s(Q)$ باشد.

(b). ثابت کنید که: $\overrightarrow{PP'} \doteq \overrightarrow{QQ'}$ است.

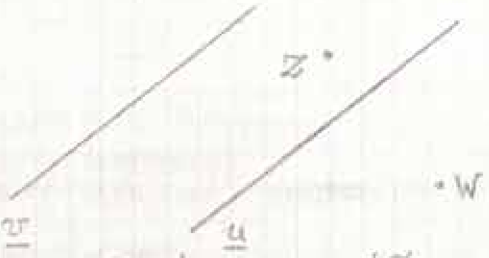


Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

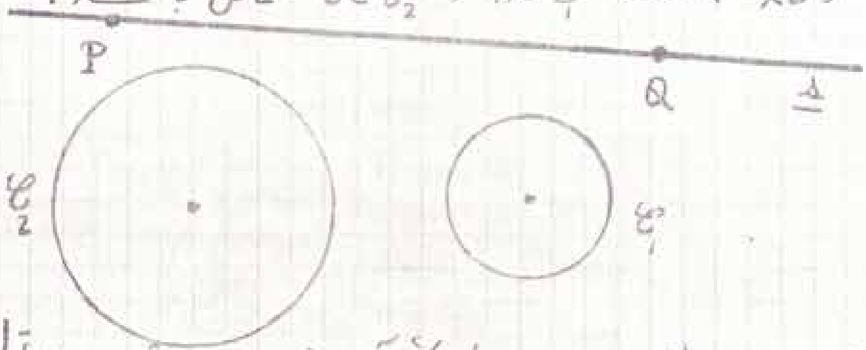
16. نقاط Z و W و خطوط $\underline{u}$ و $\underline{v}$ طبق شکل ذیل مفروض اند:

(a). $W''=M_v M_u(W)$ و $Z''=M_v M_u(Z)$ را رسم کنید.

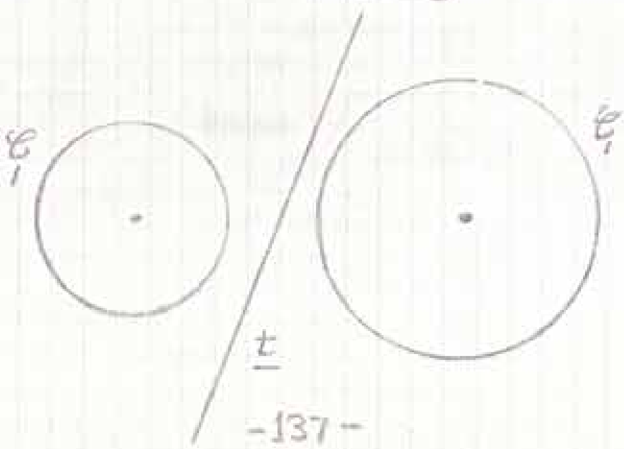
(b). ثابت کنید که: $\overline{ZZ''} \doteq \overline{WW''}$ است.



17. خط $\underline{s}$ و دوایر $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ طبق شکل مفروض اند. با در نظر داشت $M_s(\mathcal{C}_1)$ تمام نقاط X خط $\underline{s}$ را تعیین نمائید طوریکه $\angle PXA \cong \angle QXB$ بوده؛ $\overleftrightarrow{XA}$ و $\overleftrightarrow{XB}$ به نقاط: $A \in \mathcal{C}_1$ و $B \in \mathcal{C}_2$ مماس باشد.



18. خط $\underline{t}$ و دوایر $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ طبق شکل آن مفروض اند؛ با استفاده از انتقال تحویل مربعی را رسم نمائید که دو راس مقابل آن بالای خط $\underline{t}$ واقع بوده و یک راس آن بالای $\mathcal{C}_1$ و راس دیگرش بالای $\mathcal{C}_2$ واقع گردد. این مسأله دارای چند حل بوده میتواند؟



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

2-6 . انتقالات

Translations

از آنجا که راجع به قطعه مستقیم‌های جهت‌دار directed segments یا وکتورها تا حدی آشنائی حاصل نموده‌ایم حال می‌توانیم که مطالعات خویش را در موضوع انتقالات translations ادامه بدهیم. هنگام بررسی موضوعات نیم دورها half turns در موضوع اینکه هر نیم دور بحیث انعکاسات خطی line reflect. افاده شده می‌تواند تأکید بعمل آمد. در حالت خاص اگر A یک نقطه، $\underline{s}$ و $\underline{t}$ دو خطی که در نقطه A باهم عمود باشند مد نظر گرفته شوند در اینحالت:

$$H_A = M_s M_t$$ میشود.

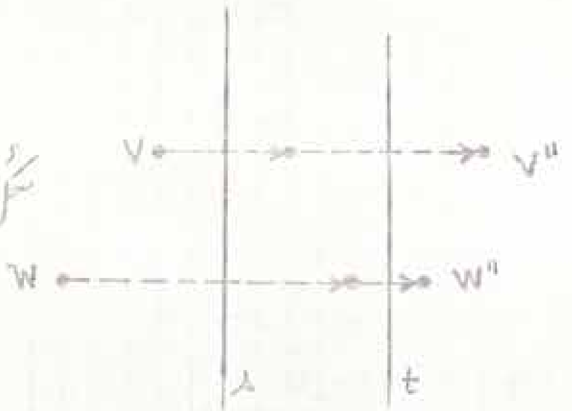
درین مبحث ما نتیجه ترکیب دو انعکاس را حول خطوط که موازی باشند مطالعه مینمائیم.

در مسایل 15 و 16 تمرینات مبحث گذشته راجع به بررسی و مطالعه نتیجه اینگونه ترکیب پرداخته بعمل آمده است. امید است که اثبات قضیه ذیل به نتیجه حل مسایل مانند فوق عمومیت ببخشد.

Theorem . 2-14 : قضیه

بالفرض $\underline{s}$ و $\underline{t}$ دو خط موازی، W و V هم دو نقطه داده شده باشند. پس:
$\overrightarrow{VV''} = \overrightarrow{WW''}$ میشود، در حالیکه $V'' = M_t M_s(V)$ و $W'' = M_t M_s(W)$ باشند.

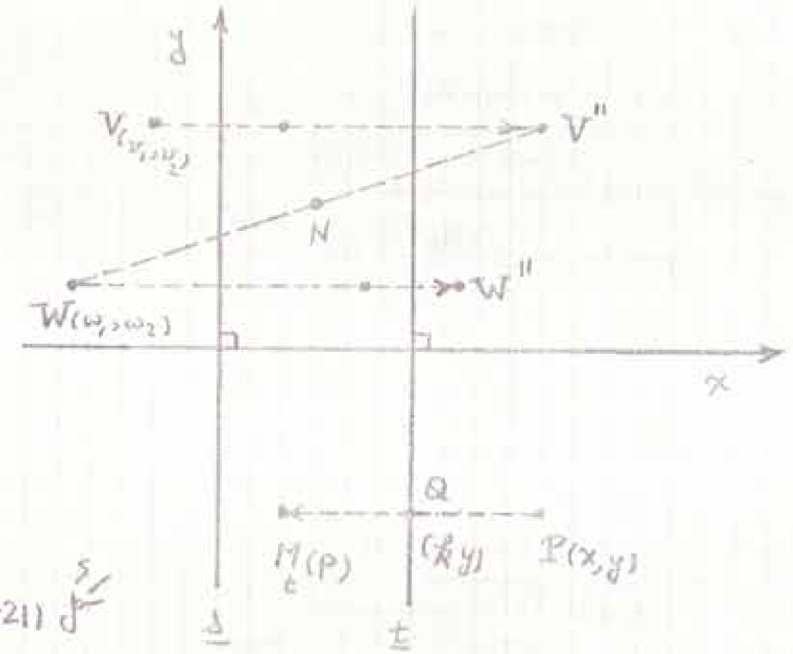
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com



شکل (2-20)

ثبوت ؛ Proof

اولاً یک سیستم کمیات وضعیه Coordinate system که خط s بحیث محور y استعمال شود انتخاب نموده و یک خط عمود با آن را محور x قرار میدهیم.



شکل (2-21)

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

حال مختصات نقاط V و W را علی‌الترتیب (v_1, v_2) و (w_1, w_2) آزاده میگیریم،
نشان باید داد که اگر N نقطهٔ وسطی $\overline{V''W}$ باشد:
پس درینصورت: $H_N(V) = W''$ میشود.

چون خط t موازی (یا) محور y بوده و توسط معادلهٔ $x = k$ درحالیکه $k \neq 0$ است، ارائه شده میتواند. اگر $P(x, y)$ کدام نقطهٔ مستوی اقلیدسی ب شود، درینصورت: $P^* = M_t(P)$ میشود، پس $\overline{PP^*}$ خط t را در کدام نقطهٔ $Q(k, y)$ قطع میکند. چون $P^* = M_t(P)$ است، که درینصورت Q نقطهٔ وسطی $\overline{PP^*}$ میشود.

پس ما داریم:

$$P^* = M_t(P) = (2k - x, y).$$

از طرف دیگر:

$$M_s(P) = (-x, y).$$

پس ما داریم:

$$\begin{aligned} M_t M_s(P) &= M_t[M_s(P)] \\ &= M_t[-x, y] \\ &= (2k + x, y). \end{aligned}$$

بهمین قسم:

$$V'' = M_t M_s(V) = (2k + v_1, v_2)$$

$$W'' = M_t M_s(W) = (2k + w_1, w_2).$$

چون N نقطهٔ وسطی $\overline{V''W}$ است، پس:

$$N = \left(2\left[\frac{2k + v_1 + w_1}{2}\right] - v_1, 2\left[\frac{v_2 + w_2}{2}\right] - v_2\right)$$

$$N = (2k + w_1, w_2) = W''$$ میشود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

میشود، $N = (2k+w_1, w_2) = W''$

بنابراین . . . . $H_N(V) = W''$ بوده

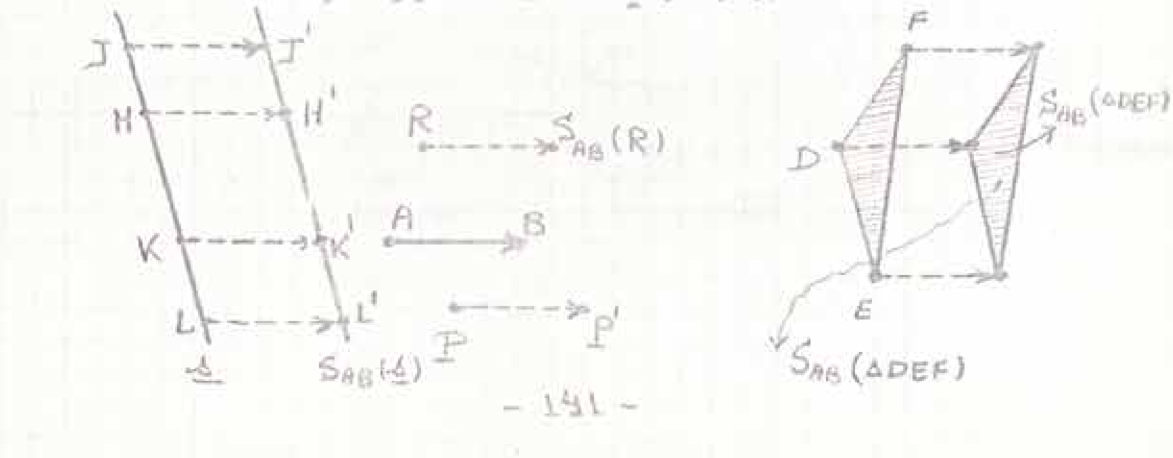
و $\overrightarrow{VV''} \doteq \overrightarrow{WW''}$ میشود.

Q.E.D.

در بالا نشان دادیم که تأثیر قطعه مستقیم موجه از یک نقطه الی تصویر آن متعادل تأثیر هر یک دیگر از قطعه مستقیم های موجه تحت (سایر) M_2M_1 است. بنابراین گفته میتوانیم که تأثیر این تحول آن است که هر نقطه مستوی را بتعیین جهت و بتعیین فاصله حرکت و انتقال میدهد. میپنگ های که دارای این خاصیت اند یک صنف دوشته مهم تحول ها (تحویلات) را تشکیل داده و بنام انتقالات Traslations یاد میشوند.

تعریف:

یک میپنگ که انتقال Translation گفته میشود در صورتیکه یک قطعه مستقیم موجه Directed segment موجود گردد طوریکه برای هر نقطه P مستوی $\overrightarrow{PP'} \doteq \overrightarrow{AB}$ گردیده و $S(P) = P'$ گردد.



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

واضح است که هر قطعه مستقیم موجه یک انتقال Transl.
را تعیین کرده میتواند. ما با استفاده از استعمال علامهٔ "S_{AB}" که
یک انتقال Transl. را که روی قطعه مستقیم موجه $\overrightarrow{AB}$ صورت
میگیرد ارائه میکنیم. قابل تعجب نیست که اگر هر انتقال
تحویل گفته شود، ولی اثبات دقیق این حقیقت کمی کار را ایجاب میکند.
قبل از ثبوت حقیقتیکه هر انتقال Transl. یک تحویل Transfor.
است ما با اثبات یک قضیهٔ دیگر می پردازیم. چه باساس
این قضیه ما میتوانیم که حقیقت فوق مطلوب را به سهولت ثابت
نماییم. همچنان توجه باید نمود که اگر $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ باشد
پس $S_{AB}=S_{CD}$ میشود، که از نتیجهٔ این واضح میشود که هر انتقال
translation روی (باساس) بی نهایت قطعه مستقیم های موجه
(وکتورها) تعریف شده میتواند. این یک حقیقت
مفید بوده و ما در اینجا بحیث قضیه ثبت نموده و ثبوت آنرا به تقسیم
تمرین واگذار میشویم:

قضیـــه: Theorem: 2-15 :

در صورتیکه $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ موجود گردد پس $S_{AB}=S_{CD}$
موجود میگردد.

یا: اگر $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$، پس $S_{AB}=S_{CD}$.

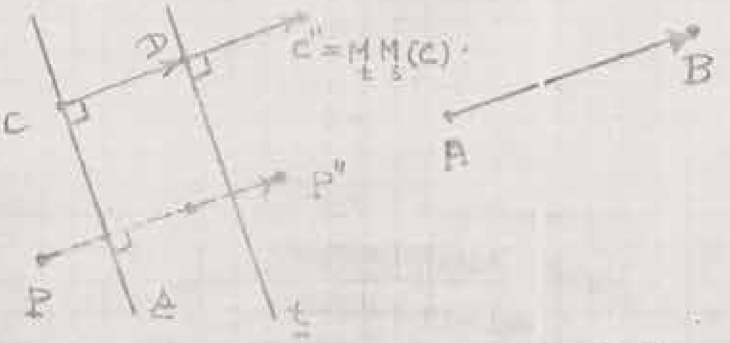
از اثبات قضیه: 2-14 و تعریف انتقال Transl. فوراً
نتیجه شده میتواند که نتیجهٔ ترکیب دو انعکاس خطی حول خطوط
موازی یک انتقال Translation را بوجود می آورد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

حالا با کمال ، انکشاف ارتباط : بین خطوط انعکاس دهنده و انتقال حاصله از آنها ، قضیهٔ ذیل را اثبات میکنیم :

قضیه Theorem -2-16 :

اگر s و t دو خط موازی و $\overline{CD}$ یک قطعهٔ مستقیم موجه از s به t عمود فرض شده ، در صورتیکه : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ باشد ، پس $S_{AB} = M_t M_s$ میباشد .



ثبوت : Proof

برای هر نقطهٔ P مستوی ، اگر $P^* = S_{AB}(P)$ و $P'' = M_t M_s(P)$ باشد : پس نشان باید داد که $P^* = P''$ است .

بنابر تعریف $S_{AB}(P)$ ما میدانیم که : $\overrightarrow{AB} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ بودن
زیرا داریم که : $\overrightarrow{PP^*} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ . . . (بنابر خاصیت انتقالی دکتورهای متعادل)

اگر $C'' = M_t M_s(C)$ باشد ،
پس $C'' = M_t(C)$.

چون D نقطهٔ وسطی $\overline{CC''}$ است ، پس $\overrightarrow{CC''} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ است .

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پس $\overrightarrow{CC''} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ است ، (تکرار شده)

ثانیاً $\overrightarrow{PP''} \doteq \overrightarrow{CC''}$ است بنابر قضیه 2-14 ،

پس $\overrightarrow{PP''} \doteq 2\overrightarrow{CD}$.

توجه نمائید که $\overrightarrow{PP^*}$ و $\overrightarrow{PP''}$ هر دو متعادل $2\overrightarrow{CD}$ اند ، ازین نتیجه میشود که P'' و P^* (بنابر قضیه 2-13) عین نقطه بوده ، و بنابران نتیجه میشود که :

$$S_{AB}(P) = M_t M_s(P) \text{ ،}$$

و یا اینکه : $S_{AB} = M_t M_s$.

Q.E.D.

تفسیر دیگر این قضیه مثل ذیل صورت گرفته میتواند : هر انتقال Transl. S_{AB} بحیث محصلهٔ ترکیب دو انعکاس خطی، که حول خطوط که هر دو عمود به $\overleftrightarrow{AB}$ بوده و به اندازه نصف فاصله A و B از هم بعید اند ، افاده شده میتواند . در حالت خاص نتیجهٔ مهمهٔ ذیل بیان شده میتواند :

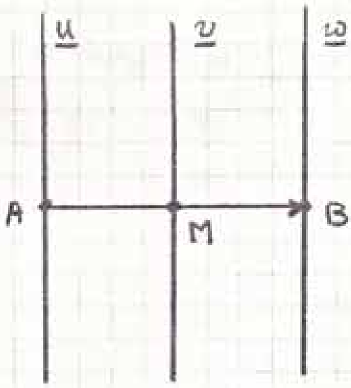
نتیجهٔ مهمه : Corollary - 2-16.A :

اگر u ، v و w سه خط موازی باشند طوریکه علی الترتیب به نقاط A ، M و B قطعه مستقیمهٔ موجه $\overrightarrow{AB}$ عمود بوده و M نقطه وسطی $\overline{AB}$ باشد در آنصورت :

$$S_{AB} = M_v M_u = M_w M_v$$ میشود .

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

$$S_{AB} = M_v M_u = M_w M_v$$



شکل (2-24)

نتیجه دیگر قضیه 2-16 اینست که: هر انتقال میتواند که بحیث حاصل ترکیب دو ایزومتری isometries تعبیر شود. و این نشان میدهد که یک انتقال تنها یک تحویل نبوده بلکه یک ایزومتری نیز میباشد. ازین معلوم میشود که انتقالات translations خطوط را بر خطوط بدل کرده، حافظ اندازهٔ زوایا، حافظ خاصیت موازات و حافظ خاصیت عمودیت نیز میباشند. علاوه برآن انتقالات Transl. ایزومتری های هم جهت (مستقیم) و direct میباشند؛ زیرا حاصل ترکیب دو انعکاسات موازی خطی هم اندازه (مقدار) که باشد مستقیم و هم جهت است.

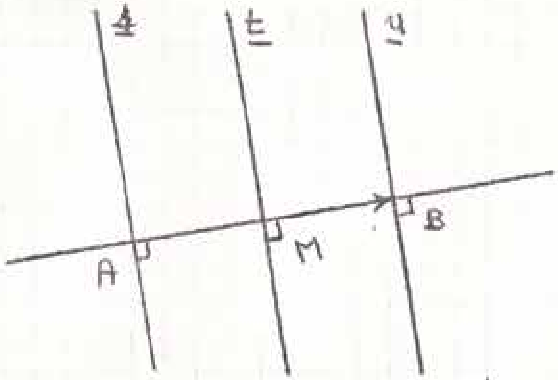
نتیجه * مهمه: 2-16-B . Corollary

هر انتقال Transl. یک ایزومتری isometry هم جهت (مستقیم) است.

ازین نتیجه مهم فهمیده میشود که هر انتقال باید دارای یک معکوس inverse باشد. بصورت معمول و شکلی گفته میتوانیم که اگر S_{AB} یک

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

یک انتقال مفروض باشد، پس $(S_{AB})^{-1}$ مساوی به S_{BA} میباشد.
برای اثبات این حقیقت قضیه 16-2 را دوباره مورد تطبیق قرار میدهیم.



شکل (25-2)

درمرحله اول فرضاً M نقطه وسطی $\overline{AB}$ بوده و خطوط $\underline{s}$، $\underline{t}$ و $\underline{u}$ علی الترتیب به نقاط: A ، M و B خط $\overleftrightarrow{AB}$ عمود باشند.
نتیجه مهمه 2-16-A بیان میکند که:

$$S_{AB} = M_t M_s = M_u M_t$$
$$S_{BA} = M_t M_u = M_s M_t$$
$$(S_{AB})^{-1} = (M_u M_t)^{-1}$$
$$= M_t^{-1} M_u^{-1}$$
$$= M_t M_u$$
$$= S_{BA}$$

درنتیجه، نتیجه مهمهٔ ذیل ثابت شد که:

نتیجـــــه مهمــــه: 2-16-C. Corollary
اگر S_{AB} یک انتقال باشد پس $(S_{AB})^{-1} = S_{BA}$ میشود.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

تمرینات : 2-6. Problem Set

1. نقاط A، B و C قرار ذیل مفروض اند:

(a). $S_{AB}(A)$ و $S_{AB}(B)$ را رسم نمائید.

(b). $C'=S_{AB}(C)$ را رسم نمائید.

(c). $\underline{s}$ و $\underline{t}$ را رسم کنید طوریکه:
$A\in \underline{s}$ و $S_{AB}=M_{t}M_{s}$ گردد.

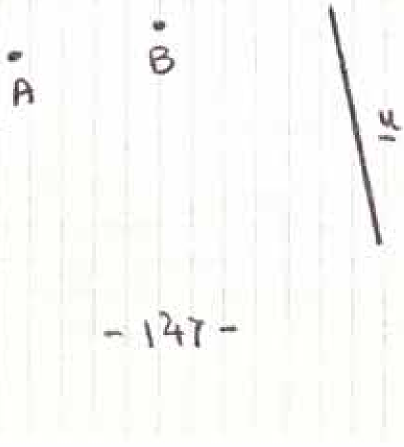
(d). $\underline{u}$ و $\underline{v}$ را رسم کنید طوریکه، $C\in \underline{u}$ بوده و $S_{AB}=M_{v}M_{u}$ باشد.

2. نقاط A و B و $\underline{u}$ داده شده اند طوریکه $\underline{u}\perp \overleftrightarrow{AB}$ است:

(a). $\underline{v}$ را رسم کنید طوریکه $M_{v}M_{u}=S_{AB}$ باشد.

(b). $\underline{w}$ را رسم کنید طوریکه $M_{u}M_{w}=S_{AB}$ باشد.

(c). C را رسم کنید طوریکه $S_{BA}(C)=B$ گردد.

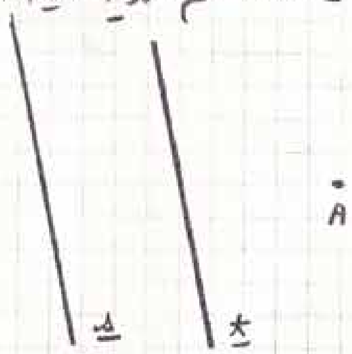


Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

3. خطوط موازی s و t و نقطهٔ A در شکل ذیل مفروض اند:

(a). نقطهٔ B را تعیین کنید طوریکه $M_t M_s = S_{AB}$ شود.

(b). نقطهٔ C را در شکل دریابید طوریکه: $M_s M_t = S_{2AC}$ شود.



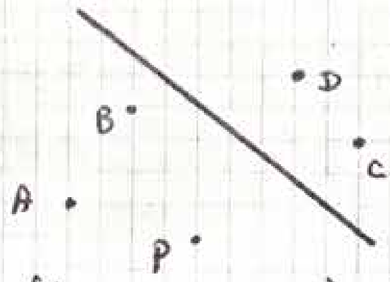
4. نقاط A، B، C، D و P و خط s داده شده را رسم کنید:

(a). $S_{CD} S_{AB}(P)$ را.

(b). $S_{CD} S_{BA}(s)$ را.

(c). t را دریافت کنید در صورتیکه $S_{AB} S_{DC}(t) = s$ باشد.

(d). $S_{AB}^3(P)$ را در شکل رسم کنید.



5. صورت‌های ساده‌ای ذیل را برای P از حیث R حل و ساده کنید:

(a). $S_{AB} S_{CD}(P)=R$

(b). $H_A S_{CD}(P)=R$

(c). $(S_{AB})^{-1} M_s(P)=R$ را ساده کنید.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

6. غلط و صحیح افاده‌های ذیل را تشخیص کنید:

(a). درصورتیکه $S_{AB}=M_sM_t$ باشد، $S_{BA}=M_tM_s$ میباشد.

(b). حاصل انتقال translation یک انوولوشن involution میباشد.

(c). $S_{AB}S_{AB}=S_{2AB}$ میباشد.

(d). اگر D نقطهٔ وسطی $\overline{AB}$ باشد، پس:

$S_{MB}S_{AB}(M)=S_{2AB}(M)$ میباشد.

(e). اگر $\underline{s}''=S_{AB}H_C(\underline{s})$ باشد، پس $\underline{s}\parallel\underline{s}''$ میباشد.

7. اگر $A(2,3)$ و $B(-4,7)$ باشد، معادلات خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ را بنویسید طوریکه: $M_tM_s=S_{AB}$ گردد.

8. اگر $A(-1,3)$، $B(-5,-1)$ و $C(2,4)$ مفروض باشند:

(a). C' را معلوم کنید طوریکه: $C'=S_{AB}(C)$ باشد.

(b). معادلات خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ را بنویسید طوریکه: $C\in\underline{s}$ بوده و $M_tM_s=S_{AB}$ گردد.

9. اگر $A(2,1)$ و $B(5,-3)$ نقاط مفروض باشند و فرض کنید که S یک انتقال که A را به B map میکند باشد:

(a). $S(C)$ را بدست آرید درصورتیکه $C=(4,2)$ باشد.

(b). $S(P)$ را برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ حاصل کنید.

10. اگر $A(2,-1)$ و $B(3,4)$ نقاط مفروض بوده و $\underline{s}=\{(x,y): y+2x=4\}$ باشد، پس:

(a). برای نقطهٔ $P(x,y)$، $S_{AB}(P)$ را بدست آرید.

(b). D را حاصل نمائید درصورتیکه $S(D)=(1,3)$ باشد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

(c) . معادله خط l' را بنویسید درصورتیکه : $l' = S_{AB}(l)$ گردد.

11 . درصورتیکه : $\overline{AB} \doteq \overline{CD}$ باشد، ثابت کنید که $S_{AB} = S_{CD}$ میشود.

12 . اگر یک نقطه K موجود گردد طوریکه $S_{AB}(K) = S_{CD}(K)$ گردد ثابت کنید که $S_{AB} = S_{CD}$ میشود.

13 . اگر $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ نقاط مفروض باشند برای هر نقطه $P(x,y)$ مختصات نقطهٔ $P' = S_{P_1P_2}(P)$ را بدست آورید.

14 . نقاط : A ، B ، C و Q در شکل ذیل داده شده اند:

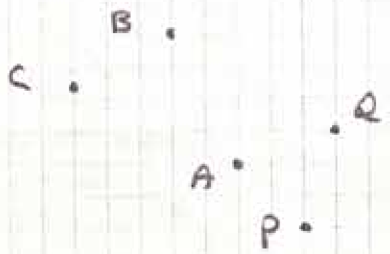
(a) . $P'' = H_B H_A(P)$ و $Q'' = H_B H_A(Q)$ را رسم کنید.

(b) . $H_B H_A$ را بشکل ساده‌ترین توضیح دهید.

15 . نقاط : A ، B ، C ، P و Q در شکل آتی داده شده اند،

(a) . تصاویر A ، P و Q را تحت $S_{BC} H_A$ رسم کنید.

(b) . نقطهٔ K را دریافت کنید طوریکه $S_{BC} H_A(K) = K$ گردد، و $S_{BC} H_A$ را بشکل ساده‌ترین توضیح نمائید.



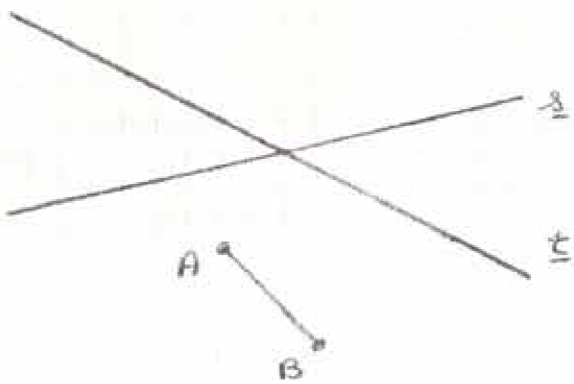
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

۱۶. نقاط: A و B داده شده اند، ثابت کنید که:

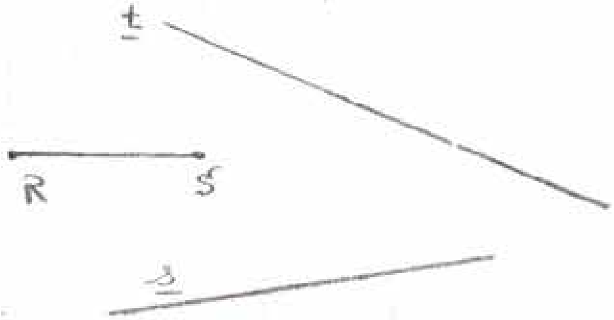
(a). $S_{AB}H_A$ یک نیم دور Half turn است.

(b). $H_A H_B$ یک انتقال translation است.

۱۷. خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ و قطعه خط $\overline{AB}$ طبق ذیل داده شده اند:
با استفاده از انتخاب یک انتقال مناسب قطعه خط $\overline{PQ}$ را رسم کنید طوریکه $P\in\underline{s}$ ، $Q\in\underline{t}$ بوده و $\overrightarrow{PQ}\doteq\overrightarrow{AB}$ گردد.

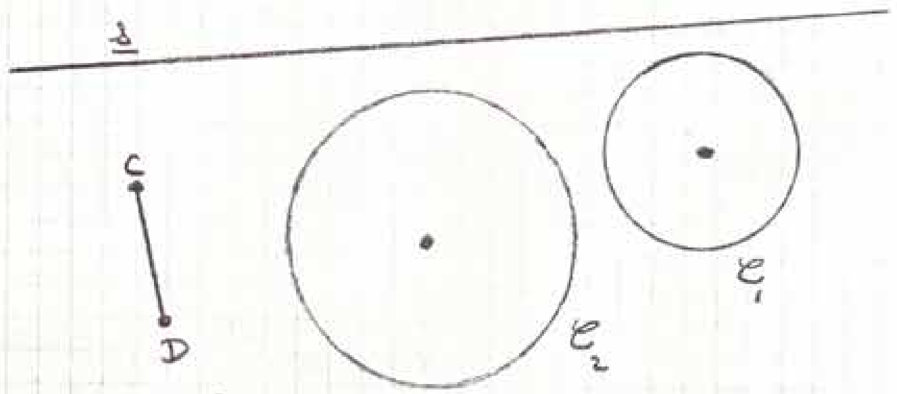


۱۸. خطوط $\underline{s}$ و $\underline{t}$ و قطعه خط $\overline{RS}$ مفروض اند. خط $\underline{x}$ را رسم کنید طوریکه یک زاویه 60 درجه با خط $\underline{s}$ تشکیل داده و $\{P\}=\underline{x}\cap\underline{s}$ و $\{Q\}=\underline{x}\cap\underline{t}$ بوده و علاوتاً فاصله: $PQ=RS$ گردد.
کمک: با استفاده از یک انتقال مناسب S : $S(\underline{s})$ را بررسی کنید.

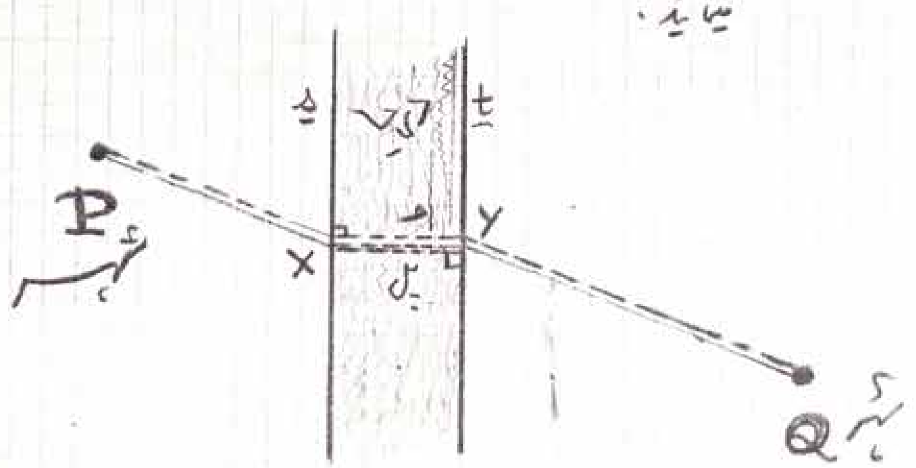


Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

۱۹. دوایر C_1 ، C_2 ، خط $\underline{s}$ و قطعه خط $\overline{CD}$ مطابق شکل ذیل مفروض اند.
نقاط : $A \in C_1$ و $B \in C_2$ را بدست آرید طوریکه
$AB = CD$ گردیده و $\overline{AB} \parallel \underline{s}$ شود.



۲۰. یک دریا که توسط دو کنار مستقیم و موازی خود محدود شده با دو شهر P و Q
که به دو طرف آن مطابق شکل دریا در ذیل واقع اند مفروض است :
ه) . با استفاده از استعمال یک انتقال مناسب نقاط X و Y را در کناره
دریا تعیین نمائید طوریکه اگر بالای آن پل تعمیر گردد که عمود به مسیر جریان
آب بوده و فاصله بین هر دو شهر را اصغری سازد.
ط) . ثابت کنید که جواب شما واقعاً کوتاه‌ترین فاصله بین دو شهر را تعیین
مینمائید.



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

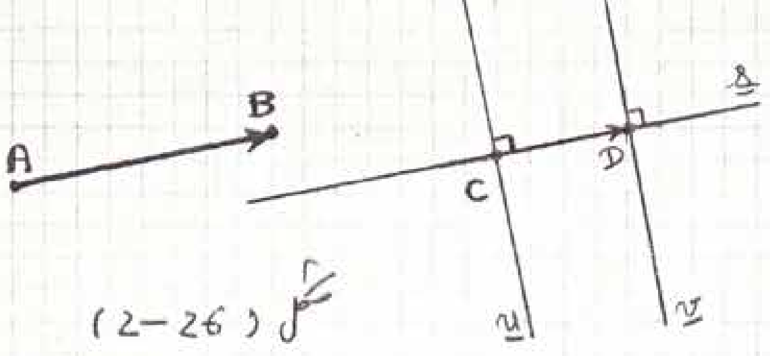
2-7 . خاصیت بستگی انتقالات

The Closure Property of Translations

در مبحث پیشتر اثبات رسید که هر انتقال به ترکیب دو انعکاس خطی تحلیل و تجزیه شده میتواند. حال میخواهیم نشان دهیم که هر انتقال به دو نیم دور Half Turns نیز تجزیه شده میتواند. وضمناً از حقیقت اینکه هر انتقال از ترکیب دو نیم دور حاصل شده میتواند بیشتر استفاده بعمل آمده میتواند. این مفکوره توسط قضیه ذیل خلص و ثبت میگردد.

قضیه ※ : Theorem. 2-17

اگر S_{AB} یک انتقال بوده دو نقطهٔ C و D موجود میشود طوریکه: $\overrightarrow{AB} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ بوده $S_{AB} = H_D H_C$ گردد.



شکل (2-26)

ثبوت : Proof ،

اگر خط $\overleftrightarrow{CD}$ را به s نشان دهیم پس دو خط عمود به s را

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

و نقاط C و D آن علی الترتیب به u و $2v$ متناظر میگیریم طوریکه $\overrightarrow{CD}$ از u به v باشد. چون $\overrightarrow{AB} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ است،
پس با شاش قضیه 2-16 ما داریم:

$$S_{AB} = M_v M_u \; .$$

از طرف دیگر:

$$H_D = M_v M_s \quad \text{و همچنان:} \quad H_C = M_s M_u$$

پس ......

$$H_D H_C = (M_v M_s)(M_s M_u) = M_v (M_s M_s) M_u = M_v M_u$$

بنابرآن ...... $H_D H_C = S_{AB}$ میشود.

ویا اینکه ...... $S_{AB} = H_D H_C$ میشود

Q.E.D.

مثال: اگر نقاط $A(3,-1)$، $B(1,7)$ و $C(4,2)$ داده شده باشند یک نقطه D را تعیین کنید طوریکه:

$S_{AB} = H_D H_C$ گردد.

حل: فرضاً E یک نقطهٔ ای باشد که شرط: $\overrightarrow{CE} \doteq \overrightarrow{AB}$ را تحقق کند.

باساس نتیجه مهم Corollary 2-13-A ما داریم:

$$E = (4+[1-3],\, 2+[7+1]) = (2,10)$$

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پس اگر D نقطهٔ وسطی $\overline{CE}$ باشد،
$D=(3,6)$ گردیده و
$\overrightarrow{CE} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ میشود.
حال بنابر خاصیت انتقالی transitivity داریم:
$\overrightarrow{AB} \doteq 2\overrightarrow{CD}$. و با شناسایی این شرط
قضیه: 2-17، افاده میکند که:

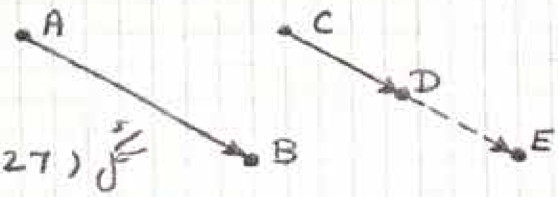
$$S_{AB} = H_D H_C$$

بنابرآن گفته میشود که D نقطهٔ مطلوب است.

Q.E.D.

قضیهٔ 2-17 به ثبوت که دارای یکعده نتایج مهم و مفید است اهمیت خاص دارد. بطور مثال از نتیجه تطبیق این قضیه ثابت شده میتواند که حاصل ترکیب یک انتقال translation و یک نیم دور halfturn یک نیم دور half turn است.

برای اثبات این حقیقت با فرض مینمائیم که S_{AB} کدام یک انتقال و C کدام نقطهٔ کیفی باشد، پس یک نقطهٔ D موجود شده میتواند طوریکه: $S_{AB} H_C = H_D$ گردد.



شکل (2-27)

فرضاً E یک نقطه ای باشد طوریکه:
$\overrightarrow{CE} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ گردد،

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پس اگر D نقطه‌ی وسطی $\overline{CE}$ مدنظر گرفته شود،
درینصورت: $\overrightarrow{CE} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ گردیده،
و چون $\overrightarrow{AB} \doteq 2\overrightarrow{CD}$ است.
پس با اساس قضیه‌ی 2-17 ما داریم که:

$$S_{AB} = H_D H_C$$

بنابر این $S_{AB}H_C = (H_D H_C) H_C$ . . . .

$$= H_D(H_C H_C)$$

$$= H_D$$

نتیجه‌ی مهمه Corollary : 2-17.A:

اگر S_{AB} یک انتقال و H_C یک نیم دور مفروض باشند،
پس: $S_{AB}H_C = H_D$ میشود.
درحالیکه نقطه‌ی D چنان است که: $2\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{AB}$ باشد.

بموجب ترکیب قضیه‌ی 2-17 و نتیجه‌ی مهمه‌ی فوق نتیجه‌ی مهمه‌ی دیگر که مفهوم ترکیب متعاقب سه نیم دور را یک نیم دور نشان میدهد، حاصل شده میتواند. اینک نتیجه‌ی مهمه‌ی مورد نظر را ذیلاً ارائه نموده و اثبات آنرا بحیث تمرین واگذار میشویم.

نتیجه‌ی مهمه Corollary . 2-17.B:

اگر H_A، H_B و H_C سه نیم دور بوده، پس $H_C H_B H_A = H_D$ میشود، درحالیکه D یک نقطه است که: $\overrightarrow{AD} \doteq \overrightarrow{BC}$ را بوجود آورد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

اکنون دیگر قضیه 17-2 را روی ترکیب دو انتقال مطالعه کرده میتوانیم. اگر در شکل (28-2) توجه شود دیده میشود که:

$S_{BC} S_{AB}(A) = C$ است.

با استفاده از متوازی‌الاضلاعات نیز نشان داده شده میتواند که برای نقطهٔ داده شدهٔ E ما پیدا کرده بتوانیم که: $\overrightarrow{EE^*} = \overrightarrow{AC}$

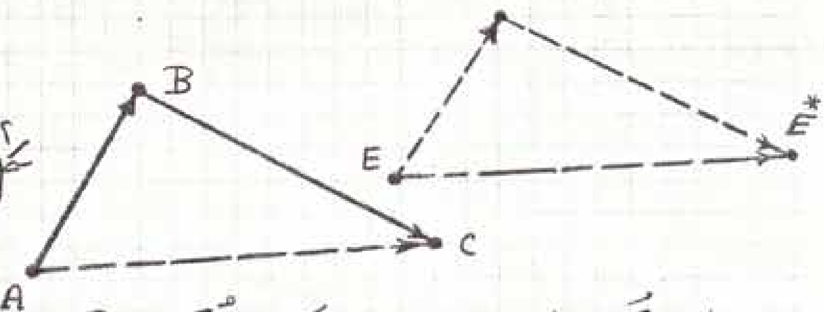
در حالیکه: $E^* = S_{BC} S_{AB}(E)$ . . . میشود.

واضح دیده میشود که:

$$S_{BC} S_{AB} = S_{AC}$$

حالانکه این حقیقت است که ما اثبات آن را جستجو داشتیم.

شکل (2-28)



آیا شکی به نتیجه فوق ما میتوانیم که به مفکوره «ترکیب هر دو انتقال S_{ED} و S_{FG} یعنی: $S_{ED} S_{FG}$ نیز یک انتقال است» با عمومیت بخشیم؟ جواب این سوال بلی است و یک اثبات مکمل این حقیقت نیز بکمک قضیه: 17-2 صورت گرفته میتواند. یا بعبارت دیگر با استفاده از استدلال قضیه 17-2 ثابت شده میتواند که: ست انتقالات تحت عملیه ترکیب بسته است.

The set of translations is closed under the operation of composition.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

بصورت عموم یک set S تحت یک عملیه "$" بسته گفته میشود درصورتیکه برای هر جوره عناصر a و b یک set S عنصر حاصل شده (a$b) در set S نیز شامل باشد. از مطالعه الجبره بخاطر خواهید داشت که set های بعضی اعداد تحت بعضی عملیات بسته میباشد. چنانچه یک set اعداد تاق closed odd numbers تحت عملیه ضرب بسته است؛ زیرا حاصل ضرب هر دو عدد تاق نیز یک عدد تاق است. از طرف دیگر حاصل جمع هر دو عدد اولیه prime یک عدد اولیه prime نیست. مثلاً: (3+7) یک عدد اولیه نیست. پس گفته میشود که set اعداد تاق odds تحت عملیه ضرب بسته است حالانکه یک set اعداد اولیه primes تحت عملیه جمع بسته نمیباشد.

قضیه 17-2: حکم میکند (نشان میدهد) که set تمام نیم دورها تحت عملیه ترکیب composition بسته نیست. راجع به set تمام انعکاسات خطی line Reflections تحت عملیه ترکیب چه گفته میتوانید؟

توجه نمائید! درصورتیکه $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{BA}$ باشد، پس $S_{AB}S_{CD} = S_{AB}S_{BA} = I$ میشود.

برای اینکه با آسانی و سادگی گفته بتوانیم که ترکیب هر دو انتقال یک انتقال است؛ موافقه مینمائیم اینکه انتقال عینیت Identity Transl. نیز یک انتقال است. این مفکوره با شامل مفکوره اینکه اگر $S_{AB} = I$ ارائه شود درصورتیکه A و B عین نقطه باشند، توضیح شده میتواند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

با شرح فوق ما نتیجه مهمه ذیل را بیان میکنیم:

نتیجه مقدمه: Corollary . 2-17. C

حاصل ترکیب دو انتقال یک انتقال است.

اثبات خاصیت بستگی را با استفاده از استعمال قضیه 2-17 بحیث تمرین واگذار میشویم. درینجا ما با استفاده از استعمال سیستم کمیات باثبات آن اقدام مینمائیم. برای هموار ساختن راه این اثبات متناوب - ما فرض مینمائیم که یک سیستم کمیات وضعیه برای اثبات قضیه ذیل تأسیس یافته است.

قضیه Theorem . 2-18 :

اگر S_{OA} یک انتقال که توسط نقاط $O(0,0)$، $A(a,b)$ تعیین شده، و هم چنان T عبارت از یک میپنگ که برای تمام نقاط $P(x,y)$ توسط $T(P)=(x+a, y+b)$ تعیین شده، موصوف باشند؛ پس $S_{OA}=T$ است.

ثبوت: Proof

برای هر نقطه $P(x,y)$:

$$T(P)=(x+a, y+b)$$

اگر ..... $P^* = S_{OA}$ فرض شود،

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

درینصورت: $\overrightarrow{PP^*} = \overrightarrow{OA}$

و با اساس قضیه 2-13A ما داریم:

$$P^* = (x+a-0,\ y+b-0)$$
$$= (x+a,\ y+b)$$
$$= T(P)$$

بنابرآن $T(P) = S_{OA}$ ....

پس برای هر نقطه P ما نوشته میتوانیم که:

$$S_{OA} = T$$

Q.E.D.

قضیهٔ 2-18 ایضاح مینماید که هر انتقال برای تمام نقاط $P(x, y)$ بشکل معادله: $S(P) = (x+a,\ y+b)$. تعریف شده میتواند.

برای استحصال اعداد a و b بصورت ساده ما نقاط و ترکیبات مبداء origin را ریکارد و ثبت مینمائیم. پس اگر $O(0,0)$ عبارت از مبداء سیستم کمیات وضعیه باشد درینصورت $S(O) = (a, b)$ بوده و شکل: $S(P) = (x+a,\ y+b)$ میشود.

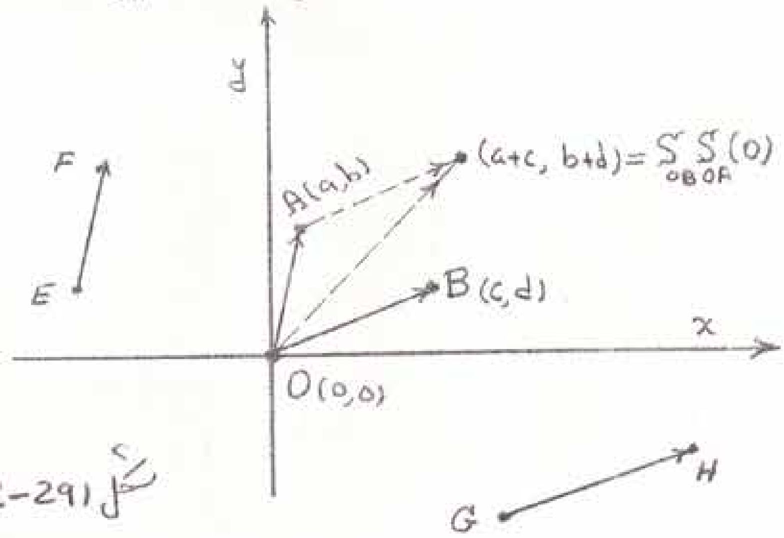
برای ثبت خاصیت بسته گی انتقال - دو انتقال کیفی S_{EF} و S_{GH} را مد نظر میگیریم؛ اگر دو نقطهٔ $A(a, b)$ و $B(c, d)$ طوری انتخاب گردند که: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{GH}$ موجود شود:

پس درینصورت برای هر نقطهٔ $P(x, y)$ ما داریم:

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

ما داریم: $S_{EF}(P) = S_{OA}(P) = (x+a, y+b)$

و همچنان: $S_{GH}(P) = S_{OB}(P) = (x+c, y+d)$



شکل (2-29)

حال اگر حاصل ترکیب گرفته شود درینصورت ما داریم:

$$S_{GH}S_{EF}(P) = S_{OB}S_{OA}(P) = S_{OB}[(x+a, y+b)]$$
$$= ([x+a]+c, [y+b]+d)$$
$$= (x+[a+c], y+[b+d]) \cdot$$

پس بنابر قضیهٔ 2-18 ، $S_{GH}S_{EF}$ عبارت از یک انتقالی است که مبدأ (O) را به نقطه که دارای مختصات (a+c, b+d) است نقل میکند.

راجع به چهارضلعی که رؤس آنرا نقاط: O ، $S_{OA}(O)$ ، $S_{OB}S_{OA}(O)$ و $S_{OB}(O)$ تشکیل میدهند، چه گفته میتوانید؟

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

مثال : Example :

فرضاً S_{AB} عبارت از انتقالی Translation که نقطهٔ $C(-3,4)$ را بر onto نقطهٔ $D(0,3)$ سبب میکند باشد. برای هر نقطهٔ $P(x,y)$ مختصات نقطه $S_{CD}S_{AB}(P)$ را تعیین کنید.

حل : Solution :

اگر $O'=S_{AB}(O)$ و $O^*=S_{CD}(O)$ فرض شود؛ پس درینصورت $\overrightarrow{OO'} \doteq \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OO^*} \doteq \overrightarrow{CD}$ میشود. پس

$$O'=(0+4-2,\ 0+1-3)$$
$$=(2,-2)$$

وهمچنان ..
$$O^*=(0+0+3,\ 0+3-4)$$
$$=(3,-1)$$

پس ......

$$S_{AB}=(x+2,\ y-2)$$

وهمچنان ...... $S_{CD}=(x+3,\ y-1)$ گردیده

بنابرآن ..
$$S_{CD}S_{AB}=([x+2]+3,\ [y-2]-1)$$
$$=(x+5,\ y-3).$$
میشود.

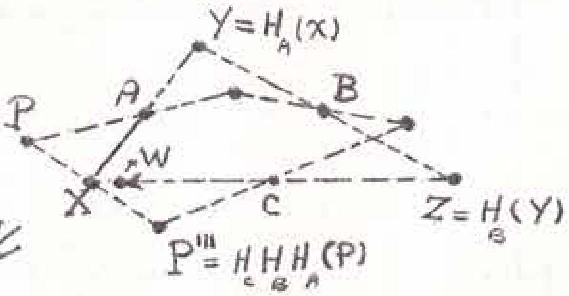
Q.E.D.

این مبحث را توسط حل مثال تطبیق نتیجهٔ مهم 2-17.B ختم مینمایم.

بالفرض A، B و C سه نقطهٔ غیر مشترک الخط باشند. مثلث ΔXYZ را رسم نمائید طوریکه نقاط داده شده A،

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

B و C علی الترتیب نقاط وسطی اضلاع $\overline{XY}$، $\overline{YZ}$ و
$\overline{ZX}$ شکل مذکور را تشکیل دهند.



شکل (2-30)

برای حل این پروبلم، یک نقطهٔ P مستوی را انتخاب نموده
و سپس $P'''=H_C H_B H_A(P)$ را رسم مینمائیم. با شکل نتیجه میشود
مطابق Corollary.12-7.B میدانیم که $H_C H_B H_C$ عبارت از نیم دور است،
که با اطراف نقطهٔ X صورت میگیرد، پس $P'''=H_C(P)$ است
و X نقطهٔ وسطی $\overline{PP^*}$ است. حال $Y=H_A(X)$ و
$Z=H_B(Y)$ و $W=H_C(Z)$ را رسم مینمائیم پس
$W=H_C H_B H_A(X)$ است.

ازینجا واضح A نقطهٔ وسطی $\overline{XY}$،
و B نقطهٔ وسطی $\overline{YZ}$،
و C نقطهٔ وسطی $\overline{ZW}$ میشود.

امّا چون $H_C H_B H_A = H_X$ است. ازینجا نتیجه میشود که:
$W=H_X(X)=X$ گردیده،
یعنی W منطبق X میباشد.

بنابران اتحاد union قطعات: $\overline{XY}$، $\overline{YZ}$ و $\overline{ZX}$ عبارت

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

از مثلث مطلوب است . زیرا نقاط داخلی اضلاع $\overline{XY}$ ، $\overline{YZ}$ و $\overline{ZX}$
آن علی الترتیب نقاط: A ، B و C میباشد .
بنابراین $\triangle XYZ$ مثلث مطلوب است .

Q.E.D.

آیا رسم کدام مثلث دیگر که نقاط A ، B و C نقاط داخلی
اضلاع از انرا تشکیل دهند امکان پذیر است ؟
اگر کدام مثلث دیگر $\triangle RST$ نیز موجود شده بتواند که A
نقطهٔ داخلی ضلع $\overline{RS}$ آن ، B نقطهٔ داخلی $\overline{ST}$ و C نقطهٔ
داخلی ضلع $\overline{TR}$ آن باشد ، درینصورت :

$H_C H_B H_A(R) = R \cdots (1)$ میشود .

رابطهٔ (1) این معنی را دارد که R یک نقطهٔ ثابت Fixed Point –
H_X است . از اینکه یگانه نقطهٔ ثابت Fixed Point ، H_X
عبارت از نقطهٔ X است : ازین نتیجه میشود که $R=X$ است.
بهمین قسم نتیجه میشود که $S=Y$ است . چون A نقطهٔ داخلی
$\overline{RS}$ است ، ازین $T=Z$ نتیجه میشود .
در نتیجهٔ آخر گفته میتوانیم که $\triangle XYZ$ یگانه unique حل سوال است.

این مثال با استفاده از هندسهٔ اقلیدسی عنعنوی نیز بسهولت ترسیم
شده میتواند . شما میتوانید که انرا حل کنید . در تمرینات روابط این
مبحث با تکیه مثال تغییر شکل این مسئله را قرار داده ایم که حل انها
با استفاده از طریقهٔ دروس فوق آسان بوده ولی با استفاده
از استعمال طریقهٔ هندسهٔ اقلیدسی عنعنوی مشکل است.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

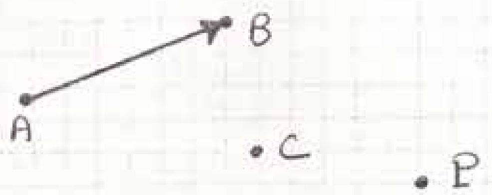
Problem Set . 2-7 : تمرینات

1. قطعه خط مستقیم موجه $\overrightarrow{AB}$ و نقاط C و P مفروض اند.

(a). $S_{AB}H_C(P)$ را تعیین کنید.

(b). $H_C S_{AB}(P)$ را تعیین کنید.

(c). تمام نقاط X را تعیین کنید طوریکه $S_{AB}H_C(X)=X$ گردد.

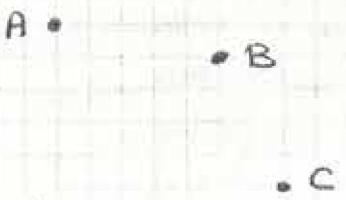


2. نقاط A ، B و C داده شده اند، ترسیمات ذیل را انجام دهید:

(a). D را طوریکه: $H_D H_C = S_{AB}$ باشد.

(b). E را طوریکه: $H_A H_B H_C = H_E$ گردد.

(c). F را طوریکه: $S_{AB} H_C = H_F$ شود.



3. نقاط: A ، B ، C و D مفروض اند، راسم کنید:

(a). E را طوریکه $S_{CD}S_{AB} = S_{AE}$ شود

(b). X را طوریکه برای تمام نقاط X: $H_A H_B H_C(X)=X$ گردد.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

4. (a). اگر که برای تمام نقاط $P(x,y)$ توسط: $S(P)=(x+a,\ y+b)$ تعریف شود؛ $S^{-1}(P)$ را پیدا کنید (را به دست آرید).

(b). اگر S_1 و S_2 یک انتقال مفروض باشد، امکان موجودیت یا عدم موجودیت رابطه: $S_1S_2=S_2S_1$ را ثابت کنید.

5. کدام از set های ذیل تحت عملیات مشخص شده (داده شده) گروپ اند:

(a). set تمام مضرب های 3 تحت عملیه تفریق؟

(b). set تمام اعداد تام تحت عملیه جمع؟

(c). set تمام انعکاسات خطی تحت عملیه ترکیب؟

(d). set تمام تحویلات تحت عملیه ترکیب؟

(e). set: $S=\{-1,0,1\}$ تحت عملیه:

(i) ضرب؟

(ii) جمع؟

6. اگر S عبارت از یک انتقالی که توسط: $S(x,y)=(x+2,\ y+3)$ تعریف شده و یک نقطهٔ $C(1,-7)$ مفروض باشند؛ مختصات نقطهٔ D را معلوم کنید طوری که: $H_DH_C=S$ گردد.

7. اگر نقاط: $A(1,0)$، $B(2,5)$ و $C(-3,8)$ مفروض باشند؛ مختصات نقطهٔ D را معلوم کنید طوری که: $S_{CD}=H_BH_A$ گردد.

8. اگر $A(a,b)$ و $B(c,d)$ نقاط مفروض باشند، با استفاده از سیستم کمیات وضعیه (نه استفاده از قضیه 17-2) افاده های ذیل را ثابت کنید.

(a). H_BH_A یک انتقال است.

(b). برای یک نقطه P

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

(b). برای یک نقطه P اگر $P' = H_B H_A(P)$ باشد، پس $\overrightarrow{PP'} \doteq 2\overrightarrow{AB}$ میشود.

9. (a). نتیجه مهمه 17-B: را ثابت کنید.

(b). با استفاده از انتقال قضیه 2-17 نتیجه مهمه 2-17-C را ثبوت کنید.

10. نتایج مهمه دیگر قضیه 2-17 را با ثبات برسانید:

(a). اگر S_{AB} کدام انتقال بجز از انتقال عینیت باشد، پس در آنصورت S_{AB} دارای کدام نقطه ثابت F.P. نمیباشد.

(b). حاصل ترکیب دو نیم دور Half turn یک انتقال است.

(c). برای نقاط A ، B و C داده شده:

صحت رابطه: $H_A H_B H_C = H_C H_B H_A$ حقیقت دارد.

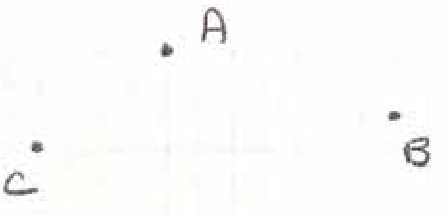
11. برای نقاط A(2,1) و B(-3,5) سوال ذیل را جواب دهید:

(a). برای هر نقطه کیفی P(x,y) ، $H_A H_B(P)$ را تعیین کنید.

(b). معادله الجبری $C' = H_A H_B(C)$ تعیین کنید، درصورتیکه: $C = \{(x,y): x^2+y^2=9\}$ باشد.

12. اگر $\ell = \{(x,y): y=3x+4\}$ و A(2,3) ، B(-1,-2) و C(3,5) مفروض باشند، معادله $\ell' = S_{AB} H_C(\ell)$ را بنویسید.

13. سه نقطه A ، B و C که مشترک الخط نیستند مفروض است. شکلی را رسم کنید که نقاط مفروضه نقاط وسطی اضلاع آنرا تشکیل دهند.



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

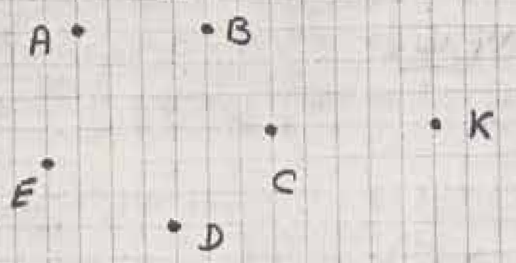
14. راجع به طاق رتبه ترکیب نیم دورها و هم‌چنان راجع به جفت رتبه ترکیب نیم دورها چه گفته میتوانید؟ جواب خود را استدلال کنید.

15. نقاط: A، B، C، D، E و K طبق شکل ذیل داده شده اند؛

(a). اگر $T = H_E H_D H_C H_B H_A$ باشد؛ $K^* = T(K)$ را رسم کنید.

(b). پنج ضلعی Pentagon VWXYZ را رسم کنید که نقاط: A، B، C، D و E علی الترتیب نقاط وسطی $\overline{VW}$، $\overline{WX}$، $\overline{XY}$، $\overline{YZ}$ و $\overline{ZV}$ پنج ضلعی مذکور را تشکیل دهند.

(c). صحت حقیقت ترسیمات خود را استدلال نموده وحدانیت و یگانگی پنج ضلعی رسم شده را ثابت سازید.



16. چهارضلعی □ ABCD مفروض است طوریکه نقاط: M، N، P و Q علی الترتیب نقاط وسطی اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ آن تشکیل داده اند.

اگر $T = H_Q H_P H_N H_M$ باشد؛

(a). $T(A)$ و $T(B)$ را رسم نمائید،

(b). یک نقطه کیفی P را انتخاب نموده و $T(P)$ را رسم نمائید. در مورد تحول T چه فکر میکنید؟

(c). چند چهارضلعی رسم شده میتواند که نقاط M، N، P و Q را بحیث نقاط وسطی اضلاع خود داشته باشد؟

17. در بین نقاط مشخص و متمایز A، B و C چه روابط موجود شده میتواند درصورتیکه: $H_A H_B H_C = H_B$ باشد؟

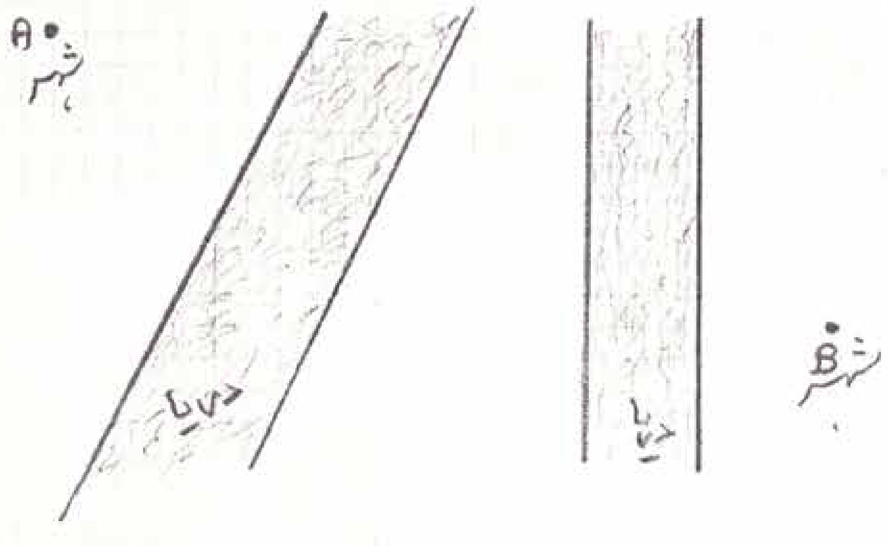
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

18. چهار نقطه A، B، C و D را که مشترک الخط نیستند در نظر بگیرید:

(a). درصورتیکه $H_A H_B H_C H_D = I$ باشد ثابت کنید که:
که چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است.

(b). درصورتیکه چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع باشد، ثابت کنید که: $H_A H_B H_C H_D = I$ میشود.

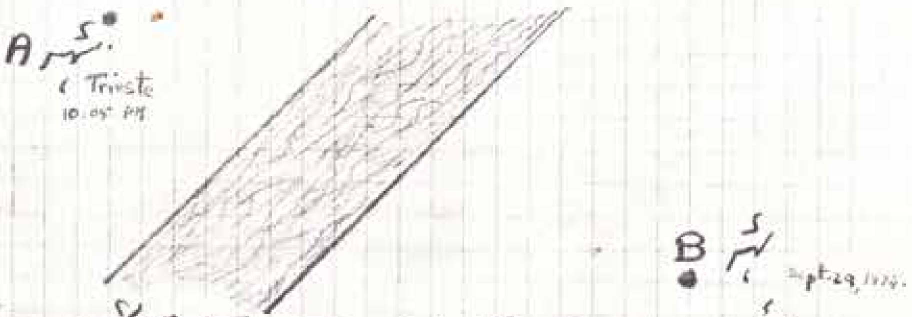
19. دو شهر A و B که در بین شان دو دریا قرار دارد طبق شکل ذیل داده شده اند. در نظر است که دو پل روی دریا ها تعمیر گردد طوریکه عمود به سمت جریان آب باشند. نقاط را [کنار دریا] تعیین نمائید که فاصله بین هر دو شهر A و B را اصغری سازد. نشان دهید که هر راه دیگر طویلتر از راهی است که شما انرا تعیین نموده اید.



9:10 PM
Sept. 29, 1974.

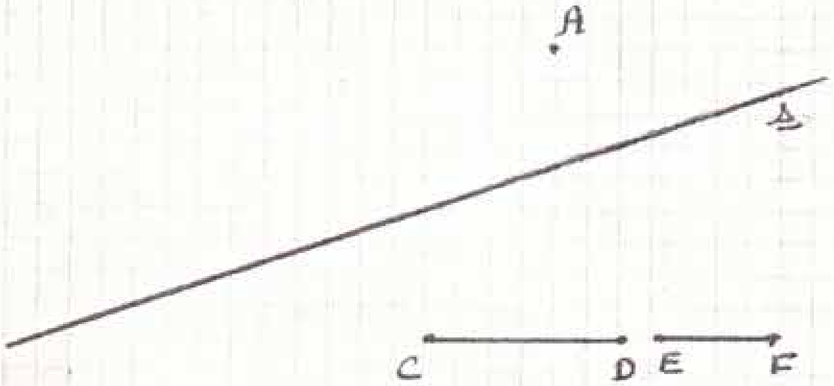
Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

20 . بین دو شهر A و B یک دریا طبق دیاگرام ذیل قرار دارد. بر دو کنار دریا دو نقطه را برای اعمار پل تعیین نمائید طوریکه پل مورد نظر به سمت جریان آب یک زاویه که وسعت آن 60 درجه باشد تشکیل داده و ضمناً کوتاه‌ترین فاصله بین هر دو شهر را تعیین نمائید.



21 . نقطهٔ A ، خط Δ و قطعه خط‌های $\overline{CD}$ و $\overline{EF}$ قرار شکل ذیل داده شده‌اند. دایره‌ای را رسم نمائید طوریکه شعاع آن باندازه طول قطعه خط $\overline{CD}$ بوده و از خط Δ باندازه طول $\overline{EF}$ وتر جدا ساخته و ضمناً از نقطهٔ داده شده A نیز عبور نماید.

کمک :- از خط Δ باندازه طول $\overline{EF}$ جدا نموده و دایره را به شعاع $\overline{CD}$ طوری رسم نمائید که از انجام‌های قطعه خط جدا شده عبور کند.



Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

X

فهرست مندرجات
اصطلاحات و تعریف انها

Index

صفحات

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پیشگفتار

«زندگی جلوهٔ ناموس تحول باشد　　هر کجا نیست تحول عدمش نام کنم»

عصریکه ما دران بسر می بریم عصر تحول و انقلاب ساینس و تکنالوجی است. این تحولات و انقلابات چه زادهٔ فکر مجادله برای تکافوی ضروریات حیات بشر بوده، چه نتیجهٔ رقابت های علمی دول و یا چه مولدهٔ تراوش افکار دانشمندان برای رفع عطش اقناع خاطر در پیمودن راه اسرار طبیعت، خلاصه از هر منبع و یا منشا ای که چشمه میگیرد در تمام شقوق مختلفه علوم تبارز دارد. یا با الفاظ دیگر در دامن زدن این انقلاب بصورت عام تمام علوم ساینس و حتی اجتماعیات Social Studies سهیم بوده ولی بصورت خاص علم ریاضیات در توسعه و انکشاف این تحول سهم بارزی دارد. چه ریاضیات از یکطرف در انکشاف علوم دیگر داخل خدمت بوده و حتی در پیشرفت انها بحیث یک زبان مشترک اجرای وظیفه نموده، و از جانب دیگر در توسعه و پیشرفت جریانات داخلی خود علم ریاضی معادلات پی در پی را دنبال میکند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پیشگفتار

«زندگی جلوهٔ ناموس تحوّل باشد　　هر کجا نیست تحوّل عدمش نام کنم»

عصریکه ما دران بسر میبریم عصر تحوّل و انقلاب سائنس و تکنالوجی است. این تحولات و انقلابات چه زادهٔ فکر مجادله برای تکافو ضروریات حیات تمامتر بوده، چه نتیجهٔ رقابت های علمی دول ویا چه مولدهٔ ترادش افکار دانشمندان برای رفع عطش اقناع خاطر در بیرون آوردن اسرار طبیعت باشد، خلاصه از هر منبع ویا منشأ ای که چشمه میگیرد در تمام شقوق مختلفه علوم تبارز دارد. یا بالفاظ دیگر در دامن زدن این انقلاب بصورت عام تمام علوم سائنس وحتی اجتماعیات Social Studies سهیم بوده ولی بصورت خاص علم ریاضیات در توسعه وانکشاف این تحوّل سهم بارزی دارد. چه ریاضیات از یکطرف در انکشاف علوم دیگر داخل خدمت بوده وحتی در پیشرفت آنها بحیث یک زبان مشترک اجرای وظیفه نموده، و از جانب دیگر در توسعه و پیشرفت جریانات داخلی خود علم ریاضی معادلات پی در پی را دنبال میکند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پیشگفتار

«زندگی جلوهٔ ناموس تحول باشد   هر که بی نیست تحول عدمش نام کنم»

عصریکه ما دوران بشری بریم عصر تحول و انقلاب ساینس تکنالوجی است. این تحولات و انقلابات چه زادهٔ فکر مجادله برای تکافو ضروریات حیات عالیتر بوده، چه نتیجهٔ رقابت های علمی دول و یا چه مولود تراوش افکار دانشمندان برای رفع عطش اقناع خاطر در نمود راز اسرار طبیعت است، خلاصه از هر منبع و یا منشا ای که چشمه میگیرد در تمام شقوق مختلف علوم تبارز دارد. یا بالفاظ دیگر در دامن زدن این انقلاب بصورت عام تمام علوم ساینس وحتی اجتماعیات Social Studies سهیم بوده ولی بصورت خاص علم ریاضیات در توسعه و انکشاف این تحول سهم بارزی دارد. چه ریاضیات از یکطرف در انکشاف علوم دیگر داخل خدمت بوده وحتی در پیشرفت انها بحیث یک زبان مشترک اجرای وظیفه نموده، و از جانب دیگر در توسعه و پیشرفت جریانات داخلی خود علم ریاضی معادلات پی در پی را دنبال میکند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پیشگفتار

«زندگی جلوهٔ ناموس تحول باشد   هر کجا نیست تحول عدمش نام کنم»

عصریکه ما دوران بشری بریم عصر تحول و انقلاب سائنس و تکنالوجی است. این تحولات و انقلابات چه زادهٔ فکر مجادله برای تکافوی ضروریات حیات عالیتر بوده، چه نتیجهٔ رقابت های علمی دول ویا چه مولود تراوش افکار دانشمندان برای رفع عطش اقناع خاطر در پیمودن اسرار طبیعت است، خلاصه از هر منبع ویا منشأ ای که چشمه میگیرد در تمام شقوق مختلفهٔ علوم تبارز دارد. یابالفاظ دیگر در دامن زدن این انقلاب بصورت عام تمام علوم سائنس وحتی اجتماعیات Social Studies سهیم بوده ولی بصورت خاص علم ریاضیات در توسعه و انکشاف این تحول سهم بارزی دارد. چه ریاضیات از یکطرف در انکشاف علوم دیگر داخل خدمت بوده وحتی در پیشرفت آنها بحیث یک زبان مشترک اجرای وظیفه نموده، و از جانب دیگر در توسعه و پیشرفت جریانات داخلی خود علم ریاضی معادلات پی در پی را دنبال میکند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com

پیشگفتار

«زندگی جلوهٔ ناموس تحول باشد هر کجا نیست تحول عدمش نام کنم»

عصریکه ما دران بسر می بریم عصر تحول و انقلاب ساینس و تکنالوجی است. این تحولات و انقلابات چه زادهٔ فکر مجادله برای تکافوی ضروریات حیات عالیتر بوده، چه نتیجهٔ رقابت های علمی دول و یا چه مولودهٔ تراوش افکار دانشمندان برای رفع عطش اقناع خاطر در پیمودن راه اسرار طبیعت است، خلاصه از هر منبع و یا منشأ ای که چشمه میگیرد در تمام شقوق مختلفهٔ علوم تبارز دارد. و یا بالفاظ دیگر در دامن زدن این انقلاب بصورت عام تمام علوم ساینس وحتی اجتماعیات Social Studies سهیم بوده ولی بصورت خاص علم ریاضیات در توسعه و انکشاف این تحول سهم بارزی دارد. چه ریاضیات از یکطرف در انکشاف علوم دیگر داخل خدمت بوده وحتی در پیشرفت اینها بحیث یک زبان مشترک اجرای وظیفه نموده، و از جانب دیگر در توسعه و پیشرفت جریانات داخلی خود علم ریاضی معادلات پی در پی را دنبال میکند.

Prepared and digitalized by Shahmama Publications, www.shahmama.com