سلسلهٔ ریاضیات معاصر

((۴))

جلد دوم

هندسهٔ تحویلی

در مستوی اقلیدسی

نگارش: پوهنمل محمد امان نادری

Italy ترییست ، ایتالیا Trieste

October ، 1974 ، اکتوبر

میزان ۱۳۵۳

شناسنامه:

نام کتاب: بسلسلهء ریاضیات معاصر
در چهار قسمت

نگارش: استاد محمد امان نادری
اکتوبر ۱۹۷۳، تیریست ایتالیا

دستنویس استاد نادری
در مرکز جهانی فزیک نظری، ایتالیا

چاپ الکتریکی: بنیاد شاهمامه، هالند
www.shahmama.com

فبروری ۲۰۱۳ مسیحی

این کتاب در ۵۲۳ صفحه آمادهٔ چاپ است.

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION

سلسلهٔ ریاضیات معاصر

در چهار قسمت

MODERN MATHEMATICS

روابط دوگانه‌ای
BINARY RELATIONS

عملیات دوگانه‌ای
BINARY OPERATIONS

گروه‌ها و ساحه‌ها
GROUPS & FIELDS

خودآموز ریاضی

PREPARED (in Dari) by MOHAMMED AMAN NADERI

AT THE
INTERNATIONAL CENTRE
FOR
THEORETICAL PHYSICS

Trieste, ITALY May 10, 1973

اهداء: به دانشجویان پوهنتون کابل

از قلم ناشر

اگر واژهٔ دانشمند، به کسی اطلاق شود که مغز و انگشتش به پژوهش آشنا باشد، اگر مقولهٔ دانشمند مُعرف کسی باشد که به تولید دانش دست برده است، درین صورت استاد محمد امان نادری یک دانشمند به تمام معناست.

استاد نادری با تولید دانش و تألیف کتاب ، با ریسرچ و نوشتن، خود را به حیث ریاضیدان پُرقریحه و پژوهشگرخلاق تثبیت کرده است.استاد نادری در جریان تحصیل و روند تدریس و مأموریت، همیشه مربی مؤفق و نویسنده یی با تفکر ملی بوده است.

از نوشته های استاد نادری، برق آگاهی و مسؤولیت پرتو میزند. او در مقدمهٔ کتاب «به سلسلهٔ ریاضیات معاصر» به مقولهٔ مدرن از دیدگاه یک دانشمند متفکر برخورد می کند. استاد میداند که مدرنیته چیست؟ میداند که مدرن یعنی تازه جویی، مدرنیته یعنی تولید دانش و تولید فرهنگ.

نویسندهٔ افغان با درک اهمیت علوم مدرن، برای آنکه جامعهٔ افغانی را بسوی مدرنیته ببرد، به نوشتن و تألیف آثاری در حوزهٔ ریاضی دست میزند، تألیفاتی که استعداد جوانان افغان را به سوی خلاقیت و تولید دانش رهنمون میسازد.

دست اندرکاران بنیاد «شاهمامه» افتخار دارند که شماری از آثار چاپ نشدهٔ قلمی و چاپ شدهٔ استاد بزرگ نادری را در آرشیف خود دارند و در قدم نخست خواهیم کوشید تا بخش های هر یک را به شکل کتاب انترنتی روی صفحه بگذاریم. البته باید یادآور شویم که احتمال دارد آثار دستنویس استاد نادری گاهی به تیراژ کم اقبال چاپ یافته باشد و در آرشیفی هم موجود باشد ولی از آنجاییکه در ین اثر نشانی از یادداشت های چاپ دیده نمیشود، ناگزیریم بپذیریم که این سلسه به چاپ نرسیده است.

استاد نادری عضویت انجمن ساینسدان های جهان را داشت که مرکز آن در شهر تیریست ایتالیا بوده است و نادری بار ها در کنفرانس های علمی آن اشتراک کرده است. در دو کنار صفحهٔ دوم کتاب نشان های دو سازمان بانام جهان یعنی **یونسکو** و **سازمان جهانی انرژی اتومی** دیده میشود و گمان میرودکه برنامه ها و کنفرانس های علمی انجمن ساینسدان های جهان از طریق این دو نهاد معتبر جهانی حمایت و تمویل میشد و به این لحاظ نشانهای ایشان در کتاب درج اند و به ارزش علمی این اثر می افزایند و تشخیص میشود که نادری از جملهٔ دانشمندان پذیرفته شده ایشان بوده و احتمال دارد کاپی این اثر نیز در نهاد ایشان درج باشد.

گرچه بنیاد «شاهمامه» امکانات تایپ و دیزاین هرگونه کتاب در هر زبان و علم را دارد ولی با نشر نسخه های اصلی این سلسله آگاهانه میخواهیم از ارزش علمی و تاریخی این سلسله نکاهیم، چه دقت و روش کار استاد نادری، دستنویس زیبا و پر کشش شان ما را بیشتر انگیزه میدهد تا آنچه هست امانتدارانه به شما پیشکش گردد.

در برگ دوم «بسلسلهٔ ریاضیات معاصر» - جلد دوم، میبینیم که این اثر به دانشجویان پوهنتون کابل اهدا شده است. بنیاد «شاهمامه» از تمام مراکز علمی و دانشکده های علوم طبیعی کشور که ضرورت آرشیف سازی و تدریس آثاری از این دست را دارند، تمنا میکند تا در تکثیر و نشر کتب استاد نادری با ما همکاری کنند، و زمینه استفادهٔ این آثار را به نیازمندان فراهم سازند چه این یک دین ما و امانت مردم افغانستان نزد ما میباشد و نمیدانیم که بعد از این همه چند دهه جنگ و چپاول در افغانستان، آیا اثری از استاد نادری در آرشیفی و یا دانشکده یی موجود خواهد بود یا خیر.

به آرزوی اینکه زمان و زمینه میسر گردد تا بنیاد شاهمامه آثار دیگر استاد نادری را نیز آمادهٔ چاپ و پیشکش علاقمندان و خوانداگانش دارد، این اثر را به شما پیشکش میداریم.

به امید یک فردای روشن برای نسل جوان کشور

منیژه نادری

مسؤول بنیاد شاهمامه

۹ مارچ ۲۰۱۳، هالند

مقدمه

Preface

در عصری که ما بسر می بریم گفته میتوانیم که یک عصر تحول و انقلاب است.
این تحول و انقلاب در ساحات مختلف علوم و تکنالوجی بصورت برازنده مشاهده
میشد. ریاضیات نیز در قسمت خود در تشکیل این تحول سهم کافی داشته،
و حتی در تحول و پیشرفت علوم طبیعی و علوم اجتماعی رول مرکزی
را عهده دار میباشد. در عین حال ارزش تحول و انقلاب در ساحهٔ خود
تعلیم ریاضی از اهمیت که ریاضیات در تحول و انکشاف علوم دیگر دارد،
کمتر نمیباشد. چون در ممالک انکشاف یافته، معلمان و متخصصان
تعلیم ریاضی به اهمیت تشریح تحولات ریاضی پی برده اند، بر همین منظور
در طی این چند سال آخر دانشمندان این علم یک تجدید نظر عمومی را
در متن پروگرام ساحه های مختلف ریاضیات: الجبره، هندسه،
مثلثات، مشتقات ضرورت بنیادی پذیرفته و حتی تغیرات وارده را
در آن وارد نموده اند. چنانچه در انستیتوت های متعدده امریکا کارهای عملیات مرتب
پروگرام ریاضیات از قبیل: SMSG:
School Mathematics Study Group و هم چنین
هیئت CMCEEB: Commission on Mathematics of the
College Entrance Examination Board و همچنین قسم دیگر UICSM:
University of Illinois Committee on School Mathematics,
و امثال آن که شاهد این مدعا است. همه زبان در یوروپ نیز
پیروان مکتب بورباکی Nicolas BOURBAKI در فرانسه و از طرف Papce
در بلجیم و دسته که یک عده ریاضی دانان که در ممالک خارجی دیگر تغیرات را
لازمه در پروگرام ریاضی و متن پروگرام ها که درسی خویش وارد نموده.

درنتیجه این نشرات خاص زیاد کتب در زمینهٔ تحریر یافته و شیوه‌های مختلف از منطق مکاتب ابتدائی الی کورس‌های post graduates مورد تطبیق قرار گرفت.

زمانیکه راجع به ریاضیات معاصر صحبت میشود، یکعده سوالات از قبیل: ریاضیات معاصر چیست؟ ریاضیات معاصر از ریاضیات سابق (عنعنوی) چه فرق دارد؟ ما چرا ریاضیات معاصر را تعقیب کنیم؟ و از ریاضیات چه فائده حاصل میشود؟ این نوع سوالات معمولاً از طرف معلمان و دانشجویان ریاضیات سابق (عنعنوی) پرسیده میشود. واقعاً که ایشان مستحق گرفتن جواب قانع کننده و توضیحات لازمه میباشند. اما ناگفته نماند که جواب موجز، خلص و قانع کننده همچو سوالات عمومی کار سهل و آسان نیست، بلکه یک سلسله تتبعات و مباحثات دامنه داری را ایجاب میکند.

بجز از یک قسمت کمی ریاضیات معاصر (جدید) که درین چند سال اخیر انکشاف یافته است، بقیه حصص زیاد آن از سال‌های خیلی سابق موجود بوده است. در حقیقت مفکوره‌های مهم ریاضیات از قبیل: مفکوره‌های ست، مفکوره روابط، مفکوره تابع از ابتدای تاریخ بشر - قدامت تاریخی دارد.(1) علاوه بران انکشاف و تعارف رسمی بسیاری از مفکوره‌های ریاضی که درین دو قرن اخیر (قرون نزده و بیست) صورت گرفته است، نتیجه تتبعات و تشریح تقریباً بیشتر از سه صد سال قبل است. حالانکه نزد یک زن و یا مرد که معمولاً بیشتر از صد سال عمر ندارد) چطور اطلاق کلمهٔ معاصر را «Modern» به یک مفکوره که تقریباً چهار صد سال دیگه که صد سال و حتی دو صد سال از آن گذشته باشد قابل قبول است!

---

(1) Boyd Earl, William Moore, W. I. Smith; Groups And Fields, McGraw-Hill Book Comp. Inc., N.Y., 1963.

ریاضیات جدید از لحاظ اینکه ریاضیدانان درین عصر به ماهیت واقعی آن پی برده و به آن عمومیت بخشیده اند «معاصر» گفته میشود. اهمیت بارز ریاضیات «جدید» و شناخت عمومی آن بنابر دو دلیل ذیل متکی است:

(1) بنابر نتایج تشریح و تتبعات متعدد یکه درین قرن در ساحه علوم ریاضیات صورت گرفته است.

(2) بنابر انقلاب و انکشاف تکنالوجی، که بصورت متقابل با ریاضیات تحول و انکشاف یکدیگر را ایجاب نموده و مینمایند.

وظیفهٔ مهم و بزرگ یک عالم و علاقمند ریاضی اکتشاف قضایا و صورت اثبات آن است. حالانکه در تشریح و تتبعات در ریاضیات برای اینکه بتوانند اصطلاحات «terms» را بصورت موجز و متمم تعریف کنند، به داشتن یک زبان موجز و خاص ضرورت محسوس میشود. برای برآوردن این ضرورت در اواخر به اهمیت ساختن منطق رسمی Formal logic در ریاضیات پی برده شده است. پس بجا دیده روش استعمال اصول اولیات axiomes و متعارفات محض به هندسه اقلیدسی Euclid's Geometry منحصر نمانده بلکه در تمام شقوق ریاضیات بکار برده شده است.

این توسعه و پیروی از روش سیستم منطقی در الجبر بصورت خاص مفید ثابت گردیده است، زیرا تعارف این شیوه در الجبر باعث شده که توجه را بیشتر در طرز تشکل ساختمان جبری جلب نموده ضمناً تا اندازه از تکرار زیاد حل معادلات و استعمال محض اعداد کاسته است. ناگفته نماند که این کاهش حل معادلات جبری معنی این را ندارد که این طرز برخورد ریاضیات بحل معادلات و مهارت داشتن به استعمال اعداد ارزشی را قایل نباشد. بلکه باتکمیل

بحل معادلات جبری و ورزش مهارت : استعمال اعداد ارزش و اهمیت فراوانی را قبول دار است ، زیرا مشروط بر اینکه این حل معادلات و استعمال اعداد با شناسایی دانش و پی بردن به حقایق که زیربنای آنرا تشکیل داده اند متکی باشد . چه بدون دانستن حقایق زیربنای مسایل - حل محض آنها با شناسایی مهارت با استعمال اعداد علم ریاضی را بحیث یک صندوقچهٔ چال و tricks تلقی میکنند . حالانکه اهمیت اکتشاف ریاضی که اکتشافات انقلاب در اکتشاف تکنالوجی را نیز تشکیل داده و تولید نتایج سودمند آن منجر بوجود آمدن مفکوره کمپیوتر نتیجهٔ چال و tricks ریاضیات سابقه بوده نمیتوانند . بهمین قسم توسعهٔ روز افزون علم ریاضی در قلمرو علوم مختلفهٔ دیگر از قبیل : فزیک(1) ، کیمیا ، بیولوژی ، اقتصاد ، سوشیالوجی ، سایکالوجی وغیره ثمرهٔ انتقال چال های سابق در تشکل نوع مفکوره های جدید شده نمیتوانند .

در ریاضیات مفکوره های زیاد بصورت فاحش انکشاف یافته و در انقلاب که قبلاً از آن بحث شده در معرض تطبیق قرار گرفته اند . چنانچه W. W. Sayer در کتاب : Prelude to Mathematics بیان نموده : " زمانی ریاضیدانان حس میکردند که گروه (group) کلید راز کائنات است . و این مشکل است که آنها را هدایت کنیم . "

Evariste Galois ، ریاضیدان معروف فرانسوی ، برای اولین بار در سال 1832 کار زیاد که در قسمت گروه Group نموده بودند ، راپور داد . موصوف بحل مسأله ای ، یعنی جستجوی طریقهٔ حل معادلات درجه پنجم ، که دانشمندان ریاضی را برای مدت تقریباً سه صد سال

---

(1) . در قسمت اخیر کتاب بعنوان " مشت نمونهٔ خروار " مختص از تطبیقات مهم گروه در ساحه های فزیک مأخذ داده شده است .

مصروف تکمیل داشته بود علاقمند گشته و بالاخره توانست تا کمک دهد که حل همچو مسایل بیک گروه Group تعلق میگیرد که از اثر بررسی این گروه این حقیقت: «که آیا یک معادله درجه پنج جبری بیک شکل ساده تری درآورده شده میتواند و یا خیر؟» فهمیده شده میتواند. اگرچه تعداد فرضیات و assuptions که درین حل حصه میگیرند محدود و کم بوده اما نتایج آنکه تا چه اندازه قضایا با شامل این فرضیات در ریاضیات اقامه یافته اند - و ضمناً دامنه پهنائی و وسعتی را که این نظریه گروپ theory در عالم ریاضیات اشغال نموده است شگفت آور است.

در تدوین و ترتیب این پروگرام بیشتر از اشتغال این نوع ساختمان های جبری یا algebraic structure که ممکن خواننده به آن کم آشنایی داشته باشد، کار گرفته شده است. مثلاً بیشتر از شناخت اعداد تام integers، که واضح خواننده با آن سروکار و تجارب بیشتر دارد، صحبت میشود. بنابران توقع میگردد که تعقیب کننده این پروگرام به سهولت کمتر مواجه گردد. ممکن بسیاری از عناوین دیگری ریاضیات معاصر نزد شاگردان کم مفاد تلقی شوند، اما بخاطر باید گرفت که مفکوره های مانند: Set، گروه Group، حلقه Ring، ساحه Field یک رول برازنده را در تنویر و اتحاد بسیاری از عناوین ریاضیات سابق «عنعنوی» بازی میکنند. بطور مثال شامل مفکوره Group در تنویر و ایجاد روابط که در بین الجبره و هندسه موجود است خیلی مفید ثابت میشود. حالانکه بدون اشتغال مفکوره گروه Group روابط بین هندسه و الجبره از هم منفصل و بعید دیده میشود. علاوه بران باید که این مفکوره ها جز زبان علم ریاضی که برای حل مسایل روزافزون

علوم مختلف شمول : social sciences و psychology بکار برده میشود، پنداشته شود.

درینجا وجیبه ام میدانم که از زحمات محترم و موسسات که در تهیه و تدارک این فرصت به من منت گذاشته و کمک نموده اند در ذیل نام برده و ابراز قدر دانی کنم :

1. پروفیسور عبدالسلام، مدیر، Professor Abdus Salam
Director, International Centre for Theoretical Physics,

2. پروفیسور پی. بودینی، معاون، Professor P. Budini
Deputy Director, International Centre for Theoretical Physics,

که بدون ارشادات مفید، تشویق و کمک های بزرگ ایشان زحمات محترم این کتاب به شکل کنونی بوجود آمده نمیتوانست.

3. پروفیسور ای. کستلر، مدیر کورس، Professor A. Kastler
Director, Winter College on Atoms, Molecules, & Lasers,

4. داکتر ای. ام. حامند، امر اداری، Dr. A.M. Hamende
Administrative and Scientific Information Officer

که نظریات و تصمیم ایشان را راجع به تهیه مترس Matrices این کتاب توسط دستگاه طباعتی Publications Office, ICTP ابراز فرموده اند قدردانی مینمایم.

بهمین قسم از مؤسسه IAEA :
International Atomic Energy Agency
که در تهیه این فرصت و فیلوشیپ بمن مساعدت نموده اند،
اظهار امتنان میکنم.

در اخیر تذکر باید داد از اینکه تهیه و ترتیب این کتاب
پنجصد صفحه ای در چهار قسمت در طول مدت کمتر از یک ماه
صورت گرفته است پس توقع میرود که عدم وقت کافی و عجله
و تلاش در تکمیل آن باعث بروز یک سلسله اغلاط چه در ربط
جملات و الفاظ — و چه در ادای توضیح مفاهیم و مفکوره ها
گردیده باشد، لذا از ذوات محترم که این اثر را میخوانند

خواهشمندم که از تذکر اشتباهات وارده باینجانب
منت گذارند، تا در صورت امکان در چاپ بعدی این رساله
از وقوع تکرار همچو اشتباهات جلوگیری بعمل آید.

پوهنمل: محمد امان نادری — Mohammed Aman Naderi

تریست، ایتالیا — TRIESTE; ITALY

ثور، 1352 — May 6, 1973

داشتن معلومات لازمه : Prerequisites

برای اینکه خواننده از مطالعه این کتاب بحد کافی بهره برده بتواند ضرورست که باندازه یک سال از تعقیب پروگرام ریاضیات معادل بسویه مکاتب ثانوی بهره مند باشد. یا بعبارت دیگر برای تعقیب مفید این پروگرام مرتبه خواننده باید راجع به مفکوره های بسیط: ست ها و روابط بین آن ها، و عملیات ابتدائی بین ست ها و استعمال علایم معلومات داشته باشد.

صورت استعمال این کتاب : How to Use This Book

مواد شامل این کتاب بشکل یک پروگرام خود آموز ریاضی ترتیب و تقدیم گردیده است. موضوعات محتوی این پروگرام بقسم واحد های کوچک بصورت ماده وار تقسیم گردیده است. هر ماده در داخل چوکات یک مسأله افاده و توضیح میشود. مطالعه جداگانه چوکات هر مسأله و تهیه جواب مطلوب هر مرحله آن در آموزش موضوع سودمند واقع میشود.

مواد این پروگرام طبق امثال ذیل ترتیب یافته است:

۱. اگر احمد برادر محمود باشد، پس محمود نیز ______ احمد میشود.

حل :- برادر

2. برای اینکه یک دانشجو در آموختن کافی ریاضی کمک شده بتواند پروگرام خود آموز ریاضی را بصورت معلومات جدید را در چوکات جداگانه تقدیم میکند. ضمناً این معلومات را در چوکات های جداگانه مسایل تقسیم میکند، و چوکات جوابات هر مسأله در ــــــــ آن موضوع شهوت پیش میکند.

حل : آموختن یا (آموزش) یا (فراگرفتن) یا (دانستن)

3. درینصورت هر ماده پروگرام دیا ــــــــ معلومات جدید را که باید بدقت مطالعه و جواب تحریری داده شود تقدیم میکند. بعد از آن جواب خویش را با جواب که در چوکات مسأله داده شده است مقایسه کنید.

حل : چوکات مسأله

ممکن خواننده طریقهٔ موثر مطالعه و تعقیب سودمند این پروگرام خود آموز ریاضی متکی به پیروی از روش ذیل دریافت خواهد شود: طوریکه چوکات جواب مسأله مورد مطالعه با یک ورقه کاغذ دیا مقوا پوشیده شود. بعد از مطالعه عمیق مسأله جواب مطلوب آن بیک پارچه علحیده کاغذ تحریر شود، سپس پارچه کاغذ را لذا به چوکات جوابات دور کرده و جواب خویش را با جواب داده شده مسأله مقایسه کند. از اینکه در تهیه مواد مرتبه این پروگرام ترتیب مراعات گردیده یعنی هر عنوان باید باشناس عنوان

تا قبلاً معرفی شده است. پس بایستی شما درصورت جواب غلط بهتر است که دوباره مواد مربوطه همان شانه را تکرار نموده و پس از اصلاح جواب غلط بمطالعهٔ خویش ادامه دهید.

ضمناً بهتر خواهد بود که تعریفات و فارمولهای مربوطه یک موضوع را سرتاسر بصورت عمیق مطالعه کنید، تا با شایستگی ~~تجارب~~ معلومات جدید را که توسط این پروگرام خود آموز تقدیم میشود قدم بقدم فراگرفته بتوانید.

یادداشت مهم : Important Things to Remember

1. همیشه چوکات خود مسأله را بدقت مطالعه نمائید.
2. جواب مکمل خود را در صفحه کاغذ علاحده تحریر بدارید.
3. جواب خویش را با جواب داده شده همان مسأله مقایسه کنید.
4. درصورت غلطی قبل از آنکه بمطالعهٔ مسأله چوکات بعدی اقدام شود اشتباه خویش را تصحیح نمائید.
5. از آنکه آموزش با شایستگی اجرای عمل و کردن کار صورت میگیرد، پس باید شما کار را روا و عملیه ای را انجام دهید. یا بالفاظ دیگر قبل از آنکه شما به مطالعه چوکات تهیه شدهٔ جواب یک مسأله بپردازید، ضرور است تا خودتان به مسأله مورد بحث جواب تحریر کنید.

تکرار و یا گردان : Review

برای اینکه در فراگرفتن مواد این پروگرام به خواننده بیشتر کمک شده بتواند نکات ذیل مدنظر گرفته شده است :

1. در هر فاصلهٔ قانونی به تهیه حرکات مسأله معیاری توضیح یک مفکوره پرداخته شده است. این مسایل توسط علامه ستاره "*" که بالای شماره مسأله مربوط گذاشته شده نشان گردیده اند. درصورتیکه خواننده از دادن جواب درست و مکمل این معیاری عاجز آید، توصیه میشود که مسألهٔ ماقبل این حرکات معیاری را بدقت مطالعه نموده و اشتباه خود را تصحیح نماید.

2. یک عده امتحانات تا خواننده بتواند توسط آن اندازهٔ محتویات فراگرفته خود را آزمایش نماید تهیه و به قسمت های مناسب تقدیم شده است و جوابات مربوطه این امتحانات در قسمت اخیر کتاب داده شده است. درصورتیکه خواننده از حل عدهٔ از مسایل این امتحانات عاجز آید ضرور است که قبل از شروع مطالعه قسمت مابعد هر امتحان اولتر محتویات مسایل را که جواب داده نتوانسته است تکرار و گردان کند.

جداول مندرجه Panels

در چندین نقاط این کتاب شما به استعمال یکی از جداول مندرجه یا Panels مرجع شناخته میشوید. تعداد این جدول ها به شانزده رسیده و در اخیر کتاب موجود اند. این Panel ها حاوی حقایق که در حل مسایل بکار برده میشوند، میباشند. برای سهولت کار بهتر است که Panel مورد بحث را به صفحه علامه شده کاغذ کاری نموده و عندلزوم از آن استفاده نمائید.

اصطلاحات (Terminologies) واستعمال انها

اصطلاح TERM	درین کتاب	درکتب دیگر	اصطلاح TERM	درین کتاب	درکتب دیگر
Algebraic Solution	حل جبری (الجبری)	حل جبری (الجبری)	Binary	دوگانه ای دوتائی	دوتائی
Algebraic Structure	ساختمان جبری	ساختمان جبری	Binary Operation	عملیه دوگانه ای	عملیه دوتائی
Algeraic System	سیستم جبری	دستگاه جبری	Binary relation	رابطه دوگانه ای	رابطه دوتائی
Associative	انجمنی	اتحادی یک جائی تجمیعی	Cartesian (cross) Products	حاصلضرب کارتی	کمیات وضعیه
			Codomain	کودومین	—
Associative binary operation	عملیه دوگانه ای انجمنی	عملیه دوتائی اتحادی یا یک جائی	Commutative	تبدیلی	جابجائی
Associative Law	قانون انجمنی	قانون اتحادی یا تجمیعی	Commutative binary operation	عملیه دوگانه ای تبدیلی	عملیه دوتائی جابجائی
Associative Property	خاصیت انجمنی	خاصیت یک جائی یا اتحادی	Commutative Groups	گروه های تبدیلی	گروه های جابجائی
Associativity	انجمیت	اتحادی بودن	Commutative Law	قانون تبدیلی	قانون جابجائی

ادامه اصطلاحات

اصطلاح TERM	دراین کتاب	در کتب دیگر
Commutative property	خاصیت تبدیلی	خاصیت جابه جائی
Commutativity	تبادل (تبدیلیت)	جابه جا
Complement	تکمیل	
Complementary	متممه	متمم
Coordinate	مختصات	کمیات وضعیه
Coordinate System	سیستم کمیات وضعیه	دستگاه کمیات وضعیه
Demorgan Law	قانون دیمورگن	قانون دیمورگن
Disjoint sets	ست های غیر متقاطع	
Distributive	توزیعی	توزیعی
Distributive -Law	توزیعی قانون —	توزیعی قانون —
- property	خاصیت —	خاصیت —
Distributivity	توزیع	

اصطلاح TERM	درین کتاب	در کتب دیگر
Domain	دومین	دامنه
Element	عنصر	عنصر اعضا
Empty set	ست خالی	مجموعه خالی
Equality	مساوات تساوی	مساوات تساوی
Equality of sets	مساوات ست ها	تساوی مجموعه ها
Equivalence	معادل	معادل
Equ.— Calasses	صنوف معادل	
Equ.— relations	روابط معادل	
Field	ساحه	میدان
Fields	ساحه ها (ساحات)	میدان ها
First Coordinate	کاردینیت اول	عنصر اول جوره مرتب
Frame	محرکات ساده	
Function(s)	تابع (توابع)	تابع (توابع)
Group (S)	گروه (ها)	گروه (ها)

ادامهٔ اصطلاحات

اصطلاح TERM	در این کتاب	در کتب دیگر	اصطلاح TERM	در این کتاب	در کتب دیگر
Identity	عینیت	وحدت	One-to-one	مطابقت	مطابقت
- Element	عنصر عینیت	عنصر خنثی عنصر بی اثر	Correspondence	یک بیک	یک بیک
Image	تصویر	تصویر	One-to-one	تابع یک بیک	
Images	تصاویر	تصویرها	mapping		
			Panel	جدول بندی	
Intersection	تقاطع	تقاطع	Partition	انقسام	
			- of set	انقسام یک ست	
Inverse	معکوس	معکوس			
- Element	عنصر معکوس	عنصر معکوس	Permutation	پرموتیشن	
- function	تابع معکوس	تابع معکوس	- of degree n	پرموتیشن درجه n ام	
- operation	عملیه معکوس	عملیه معکوس	- multiplication	ضرب پرموتیشن	
Mapping	تابع (میپنگ)		Property	خاصیت	خاصیت
- from S into T	از S در T				
- from S onto T	از S بر T		Proper Subset	Subset مورد	ست فرعی
- one-to-one	یک بیک			Subset مناسب	مناسب
			Range	رنج	دامنهٔ تحول
Member	اعضا	اجزا			
			Ring	حلقه	
Mutually exclusive sets	ست‌ها که متقابلاً غیر متقاطع‌اند		Reflexive	انعکاسی	انعکاسی
			- property	خاصیت انعکاسی	خاصیت انعکاسی
Ordered pairs	جوره‌های مرتب		reflexivity	انعکاس (انعکاسیت)	

ادامه اصطلاحات

اصطلاح TERM	در این کتاب	در کتب دیگر	اصطلاح TERM	در این کتاب	در کتب دیگر
Roster	روشتر	—	Natural Numbers	اعداد طبیعی	اعداد طبیعی
Sets	شت ها Sets	مجموعه ها / مجموعه	Positive Integers	اعداد تام مثبت	اعداد تام مثبت
			Negative Integers	اعداد تام منفی	اعداد تام منفی
subset	شت جزئی subset	شت فرعی	Integers	اعداد تام	اعداد تام
super-set	شت کلی	شت فوقانی	Nonzero Integers	اعداد تام بدون صفر	
Symmetric - property	تناظری / خاصیت تناظری	تناظر / خاصیت تناظر	Rationals No.	اعداد نسبتی	اعداد گویا
			Irrational No. Numbers	اعداد غیر نسبتی	اعداد گنگ
Transformation - groups	انتقال / گروه های انتقال	انتقال	Real Numbers	اعداد حقیقی	اعداد حقیقی
Transformations	انتقالات	انتقالات			
Transitive - property	انتقالی / خاصیت انتقالی	انتقال / خاصیت انتقال	Complex Numbers	اعداد مختلط	اعداد مرکب
Transitivity	انتقالیت	—	Imaginary Numbers	اعداد موهومی	اعداد غیر حقیقی
Triplet	سه گانه ای	سه تائی			
Union - of sets	اتحاد / اتحاد شت ها	اتحاد / اتحاد شت ها			
Well-defined binary operation	عملیه دوگانه ئی خوب تعریف شده	— / —			

استعمال علایم و سمبولهای معمول این کتاب :

سمبول	صورت افادهٔ آن	سمبول	صورت افادهٔ آن
$\forall$	برای تمام (کمیت مقداری)	$=$	مساوات را افاده میکند.
$\forall x$	برای تمام xها	$\neq$	عدم مساوات را افاده میکند.
$\forall x, y$	برای تمام xها و yها	$\cong$	انطباق است (انطباق پذیری)
$\exists$	موجود است (موجودیت)	$\ncong$	عدم انطباق پذیری را ارائه میکند
$\exists x$	یک x موجود است	$\perp$	عمودیت را افاده میکند.
$\nexists$	موجود نیست	$\not\perp$	عمود نیست
$\ni$	طوریکه (شرطیه)	$\parallel$	موازات را بیان میکند.
$\in$	عضویت را بیان میکند	$\nparallel$	موازی نیست.
$x \in A$	x عضو A است	$\simeq$	شباهت را نشان میدهد
$y \notin A$	y عضو set B نیست	$\not\simeq$	شبیه نیست
$\subset$	رابطهٔ set و subset	$a \mid b$	a قاسم b است
$A \subset B$	یک set A جزئی B است	$b \nmid a$	b قاسم a نیست.
$B \not\subset A$	یک set B جزئی A نیست	$[a, b]$	انتروال بستهٔ a و b.
$A \subseteq B$	یک set A جزئی ویا مساوی B است	$\langle a, b \rangle$	انتروال باز a و b.
$C \not\subseteq B$	یک set C جزئی نامساوی B نیست	$f(x)$	تابع x و هم f(x)
$<$	ترتیب را افاده میکند	$fg(x)$	تابع مرکب، fg(x)
$a < b$	a کوچکتر از b است	(a, b)	جوره مرتب a و b
$b \nless a$	b کوچکتر از a نیست	ϕ	set خالی
$c \leq d$	c کوچکتر ویا مساوی d است	$\{a\}$	یک set که عنوان a است.
$e \nleq c$	e کوچکتر ویا مساوی c نیست	$x \to y$	x موجودیت y را ایجاب میکند
$\cup$	اتحاد را افاده میکند	$x \leftrightarrow y$	x موجودیت y و y موجودیت x را ایجاب میکند.
$A \cup B$	A اتحاد B	$\mathrm{dom}\,R$	domain R
$\cap$	تقاطع را افاده میکند	$\mathrm{ran}\,R$	Range R
$C \cap D$	C تقاطع D	xRy	x رابطهٔ y دارد (x,y)

فهرست عناوین
CONTENTS

ادامهٔ فهرست عناوین

ادامهٔ: فهرست مضامین

قسمت اول

روابط دوگانه‌ای

Binary Relations

از شکلهائیکه از مطالعه ریاضیات اندوخته اید اگر بیانیه های معمول ریاضی را بخاطر بیاورید بزودی درک خواهید نمود که کدام بیانیهٔ ریاضی را که محض یک شی را توضیح کند پیدا کرده نمیتوانید. بصورت عموم بیانیه ها دارای ده‌ها مرجع ریاضی شرایط conditions، روابط Relations که بین دو شی، و یا یک شی با خودش موجود باشد (و یا موجود نباشد) بیان میکنند.

بطور مثال بیانیه های ذیل را از نظر بگذرانید:-

1. خط $\overleftrightarrow{m}$ عمود بر خط $\overleftrightarrow{n}$ است.
2. $2x = 4$.
3. $a < b$.
4. $A \not\subset B$.
5. خطوط $\overleftrightarrow{m}$، $\overleftrightarrow{n}$ و $\overleftrightarrow{p}$ باهم موازی اند.

از مطالعه امثال فوق به آسانی فهمیده میشود که:

مثال 1. رابطهٔ عمودیت perpendicularity را بین دو خط $\overleftrightarrow{m}$ و $\overleftrightarrow{n}$، طوریکه در مثال مذکور توضیح یافته است، بیان میکند.

مثال 2. شرط، رابطهٔ "مساوات" equality را که بین $2x$ و 4 موجود است توضیح میکند.

مثال 3. موجودیت شرط: "کوچکتر است از.. less than" را، طوریکه در مثال ایضاح شده بیان میکند.

مثال 4. شرط شمول inclusion را که بین دو سِت set A و B موجود میباشد افاده میکند.

مثال 5. وجود شرط موازات parallelism را بین سه خط $\overleftrightarrow{m}$، $\overleftrightarrow{n}$ و $\overleftrightarrow{p}$ نشان میدهد.

حتی ساده ترین بیانیه ریاضی که در مثال 6 ذیل ذکر میشود، یک رابطه دوگانهٔ binary relation را توضیح میکند.

مثال 6. یک مثلث ΔABC مثلث متساوی الساقین است.

اگرچه در نگاه اول تصور میشود که بیانیهٔ مثال (6) فوق محض یک شی یعنی مثلث ABC را توضیح میدارد، امّا درحقیقت چنان نیست، چه کلمهٔ متساوی الساقین در اینجا معادل بیانیهٔ است که وجود رابطهٔ تساوی را بین طول دو ضلع مثلث ABC افاده میکند. وبهمین قسم:

مثال 7. بیانیهٔ: " 8 یک عدد جفت تام است." معادل بیانیهٔ است که افادهٔ: " 2 تقسیم 8 است." را بیان میکند، چه کلمهٔ جفت درین رابطهٔ تقسیم بودن بین دو عدد تام 2 و 8 را توضیح نماید.

ساده ترین روابط relations در ریاضیات عبارت از آن روابط اند که در بین دو شی (یا دو عنصر elements) موجود میشوند. چنانچه نمونهٔ عده ازین relations در امثال فوق نشان داده شده.

اکنون تشابهات و عدم تشابهات relations بین اشیا را در مثال ذیل نشان میدهیم. درین مثال ملاحظه خواهید کرد که اگر استوار دو رابطهٔ: $\leq$ و $\subset$ در بین عناصر elements سِت اعداد حقیقی real numbers، R؛ و سِت های جزئی subsets یک سِت S علی الترتیب مدنظر گرفته شود، دیده خواهد شد که اینده رابطهٔ مذکور باهم تشابهت دارند. امّا اگر موضوع عمیق مطالعه شود، بملاحظه میرسد که بر علاوهٔ این تشابهات، در بین اینده رابطه عدم تشابهات و فرق نیز موجود است.

I. استقرار رابطهٔ $\leq$ در R set

در R set اعداد حقیقی رابطهٔ: «کمتر یا مساوی» $\leq$ را مدنظر بگیرید و حالات ذیل را مطالعه کنید:-

a. اگر a یک عنصر R set است، پس $a \leq a$ است.

b. اگر a، b و c عناصر R بوده درصورتیکه دارای روابط: $a \leq b$ و $b \leq c$ موجود باشد، پس $a \leq c$ است.

c. اگر a و b عناصر ست R بوده درصورتیکه دارای روابط: $a \leq b$ و $b \leq a$ موجود باشد، پس $a = b$ است.

II. استقرار رابطهٔ $\subset$ در S set

در set تمام subsets های یک S set رابطهٔ: "subset" بودن یعنی $\subset$ را مدنظر بگیرید و حالات ذیل را مطالعه کنید:-

a. اگر A subset یک S set است، پس $A \subset A$ است.

b. اگر A، B و C subsets S set بوده درصورتیکه دارای روابط: $A \subset B$ و $B \subset C$ موجود باشد، پس $A \subset C$ است.

c. اگر A و B subsets یک set S بوده درصورتیکه دارای روابط: $A \subset B$ و $B \subset A$ موجود باشد، پس $A = B$ است.

ما میدانیم که در قسمت II مثال فوق یک set خاصی بنام ست خالی empty set (که معمولاً به ϕ ارائه میشود) موجود است طوریکه برای هر subset A ست S یعنی $A \subset S$ پس $\phi \subset A$ میباشد. حالانکه کدام عنصر x در ست R موجود نیست طوریکه برای هر عنصر a ست R رابطهٔ: $x \leq a$ همیشه دارای حقیقت باشد.

در قسمت اول این (پروگرام) کتاب ما مفکوره تعیین رابطه بین دو عنصر را بصورت موجز بررسی کرده و بعضی خواص مهمی را properties

که ممکن روابط مورد بحث، دارا بوده و باید داشته باشند از نظر میگذرانیم. درنتیجه با کشف خواص ممیزه هر class مهمی روابط بین دو عنصر، با کلیه آن class که روابط مانند: مساوات اعداد equality of numbers، تشابه مثلثات Similarity of triangles و انطباق مثلثات Congruency of triangles و . . . را دارا باشد، موفق خواهیم شد.

1. Sets And Ordered Pairs ۱. سِت‌ها و جوره‌های مرتب

1-a. Basic Notions ۱-a. مفکوره های اساسی

کلمهٔ set در ریاضی یک اصطلاح غیرقابل تعریف undefined term قبول شده و بواسطهٔ کلمات متعادل آن مانند مجموعه Collection، دسته وامثال آن تعبیر شده میتواند. اشیای که یک set را تشکیل میدهند بنام عناصر elements همان set یاد میشوند. درین کتاب ما set ها را توسط حروف کلان لاتین از قبیل: A، B، G، I، R، S، T وغیره نشان میدهیم؛ اینک در ذیل بعضی set های اعداد را توسط حروف کلان نشان میدهم:

۱. set اعداد مثبت تام Positive Integers یعنی: 1, 2, 3, . . . را به P نمایش داده ونام گذاری میکنیم.

۲. set اعداد غیر منفی تام Non negative Integers یعنی: 0, 1, 2, . . . را به N ارائه میکنیم.

۳. set اعداد تام Integers را به I نشان میدهیم.

۴. set اعداد نسبتی (گویا) Rationals را به Q ارائه میکنیم.

5. set اعداد حقیقی Real Numbers را به R نشان داده و بهمین قسم:

6. set اعداد مختلط Complex Numbers را در موقع استعمال آن به C ارائه مینمائیم.

تذکر باید داد که در موقع استعمال این شش حروف فوق از set های مربوط آنها نیز بصورت عملی و واضح نام برده خواهد شد. چنانچه اگر هدف ما از استعمال R نشان دادن set Real Numbers باشد، درینصورت از set مذکور بصورت واضح نام خواهیم برد والا ضرورتی نیست که همیشه در هر موقع R بحیث set Real Numbers تلقی و تعبیر شود.

عناصر elements یک set را توسط حروف خورد لاتین مانند a ، b ، c وغیره نشان میدهیم. توسط علامهٔ: "$s \in S$" مفهوم: "s یک عنصر set S است." ویا: "s شامل set S است" را افاده خواهیم کرد. که بصورت خاص: $2 \in P$ مفهوم: "2 یک عنصر set P است." را بیان میکند. بهمین قسم توسط استعمال علامه: "$s \notin T$" مفکوره: "s عنصر set T نیست." ویا: "s شامل set T نیست." را توضیح میکنیم. بطور مثال افاده "$-2 \notin P$" بیان میکند که -2 عنصر P نیست. ویا -2 شامل P نمیباشد. درین مثال غرض ما از P عبارت از set Positive Int. است.

در افادهٔ set ها عبارت: "set که عناصر آن عبارت است از ..." توسط علامه قوسین کلان Braces ارائه میشود. چنانچه افادهٔ: $\{1, 2\}$ set ای را که عناصر آن عبارت از 1 و 2 است نشان میدهد. بهمین قسم افاده و علامه:

$\{-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ set ای را نشان میدهد که عناصر آنرا اعداد: -1 ، 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، ... تشکیل داده اند.
درینجا غرض از نوشتن سه نقطه در داخل set عبارت از توضیح مطلب که عناصر دیگر این set اعداد تام متوالی دیگر که از 4 شروع شده الی بی نهایت ادامه دارند، میباشد.

تکرار یک ویا چند عنصر، وبهمین قسم ترتیب عناصر در یک set حائز کدام اهمیت نیست.

یک set را بیکی از دو طریقه ذیل مشخص ساخته میتوانیم:
1. ما میتوانیم که یک set را بواسطهٔ لست کردن ویا نام گرفتن تمام عناصر آن مشخص نمائیم. چنانچه set A:-
$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ را بنام set ای که عناصران عبارت از اعداد: -1 ، 0 ، 1 ، 2 اند؛ مشخص ساخته میتوانیم.
2. ما میتوانیم که یک set را با شناس خاصیت ویا خواص مشترک که دربین عناصر آن موجود باشد مشخص سازیم. چنانچه set فوق: $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ را با شناس خاصیت مشترک عناصر آن که بعبارت: " A آن set ای است که عناصران را اعداد تام که بین -2 و 3 باشند، تشکیل داده اند." بیان شده، تعیین کنیم. بهمین قسم set B را طوریکه: $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ است، با شناس خواص مشترک عناصر آن طبق عبارت ذیل ~~بیان~~ تعیین کرده میتوانیم:
" B عبارت از set که عناصر آنرا اعداد تام غیرمنفی که از 12 کوچکتر ~~اند~~ بوده، تشکیل داده ~~اند~~، میباشد."

set A فوق با شناس خواص مشترک که بین عناصر آن موجود است بصورت سمبولیک طبق ذیل آرائه شده میتواند:

$$A = \{x \mid x \in I \text{ and } -2 < x < 3\}$$

که چنین خوانده میشود: « A عبارت از set ای است که عناصر آنرا {x} تشکیل داده درحالیکه این {x} ها از I بوده و بزرگتر از 2- و کوچکتر از 3 نه، میباشد. » که درینجا I ، set اعداد تام را نشان میدهد.

بصورت عموم اگر p کدام خاصیت مشترک بین تمام عناصر کدام set S موجود باشد درینصورت ما set S را قرار ذیل تعیین کرده میتوانیم:

$$S=\{x \mid x = p\}.$$

افادهٔ فوق عبارتی را که S عبارت از set ای است که تمام عناصر آن دارای خاصیت مشترک p میباشد بیان میکند.

اگر بخواهیم که یک set $D=\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ را با اساس خاصیت مشترکهٔ عناصر آن نمایش دهیم؛ میتوانیم که آنرا به هریک از طریقه‌های ذیل نشان دهیم:

(a). $D=\{x \mid x\in I, \text{and } -4<x<2\}$ و

(b). $D=\{x \mid x\in I, \text{and } -3\le x\le 1\}$ و

(c). $D=\{x \mid x\in I, \text{and } -4<x\le 1\}$ و   وحتی:

(d). $D=\{x \mid x\in I, \text{and } -3\le x<2\}$.

که تمام افاده های فوق عین set D را نشان میدهند و معادل یکدیگر اند.
تحلیل مثالهٔ فوق مارا به تعریف و توضیح بعضی علامه گذاری ها notations مفید دیگر هدایت میکند.

1. اگر a و b اعداد حقیقی Reals Numbers طوریکه $a<b$ باشند؛ درینصورت انتروال باز open interval $<a, b>$ را طبق ذیل تعریف میکنیم:

$$<a,b>=\{x \mid x\in R,\ a<x<b\}.$$

که درین افاده x تمام قیمت های بین a و b را گرفته لیکن قیمت های خود a و b را گرفته نمیتواند.

دبهمین قسم :

9 . اگر a و b اعداد Reals بوده طوریکه
$a < b$ ثبت ، باشد ؛ درینصورت انتروال بسته closed interval
[a, b] را طبق ذیل نشان میدهیم:

$$[a, b] = \{x \mid x \in R \text{ and } a \leq x \leq b\}.$$

در ذیل یکتعده مسایل تنبیط را با جوابات مربوط ان ها بدسترس خواننده میگذاریم اولاً جواب مربوطه داخل چوکات را بدقت دیا کاغذ پوشیده مسأله را حل کنید. سپس حل خود و جواب داده شده مسأله را با هم مقایسه کرده و اندازهٔ ذخیره معلومات خویش را در موضوع امتحان کنید.

1 . یک set A که دارای دو عنصر p و q باشد توسط سمبول symbol $A = \{p, q\}$ نشان داده میشود . ازینکه ترتیب موقعیت و جای عناصر در یک set قایز کدام اهمیت نیست ، پس ما میتوانیم که set A را بشکل : A = __________ بنویسیم .

2 . اگر A کدام set راکه x و y عناصر آنست ارائه کند ، پس ما میتوانیم که set A به اشکال ذیل نشان دهیم :

(1) . A = ________ و یا (2) . A = ________ .

(3) . ما set A را بهرکدام یکی از دوطه شکل فوق نشان داده میتوانیم ، زیراکه ______ عناصر در یک set دارای کدام ارزش نیست .

حل مسایل فوق :-

1 . $\{q, p\}$

2 . (1) . $\{x, y\}$ ، (2) . $\{y, x\}$ ، (3) . ترتیب جای

3. از بیانیه های ذیل کدام آن ها صحیح و کدام شان غلط اند :

(1). $2 \in \{2\}$ (2). $3 \in \{2, 5\}$

(3). $a \notin \{a, b\}$ (4). $3/4 \in P$

(5). $4 \in P$ (6). $\sqrt{2} \in Q$

(7). $\sqrt{(-1)^2} \in I$ (8). $(\sqrt{-1})^2 \in P$

(9). $0 \in Q$ (10). $z \in \{a, b\}$ درحالیکه $z \neq a$ و $z \neq b$ باشد.

حل : (1). صحیح (2). غلط (3). غلط (4). غلط
(5). صحیح (6). غلط (7). صحیح
(8). غلط (9). صحیح (10). غلط .

4. حقیقت (غلط بودن) بیانیه های ذیل را استدلال نمائید :

(1). $\{2\}$ subset set $\{2\}$ است .

(2). اگر S یک set را نشان دهد، پس $S \subseteq S$ است .

(3). $\{a\} \subset \{a, b\}$ بوده درحالیکه $a \neq b$ است .

(4). $\{a, b\} = \{3, 4\}$ درحالیکه : $a = 4$ و $b = 3$ باشد .

(5). $\{2, 3\} = \{3, 4\}$.

(6). $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 3, 3, 4, 5, 5, 2, 1\}$.

(7). $\{a, b, -2, a, c, -2, a, 1, -2\} \neq \{-2, 1, a, b, c\}$.

حل : (1). صحیح است؛ زیرا هر set یک subset خود شده میتواند.
(2). بلی! بنابر استدلال (1). صحیح است .
(3). درست است؛ زیرا تمام عناصر $\{a\}$ که عبارت از a است در set $\{a, b\}$ شامل است .
(4). صحیح است ! زیرا تمام عناصر آن ها باهم مساوی است .
(5). غلط است ! زیرا $2 \neq 4$ است .
(6). صحیح است ! چه تکرار عناصر در تشکیل set ارزش ندارد .
(7). غلط است (صحیح نیست) ! بنابر استدلال مسأله (6) . اینها باید باهم مساوی باشند .

5. صحیح ویا غلط بودن بیانیه های ذیل را استدلال کنید:

(1). $P \subset Q$ ، درحالیکه P اعداد مثبت تام و Q اعداد rationals میباشند.

(2). $I \subset Q$ ، درصورتیکه I اعداد تام و Q اعداد rationals میباشند.

(3). $Q \subset R$ ، درصورتیکه Q اعداد rationals و R اعداد reals اند.

(4). $R \subset C$ ، درحالیکه R اعداد Reals و C اعداد Complex اند.

(5). $I \subset R$ است.

حل: (1). صحیح است! زیرا هر عدد مثبت تام یک عدد نسبتی rational بوده اما هر عدد rational یک عدد P Integer شده نمیتواند.

(2). بلی درست است! زیرا هر عدد تام یک عدد rational بوده اما هر عدد rational یک integer شده نمیتواند.

(3). صحیح است! زیرا هر عدد Q شامل R بوده اما تمام عدد که شامل R است شامل Q نیست، خانچه: $\sqrt{2} \in R$ بوده اما $\sqrt{2} \notin Q$.

(4). صحیح است! زیرا: هر عدد R شامل C بوده اما هر عدد مربوط C شامل R نیست، مثلاً: $\sqrt{-1} \in C$ بوده اما $\sqrt{-1} \notin R$.

(5). صحیح است! زیرا هر عدد I شامل R بوده اما هر عدد R شامل I نمیباشد، خانچه $\frac{2}{5} \in R$ بوده اما $\frac{2}{5} \in I$ نمیباشد.

6. حقیقت بودن بیانیه های ذیل را استدلال کنید:

(1). $Q = \{x \mid x = \frac{a}{b},\ a, b \in I, \text{ and } b \neq 0\}$ درحالیکه Q اعداد rationals میباشد.

(2). $P = \{x \mid x \in N \text{ and } x^2 \geq 1\}$ ، درحالیکه P اعداد مثبت تام و N اعداد تام غیر منفی میباشد.

(3). $C = \{x \mid x = u + vi \text{ and } u, v \in R,\ i^2 = -1\}$.
درحالیکه C عبارت از Set Complex و R عبارت از Set Reals میباشد.

حل: (1). افاده فوق عبارت از تعریف set Rationals است.

(2). برای اینکه $x^2 \geq 1$ باشد x محض عناصر مثبت set N شده میتواند ~~بنابراین~~ حالانکه این عناصر مثبت set N عبارت از عناصر set P است.

(3). افاده فوق تعریف set Complex Num است.

۷- صحیح ویا غلط بودن بیانیه های ذیل را استدلال کنید:

(1) - $I=\{x \mid x\in R \text{ and } x\geq 0\}$.

(2) - $N=\{x \mid x\in Q \text{ and } x\geq 0\}$.

(3) - $I=\{x \mid x\in R \text{ and } x^2\in P\}$.

درحالیکه I ، N ، P ، Q و R علی الترتیب set های: Integers ، Non negative Int. ، Positive Int. ، Rationals و Reals را نشان میدهند.

حل: (1) غلط است! زیرا set مذکور دارای کدام عنصر منفی بوده نمیتواند.
(2) - غلط است! زیرا $\frac{3}{4}$ عدد مثبت ناطق بوده که عنصر N نیست.
(3) - غلط است! زیرا $x^2\in P$ مستوجب وجوب است که $x\neq 0$ باشد حالانکه $0\in I$ میباشد.

۸- زمانیکه ما راجع به تعیین روابط ویا شرایط Relations بین conditions دو شئ صحبت میکنیم، صورت ایشان، که درینوقت ترتیب دارای اهمیت است. چنانچه اگر موضوع بحث ما رابطهٔ: "⊂" بین دو set $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{b,c\}$ باشد ما نوشته میتوانیم که:

(1) - ___ ⊂ ___ ، (2) - ___ ⊄ ___ .

حل: (1) - $B\subset A$ ، (2) $A\not\subset B$.

۹- set $S=\{1,2,3,4,5\}$ را با شرط: "|" که مفهوم: "... تقسیم ... است" را افاده میکند ملاحظه گرفته، درینصورت تمام subset های set S را که شرط "|" را تحقیق کند تعیین کرده میتوانیم. بطور مثال set {2,4} که در آن 2 تقسیم 4 است، یعنی "2|4" شرط را تحقیق میکند، یکی از جملهٔ subset های مطلوب است. ازینکه ___ عناصر در تعیین set کدام رول ندارد، پس درینصورت ما نوشته میتوانیم که: {_,_} = {2,4} بوده اما در آن ___ تقسیم ___ نیست.

حل: ترتیب، {4,2} ، 4 تقسیم 2

10. اگر به ترتیب جای عناصر اهمیتی قایل شده و بخواهیم که ان ها را بکدام ترتیب مشخص بنویسیم. چنانچه اگر بخواهیم که از دو عنصر p و q عنصر p ان موقع اول (از طرف چپ به راست) و عنصر q ان موقع دوم را اشغال کند، پس درینصورت این جوره عنصر p و q را بقسم جوره ترتیب ordered pairs (p . q) مینویسیم. اگر بخواهیم که q موقعیت اول و p موقعیت دوم ____ را اشغال کنند، پس درینصورت ordered ____ مذکور را بشکل: (__ و __) نوشته میکنیم.

حل: pairs ، ordered pairs ، (q ، p)

11. یک set بواسطهٔ عناصریکه ازا تشکیل میدهد توسط ____ ویا ____ ارائه میشود. طوریکه دران ____ عناصر کدام ارزش ندارد. حالانکه یک ____ ordered توسط قوسین کوچک parentheses نشان داده میشود که درآن ____ عناصر خیلی حائز اهمیت است.

حل: قوسین کلان ویا Braces ، ترتیب ، pairs ، ترتیب

12. قوسین کلان Braces که در ارائهٔ {a و b} استعمال شده یک ____ را نشان میدهد که ترتیب عناصر دران دارای کدام ارزش نیست، حالانکه ____ ویا parentheses که در نشان دادن (a و b) بکار برده شده اند یک ____ (a و b) ارائه میکند، که در یک ____ ترتیب موقعیت عناصران دارای ارزش است.

حل: set ، قوسین کوچک ، Oreder Pairs ، Ordered pairs

13. ما یک set را که محض دارای دو عنصر p و q بود، به هر کدام یک از دو شکل (1) ________، (2) ________ نوشته میتوانیم. اما یک ordered pairs که p عنصر اول و q عنصر دوم آنرا تشکیل دهند محض به شکل ________ نوشته کرده میتوانیم. اگر جاهای p و q تیز داده شود درینصورت یک ordered pairs دیگری که از (p, q) فرق دارد بدست می آید، که آنرا بشکل: ________ نوشته مینمائیم.

حل: (1) {p, q}، (2) {q, p}، (p, q)، (q, p)

تبصره:

چون ما میتوانیم که جوره های مرتب ordered pairs را با شکل set ها تعریف کنیم، پس درینجا مشخصات ordered pairs را بنابر معلومات که در فوق توضیح شد بیان میکنیم.

14. عنصر اول یک ordered pairs را بنام ابشیش و یا کواردنیت اول the first coordinate و عنصر دوم آنرا بنام ترتیب و یا کواردنیت دوم the second coordinate یاد میکنند.

(1). پس در ordered pairs (p, q) عنصر p را بنام ________ و عنصر ___ را بنام ________ جوره مرتب ________ ordered pairs یاد میکنیم.

(2). first coordinate را بنام ________ و second coord. را بنام ________ نیز یاد مینمائیم.

حل: the 1rst coordinate، q، the 2nd coordinate، (p, q). (2) ابشیش، ترتیب.

۱۵- جوره مرتب ordered pairs که دارای x First coordinate و y second coordinate باشد توسط ________ آورده شده میتوانند.

۱۶- (1). عنصر p ____ ordered pairs (q,p) را تشکیل میدهد، و همین قسم:
(2) در (a,b) ____________ a عبارت از ____________
و b عبارت از ____________ ordered pairs مذکور میباشند.

۱۷- (5,7) عبارت از یک ____________ است که ____________ the first coordinate و همین قسم ____ the second coordn. آن را تشکیل کرده اند.

حل: ۱۵. (x,y)
۱۶. (1). ترتیب، (2). ordered pairs،
1rst coord.، second coordinate،
۱۷. ordered pairs، 5، 7.

حالت مساوات دو جوره مرتب — Equality of Ordered Pairs

۱۸- دو جوره مرتب Ordered pairs، (a,b) و (c,d) باهم مساوی اند در صورتیکه: a = c و b = d باشد. آیا دو جوره مرتب (3,6) و (6,3) باهم مساوی میباشند؟

۱۹- اگر (a,b) = (c,d) باشد، پس بالترتیب ____ = ____، ____ = ____ میباشد.

حل: ۱۸. نه خیر. ۱۹. a = c ، b = d

20. مانند دو ordered pairs گفته میشود که دو عدد مختلط complex numbers
$p+qi$ و $x+yi$ باهم مساوی اند درصورتیکه:
____ = ____ بوده و همچنین ____ = ____ باشد.

21. فرق دیگری که بین آرائهٔ یک set و یک ordered pairs موجود است اینست که در یک set عین عنصر تکراراً نوشته نمیشود، حال آنکه دو عنصر یک ordered pairs عین چیز بوده ~~...~~ میتواند زیرا که در یک جوره عین عنصر بجای هر دو coordinates نوشته شده میتواند.
چنانچه: - $\{a\} = \{a, a\}$ که درینصورت دیده میشود که set $\{a\}$ دارای دو عنصر نیست. اما (a, a) عبارت از یک ____ است که هر دو ____ را عنصر a تشکیل داده است.

22. رابطهٔ: $(a, b) = (5, -2)$ درصورت دارای حقیقت میباشد که:
____ = ____ و ____ = ____ باشد.

23. آیا: (1). رابطهٔ: $\{5, 7\} = \{7, 5\}$ صحت حقیقت دارد؟
(2). رابطهٔ: $(5, 7) = (7, 5)$ دارای حقیقت است؟

حل: 20. $x = p$ و $y = q$
21. ordered pairs ، coordinates
22. $a = 5$ و $b = -2$
23. (1) بلی! زیرا ترتیب جای عناصر در set کدام ارزش ندارد.
(2) نه خیر! زیرا ترتیب موقعیت عناصر در یک ordered pairs دارای ارزش است.

24. اگر $A=\{(1,4),(a,b),(p,q),(e,\pi)\}$ باشد، درصورت

(1). set A عبارت از set است که عناصر از ________ تشکیل داده،

(2). set A دارای ________ عنصر میباشد.

25. اگر $S=\{(a,b),(1,2)\}$ باشد، ما S را به شکل ________ نیز نوشته میتوانیم. زیرا S یک set است که ____ عناصر در آن قابل اهمیت نیست.

26. (1). به قیمت: ____ = y دو جوره مرتب، $(-2,\pi)$ و $(-2,y)$ باهم مساوی میشوند.

(2). به قیمت: ____ = x دو جوره مرتب ordered pairs $(2x,5)$ و $(2y,5)$ باهم مساوی میباشند.

(3). دو جوره مرتب: $(a,2\pi)$ و $(b,2\pi)$ باهم مساوی اند، درصورتیکه ____ = ____ باشد.

(4). اگر $c=d$ باشد پس جوره مرتب $(c,26)$ با جوره مرتب ________ مساوی میشود.

(5). $(p,\sqrt{2})=(x,\sqrt{2})$ میباشد، درصورتیکه: ____ = ____ باشد.

حل: 24. Ordered Pairs . (1)، چهار . (2)
25. $\{(1,2),(a,b)\}$، ترتیب
26. (1). $y=\pi$ ، (2). $x=2y$
(3). $a=b$ ، (4). $(d,26)$
(5). $p=x$.

1-b. اتحاد و تقاطع

1-b. Union And Intersection

اتحاد : Union

اگر S و T دو sets باشند، اتحاد Union، S و T عبارت از یک set است که عناصر آنرا تمام عناصر S یا عناصر T (و یا عناصر هر دو sets - S و T) تشکیل میدهند. Union دو sets - S و T بشکل: $S \cup T$ نوشته شده که به عبارهٔ S اتحاد T و یا S union T خوانده میشود. بطور مثال، اگر $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{2,5,7\}$ باشند، پس $S \cup T=\{1,2,3,5,7\}$ میشود. بهمین قسم: $P \cup \{0\} = N$ میباشد.

از تعریف: $S \cup T$ نتیجه میشود هر set ای که هر دو sets S و T را احتوا کرده بتواند، union آن یعنی $S \cup T$ را نیز احتوا کرده میتواند. بنابران گفته میتوانیم که $S \cup T$ کوچکترین set ای است که هر دو sets - S و T را در بردارد. بوضاحت فهمیده میشود که $S \subseteq S \cup T$ بوده و بهمین قسم: $T \subseteq S \cup T$ میباشد.

بهمین وجه اگر $\{S, T, U, \ldots\}$ یک set ای که عناصر آنرا set ها تشکیل داده اند باشد، ما حصهٔ این union set های $S, T, U, \ldots$ را یک set ای تعریف میکنیم که عناصر آنرا لااقل عناصر یکی از set های $S, T, U, \ldots$ مذکور تشکیل نموده باشد.

Union ~~تمام~~ set های $S, T, U, \ldots$: عبارت از کوچکترین set ای است که همهٔ set های مذکور را در خود احتوا میکند.
بطور مثال، $\{1,2\} \cup \{3,4,5\} \cup \{6,7\} \cup \cdots = P$

تقاطع: Intersection

اگر S و T دو set که قسمت مشترک common part ویا تقاطع intersection ذن ؟ موضوع بحث باشد، بوده باشد، درینصورت تقاطع intersection S و T را با به $S \cap T$ ارائه میکنیم که به S تقاطع T - ویا S intersection T خوانده میشود. بطور مثال، اگر $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{2,5,7\}$ باشد، پس درینصورت $S \cap T=\{2\}$ میشود. تقاطع دو set های S و T را طبق ذیل تعریف میکنیم:

تقاطع intersection دو set S و T عبارت از set یک که عناصر از عناصر مشترک S و T تشکیل دهند. یا بعبارهٔ دیگر: $S \cap T$ عبارت از set یک که عناصر آن هم در S وهم در T یعنی همزمان در S و T موجود باشند.

دراینجا امکان که set S و T دارای هیچکدام عنصر مشترک نباشند، یا بعبارهٔ دیگر هیچکدام یک عنصر S شامل T نباشد بروز میکند. درینصورت تقاطع intersec. هردو set - S و T را بیک set ای که دارای هیچ عنصر نیست بنام set خالی empty set یاد میشود تعریف میکنیم. سِت خالی empty set را توسط سمبول ϕ ~~نشان میدهیم~~ ویا $\{\ \}$ نشان میدهند.
باساس موافقت بحیث empty set subset هر set قبول شده.
ما میگوییم که دو set T و S غیرمتقاطع disjoint اند درصورتیکه بین S و T کدام عنصر مشترک نباشد. یا بالفاظ دیگر دو sets S و T غیرمتقاطع disjoint گفته میشوند درصورتیکه تقاطع intersection دن ؟ یک empty set باشد. بطور مثال دو set: $\{1,2\}$ و $\{5,7\}$ set های غیرمتقاطع ویا disjoint میباشند.

مفکوره تقاطع interection دو set بچندین sets عمومیت بخشیده شده میتواند. برای وقت درین موضوع - interection تکیه set های $S, T, U, \ldots$ را که بشکل : $S \cap T \cap U \cap \ldots$ نمایش داده میشود، بیک set ای که عناصر آنرا عناصر مشترک تمام set های $S, T, U, \ldots$ تشکیل کنند تعریف میکنیم.
اگر دقت شود دیده میشود که $S \cap T$ عبارت از بزرگترین set ای که subset هردو set S و T میباشد. یابالفاظ دیگر بزرگترین subset S - که subset T نیز باشد عبارت از $S \cap T$ است. بهمین قسم بزرگترین subset S که همزمان subset هر set ای $\ldots$ و U و T و ... نیز باشد عبارت از $S \cap T \cap U \cap \ldots$ میباشد.

Elementary Set - برای اینکه درموضوع تیوری ابتدائی set Theory معلومات بیشتر تقدیم کرده نمایم، بی مورد نخواهد بود تا حدی بصورت مختصر راجع به فرق دو set ذیلاً صحبت نمایم:

The Difference between Two Sets : فرق دو set

اگر S و T دو set بوده طوریکه $S \subseteq T$ باشد، درینصورت ما فرق دو set مذکور $T - S$ را طبق ذیل تعریف میکنیم:

$$T - S = \{x \mid x \in T \text{ and } x \notin S\}.$$

یا بعبارت دیگر اگر S و T دو set که $S \subseteq T$ است، باشد پس $T - S$ عبارت از set است که عناصرآنرا همان عناصر T که شامل S نمیباشد تشکیل میدهند. بطور مثال، اگر:-
$T = \{1, 2, 3, 4\}$ و $S = \{1, 2\}$ باشد، پس
درینصورت : $T - S = \{3, 4\}$ میباشد.
برای هردو set T، S و طوریکه $S \subseteq T$ باشد، رابطهٔ :...
$T - (T - S) = S$ دارای حقیقت میباشد.

27. (1). اگر $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{1,2,3,4,5\}$ باشد، پس

(a). $S \cup T =$ ______ گردیده و بهمین قسم:

(b). $S \cap T =$ ______ میشود، و بالاخره

(c). $T-S=$ ______ میشود.

(2). اگر $A=\{a,e\}$، $B=\{e,f\}$ و $C=\{g,h\}$ باشد، پس

(a). $A \cup B \cup C =$ ______ گردیده،

(b). $A \cap B \cap C =$ ______ بوده و

(c). $A \cup B \cap C =$ ______ میشود و بالاخره

(d). $(B \cup C) \cap A =$ ______ میباشد.

(3). (a). $\{\dots,-2,-1,0\} \cup \{0,1,2,3,4,\dots\} =$ ______ و

(b). $\{\dots,-2,-1,0\} \cap \{0,1,2,\dots\} =$ ______ میباشد.

حل: (1). (a). T، (b). S، (c). $\{4,5\}$.
(2). (a). $\{a,e,f,g,h\}$، (b). ϕ، (c). ϕ،
(d). $\{e\}$.
(3). (a). Z یا I یعنی Integers، (b). $\{0\}$

28. (1). اگر $a, b \in R$ و $a<b$ باشد (درحالیکه R ثبت اعداد reals است)

پس درینصورت (a). $\langle a,b\rangle \cup \{a\} \cup \{b\} =$ ______ بوده

(b). $[a,b] \cap \{a,b\} =$ ______ میشود.

(2). بهمین قسم: (a). $\langle a,b\rangle \cup [a,b] =$ ______ بوده و

(b). $\langle a,b\rangle \cap [a,b] =$ ______ میشود.

حل: (1). (a). $[a,b]$، (b). $\{a\} \cup \{b\}$.
(2). (a). $[a,b]$، (b). $\langle a,b\rangle$.

29. اگر S ، T و U سه sets باشند. درینصورت روابط ذیل بین آنها موجود شده میتوانند:

(1). $S\cup T = T\cup$ ___ ، (2). $S\cap T = T\cap$ ___ ،

(3). $S\subseteq S\cup T$ و $T\subseteq S\cup$ ___ ، (4). $S\cap T\subseteq T$ و $S\cap T\subseteq$ ___ ،

(5). $S\cup\phi=$ ___ ، (6). $S\cap\phi=$ ___

(7). $S\cup S=$ ___ ، (8). $S\cap S=$ ___

(9). $S\cup(T\cup U)=(S\cup T)\cup$ ___ ، (10). $S\cap(T\cap U)=(S\cap T)\cap$ ___

(11). $S-S=$ ___ ، (12). $S-(S-S)=$ ___

(13). $S\cup(T\cap U)=(S\cup T)\cap$ ___

حل: (1). S ، (2). S ، (3). T ، (4). S و T ، (5). S ، (6). ϕ ، (7). S ، (8). S ، (9). U ، (10). U ، (11). ϕ ، (12). S ، (13). $(S\cup U)$.

30. اگر S ، T دو set مفروض طوریکه $S\subseteq T$ شده باشند، اگر U یک set کیفی دیگر مدنظر گرفته شود درینصورت روابط ذیل بین set های S ، T و U موجود شده میتوانند:

(1). $S\cup U\subseteq T\cup$ ___ ، (2). $S\cap U\subseteq T\cap$ ___

(3). اگر $S\subseteq T$ و $T\subseteq U$ باشند پس ___ $\subseteq$ ___ میباشد.

حل: (1). U ، (2). U ، (3). $S\subseteq U$

31. درینجا set های S ، T ~~[illegible]~~ روابط ذیل موجود شده میتوانند:

(1). $S\subseteq T$ شده درصورتیکه: $S\cap T=$ ___ گردد.

(2). $T\subseteq S$ میشود درصورتیکه: $T\cup S=$ ___ گردد.

(3). اگر $T\subseteq S$ باشد، پس $(S-T)\cup T=$ ___ میشود.

حل: (1). S ، (2). S ، (3). S

32. اگر $S=\{(1,2),(4,5),(7,9)\}$ و $T=\{(4,5),(6,8)\}$ باشد،
پس درینصورت: (1). $S\cup T=\{\_\_\_\_\_\_\}$ و
(2). $S\cap T=\{\_\_\_\_\}$ میشود.

حل: (1). $\{(1,2),(4,5),(6,8),(7,9)\}$
(2). $\{(4,5)\}$.

33. اگر $S=\{(3,4),(4,5),(5,6)\}$ و $T=\{(3,4),(6,5)\}$ باشد،
پس درینصورت (1). $S\cup T=\{\_\_\_\_\_\_\}$ و
(2). $S\cap T=\{\_\_\_\_\}$ و
(3). $S-T=\_\_\_\_\_\_$ میشود.

حل: (1). $\{(3,4),(4,5),(5,6),(6,5)\}$
(2). $\{(3,4)\}$
(3). حل ندارد، زیراکه شرط اول که $S\subset T$ باشد درینجا
موجود نیست.

34. اگر $S=\{(1,2),(a,b),(c,d)\}$ و $T=\{(1,2),(c,d)\}$ باشد،
پس درینصورت: (1). $S\cup T=\{\_\_\_\_\_\_\}$ ،
(2). $S\cap T=\{\_\_\_\_\}$ ،
(3). $S-T=\{\_\_\_\_\}$ میشود.

حل: (1). $S\cup T=S=\{(1,2),(a,b),(c,d)\}$
(2). $S\cap T=T=\{(1,2),(c,d)\}$
(3). $S-T=\{(a,b)\}$ میشود.

II - حاصل ضرب دیکارتی :

II. Cartesian Products

35. اگر $S=\{0,1,2\}$ و $T=\{p,q\}$ باشد، حاصلضرب دیکارتی در گرایش غربی Cartesian Products دو set S و T قرار ذیل نمایش داده میشود :

$$S\times T=\{(0,p),(0,q),(1,p),(1,q),(2,p),(2,q)\}.$$

(1). آیا میدانید که $S\times T$ یعنی cart. prod. دو set مذکور چیست؟

(2). راجع به عناصر coordinate اول جوره‌ی ترتیب ordered pairs بالا چه میدانید؟

(3). راجع به عناصر coordinate دوم ordered pairs مذکور چه میدانید؟

حل : (1). $S\times T$ عبارت از یک set که عناصر آن را ordered pairs تشکیل داده اند، میباشد.
(2). عناصر coordinate اول جوره‌ی مرتب ordered pairs مذکور را عناصر set S تشکیل داده اند.
(3). عناصر coordinate ی دوم ordered pairs مذکور را عناصر set T تشکیل نموده اند.

36. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $T=\{c,d\}$ باشد، set ای که از $S\times T$ بدست می‌آید قرار ذیل است :

$$S\times T=\{(\ ,\ ),(\ ,\ ),(\ ,\ ),(\ ,\ ),(\ ,\ ),(\ ,\ )\}$$

حل : $S\times T=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,c),(c,d)\}$

37. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $T=\{1,2\}$ باشد، پس $S\times T$ عبارت از set است که عناصر آن را ordered pairs بشکل (x,y) تشکیل میدهند طوریکه $x\in S$ و $y\in T$ میباشد، پس درینصورت $S\times T$ عبارت از کدام set: { ________ } میشود.

حل: $\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

38. اگر $S=\{a,b\}$ باشد، set که حاوی تمام جوره های ترتیب (x,y)، طوریکه $x\in S$ و $y\in S$ باشد بنویسید.
این set توسط علامه $S\times S$ که S کراس S "S cross S" خوانده میشود آراسته میگردد. پس درینصورت $S\times S$ عبارت است از: ________ .

حل: $S\times S=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

39. اگر $S=\{a,b,c\}$ باشد بشکل روستر roster، set که از تمام جوره های ترتیب که ~~SxS~~ بشکل (x,y) طوریکه $x\in S$ و $y\in S$ است بدست عبارت از ________ $=S\times S$ میباشد.

حل: $S\times S=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),$ $(c,b),(c,c)\}$

40. اگر $S=\{a,b\}$ و $T=\{1\}$ باشند، درینصورت $S\times T$ یک set $\{(a,1),(b,1)\}$ که عناصر از ordered pairs که عنصر اول آن coordinate از S مربوط و عنصر دوم coordinate آن از T مربوط است تشکیل میدهند. و تعداد عناصر این set ________ میباشد.

حل: 2

41. (1). افاده : $\{(a,5),(b,3),(a,x)\}$ عبارت از یک ___ است که عناصر از ___ تشکیل کرده اند.

(2). افاده: $\{(-1,1),(1,1),(5,-2),(-3,5)\}$ نیز یک ___ که دارای ___ میباشد بوده و عناصر از ___ تشکیل داده اند.

> حل: (1). set ، ordered pairs .
> (2). set ، چهار عنصر ، ordered pairs .

42. (1). اگر $S=\{a,b\}$ و $T=\{1,2,3\}$ باشد.

(a). set تمام ordered pairs که بشکل (x,y)؛ طوریکه $x\in S$ و $y\in T$ باشد از Cart. porducts S و T حاصل میشوند، بنویسید.

(b). جواب شما عبارت از ___ که دارای ___ عنصر میباشد خواهد بود.

(2). علامه گذاری notation که برای توضیح set مورد نظر بکار برده میشود قرار ذیل است:

$$S\times T=\{(x,y)\mid x\in S \text{ and } y\in T\}.$$

که چنین خوانده میشود: "$S\times T$ عبارت از set تمام جوره های مرتب که بشکل (x,y) اند بوده طوریکه $x\in S$ و $y\in T$ میباشند."

> حل: (1). (a). $\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$
> (b). set ، 6 .
> (2). مستوجب جواب نیست.

.43 (1). اگر $S=\{a,b\}$ بوده $S\times S=\{(x,y)\mid x\in S \text{ and } y\in S\}$ باشد، پس
درینصورت ______ : $S\times S$ عبارت از یک set که عناصر آن
(a): ______ که بشکل (b): ______ بوده طوریکه
(c): x آن شامل ____ و (d): y آن شامل ____ شده
میباشد.

(2). پس درینحالت $S\times S$ عبارت از:
______ میشود.

حل: (1). (a): ordered pairs، (b): (x,y)،
(c): S ، (d): S .
(2). $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

.44* اگر $S=\{-1,0,1\}$ باشد، بشکل روستر Roster form
$S\times S$ عبارت است از: ______

حل: $\{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$.

.45 Set جوره ای ترتیب ordered pairs که از دو sets ثابت
A و B بدست می آید بنام حاصل ضرب کارتیزی "Cartesian
Product" و یا "cross product" set ای A و B
یاد میشود. اگر $A=\{a,b\}$ و $B=\{1,2,3\}$ باشند،
(1). Cart. product ، A و B را بنویسید.
(2). $A\times B$ بنام: ______ یاد میشود.

حل: (1). $A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$.
(2). حاصلضرب کارتزی و یا cartesian product

تعریف :- اگر S و T دو set مفروض باشند حاصلضرب دکارتی cartesian product هر دو set مذکور توسط افادهٔ :

$$S \times T = \{(x,y) \mid x \in S \text{ and } y \in T\}$$

تعریف میشود .

.46 اگر کدام یکی از set های S و یا T یک empty set باشد ، درینحالت کدام عنصری در set های مذکور موجود نیست که باعث تشکیل جوره مرتب گردد . پس درینحالت :-

(1). $S \times T$ یک ________ میباشد .

اگر نه S و نه T یک empty set باشد درینحالت :-

(2). $S \times T$ یک ________ و یا ________ میباشد ، که تمام از ________ تشکیل میدهند .

حل : (1). empty set و یا set خالی
(2). nonempty set و یا set غیرخالی ، جوره‌ای مرتب

.47* اگر S و T دو set مفروض باشند پس :

$$S \times T = \{(x,y) \mid x \in S \text{ and } y \in T\}$$
$$T \times S = \{(x,y) \mid x \in T \text{ and } y \in S\}$$

میباشند .

درصورتیکه $A = \{1\}$ و $B = \{a, b\}$ باشند :

(a). شکل roster ، $A \times B$ را بنویسید .

(b). شکل roster ، $B \times A$ را بنویسید .

(c). $A \times B$ بنام ________ A و B یاد میشود .

حل :- (a). $\{(1,a), (1,b)\}$
(b). $\{(a,1), (b,1)\}$ توجه کنید: $A \times B \neq B \times A$
(c). حاصلضرب دکارتی و یا cartesian product

.48* اگر A تشکیل cartesian product محض از یک set (فرضاً S) مورد نظر میباشد، که درین صورت S×S عبارت از set جوره‌ای مرتب است که عناصر coordinate اول آن شامل S بوده و بهمین قسم عناصر coordinate دوم آن نیز شامل S میباشند. که این توضیحات بزبان سمبولیک طبق ذیل توضیح شده میتوانند:

$$S\times S=\{(x,y)\mid x\in S \text{ and } y\in S\}.$$

درصورتیکه $S=\{a,b,c\}$ باشد، شکل roster $S\times S$ را بنویسید.

حل: $S\times S=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

.49 اگر A و B دو set مفروض باشند،

(1). $A\times B$ بنام ________ A و B یاد میشود.

(2). $A\times B$ را بزبان سمبولیک ________ نوشته میتوانیم.

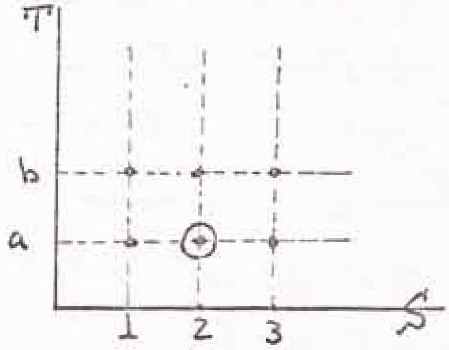
حل: (1). cartesian product
(2). $\{(x,y)\mid x\in A \text{ and } y\in B\}$.

.50 (1). درحالیکه $S\times T=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$ است، $S=\{$____$\}$ و $T=\{$____$\}$ میباشد.

(2). اگر $S=\{\Phi,\{p\},\{q\}\}$ و $T=\{\Phi,\{a\}\}$ باشد، شکل roster $S\times T$ را بنویسید.

حل: (1). $S=\{a,b,c\}$ ، $T=\{1,2\}$
(2).
$\{(\Phi,\Phi),(\Phi,\{a\}),(\{p\},\Phi),(\{p\},\{a\}),(\{q\},\Phi),(\{q\},\{a\})\}$.

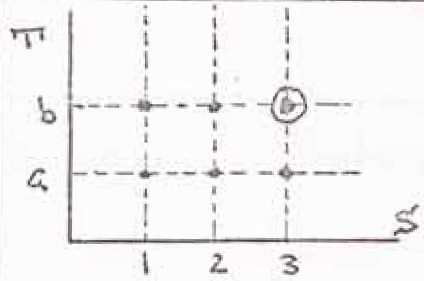
51. یک طریقه آسان که توسط آن cartesion product دو set S و T ارائه شده میتواند استعمال گراف است.



در صورتیکه $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{a,b\}$ باشند، درینصورت جوره های ترتیبی عناصر set $S\times T$ را توسط مختصات coordinates نقاط تقاطع خطوط نقطه چین گراف طبق شکل مقابل نشان داده میتوانیم:

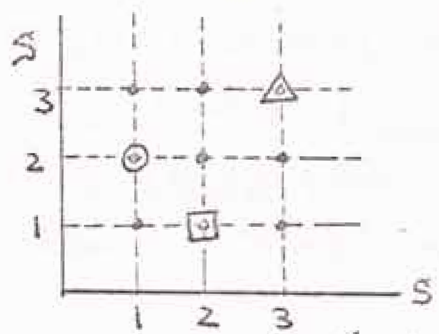
نقطه ای که دور آن دایره کشیده شده است ordered pairs $(2,a)$ را نشان میدهد. بین تمام نقاط گراف و عناصر ordered pairs set $S\times T$ یک مطابقت یک به یک موجود است طوریکه کمیات وضعیه یا مختصات coordenates نقاط گراف عناصر set $S\times T$ را نشان میدهند.

دور نقطه ای که به جوره مرتب $(3,b)$ مطابقت دارد دایره بکشید.



حل:

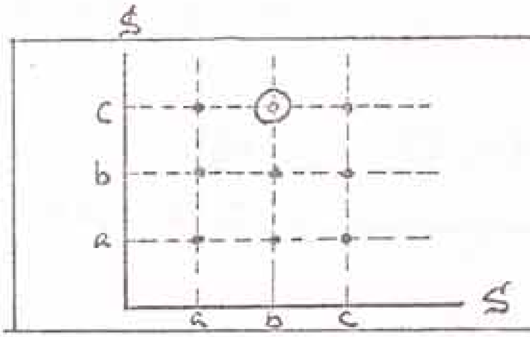
52. اگر $S=\{1,2,3\}$ درینصورت عناصر $S\times S$ توسط کمیات وضعیه نقاط گراف مقابل ایضاح شده میتوانند. بطور مثال: نقطه ای که دور آن دایره کشیده شده عنصر $(1,2)$ set $S\times S$ را نشان میدهد. نقاط را که دور آن مثلث △ و □ مربع رسم کردیم عناصر $S\times S$ را بالترتیب نشان میدهند.



حل: △ $=(3,3)$ و □ $=(2,1)$ میباشند.

53. اگر $S=\{a,b,c\}$ باشد، $S\times S$ را توسط گراف نشان داده دونقطه که Coordinates کمیات وضعیه آن جوره مرتب (b,c) را نشان داده دایره بکشید. (آیا میدانید) مگر اینکه بصورت واضح گفته نشود معمولاً عناصر مربوط Coordinate اول جوره‌های مرتب را توسط محور افقی و همین قسم عناصر مربوط Coordinate دوم جوره‌ای مرتب را توسط محور عمودی گراف نشان میدهند.

حل:



54. اگر P ست اعداد تام مثبت positive Integers را نشان دهد:

(1). $P\times P=\{(x,y)\,|\,\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

(2). آیا $(5,8)\in P\times P$ ؟ (3). آیا $(8,5)\in P\times P$ ؟

(4). آیا $(5,8)=(8,5)$ صحیح میباشد ؟

حل: (1) $x\in P$ و $y\in P$، یعنی x و y اعداد مثبت تام اند.
(2). بلی، (3). بلی، (4). نه خیر.

55. اگر $S=\{0,1\}$ و $T=\{1,2,3\}$ باشد، پس

$S\times T=\{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ میشود.

حل: $S\times S=\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$

درصورتیکه جواب شما صحیح باشد از حل سوال 56 الی 60 صرف نظر کرده میتوانید.

56. اگر $S=\{a, b, c\}$ باشد، $S \times S$ را بنویسید.

57. Cartesian product یک set مفروض S عبارت از یک set است که عناصر آنرا ________ تشکیل میدهند.

58. $S \times T$ دو set مفروض S و T بنام ________ set های S و T یاد میشود.

59. اگر $S=\{1, 2, 3\}$ و $T=\{a, b\}$ باشند، درینصورت شکل roster $S \times T$ عبارت از ________ میباشد.

60. اگر $S \times T=\{(a,1), (a,3), (b,1), (b,3)\}$ و $S=\{a, b\}$ باشد، پس $T=\{\_\_\_\}$ میباشد.

حل:
56. $\{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$
57. جوره ای مرتب؛ 58. Cartesian product
59. $\{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$
60. $T=\{1, 3\}$

61. فرضاً $W=\{(1,a), (2,b)\}$ باشد.
(1). اگر دو set، S و T موجود باشد طوریکه $W \subseteq S \times T$ باشد درینصورت $S=\{\_\_\_\}$ و $T=\{\_\_\_\}$ میباشد.
(2). شکل roster، $S \times T$ را بنویسید. (3). آیا $W = S \times T$ میشود؟
(4). آیا $W \subset S \times T$ میباشد؟

حل: (1). $S=\{1, 2\}$، $T=\{a, b\}$.
(2). $\{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$. (3). نه خیر ضروری نیست که W مساوی به $S \times T$ بوده تا حیثیت (4): W subset $S \times T$ است.

62. اگر $W=\{(a,1),(a,2),(b,3)\}$ بوده و فرضاً W subset د Cartesian product د set د S و T باشد، درینصورت:

(1). باید که set S عناصر: a، ___ را دارا بوده،

(2). دبهمین قسم set T عناصر: 1، ___ را دارا باشد.

(3). شکل roster $S\times T$ را بنویسید.

(4). آیا همیشه $W=S\times T$ میباشد.

حل: (1)، a و b . (2). 1، 2 و 3 .
(3). $\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$ ، (4). نه خیر!

63. اگر یک set جوره های مرتب W مفروض باشد، ما دو set S و T را تعیین کرده میتوانیم طوریکه W یک subset ، set $S\times T$ باشد. یعنی هر عنصر W شامل set $S\times T$ بوده، اما ضروری نیست که هر عنصر $S\times T$ شامل W باشد، زیاده ترین چیزی که در اینجا تعیین شده میتواند اینست که W ___ $S\times T$ ، یعنی: $S\times T$ ___ W میباشد.

حل: subset ، $W\subseteq S\times T$

64. اگر W یک set که عناصر آن از جوره های مرتب تشکیل داده شده باشد، پس دو sets A و B موجود شده میتوانند طوریکه عناصر آن علی الترتیب عناصر coordinates های اول و دوم جوره های مرتب W را تشکیل دهند. و درینصورت: $W\subseteq A\times B$ میشود.

مثلاً اگر $W=\{(0,1),(1,a),(3,5),(0,5),(0,a)\}$ باشد، درینصورت کمترین عده عناصر را که A و B دارا شده میتوانند:

$A=\{\_\_\_\_\}$ بوده دبهمین قسم:

$B=\{\_\_\_\_\}$ میباشند

حل: $A=\{0,1,3\}$ و $B=\{1,a,5\}$

۶۵. اگر $W=\{(a,0),(0,1),(b,3),(b,4)\}$ باشد، دو sets S و T را تونظر بگیرید طوریکه: $W\subset S\times T$ باشد، درینصورت کمترین تعداد عناصر را که S و T دارا بوده میتوانند علی الترتیب عبارت از ____ و ____ میباشد. در $S=\{$____$\}$ و $T=\{$____$\}$ میباشند.

حل: 3 و 4، $S=\{a,0,b\}$ و $T=\{0,1,2,3,4\}$.

۶۶. دو sets S و T معروض است. $S\times T$، $S\times S$، $T\times T$ و $T\times S$ عبارت از (1) ____ جدید اند، که عناصر آن را (2) ____ تشکیل میدهند.

(3). $S\times S=\{(x,y)\mid$ ____ $\}$

(4). $S\times T=\{(x,y)\mid$ ____ $\}$

(5). $T\times T=\{(x,y)\mid$ ____ $\}$

(6). $T\times S=\{(x,y)\mid$ ____ $\}$

حل: (1). set ای. (2). جوره گی مرتب
(3). $x\in S$ and $x\in S$، (4). $x\in S$ and $y\in T$
(5). $x\in T$ and $y\in T$، (6). $x\in T$ and $y\in S$

۶۷. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{a,b\}$ باشد، شکل roster
(1). $S\times T$، (2). $T\times S$ را بنویسید.
(3). آیا $S\times T=T\times S$ حقیقت دارد؟

حل: (1). $\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$
(2). $\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$
(3). نه خیر.

امتحان اول : Test - 1

1. (p,q) عبارت از ________ است.

2. در ordered pairs (x,y) و یا در جوره مرتب (x,y) ، x بنام ________ و y بنام ________ جوره مرتب مذکور یاد شود.

3. اگر (a,b) و (c,d) دو جوره ای مرتب باشند، $(a,b)=(c,d)$ میشود درصورتیکه ________ باشد.

4. اگر S و T در sets باشند، $S\times T$ بنام ________ یاد گردیده که توسط سمبول: $S\times T =$ ________ نشان داده میشود.

5. اگر $S=\{e,f\}$ و $T=\{1,2,3\}$ باشد شکل roster $S\times T$ را بنویسید.

6. فرضاً $A=\{1,2\}$ بوده شکل roster . $A\times A$ را بنویسید.

8. (a). افاده $[a,b]-\langle a,b\rangle =$ ____ را به همین قسم:
(b). افاده $\{1,2,3,4\}-\{1,3\} =$ ____ را تکمیل کنید.

9. (a). $\{0,1,2\}\cap\{2\} =$ ________ و همچنان
(b). $\{0,1,2\}\cup\{2\} =$ ________ و بالاخره
(c). $\{0,1,2\}-\{2\} =$ ________ را بدست آرید.

10. تکمیل نمائید: (a). $B-(B-A)=$ ____ درحالیکه $A\subseteq B$ باشد.
(b). $A\cup B =$ ____
(c). $A\cap B =$ ____

11. کدام یک از افاده های ذیل صحیح و کدام یک آن غلط اند:
(a). $3\in\{2,3\}$ ، (b). $5\in\{1,3,7\}$ ، (c). $2\notin\{2\}$ ،
(d) $3\in\{6,9\}$ ، (e). $4\in P$ (f). $\frac{1}{2}\in Q$.

12. صحیح و غلط افاده های ذیل را مشخص کنید:
(a). $\{1,2\}=\{2,1\}$ (b). $(1,2)=(2,1)$ ، (c) $A-A=\phi$

برای جواب امتحان هذا به صفحه ________ در اخیر کتاب مراجعه شود.

III. Binary Relations   III. روابط دوگانه ای :-

68. $S=\{1,2,3,4\}$ مفروض است.

(1). $S\times S$ را بنویسید، (2). و سپس رابطهٔ: "|" یعنی: "... تقسیم ... است" را در $S\times S$ - set بالای هر عنصر (x,y) طوریکه "$x|y$" یعنی "x تقسیم y است" باشد مورد مطالعه قرار دهید. آن subset $S\times S$ که تمام آن رابطهٔ "|" قبول میکنند بنویسید و آنرا به R نشان دهید. چنانچه از جملهٔ عناصر $S\times S$ - جوره مرتب: $(1,3)$ عنصریست که رابطهٔ "$1|3$" را قبول میکند. بهمین قسم جوره‌های مرتب $(1,2)$ و $(2,4)$ نیز رابطهٔ "|" مطلوب قبولدار اند. متوجه خواهید شد که بعضی عناصر دیگر $S\times S$ مانند $(3,4)$، $(2,3)$، $(2,1)$ و امثال آن رابطهٔ مطلوب را قبولدار نمیباشند. چه 2 تقسیم 1 نیست و بهمین قسم 2 تقسیم 3 نیست. بنابران گفته میشود که: $(1,3)\in R$ و $(1,2)\in R$ و $(2,4)\in R$ بوده حالانکه: $(2,1)\notin R$ و $(2,3)\notin R$ و بهمین قسم $(3,4)\notin R$ ~~قبولدار~~ میباشند.

حل:

(1). $S\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

(2). $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$

69. $S=\{1,2,3\}$ مفروض است.

(1). شکل roster $S\times S$ را بنویسید.

(2). رابطهٔ: "=" مدنظر گرفته آن subset $S\times S$ که رابطهٔ: "=" بین عناصر اول و دوم تمام coordinates آن تحقق پذیر باشد تعیین نموده و آنرا به R نشان دهید.

حل:

(1). $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

(2). $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

.70 فرضاً $S=\{\phi, \{p,q\}, \{p\}\}$ باشد.

(1). شکل roster ، $S\times S$ را بنویسید.

(2). آن subset ، $S\times S$ را که رابطهٔ " $\subset$ " بین عناصر coordinates های اوّل و دوم عناصر آن set تحقیق پذیر باشد بنویسید و آنرا به R نشان دهید.

حل : (1). $S\times S=\{(\phi,\phi),(\phi,\{p,q\}),(\phi,\{p\}),(\{p,q\},\phi),(\{p,q\},\{p,q\}),(\{p,q\},\{p\}),(\{p\},\phi),(\{p\},\{p,q\}),(\{p\},\{p\})\}$.
$R=\{(\phi,\phi),(\phi,\{p,q\}),(\phi,\{p\}),(\{p,q\},\{p,q\}),(\{p\},\{p,q\}),(\{p\},\{p\})\}$.

.71 اگر $S=\{0,1,2\}$ و $T=\{1,2\}$ باشد:

(1). شکل roster ، $S\times T$ را بنویسید.

(2). رابطهٔ: " کوچکتر است از " یا " $<$ " را در نظر گرفته، آن subset ، $S\times S$ را تعیین کنید که رابطهٔ مذکور بین عناصر coordinates های اوّل و دوم عناصر set مذکور تحقیق پذیر بوده و این set را به R نمایش دهید.

حل : (1). $S\times T=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.
(2). $R=\{(0,1),(0,2),(1,2)\}$.

.72 اگر S و T دو sets مفروض باشند.

(1). یک set $S\times T$ موجود شده میتواند که بنام ________ S و T یاد گردیده و عناصر آنرا ________ تشکیل میدهند که coordinates های اوّل آن مربوط به ________ و از دوّم آن مربوط ________ میباشند.

(2). شکل سمبولیک عبارت از: $S\times T=\{(x,y)|$________$\}$ میباشد.

حل : (1). Cartesian Prod ، جوره های مرتب ، S ، T.
(2) $S\times T=\{(x,y)\mid x\in S \text{ and } y\in T\}$

.73 دو sets $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{3,4\}$ را با رابطهٔ: «تکیعددجفت‌تام $=x+y$» درنظر بگیرید:

(1). شکل roster، $S\times T$ را بنویسید.

(2). آن subset، $S\times T$ که رابطهٔ فوق موصوف را تحقیق کند تعیین کرده و ازآن به $\mathcal{R}$ ارائه کنید.

حل: (1). $S\times T=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$ (2). $\mathcal{R}=\{(1,3),(2,4),(3,3)\}$

.74* در set $\{-1,0,1\}$ رابطهٔ: «$x\cdot y>0$» را درنظر بگیرید:

(1). set، $S\times S$ را تعیین کنید.

(2). آن subset، $S\times S$ را که بین coordinates های عناصر رابطهٔ: «$x\cdot y>0$» موجود باشد تشخیص کرده و ازآن به $\mathcal{R}$ نمایش دهید.

حل: (1). $S\times S=\{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$ (2). $\mathcal{R}=\{(-1,-1),(1,1)\}$

.75 اگر هدف ما مطالعهٔ رابطهٔ: «$<$» درکدام set باشد درینصورت ما همان جوره‌ های مرتب را که عناصر coordinate ی ______ آن از کوچکتر از عناصر coordinate ی ______ آن باشند انتخاب مینمایم. اگر جوره‌ های مرتب مطلوب را به (x,y) نشان دهیم، درینصورت رابطهٔ: «$x<y$» بین coordinate ی آن موجود باشد. بهمین قسم اگر غرض ما مطالعهٔ رابطهٔ: «$|$» درمیان بین عناصر یک set باشد درینحالت ما همان جوره‌ های مرتب set مذکور را که عناصر coord. ی ______ آن عناصر coordinate ی ______ آن را بادری خود پوره تقسیم کند، انتخاب میکنیم. چنانچه دیده شد set

که این عناصر را احتوا میکند عبارت از یک subset، set، S×S میباشد،
برای تعیین این subset ، S×S ما همان عناصر (x,y) ای set
S×S را انتخاب مینمائیم که رابطهٔ : " x | y " را تحقیق پذیر باشند.

حل : اول ، دوم ، اول ، دوم .

76. هرگاه هدف ما مطالعه رابطهٔ : " ⊂ " در یک set باشد، درینصورت ما
به بررسی جوره ای مرتب که set مربوط عناصر coordinate اول آن
subset ، set عناصر coordinate ای دوم آن باشند، اقدام
مینمائیم. بطور مثال از $\{(\{r\},\{q\}),(\{p\},\{p,q\}),(\{q\},\{q,r\}),(\{t\},\{u,r\})\}$
ما جوره ای مرتب : $(\{p\},\{p,q\})$ ، $(\{q\},\{q,r\})$ را انتخاب مینمائیم،
زیرا بین عناصر : coordinate ای ____ و دوم آن که رابطه ____ تحقیق پذیر است.

حل : اول ، ⊂

77. اگر مطلب ما مطالعه و بررسی یک رابطه " R " در یک set مفروض باشد،
درینصورت ما به همان جوره ای مرتب (x,y) ای Cartesian Product ، set
set مفروض علاقمندیم که رابطه R بین عناصر .coord اول و دوم
آن موجود باشد ، یا بالفاظ دیگر عناصر (x,y) مطلوب باید که رابطه :
x ___ y را به تحقیق نمائید.

حل : x R y

78. مسایل 68 تا 77 بصورت ذیل خلاصه شده میتوانند :
(1) . ما Cartesian Prod. دو set مفروض S و T را که به ____ نشان داده میشود تعیین کرده میتوانیم
(2) . اگر هدف ما تعیین کردن subset ، S×T که وجود کدام رابطه معینه R
بین عناصر coordinates ای آن شرط باشد، بوده ؛ درینصورت ما همان جوره ای
مرتب (x,y) ای set - S×T را انتخاب مینمائیم که عناصر آن x ___ y را تحقیق کنند.

حل : (1) . S×T ، (2) . xRy

79. برای اینکه بین شرط condition و R subset R
یک تمیز بوجود آید میدانیم شرط condition R را بشکل:
——— و subset R را بشکل ——— نمایش میدهیم.

حل: R . R

80. اگر S و T دو sets عمومی باشند:
(1). $S \times T$ را تعیین کنید.
(2). صرف subset $S \times T$ که بین Coordinates های اول و دوم عناصر آن روابط R موجود باشد تشخیص کنید.
(3). فرق R و R را بررسی کنید.

حل: (1). $S \times T = \{(x,y) \mid x \in S \text{ and } y \in T\}$
(2). $R = \{(x,y) \mid x \in S \text{ and } y \in T \text{ and } x R y\}$
(3). subset : R و روابط به : R ارائه شده اند.

81. set: $S = \{1, 2, 3\}$ عمومی است
(1). $S \times S$ را بشکل roster آن بنویسید.
(2). $S \times S$ بنام ——— S یاد میشود.
(3). از subset R، $S \times S$ را تعیین کنید که:
$R = \{(x,y) \mid x \in S,\ y \in S \text{ and } x \leq y\}$ باشد
(4). R با $S \times S$ چی رابطه دارد؟

حل: (1)؛ (2). حاصل ضرب کارتیزی یا Cartesian Product
$S \times S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
(3). $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$
(4). $R \subset S \times S$ مثبت است.

82. اگر S و T دو sets مفروض باشند،

(1). $S\times T$ یک set که عناصر آن را ______ تشکیل میدهند.

(2). $S\times T$ بنام ______ S و T یاد میشود.

(3). شکل سمبولیک، $S\times T$ عبارت است از: ______.

(4). توضیح سمبولیک: $T\times S$ عبارت است از: ______.

(5). شرطی که باعث تحقیق کردن رابطه: $S\times T = T\times S$ میشود عبارت است از ______.

حل: (1). جوره های ترتیبی، (2). Cartesian product

(3). $S\times T=\{(x,y)\mid x\in S \text{ and } y\in T\}$.

(4). $T\times S=\{(x,y)\mid x\in T \text{ and } y\in S\}$.

(5). اگر $S=T$ بوده باشند پس $S\times T=T\times S$ میشود.

83. اگر S و T دو sets مفروض باشند، و اگر R کدام رابطه چنین که بین عناصر x و y طوریکه $x\in S$ و $y\in T$ رابطه موجود باشد. درینصورت set R که عناصر آن رابطه R را تحقیق کنند بشکل سمبولیک بنویسید، وضمناً رابطه R و $S\times T$ را توضیح کنید.

حل: $R=\{(x,y)\mid x\in S,\ y\in T \text{ and } xRy\}$.

$R\subset S\times T$

84. اگر $S=\{2,3,4\}$ باشد، (1). شکل roster، $S\times S$ را بنویسید.

(2). شکل roster، R را بنویسید درحالیکه: $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x|y\}$

(3). شکل roster: $R' = S\times S - R$ را بنویسید.

(4). R' عبارت از subset، $S\times S$ که آن عناصر (coordinates) رابطه "$x|y$" را تحقیق ______.

(5). $R\cup R' =$ ______ میشود.

حل: (1). $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

(2). $\{(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$. (4). تحقیق نمیکند.

(3). $\{(2,3),(3,2),(3,4),(4,2),(4,3)\}$. (5) $R\cup R' = S\times S$.

تبصره :-

تا حال ما روابط مانند: " > ، ⊂ ، = ، | " و امثال این‌ها را بین دو عنصر در حالیکه این عناصر بنابر ترتیب مشخصه شامل دو sets بودند مطالعه نمودیم. اکنون ملاحظه میکنید که این شرائط conditions ، روابط relations ، subset های یک set حاصل ضرب دکارتی و یا cartesian product را مشخص میسازند، طوریکه هر یک ازین subset ها همان جوره‌های مرتب یک set حاصل ضرب دکارتی را حاوی و دارا میباشند، که در بین coordinates های آن رابطهٔ داده شده تحقق پذیر میباشد. تا جوره‌های مرتب بقیهٔ set حاصل ضرب دکارتی موصوف آن set ها را تشکیل میدهند که در set مذکور رابطهٔ داده شده تحقق پذیر نیست.

برای مطالعهٔ روابط relations مانند روابط فوق الذکر: " > ، ⊂ ، = ، | ، . . . " ما تخنیک که در ریاضی معمول است بکار بردیم. یا بعبارت دیگر ما subset های S×T را بر اساس رابطهٔ داده شده متعین و مشخص ساختیم. اگر R یک رابطهٔ داده شده تصور گردد ما همان subset R ، S×T را که بین coordinates های عناصر آن رابطهٔ داده شده R را تحقیق پذیر باشد طبق ذیل تعیین کرده میتوانیم:-

$$R = \{(x, y) \mid x \in S,\ y \in T \text{ and } x R y\}.$$

حال ما توجه خود را به خود R ~~تمرکز~~ نه به شرائط که باعث تعیین R گردیده است تمرکز میدهیم.

در مبحث ذیل ما بمطالعهٔ subsets های کیفی (خاص الخواص) S×T پرداخته و از آن به بررسی صفات و خواص که باعث تشخیص و تمیز subsets های مورد بحث گردیده اند می پردازیم. بالنتیجه هر شرط condition داده شده R (> ، ⊂ ، = ، | ، . . .) را با اساس توضیح subset ، S×T که با اساس شرط R تعیین میگردیده توضیح خواهیم کرد.

.85 اگر $S=\{1,3,5\}$ باشد:

(1). شکل roster: $S\times S$ را بنویسید.

(2). اگر $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x+y=\text{یک عدد تاق}\}$ باشد؟ شکل roster: R را بنویسید.

حل: (1). $S\times S=\{(1,3),(1,5),(1,1),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

(2). $R=\{\}=\Phi$.

.86 اگر $S=\{1,2,3\}$ باشد

(1). شکل roster، $S\times S$ را (2). شکل roster، R را بنویسید در صورتیکه: $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } 2xy=\text{یک عدد تام جفت}\}$ باشد.

حل: (1). $S\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

(2). $R=S\times S$.

.87 در حرکات اشکال: (85) و (86) دو subsets، $S\times S$ را مطالعه نموده و دیده شد که در حالت (85)، subset مطلوب یک empty set را، حالانکه در شکل (86) subset مطلوب خود $S\times S$ set را تشکیل میدهد.

(1). آیا رابطه: $\Phi\subset S\times S$ صحت دارد؟

(2). آیا رابطه: $S\times S\subset S\times S$ دارای حقیقت شده میتواند؟

حل: (1). بلی! زیرا قرار تعریف Φ subset هر set است.

(2). بلی! هر set یک subset خودش شده میتواند.

.88 اگر دو sets، S و T دیک رابطه R موجود باشد، R یک subset، R، $S\times T$ را تعیین کرده میتواند طوریکه:

$R=\{$ ______________ $\}$ میشود.

حل: $R=\{(x,y)\mid x\in S,\ y\in T \text{ and } x\,R\,y\}$

89. با امثال روابط R را که باعث تشکیل یک subset یک set $S \times T$ میشود مطالعه نموده و دیدیم که دامنهٔ وجود این subsets ازیک ____ الی خود set ____ شده میتواند.

حل: empty set ، $S \times T$
درصورتیکه قادر به درک مطلب جواب خود نباشید مثال: 85 و 86 را تکرار کنید.

90. اگر $A=\{p,q,r\}$ باشد، هشت subsets A، را بنویسید.

حل: $\{p,q,r\}$، $\{p,q\}$، $\{p,r\}$، $\{q,r\}$، $\{p\}$، $\{q\}$، $\{r\}$، Φ

91. اگر جواب مسأله 90 تان صحیح باشد از حل این مسأله صرف نظر کرده میتوانید.

$A=\{1,2,0\}$ معروض است. بنابر تعریف: $C \subset A$ میشود درصورتیکه تمام عناصر C شامل A باشد. آیا روابط ذیل حقیقت دارد:

(1). اگر $C=\{1,2\}$ باشد، پس $C \subset A$ است.

(2). اگر $D=\{1,0\}$ " " $D \subset A$ " .

(3). " $E=\{2,0\}$ " " $E \subset A$ " .

(4). " $F=\{1\}$ " " $F \subset A$ " .

(5). آیا $\{2\} \subset A$ ؟

(6). آیا $\{0\} \subset A$ ؟

(7). " $\{1,2,0\} \subset A$ ؟

(8). " $\emptyset \subset A$ ؟

(9). دیده میشود که set A دارای ____ عنصر بوده و ضمناً دارای ____ subsets میباشد.

حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی، (4) بلی، (5). بلی،
(6). بلی، (7). بلی، (8). بلی، (9). 3، 8.

92. اگر یک set A دارای n عنصر باشد، تعداد subsets های A به قدر 2^n عدد sets میشوند.

۹۲. اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ باشد، درینصورت set S که دارای ______ عنصر بوده، تعداد subsets آن به ______ بالغ میشود،

حل: 5، 2^5 ویا 32

93. اگر $S=\{x,y,z\}$ و $T=\{1\}$ باشند، شکل roster $S\times T$ را نوشته و عده subsets های $S\times T$ را خود دریابید.

حل: $S\times T=\{(x,1),(y,1),(z,1)\}$
عده subsets های $S\times T$ عبارت از 2^3 ویا 8 میباشد.

94. از دو sets S و T مفروض $S\times T$ تعیین شده میتواند. یک شرط R یک subset R ای $S\times T$ را تشخیص کرده میتواند طوریکه: R = ______ میباشد.

حل: $R=\{(x,y)\mid x\in S,\ y\in T \text{ and } xRy\}\subset S\times T$

95. چون هر subset R ای $S\times T$ طوریکه در بین عناصر (جوره های مرتب) آن یک رابطه R موجود باشد تصور شده میتواند، درینصورت ما به subsets های $S\times T$ علاقمند گشته و با آن بنابر تعریف ذیل نام گذاری میکنیم:

تعریف: یک subset R ای $S\times T$ را بنام رابطه دوگانه ای binary relation در $S\times T$ یاد میکنیم.

بطور مثال، اگر $S\times T=\{(x,-1),(x,0),(y,-1),(y,0)\}$ باشد، درینصورت ما set $R=\{(x,0),(y,0)\}$ را درحالیکه R یک ______ $S\times T$ است بنام ______ یاد مینمائیم.

حل: subset، binary relation در $S\times T$

96. یک subset از $S \times S$ بنام یک رابطه دوگانه در S، binary relation یاد میشود. بطور مثال: اگر $S=\{1,2,3\}$ باشد.

(1). شکل roster، $S \times S$ را بنویسید.

(2). رابطه R که: "≤" ارائه میکند، درنظر بگیرید. این رابطه یک subset، R، $S \times S$ را مشخص میسازد که آن - طبق ذیل نشان داده شده میتواند:
$R=\{(x,y) \mid x\in S, y\in S \text{ and } x\le y\}$

شکل roster، R را بنویسید.

(3). چون R یک subset، $S \times S$ است، پس بنام ______ یاد میشود.

حل: (1). $S\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

(2). $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

(3). یک binary relation در S ...

97. (1). یک binary relation را در $S \times T$ تعریف کنید.

(2). یک binary relation را در S تعریف کنید.

حل: (1). یک binary relation در $S \times T$ عبارت از یک subset $S \times T$ است، یا بالفاظ دیگر اگر R یک binary relation در $S \times T$ است پس R یک subset، $S \times T$ میباشد.

(2). یک binary relation در S عبارت از یک subset، $S \times S$ است. درصورتیکه R یک binary relation در S باشد پس R یک subset، $S \times S$ میباشد.

98. اگر یک رابطه R در دو sets، S و T مفروض باشند، پس R میتواند که یک subset، R، $S \times T$ را طوریکه: $R=\{(x,y) \mid x\in S, y\in T \text{ and } xRy\}$ باشد، مشخص سازد. که این subset، R، $S \times T$ بنام یک ______ در $S \times T$ یاد میشود.

حل: binary relation

۹۹. دو ست‌های S و T و یک شرط R که subset R، set
$S \times T$ را بوجود می‌آورد مفروض اند. این subset مذکور،
(R)، تمام اجزاء‌ی ترتیب‌دار (x,y) ای $S \times T$ را که شرط داده شده
R را تحقیق پذیر اند در بر دارد. پس R یک -binary
relation را در $S \times T$ بوجود می‌آورد، زیرا که R یک ______
$S \times T$ است.

حل: subset

100. (1) هر کدام یک از subsetهای $S \times T$ بنام ______ در ______ یاد میشود.
(2). فرضاً: $S=\{1,a\}$ باشد، پس $S \times S=\{(1,1),(1,a),(a,1),(a,a)\}$ میشود.
اگر $R=\{(1,1),(a,1)\}$ باشد، پس R یک subset، $S \times S$
بوده و بنام یک ______ در ______ موسوم شده میتواند.

حل: binary relation، (1). binary rel.، $S \times T$، (2). $S \times S$

101. اگر $S=\{1,2,3\}$ باشد پس:
$S \times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ میشود
اگر $R=\{(1,2),(2,2),(2,3)\}$ باشد، پس R
یک ______ $S \times S$ بوده و بنام ______ یاد میشود.

حل: subset، binary relation در $S \times S$

102. اگر $S=\{a,b\}$ بوده و یک set $R=S \times S$ مفروض باشد. آیا
(1). R یک binary relation در $S \times S$ بوده میتواند؟
(2). R یک subset، $S \times S$ بوده میتواند؟

جواب: (1). بلی، (2). بلی.

103. اگر یک set $S=\{a,b\}$ منظور گرفته شود، آیا empty set یک binary relation را در $S\times S$ بوجود آورده میتواند؟

حل: بلی! زیرا طبق تعریف empty set، subset $S\times S$ شده میتواند.

104. اگر $S=\{a,x\}$ منظور گرفته شود، درینصورت $S\times S$ دارای ______ عنصر بوده پس تعداد subsets های آن به ______ میرسد.
هرکدام ازین subsets ها یک ______ در $S\times S$ بوجود میآورد.
آن دو subsets را که دارای تعداد زیادترین عناصر و هم چنان دارای کمترین تعداد عناصر باشند تعیین کنید.

حل: 4، 16، binary relation، $R_1= S\times S$، $R_{16}=\Phi$

105. اگر $S=\{1,2\}$ باشد:
(1). تمام (مجموعه) subsets های $S\times S$ را تعیین کنید.
(2). $S\times S$ را بدست آرید.

حل: (1). چون $S\times S$ دارای 4 عنصر میباشد، پس عده تمام subsets های $S\times S$ عبارت از 2^4 یعنی 16 میباشد.
(2). $S\times S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

106. هر مجموعه جوره های مرتب که عناصر آن بشکل (x,y) باشند یک ربط binary relation را در Cartesian product دو sets، S و T تشکیل داده میتوانند، طوریکه $x\in S$ و $y\in T$ باشد. بطور مثال: اگر یک set $R=\{(a,3),(2,b),(\sqrt{2},13)\}$ منظور گرفته شود، set R یک binary relation را در Cartesian product دو sets، S و T در حالیکه S و T را اقلاً هرکدام آن ~~عناصر~~ دارای 3، 3 عنصر میباشند تعیین میکند. کمترین عناصر را که درین مسأله set های S و T دارا شده میتوانند تعیین کنید.

حل: $S=\{2, \sqrt{2}, a\}$ و $T=\{3, 13, b\}$ میباشد

107. اگر $R=\{(a,2),(x,1),(a,17)\}$ بوده باشد، R میتواند که یک binary relation را در $S\times T$ بوجود بیاورد. درینصورت گفته میشود که S یک set کلی دارای superset: {___، ___} و T یک set کلی دارای superset: {___، ___، ___} میباشد.

تذکر: اگر رابطهٔ $A\subset B$ موجود باشد، A را subset دیا جزئی set و B را set کلی و یا superset A مینامند.

حل: $\{a, x\}$ ، $\{2 ، 1 ، 17\}$.

108. اگر دو sets، S و T مفروض باشد، $S\times T$ عبارت از set تمام ان جوره های مرتب (x,y) طوریکه $x\in S$ و $y\in T$ اند، میباشد.

(1). هرگاه subset، $S\times T$ بنام یک ______ در $S\times T$ یاد شود.

(2). دو sets $S=\{1,2,3,4\}$ و $T=\{a,b,c\}$ و یک set R؛ $R=\{(1,a),(1,b),(4,b)\}$ را درنظر بگیرید. چون R یک ______ $S\times T$ است، پس R یک ______ را در $S\times T$ بوجود می آورد.

حل: (1). binary relation
(2). subset ، binary relation

109. اگر $S=\{a,b\}$ و $T=\{1,2\}$ باشد، پس $T\times S=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$ میباشد. شانزده subsets های متمایز در $S\times T$ موجود شده میتوانند که عبارت اند از:

1. $\{(1,a)\}$	5. $\{(1,a),(2,a)\}$	9. $\{(2,a),(2,b)\}$
2. $\{(2,a)\}$	6. $\{(1,a),(1,b)\}$	10. $\{(1,b),(2,b)\}$
3. $\{(1,b)\}$	7. $\{(1,a),(2,b)\}$	11. $\{(1,a),(2,a),(1,b)\}$
4. $\{(2,b)\}$	8. $\{(2,a),(1,b)\}$	12. $\{(1,a),(2,a),(2,b)\}$

(1). چهار subsets دیگر $T\times S$ را بیرون نویس کنید.

(2). هریک ازین subsets های $T \times S \times \cdots$ بنام یک ________ در $T \times S$ یاد میشوند.

حل: (1). 13. $\{(1,a),(1,b),(2,b)\}$ 15. $\{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b)\}$ 14. $\{(2,a),(1,b),(2,b)\}$ 16. Φ
(2). binary relation

115. یک binary relation در $S \times S$ معمولاً بنام یک binary relation در S یاد میگردد. بطور مثال، اگر ... $S=\{1,2,3\}$ بوده پس درینصورت $S \times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ میشود. اگر ... $R=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ باشد؛ دیده میشود که یک R subset $S \times S$ بوده بنام ________ در S یادمیگردد.

حل: binary relation

تبصره: بخاطر باید داشت که binary relation عبارت از یک set ست، طوریکه عناصر آنرا جوره های مرتب تشکیل میدهند. کلمه "دوگانه ای ویا دوتائی" "binary" به جوره ها مرجع میشود، کلمه "رابطه ویا" "relation" بمفهوم که در مثال ذیل توضیح میشود اشتقاق میشود؛ بالفرض $S=\{1,2,3\}$ باشد پس $S \times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ میشود.

اگر بعضی از subsets های این $S \times S$ باساس کدام شرط انتخاب گردد، یکعده ازین جوره های مرتب $S \times S$ انتخاب و در subset مطلوب شامل گردیده وعده دیگر ازینکه دیده میشود که شرط داده شده را تعقیب نمیتوانند صرف نظر میشود. اگر واضح تر بگوییم یک جوره مرتب که شرط داده شده را قبول میکند انتخاب میشود و جوره مرتب که شرط داده شده را قبول وتعقیب نمیکند انتخاب نمیشود. coordinates های جوره مرتب منتخبه که باساس رابطه وشرط داده شده باهم ارتباط دارند، حالانکه coordinates های جوره مرتب غیرمنتخبه باساس شرط مفروض باهم ارتباط ندارند. توضیح مثال ذیل به موضوع بیشتر روشنی خواهد افگند:

111. بطور مثال اگر مثال فوق، $S \times S$ ، subset تمام جوره های ترتیب که بشکل (x,y) بوده طوریکه در رابطه "x کمتر است از y" را تعقیب میکند عبارت است از: ______ .

> حل: $\{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

112. اگر $S=\{1,2,3\}$ مفروض بوده پس درینصورت:

$S \times S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ میشود.

(1). آنجوره های ترتیب $S \times S$ که به شکل (x,y) بوده طوریکه $x+y = 4$ شده باشد، ثبت نمائید.

(2). جوره های مشخص رابطه (1) یک subset، $S \times S$ بوده و گفته میشود که این set مذکور یک ______ را در S بوجود می آورد.

> حل: (1). $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$
> (2). binary relation را در S تشکیل میدهد.

113. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{\alpha\}$ مفروض باشد، پس درینصورت:

$S \times T=\{(1,\alpha),(2,\alpha),(3,\alpha)\}$ میشود. تمام subset های $S \times S$ را بنویسید:

> حل: $\{(1,\alpha),(2,\alpha),(3,\alpha)\}$, $\{(1,\alpha),(2,\alpha)\}$, $\{(1,\alpha),(3,\alpha)\}$, $\{(2,\alpha),(3,\alpha)\}$
> $\{(1,\alpha)\}$, $\{(2,\alpha)\}$, $\{(3,\alpha)\}$, Φ

114. از مثالیکه در رج به subsets داریم بخاطر خواهید داشت که اگر $S \times T$ یک set معین finite set که دارای n عنصر باشد (هر کدام آن یک جوره ترتیب است) باشد. پس 2^n subset های set، $S \times T$ موجود شده میتواند که هر کدام آن ها یک ______ را در ______ بوجود می آورد.

> حل: binary relation ، $S \times T$

115. دو sets S و T موجود اند، عناصر set R که یک subset $S\times T$ است، توسط کدام شرط که بالای coordinates های جوره‌های مرتب عناصر $S\times T$ تحمیل میشود تعیین میگردند. بطور مثال، اگر $V=\{-3,1,5\}$ باشد، پس $V\times V=\{(-3,-3),(-3,1),(-3,5),(1,-3),\ldots,(5,5)\}$ بوده (آنرا تکمیل کنید). درصورتیکه R کدام subset $V\times V$ باشد طوریکه عناصر آن (x,y) شرط و رابطهٔ: $x\cdot y>0$ را تعقیب میکند، شکل roster، R را بنویسید.

حل: $V\times V=\{(-3,-3),(-3,1),(-3,5),(1,-3),(1,1),(1,5),(5,-3),(5,1),(5,5)\}$

$R=\{(-3,-3),(1,1),(1,5),(5,1),(5,5)\}$.

116. در سوال (115) R را طبق ذیل معرفی کرده میتوانستیم:

$R=\{(x,y)\mid x,y\in V \text{ and } x\cdot y>0\}$.

بهمین قسم اگر $T=\{1,2,3\}$ بوده و همچنان اگر $R_1=\{(x,y)\mid x\in T, y\in T \text{ and } x<y\}$ باشد، این طرز نشانه گذاری خاطرنشان میسازد که R_1 یک binary relation در T است، طوریکه $x\in T$ و هم $y\in T$ بوده و $x<y$ میباشد.

(1). شکل roster $T\times T$ را بنویسید.

(2). R_1 را بشکل roster آن تعیین کنید.

حل: - (1). $T\times T=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

(2). $R=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

117. اگر $S\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ بوده و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x+y=4\}$ باشد.

(1). set S را تعیین کنید. (2). شکل roster R را بنویسید.

(3). چون R یک subset $S\times S$ است، پس R یک ______ در S میباشد.

حل: (1). $S=\{1,2,3\}$، (2). $R=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$، binary relation

۱۱۸. فرضاً $S=\{1,3,5\}$ باشد.

(1). شکل roster ، $S\times S$ را بنویسید.

(2). اگر $R=\{(x,y) \mid x\in S, y\in S \text{ and } x+y=11\}$ باشد شکل roster R را بنویسید.

حل: (1). $S\times S=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$ (2). $R=\Phi$

۱۱۹. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } (x-y)\div 3=k\}$ باشد، (در حالیکه k یک عدد تام است).

(1). شکل roster ، R را بنویسید.

(2). R یک binary relation را در S بوجود می آورد زیرا ________ $S\times S$ است.

حل: (1). $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,4),(4,1)\}$ (2). یک subset

۱۲۰. اگر I، ست اعداد تام Integers بوده و $R=\{(x,y) \mid x\in I, y\in I \text{ and } x=y+2\}$ باشد. پس دیده میشود که $(3,1)\in R$ بوده زیرا که $3\in I$ و $1\in I$ بوده و $3=1+2$ میشود. بهمین قسم $(-5,-7)\in I$ است زیرا: $-5\in I$ و $-7\in I$ بوده $-5=-7+2$ میشود. اما $(7,8)\notin R$ زیرا ________.

حل: $7\neq 8+2$.

۱۲۱. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } x+y\neq 3\}$ باشد.

(1). $R=\{$ ________________ $\}$

(2). چون R یک subset $S\times S$ بوده پس R ________ در S است.

حل: (1). $\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$. (2). binary relation

.122 فرضاً: $S=\{1,2,3\}$ و

$R=\{(x,y)\mid x\in S, y\in S \text{ and } x+y=7\}$ باشد.

(1). شکل roster، R عبارت از ______ میباشد.

(2). چون R یک subset، $S\times S$ است پس R یک ______ را در S بوجود می آورد.

حل: (1). $R=\phi$ ، (2). binary relation.

.123 (1). یک binary relation، R در یک set، S عبارت از یک set ______ است. یک set جوره های مرتب بصورت خاص الخصوص دیگری انتخاب شده میتوانند که درخصوص $(x,y)\in R$ گردیده زیرا که این جوره های مرتب تحت انتخاب گردیده اند؛ مگر معمولاً چنین ذوات بصورت عموم جوره های مرتب مربوط R را طوری انتخاب مینمایند که بین coordinates های اول و دوم آن یک رابطهٔ معیّنه موجود میباشد.

بطور مثال، شرط: "x کوچکتر ویا مساوی y" در $S\times S$ در حالیکه S، set اعداد تام باشد یک set، R را که عناصر آن عبارت از آن جوره های مرتب $S\times S$ اند که رابطه و شرط داده شده خود را تعقیب نمایند، تعیین میکند. همین set R یک رابطه binary relation را در S بوجود می آورد.

(2). آیا $(5,3)\in R$ است؟ چرا؟

(3). آیا $(-3,-5)\in R$ است؟ چرا؟

(4). آیا $(2,2)\in R$ است؟ چرا؟

(5). آیا $(-5,-1)\in R$ است؟ چرا؟

حل: (1). ordered pairs، جوره های مرتب،

(2). نخیر! زیرا: $5\nleq 3$،

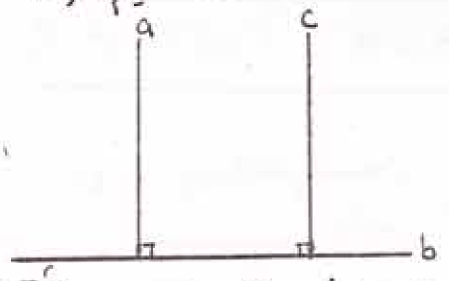
(3). نخیر! زیرا: $-3\nleq -5$،

(4). بلی! زیرا: $2=2$، (5). بلی! زیرا: $-5<-1$.

124. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } x=2y\}$ باشد شکل roster ، R را بنویسید.

حل: $R=\{(2,1),(4,2)\}$

125. اگر $S=\{a,b,c\}$ ، در حالیکه a ، b و c خطوط مستقیم مشترک المستوی که در شکل ذیل نشان داده شده میباشند. شکل roster ، set R را بنویسید در صورتیکه set R مذکور طبق افاده ذیل تعریف شده است:



$R=\{(x,y) \mid x\in S,\ y\in S \text{ and } x\perp y\}$. ($\perp$ = عمود است)

حل: $R=\{(a,b),(b,a),(c,b),(b,c)\}$

126. فرضاً $S=\{1,2,3\}$ باشد.

(1). شکل roster ، $S\times S$ را بنویسید.

(2). اگر $R=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } x=y\}$ ، شکل roster ، R را بنویسید.

(3). R یک subset ، $S\times S$ است پس ______ در S است.

(4). ملاحظه شرط: "=" معمولاً بحیث "رابطه "="" استعمال شده اما بخاطر باید دانست که یک "رابطه دوگانه ای binary relation" "شرط" و conditions مانند $\subset$ ، $\cong$ ، $<$ ، $=$ وغیره "نیست" بلکه یک binary relation عبارت از یک ______ $S\times S$ است که عناصر آن توسط یک شرط داده انتخاب میگردند.

حل: (1). $S\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
(3) binary relation .
(2). $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
(4). یک subset .

.127 اگر S یک set غیر خالی nonempty set، set اعداد Reals* و $R=\{(x,y)\mid x\in S,\ y\in S \text{ and } x<y\}$ باشد.

(1). چون R یک subset، $S\times S$ بوده، پس R ________ در S میباشد.

(2). اگر دقت شود دیده میشود که R بصورت مکمل توسط شرط "<" در S تعیین میشود. و ازینجا بعضاً بر میرسد که شرط: "کوچکتر است از" انقدر عمومیت یافته که شمول خاص "<" را حاصل گردیده است. که همچنان بنابر این عمومیت تعیین شده نیز R را توسط "رابطهٔ" "< relation" در مجموعه ارائه خواهیم کرد. اما بخاطر باید داشت که binary relation R عبارت از ________ $S\times S$ بوده نه علامه "<".

حل: (1). binary relation   (2). subset، $S\times S$ بوده

.128 فرضاً S یک set و R یک رابطه شرط: (مانند "کوچکتر است از" "... پدر ... است") را که شاید و یا نشاید در بین عناصر جوره‌های مرتب S موجود باشد، نشان دهد. پس درینصورت:

$R=\{(x,y)\mid x\in S,\ y\in S \text{ and } xRy\}$ عبارت از یک binary relation، S که این شرط داده شده R را عنوان تعقیب میکند میباشد.

اگر دقت شود دیده میشود که R صرف عناصر (جوره) $S\times S$ را در بر میگیرد که شرط xRy را تعقیب میکنند. یا بعبارت دیگر: اگر $(x,y)\in R$ باشد پس بالعموم: $x,y\in S$ و هم چنان "x دارای رابطهٔ R با y است." میباشد. بالعکس اگر $x,y\in S$ بوده و $(x,y)\notin R$، درینصورت: "x دارای رابطه R با y نمیباشد." درصورتیکه: $x,y\in S$ اند:-

(1). اگر x دارای رابطه R با y باشد درینصورت: ________ $\in R$ میباشد.

(2). اگر x دارای رابطه R با y نباشد درینصورت: ________ $\notin R$ نمیباشد.

حل: (1). (x,y) ، (2). (x,y)

* Reals (حقیقی)

129. بالفرض S یک set تمام انسان ها و بهمین قسم:
$R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and }$ x پدر y است $\}$ را نشان دهد.
درینصورت R عبارت از یک binary relation در S را بوجود آورده که تمام (x,y) عناصر S را که رابطهٔ "x پدر y است" را تعقیب میکنند، دربردارد.
اگر احمد پدر محمود باشد، پس جوره مرتب (محمود، احمد) در R شامل میباشد. و اگر مسعود پدر فریده نیست پس جوره مرتب (فریده، مسعود) شامل R نمیباشد.

(1). اگر زید پدر شاکر است پس ______ $\in R$ میباشد،
(2). اگر زلمی پدر طالب نیست پس ______ $\notin R$ میباشد.

حل: (1). (شاکر، زید)، (2). (طالب، زلمی)

130. اگر یک set، S مفروض و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x+y=1\}$ باشد.
بالفرض $a,b\in S$ و $a+b=1$ باشد کدام یک از دو افاده ذیل حقیقت است:
$(a,b)\in R$ و یا $(a,b)\notin R$.

حل: $(a,b)\in R$

131. یک set، S داده شده و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x+y=1\}$ باشد.
بالفرض $a,b\in S$ بوده و $a+b\neq 1$ باشد کدام یک از دو افاده ذیل حقیقت دارد:
$(a,b)\in R$ و $(a,b)\notin R$.

حل: $(a,b)\notin R$

132. یک set، S و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x<y\}$ مفروض اند.
فرضاً $a,b\in S$ و $(a,b)\in R$ باشد کدام شرط بین a و b موجود است:

حل: $a<b$

.133 یک set S و یک رابطهٔ binary relation R در S طوریکه $R=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x<y\}$ مفروض اند.
بالفرض $a,b \in S$ بوده آنه $(a,b) \notin R$ باشد،
پس کدام رابطه بین a و b موجود شده میتواند؟

حل: $a \nless b$ (که درینصورت $a \geq b$) میباشد.

.134 اگر یک set S و روابط:-
$$R_1=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x<y\}$$
$$R_2=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x=y\}$$
$$R_3=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x>y\}$$
مفروض باشند
(1). اگر $a,b \in S$ بوده و $a=b$ باشد پس $(a,b) \in$ ــــ میشود.
(2). اگر $a,b \in S$ بوده و $a \neq b$ باشد پس $(a,b) \in$ ــــ میباشد.
(3). اگر $a,b \in S$ و $(a,b) \in R_3$ باشد، رابطه که بین a و b موجود است تعیین کنید.

حل: (1). $(a,b) \in R_2$ ، (2). R_1 و یا R_3 و یا $(R_1 \cup R_3)$.
(3). $a>b$

.135 یک set S و $R=\{(X,Y) \mid X,Y \in S \text{ and } X \subset Y\}$ داده شده
بالفرض $A,B \in S$ و $B \subset A$ باشد، پس کدام یک از
دو رابطهٔ ذیل صحت دارد: $(A,B) \in R$ و یا $(B,A) \in R$ ؟

حل: $(B,A) \in R$

.136 اگر S یک set و $R=\{(X,Y) \mid X,Y \in S \text{ and } X \subset Y\}$ مفروض باشند
بالفرض $A \in S$ بوده درحالیکه A عبارت از یک set یک

(۱). آیا $A \subset A$ صحت حقیقت دارد؟

(۲). کدام یک از دو ارائه ذیل حقیقت دارد:

$(A,A) \in R$ ، $(A,A) \notin R$.

حل: (۱). بلی. (۲). $(A,A) \in R$.

137. اگر $S = \{0,1,2\}$ و $R = \{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x = y^2\}$ باشد؛

آیا $(2,1) \in R$ میباشد؟ چرا؟

حل: (۱). نخیر! زیرا: $2 \neq 1^2$

138. اگر $S = \{0,1,2\}$ و $R = \{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x = y^2\}$ باشد،

(۱). آیا $(9,3) \in R$ است؟

(۲). آیا $(1,1) \in R$ است؟

حل: (۱). نخیر! زیرا گرچه $9 = 3^2$ است امّا $9 \notin S$ ، 3 نمی باشد.

(۲). بلی! زیرا $1 = 1^2$ بوده و $1 \in S$ ، 1 میباشد.

139. اگر $S = \{0,1,2\}$ و $R = \{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x = y^2\}$ باشد،

آیا $(4,2) \in R$ ؟ چرا؟

حل: نخیر! زیرا $4 \notin S$ و یا $(4,2) \notin S \times S$.

140. اگر $S = \{a,b,c,d\}$ و $R = \{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x = y^2\}$ باشد،

اگر $b^2 \neq d$ باشد، محض یک عنصر $S \times S$ را که

شامل R نباشد، نام ببرید.

حل: (d,b)

۱۴۱. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x=y^2\}$ باشند، درصورتیکه اگر $a^2=b$ باشد، محض یک عنصر R را نام بگیرید.

حل: (b,a)

۱۴۲. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x=y^2\}$ باشند، بالفرض $(c,a)\in R$ باشد، شرطیکه در بین a و b موجود میشود کدام است؟

حل: $c=a^2$

۱۴۳. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x=y^2\}$ باشند، بالفرض $(b,d)\notin R$، یک کدام رابطه بین b و d موجود میباشد؟

حل: $\neq$

۱۴۴. فرضاً S یک set، انسان ها و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x$ پدر y است$\}$ باشد،

(1). اگر $(a,b)\in R$ باشد، پس ـــــ پدر ـــــ میباشد.

(2). اگر اگر $a,b\in S$ بوده و a پدر b باشد، پس ـــــ میباشد.

(3). اگر $a,b\in S$ بوده، اما $(a,b)\notin R$، پس درینصورت ـــــ پدر ـــــ نمیباشد.

(4). اگر $a,b\in S$ بوده اما a پدر b نیست، درینصورت ـــــ میباشد.

حل:
(1). a ، b
(2). $(a,b)\in R$ ،
(3). a ، b
(4). $(a,b)\notin R$

145. فرضاً S یک set انسان‌ها بوده و
$R=\{(x,y) \mid x,y \in S$ and x شوهر y است$\}$ باشد،
چون R یک subset $S \times S$ است.

(1). R یک ______ در S است. اگر احمد شوهر زینب باشد، پس $($زینب، احمد$) \in R$ بوده و به همین قسم اگر زلمی شوهر شکریه باشد، پس $($شکریه، زلمی$) \in R$ میباشد.

(2). برای هر جوره مرتب $(x,y) \in R$ عبارت: ______ حقیقت دارد.

حل :- (1) binary relation. (2) x شوهر y است.

146. یک عده نقاط روی یک خط مستقیم که به S نشان داده شده مفروض اند، ضمناً یک شرط R: (مانند: "... کوچکتر است از ..."، "... دورتر است از ..."، "$\cong$") که یک رابطهٔ binary relation R را در S تعیین میکند، طوریکه: $R=\{(x,y) \mid x,y \in S$ and $xRy\}$ میباشد.

(1). اگر $(a,b) \in R$ باشد، پس aRb است.

(2). اگر $a,b \in S$ و aRb باشد، پس $(a,b) \in R$ است.

(3). اگر $a,b \in S$ بوده و $(a,b) \notin R$، پس a رابطهٔ R را به b ندارد.

(4). اگر $a,b \in S$ بوده آنا a رابطهٔ R را به b ندارد، پس $(a,b) \notin R$.

این مسأله مستوجب جواب نیست.

147. فرضاً $S=\{a,b\}$ و $T=\{c,d,e\}$ و
$R=\{(a,c),(a,e),(b,d)\}$ باشد.

(1). R یک رابطهٔ ______ است.

اکثراً عضویت :- $(a,b) \in R$ را توسط علامه گذاری notation.
aRb نشان میدهند که به عبارت: "a توسط رابطهٔ R به b ارتباط دارد" افاده میگردد. و همچنان

$(b,c)\notin R$ توسط تمثیل $b \not R c$: افاده شده که بعبارت :
" b رابطهٔ R را به c ندارد " خوانده میشود. بهمین قسم :

(2). $(a,e)\in R$ با ______ ،
(3). $(a,d)\notin R$ با ______ ،
(4). ______ با bRd ،
(5). ______ با $b \not R c$ افاده شده میتوانند.

حل : (1). binary relation را در $S\times S$ بوجود می‌آورد.
(2). aRe ، (3). $a\not R d$
(4). $(b,d)\in R$ ، (5). $(b,c)\notin R$.

148. بالفرض : $S=\{-1,0,1,2\}$ و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x^2\le y\}$ باشند.
درینصورت $(-1,1)\in R$ بوده یعنی : $-1R1$ است. بهمین قسم :

(1). $(0,2)\in R$ ویا ______ ،
(2). $(1,0)\notin R$ ویا ______ ،
(3). ______ ویا $1R1$ میباشند.

حل : (1). $0R2$ ، (2) $1\not R 0$ ، (3) $(1,1)\in R$

149. بالفرض $S=\{5,6,7\}$ و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S$ and x و y دارای عین باقیمانده باشند اگر به 2 تقسیم گردند $\}$ باشد.
درینصورت هردو علامه گذاری notations ی $(7,5)\in R$ و $7R5$ عین مفهوم را توضیح نموده وقابل قبول اند.
علامه گذاری نوع اول binary relat. R را بحیث یک set تاکید نموده ، حالانکه علامه گذاری نوع دوم یعنی : $7R5$ موجودیت شرط (معیّنه) داده شده را بین عناصر جوره‌های مرتب تاکید و توضیح میکند. که بنابر خواندن عبارات - اینگونه (وتوسط شان) علامه گذاری ازهم تمیز شده میتوانند. جوره مرتب $(7,5)$ عضویت set

R را ارائهٔ کرده ، حالانکه افادهٔ: " 7 رابطهٔ R به 5 " موجودیت شرط R را بین {coordinates یعنی 7 و 5 تاکید میکند. یا بالفاظ دیگر: " 7 در رابطهٔ R به 5 " افاده میکند که اگر 7 و 5 به 2 تقسیم گردند دارای عین باقیمانده میباشند.

(1). شکل roster $S\times S$ را بنویسید.

(2). شکل roster R را بنویسید.

حل: (1). $S\times S=\{(5,5),(5,6),(5,7),(6,5),(6,6),(6,7),(7,5),(7,6),(7,7)\}$ (2). $R=\{(5,5),(5,7),(6,6),(7,5),(7,7)\}$

150. در دو set مفروض S و T ، set جوره ای ترتیب (x,y) طوریکه $x\in S$ و $y\in T$ باشد، ________ S و T را تشکیل نموده ، که به $S\times T$ طوریکه: $S\times T=$ ________ ، ارائه میشود. هر کدام یک از subset ، $S\times T$ (بشمول خود $S\times T$ و empty set) یک ________ را در $S\times T$ بوجود می آورد.

حل: حاصل ضرب دکارتی یا cartesian product ، $S\times T=\{(x,y)\mid x\in S, y\in T\}$ ، binary relation

151. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x>y\}$ باشند، کدام یک از افاده ای ذیل حقیقت دارد:

2R1 ، 3R1 ، 2R2 ، 2R3

حل: 2R1 ، 3R1

152. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x>y\}$ باشند، کدام یک از افاده ای ذیل صحت حقیقی دارد:

$(2,1)\in R$ ، $(3,1)\in R$ ، $(2,2)\in R$ ، $(2,3)\in R$

حل : $(3,2)\in R$ ، $(2,1)\in R$

153. بعضی اوقات به یک شرط که یک binary relation R را تعریف میکند بهتر است که یک شمبول و علامهٔ مخصوص داده شود. بطور مثال، فرضاً که S set اعداد reals ارائه کرده و ....
$R=\{(x,y)|x,y\in S$ and x کوچکتر است از $y\}$ باشد، درینصورت اگر عبارت "کوچکتر است از" به علامه و شمبول "$<$" افاده شود آسانتر میباشد. پس بجای عبارت فوق را به $x R y$ افاده کنیم اورا به ______ نشان میدهیم.

حل : $x<y$

154. بهمین قسم اگر S، set تمام خطوط یک مستوی را ارائه کند و $R=\{(x,y)|x,y\in S$ and x عمود است بر $y\}$ باشد، درینجا است بهتر و موزونتر خواهد بود که اگر عبارت "عمود است بر" توسط شمبول "$\perp$" افاده شود. پس بجای علامه گذاری $p R q$ میتوانیم که ______ را نوشته کنیم، یعنی بعوض R علامه ______ را بنویسیم.

حل : $p\perp q$ ، $\perp$

155. اگر S، عبارت از set اعداد حقیقی بوده و $R=\{(x,y)|x,y\in S$ and x مساوی است به $y\}$ باشد، اصطلاح عبارت : "مساوی است به ..." را به علامهٔ "$=$" افاده کرده میتوانیم. پس درینصورت $x R y$ را به شکل ______ نوشته مینمائیم.

حل : $x=y$

156. فرضاً S، set تمام مثلث‌ها را ارائه کرده و
$R=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } x$ انطباق پذیر y است$\}$ باشد،
درینحالت بعوض اینکه بنویسیم xRy، ما سمبول انطباق پذیر
بودن «$\cong$» را بکار برده و عبارت: "x انطباق پذیر y است"
را به ______ افاده میکنیم.

حل: $x \cong y$

157. اگر S، set تمام خطوط مستقیم و
$R=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } x$ موازی به y است$\}$ نشان دهند،
درینصورت افاده: xRy به شکل ______ ارائه شده میتواند.

حل $x \parallel y$

158. بالفرض که S یک set ای را که عناصر آن را sets های دیگر تشکیل
کرده باشند، ارائه کند. اگر: . . . . . .
$R=\{(X,Y) \mid X,Y\in S$ و Y یک subset $X\}$ باشد.
درصورتیکه $(A,B)\in R$ بوده بجائیکه آنرا به ARB افاده کنیم
بهتر است که آنرا توسط افاده ______ توضیح نمائیم.

حل: $A \subset B$

159. از بررسی مسایل 153 الی 158 به این نتیجه میرسیم که اگر
برای توضیح کدام شرطیکه یک binary relation R را بوجود
می آورد ~~...~~ سمبول مخصوص موجود باشد، درینصورت برای
افاده: $(x,y)\in R$ که به ~~...~~ xRy ارائه شده
میتواند ما از استعمال سمبول مربوط آن کار گرفته طوریکه بجای
R بین x و y سمبول مذکور را مینویسیم.

بهمین قسم افاده $(x,y)\notin R$ را که توسط : $x \not R y$ نشان داده میشود میتوانیم که $\not R$ را توسط سمبول ربط شرط داده شده ارایه نماییم؛ طوریکه بالای سمبول مذکور یک خط مایل کش میکنیم.
بطور مثال، اگر : $R=\{(x,y) \mid x,y \in \text{Integers and } x<y\}$ باشد، پس $(5,2)\notin R$ که چنین $5 \not R 2$ نمایش داده میشود.
و ما میتوانیم افاده ذیل : ——— افاده و توضیح نماییم.

حل : $5 \not< 2$

160. بهمین قسم بالفرض $R=\{(x,y) \mid x,y \text{ خطوط مستقیم and } x \perp y\}$ باشد، پس اگر $(a,b)\in R$ باشد درینصورت : aRb به $a \perp b$ ارائه کرده میتوانیم. و بهمین قسم ما میتوانیم که $a \not R b$ را به ——— نشان دهیم.

حل : $a \not\perp b$

161. تا حال شما بکثرت از سمبولها و علایم مانند : " $>$ ، $<$ ، $\leq$ ، $\geq$ ، $=$ ... " برای تعیین شرایط بین اعداد و بهمین قسم به علایم و سمبولهای مانند : " $=$ ، $\sim$ ، $\cong$ و $\perp$ ... " برای تعیین شرایط بین شکلهای هندسی آشنایی حاصل کرده اید. هرکدام ازین علایم یک شرط را که باعث بوجود آمدن یک subset یک set حاصل ضرب دکارتی cartesian Product که یک ——— در آن میباشد، افاده میکند. درجمله این شرایط - حالات که ما به آن بیشتر آشنا هستیم عبارت از "رابطه مساوات" equals relation " $=$ " و رابطه " less than relation " در امثال آن میباشد.

حل : binary relation

162. تا حال با کشف یک گروپ ویا تیم theme ویا مفکوره اساسی که زیربنای تمام مفکوره های مشابه که هوکدام آن ها یک binary relation را در یک set ، حاصل ضرب دکارتی بوجود می آورد آماده گردیده ایم. و آن مفکوره اساسی عبارت از ینست که هر یک binary relation یک ________ set حاصل ضرب دکارتی میباشد.
حال میخواهیم که درین binary relation ها را به اساس مشخصات مربوط آن ها دسته بندی کنیم. بطور مثال، ما میتوانیم که آنها را با اساس خواص مشخصه آن ها از قبیل: تساوی الاضلاع، تساوی الساقین، مختلف الاضلاع، قایمه الزاویه وغیره ... دسته بندی نمایم.

حل: subset

امتحان دوم :- Test-II

1. درین مبحث هدف اصلی ما را مطالعه روابط که در مثال ذیل نمونه آن توضیح میشود تشکیل داده است :-
اگر $S=\{0,1,2\}$ و رابطه: "$\le$" مفروض باشد.
(1). شکل roster $S\times S$ را بنویسید.
(2). اگر $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\le y\}$ باشد، شکل roster آنرا بنویسید.
(3). چون R یک subset ، $S\times S$ است پس R ________ در که میباشد.

2. یک binary relation را در $S\times T$ تعریف کنید.

3. اگر R یک binary relation در که باشد. پس R یک subset ، $S\times S$ است که عناصر آن را جوره های مرتب تشکیل میدهند. اگر (x,y) شامل R باشد درینصورت دیگر افاده: $(x,y)\in R$ عبارت از ________ میباشد.

IV. خواص یک رابطهٔ دوگانه ای :

Properties of A Binary Relation

IV-a. انعکاسی   a. Reflexive

حال میخواهیم که مشخصات و خواص یک binary relation را در یک set، که جستجو نمایم. ما مطالعهٔ خواص binary relation را در که نظر به مطالعه آن در $S \times T$ ترجیح میدهیم و این بنابر دلیل است که روابط مانند: " $=$، $\cong$، $|$، $<$، و امثال آن" (که ما به آن بیشتر سروکار داریم) بالای عناصر یک set زیاد که بیشتر مورد تطبیق قرار می گیرند.

.163 اگر $S=\{1,2,3\}$ باشد،

(1). شکل roster $S \times S$ را بنویسید.

(2). رابطهٔ " $=$ " را مد نظر گرفته، طوریکه رابطهٔ مذکور یک رابطهٔ binary relation R را طوریکه:

$R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x=y\}$ بوده، تشکیل میدهد.

شکل roster، R را بنویسید.

حل: (1). $S\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
(2). $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

.164 اگر $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و $R=\{(x,y)|x\in S, y\in S \text{ and } x=y\}$ باشد.

شکل roster، R را بنویسید.

حل: $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9)\}$

.165 اگر I، set Integers یعنی: $I=\{\dots,-1,0,1,2,3,\dots\}$ باشد
درینصورت $I\times I=\{(x,y)\mid x\in I \text{ and } y\in I\}$ میباشد
اگر: $R=\{(x,y)\mid x,y\in I \text{ and } x=y\}$ بوده، چند عنصر
set R را لست کنید.

حل: $(-3,-3)$ ، $(0,0)$ ، $(1000,1000)$ وغیره مثال این که هرجوړه مرتب که بشکل (x,x) بوده درحالیکه $x\in I$ باشد یک عنصر set R میباشد.

.166 فرضاً $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x=y\}$ باشد
شکل roster، R را بنویسید.

حل: $R=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

.167 اگر توجه به بودن coordinates عناصر جواب چند مثال فوق الذکر
توجه بعمل آید دیده میشود که برای هر $x\in S$: —
$(\_\_,\_\_)\in R$ میباشد.

حل: $(x,x)\in R$

.168 اگر $S=\{\{p\},\{q,r\},\{a,b\}\}$ باشد، (1). شکل roster، $S\times S$ را بنویسید.
(2). شکل roster، R را بنویسید درصورتیکه:
$R=\{(A,B)\mid A,B\in S \text{ and } A\subset B\}$.
(3). درینجا نیز دیده میشود که برای هر $x\in S$، پس $\_\_\_\in R$ میباشد.

حل: (1). $S\times S=\{(\{p\},\{p\}),(\{p\},\{q,r\}),(\{p\},\{a,b\}),(\{q,r\},\{p\}),(\{q,r\},\{q,r\}),$ $(\{q,r\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{p\}),(\{a,b\},\{q,r\}),(\{a,b\},\{a,b\})\}$.
(2). $R=\{(\{p\},\{p\}),(\{q,r\},\{q,r\}),(\{a,b\},\{a,b\})\}$.
(3). $(x,x)\in R$.

.169 اگر $S=\{3,4,5\}$ باشد:
(1). شکل roster ، $S\times S$ را بنویسید.
(2). اگر $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x+y= \text{یک عدد جفت است}\}$ باشد شکل roster ، R را بنویسید.
(3). آیا شرط که اگر هر $x\in S$ باشد پس $(x,x)\in R$ در این حالت تحقق پذیر میباشد؟

حل :- (1). $S\times S=\{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$
(2). $R=\{(3,3),(3,5),(4,4),(5,3),(5,5)\}$
(3). بلی به جوره‌های مرتب : $(3,3)$ ، $(4,4)$ ، $(5,5)$ توجه فرمائید.

.170 اگر $S=\{2,3,4,5\}$ و $R=\{(x,y)\mid x\in S, y\in S \text{ and } x\leq y\}$ باشد:
کدام یک از جوره‌های مرتب ذیل شامل set ، R است.
$(2,2)$ ، $(3,3)$ ، $(4,4)$ ، $(5,5)$ ، $(5,3)$ ، $(4,2)$ ، $(3,2)$ ، $(2,3)$.

حل : $(2,2)$ ، $(3,3)$ ، $(4,4)$ ، $(5,5)$ ، $(2,3)$. R دارای عناصر دیگر مانند $(3,5)$ نیز میباشد

.171 اگر $S=\{T_1,T_2,T_3\}$ بوده درحالیکه : T_1 ، T_2 ، T_3 مثلث‌ها اند.
اگر $R=\{(A,B)\mid A,B\in S \text{ and } A\cong B\}$ باشد. کدام یکی جوره‌های مرتب ذیل شامل R اند. (تذکر باید داد که هر مثلث با خودش رابطه " $\cong$ " را تحقیق پذیر است) (T_1,T_1) ، (T_2,T_2) ، (T_3,T_3) .

حل : تمام این جوره‌های مرتب شامل R اند. علاوه بر آن R دارای عناصر دیگر نیز میباشد.

.172 اگر P عبارت از set اعداد مثبت تام باشد و اگر $R=\{(x,y)\mid x,y\in P \text{ and } x \text{ یک قاسم } y \text{ است}\}$ باشد، پس

کدام ها از جوره های مرتب ذیل شامل $S \times S$ شده میتوانند ؟

$(1,1)$، $(2,2)$، $(3,7)$، $(5,38)$، $(16,16)$، $(16,4)$، $(100,3)$، $(20,20)$،

حل : $(20,20)$، $(16,16)$، $(2,2)$، $(1,1)$.

علاوه براین ها جوره های مرتب دیگری مانند: $(5,10)$، $(9,16)$، ... نیز موجود اند که شامل $S \times S$ میباشند.

---

173. در مسایل روابط جوره های 164 الی 172 دیده میشود که یک خاصیت مشترک بین تمام این binary relation های موجود است که ما افراز به:

(1). ـــــــ $\in R$ برای هر $x \in S$ توضیح داده میتوانیم.

بطور مثال، اگر $S=\{-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ و $R=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x \cdot y \geq 0\}$ باشد.

(2). گرچه $S \times S$ دارای تعداد زیاد عناصر دیگر هم است، نشان دهید که کدام ها از عناصر ذیل $S \times S$ شامل set R میباشند:

$(-2,-2)$، $(-1,-1)$، $(0,0)$، $(1,1)$، $(2,2)$

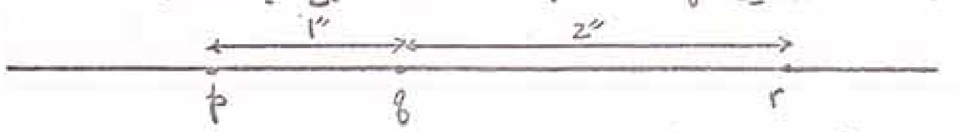
حل : (1). (x,x) .

نوت : بخاطر باید داشت که این روابط فوق برای هر binary relation تحقیق پذیر نیست. امثال که این مطلب را توضیح کند بعداً تقدیم خواهند شد.

(2). بلی ! تمام آن شامل R اند.

---

174. اگر : $S=\{p,q,r\}$ بوده درحالیکه p، q، r نقاط روی یک خط را طبق شکل ذیل نشان میدهند. اگر فاصله بین p و q به اندازه یک 1 انچ و فاصله بین q و r به اندازه 2 انچ باشد



(1). شکل roster، $S \times S$ را بنویسید.

(2). $R=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and }$ فاصله بین x و y کمتر از 2 انچ است $\}$ باشد،

شکل roster ، R رابنویسید.

(3) . آیا (p,p) ، (q,q) و (r,r) شامل R اند ؟

حل : (1) $\{(p,p),(p,q),(p,r),(q,p),(q,q),(q,r),(r,p),(r,q),(r,r)\}$

(2) . $R=\{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q),(r,r)\}$

(3) . بلی .

175 . اگر $S=\{0,1,2\}$ باشد :

(1) . شکل roster ، $S\times S$ را بنویسید . R را بنویسید .

(2) . اگر $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x\cdot y>0\}$ باشد ، شکل roster

(3) . آیا عناصر که فارم : (x,x) اند شامل R میباشد ؛ یا با الفاظ دیگر آیا (0,0) ، (1,1) ، (2,2) شامل R میباشند ؟

حل : (1) . $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$

(2) . $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

(3) . نه ! زیرا $(0,0)\notin R$.

این یک حالت است که در آن شرط : $(x,x)\in R$ برای هر $x\in S$ تحقیق پذیر نیست . چنانچه اگرچه $0\in S$ است نه $(0,0)\notin R$.

176 . هر binary relation — R در S که دارای خاصیت ——$\in R$ برای هر ——$\in S$ باشد ، گفته میشود که R مذکور دارای خاصیت انعکاسی یا relexive در S میباشد .

حل : (x,x) ، x

177 . در یک set ، S خاصیت انعکاسی reflexive را طبق ذیل تعریف میکنیم :

تعریف :- یک binary relation R در S گفته میشود که ———— است در صورتیکه بنابر هر $x\in S$ بالفرض $(x,x)\in R$ باشد .

حل : انعکاسی یا reflexive در S است . . .

178. اگر S یک set باشد، یک ____ R در S ____ گفته میشود، در صورتیکه برای ____ $x \in S$ بالفرض $(x,x) \in R$ باشد.

حل: binary relation ، reflexive ، هر (یعنی تمام x ها)

179. اگر S یک set باشد یک binary relation R در S، انعکاسی reflexive گفته میشود در صورتیکه: ____.

حل: برای هر $x \in S$ ، $(x,x) \in R$ باشد.

180. اگر S یک set باشد، اگر R یک binary relation در S باشد طوریکه ____، پس گفته میشود که R انعکاسی در S میباشد.

حل: $(x,x) \in R$ برای هر $x \in S$ گردد،

181. یک binary relation انعکاسی R را در S تعریف کنید.

حل: تعریف: یک binary relation ، R در یک set S انعکاسی ویا reflexive گفته میشود درصورتیکه برای هر $x \in S$ بالفرض $(x,x) \in R$ موجود باشد.

تبصره: -

اول: زمانیکه امکان وقوع کدام سو تفاهم موجود نباشد ما بیک binary relation - انعکاسی R را در یک - set - S، بعبارات ساده که: « R انعکاسی است » ویا « R دارای خاصیت انعکاسی است » بیان میکنیم، واگر امکان وقوع کدام سو تفاهم موجود باشد درینصورت میگوییم که « R یک binary relation - انعکاسی در S است. » ویا میگوییم که « R دارای خاصیت انعکاسی در S میباشد. »

دوم: در صورتیکه برای افاده یک binary relation کدام سمبول و یا علایم خاص مانند: « = ، ⊂ ، ≤ ، ≅ ، ⊥ ، ... » موجود باشد، درینصورت برای توضیح یک binary relation عوض از استعمال سمبول ها و یا علایم مربوط آن مستفید میشویم. بطور مثال، علامه: « = » را برای افاده مساوات، سمبول: « ≅ » را برای شرط: انطباق پذیری و به همین سمبول های: « ⊥ »، « | » و « ⊂ » را علی الترتیب برای توضیح شرایط: عمودیت، قاسم بودن، و subset بودن استعمال میکنیم.

سوم: ازینکه افاده $(x,x)\in R$ و افاده xRx هردو عین مفهوم را توضیح میکنند، پس بنابر خواهش خویش میتوانیم که خواه افاده: « برای هر که $x\in S$ بالفرد $(x,x)\in R$ میباشد.» و یا افاده: « برای هر که $x\in S$ بالفرد xRx است.» را بکار ببریم.

برای توضیح آن روابط، binary relation های که دارای سمبول و علایم مخصوص بوده (طوریکه در فوق ذکر شد) بهتر است که عندالّلزوم از استعمال سمبول آن ها استفاده بعمل آید. بطور مثال، بهتر خواهد بود که بجای استعمال افاده: « برای هر که $x\in S$ بالفرد $(x,x)\in R$ است.»، افاده: « برای هر که $x\in S$ بالفرد $x\le x$ است.» استعمال گردد، درصورتیکه R مورد نظر ما عبارت از subset، $S\times S$ که توسط شرط: « ≤ » تعیین شده است، باشد.

چهارم: - سعی نمی نمایم تا خواننده را به حفظ کردن لفظ با لفظ تعریفات داده شده تشویق کنیم. اما توقع داریم که مفکوره اساسی تعریفات را درک کرده باشد. برای رسیدن به این هدف، یک تعریف را بچندین عبارات بیان نموده ایم. چنانچه در ذیل تعریف خاصیت انعکاسی reflexive را به پنج عبارت که همهٔ آن ها عین مطلب را افاده میکنند بطور مثال بیان میکنیم:

۵. یک binary relation، R در یک set S انعکاسی است،

درصورتیکه $(x,x) \in R$ برای هر $x \in S$ کد باشد.
طوریکه قبلاً تذکر داده شده که افاده های: $(x,y) \in R$ و xRy
عین مفهوم را ارائه میکنند، پس تعریف فوق بشکل ذیل نوشته شده میتواند

b. یک binary relation R در یک set، S کد، انعکاسی reflexive شد، در صورتیکه: xRx برای هر $x \in S$ باشد.
بهمین قسم بنابر خواهش شخصی شما میتوانید که ترتیب کلمات را تغییر داده و تعریف فوق را بصورت ذیل بیان نمائید:

c. یک binary relation R در یک set، S کد، انعکاسی در کد شد در صورتیکه برای هر $x \in S$ بالفرد: $(x,x) \in R$ باشد.
وهمچنان شما میتوانید که بنویسید:

d. یک binary relation R در یک set، S کد انعکاسی در کد شد درصورتیکه برای هر $x \in S$ بالفرد xRx باشد.
ممکن شما به تغیر وارد کردن در عبارت فوق برای توضیح تعریف انعکاسی علاقمند باشید، درینصورت شما میتوانید که انرا بعبارت ذیل تعریف کنید:

e. اگر یک binary relation R در یک set، S کد طوری باشد که برای هر $x \in S$ رابطه: $(x,x) \in R$ موجود گردد، درینصورت گفته میشود که R انعکاسی شد در کد.

علاوه از استعمال عبارت فوق برای تعریف مفکوره انعکاسی شما میتوانید که تغیرات دیگری در عبارت فوق آورده و عین مطلب را افاده نمائید. چنانچه میتوانید بعوض کلمهٔ "هر" در افادهٔ بالا "هر کدام" ویا کلمهٔ: "هر کدام یک" را بکار برده و مطلب را بیان کنید.

چون تمام عبارات فوق متعادل یکدیگر بوده و هر یک از آن ها محض یک مفهوم و حقیقتهٔ انعکاسی reflexive را بیان میکنند، پس هر یکی از آن ها بحیث جواب صحیح قبول شده میتوانند. در حل مسایل ذیل اگر جواب شما خواه از نگاه شناختن عبارات ویا از نگاه افادهٔ سمبولیک symbolism مشابه (چنانچه اگر بجای افادهٔ $x, x\in R$ افادهٔ : xRx استعمال شده باشد.) با جواب مربوط مسأله فرق داشته باشد، درینصورت جواب شما نیز صحیح میباشد.

.182 فرضاً : $S=\{1,2,3,4,5\}$ و $R=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2),(5,1),(5,5)\}$ باشند:

(1) . آیا رابطهٔ: "برای هر $x\in S$ مستوجب: $(x,x)\in R$" تحقق پذیر است؟

(2) . پس درینصورت R انعکاسی ________ (در S است، ویا در S نیست).

حل : (1) . بلی ! زیرا : $1\in S\Rightarrow(1,1)\in R$ ، $2\in S\Rightarrow(2,2)\in R$ ، $3\in S\Rightarrow(3,3)\in R$ ، $4\in S\Rightarrow(4,4)\in R$ ، وبالاخره $5\in S\Rightarrow(5,5)\in R$
(2) . در S است.

.183 اگر $S=\{1,2,3,4,5\}$ و $R=\{(1,1),(2,2),(4,3),(4,4),(5,5)\}$ باشند:

(1) . آیا این حقیقت دارد که برای هر $x\in S$ ، $(x,x)\in R$ است؟

(2) . پس درینصورت R انعکاسی در S ________ . (است ویا نیست)

حل :- (1) . نخیر! زیرا: $3\in S$ بوده ولی $(3,3)\notin R$
(2) . نیست.

---

* سمبول ویا Notation "$\Rightarrow$" به معنی: ایجاب میکند که ویا مستوجب است استعمال میشود. چنانچه "$x\in S\Rightarrow(x,x)\in R$" چنین افاده میشود که هر $x\in S$ ایجاب میکند که $(x,x)\in R$ باشد.

184. فرضاً : $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ باشد :

(1). آیا حقیقت دارد که برای هر $x\in S$ ، xRx میباشد؟

(2). بنابران R یک binary relation انعکاسی در S ______ . (است ویا نیست)

حل : بلی ! زیرا برای هر $x\in S$ دیده میشود که $(x,x)\in R$ است . (1)

(2). است .

185. اگر $S=\{a,b,c\}$ باشد :

(1). شکل roster ، $S\times S$ را بنویسید .

(2). subset ، S را که set : $\{(x,x)\mid x\in S\}$ را افاده کند تشخیص نموده وشکل roster آنرا بنویسید .

حل :

(1). $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

(2). $\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

186. اگر S یک set بوده واگر شکل قطری diagonal form ، set ، $S\times S$ به Δ (دلتا delta) نشان داده شود درینصورت :

$\Delta=\{(x,x)\mid x\in S\}$ میباشد .

فرضاً : $S=\{a,b,c,d,e\}$ باشد :

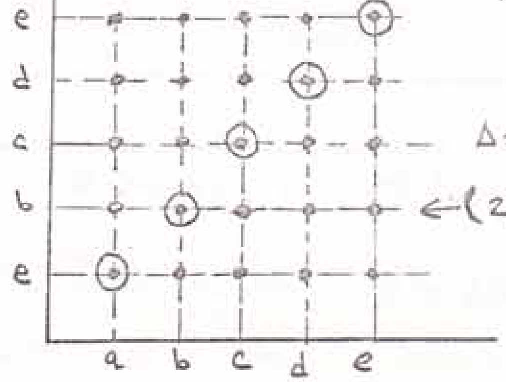
(1). شکل roster Δ را بنویسید .

(2). $S\times S$ را توسط گراف (Graphically) نشان بدهید .

(3). دور نقاط را که عناصر Δ را تشکیل میدهند دایره بکشید .

(4). حال شما میدانید که چرا Δ یک set ______ نامیده شده است .

حل : (1). $\Delta=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$



← (2) and (3).

(4). قطری

۱۸۷. به اساس مفکورهٔ یک set قطری Δ ، مفهوم انعکاسی را تعریف کنید.
یا بعبارهٔ دیگر اگر S یک set و R یک binary relation انعکاسی در S باشد، رابطه بین R و Δ را تعیین کنید. یا بالفاظ دیگر R یک رابطه binary relation انعکاسی در S است در صورتیکه ——— باشد.

حل: $\Delta \subset R$.
توجه فرمائید: - در صورتیکه $\Delta \subset R$ باشد، پس برای هر $x \in S$ ، $(x,x) \in R$ میگردد. دازین میدانید که R انعکاسی در S شده میتواند.

۱۸۸. فرضاً S یک set اعداد تام باشد در خصوص چه گفته‌اید که:-
$S = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ میشود.
اگر $R = \{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x \leq y\}$ باشد:
(1). ازینکه برای شرط داده شده درینجا دارای یک علامه سمبل مخصوص نمی باشیم، پس مختارتر است که از استعمال سمبول کار بگیریم. پس بجای اینکه بگوییم «آیا حقیقت است که برای هر $x \in S$ رابطه $(x,x) \in R$ موجود باشد؟» بهتر است که چنین افاده شود: «آیا حقیقت است که برای هر $x \in S$ رابطه: $x \leq x$ موجود میشود؟»
(2). آیا رابطه «$\leq$» انعکاسی شده میتواند؟

حل: (1). بلی، هر عدد تام کوچکتر یا مساوی بخودش شده میتواند.
(2). بلی.

۱۸۹. اگر S set اعداد تام باشد رابطهٔ «$<$» را در S درنظر بگیرید:
(1). آیا برای هر $x \in S$ رابطهٔ $x < x$ صحت حقیقت است؟
(2). بنابرین «رابطهٔ $<$» یک انعکاسی ——— .

حل: نه، چرا؟ یک عدد از خودش کوچکتر نیست، (2). نمیباشد.

۱۹۵. یک فرق بارزی که بین دو رابطهٔ: "$\leq$" و "$<$" موجود است اینست که set اعداد تام بنا بر رابطهٔ: "$\_\_\_$" انعکاسی reflexive بوده لاکن بر خلاف رابطهٔ: "$\_\_\_$" انعکاسی نیست. این حقیقت در هر set، nonempty set، اعداد حقیقی Reals موجود است.

حل: $\leq$ ، $<$

۱۹۶. فرضاً S یک nonempty set، set اعداد حقیقی (Reals) باشد، "رابطهٔ $\leq$" را مد نظر بگیرید:

(1) آیا برای هر $x \in S$ رابطهٔ: $x \leq x$ حقیقت دارد؟

(2) بنابر این "رابطهٔ $\leq$" انعکاسی $\_\_\_$.

حل: (1) بلی: تمام اعداد حقیقی (Reals) بزرگتر ویا مساوی بخودش میباشد.

(2) میباشد.

۱۹۷. اگر S یک nonempty set، set، Reals باشد؛ رابطهٔ "$<$" را در نظر بگیرید:-

(1) آیا حقیقت دارد که برای هر $x \in S$ ، $x > x$ میباشد؟

(2) بنابران "رابطهٔ $<$" یک reflexive $\_\_\_$.

حل: (1) نخیر! زیرا کدام اعداد حقیقی موجود شده نمیتواند که از خودش بزرگتر باشد.

(2) نمیباشد.

۱۹۸. ما در set اعداد تام دیدیم که بین مشخصات دو رابطهٔ: "$\leq$ و $<$" یک فرق مهم موجود است. در آن اینست که "رابطهٔ $\leq$" $\_\_\_$ بوده اما رابطهٔ "$\_\_\_$" انعکاسی reflexive نمیباشد.

حل: انعکاسی ، $<$

194. اگر S یک nonempty set که عناصر آنرا set ها ی دیگر تشکیل میدهد باشد.
«رابطهٔ $\subset$» را در نظر بگیرید:
(1). آیا حقیقت دارد که برای هر $A \in S$ رابطهٔ: $A \subset A$ موجود میباشد؟
(2). بنابر این رابطهٔ: ——— انعکاسی در S ——— .

حل: (1). بلی! قرار تعریف هر set یک subset خودش میباشد.
(2). رابطهٔ $\subset$ ، میباشد.

195. بالفرض S یک set اعداد تام مثبت بوده و در صورتیکه:
$R=\{(x,y) \mid x, y \in S$ and در حالیکه x قاسم y باشد$\}$؛
(1). آیا رابطهٔ: xRx برای هر $x \in S$ حقیقت دارد؟ یا بعباره دیگر:
آیا رابطهٔ: x قاسم x ، برای هر عدد تام مثبت x حقیقت دارد؟
(2). بنابر این قاسم بودن در set اعداد تام انعکاسی ——— .

حل: (1). بلی هر عدد مثبت تام بالای خودش قابل تقسیم بوده یعنی باقیمانده عملیه تقسیم صفر میباشد. (2). میباشد.

تبصره: بعضی از نویسنده گان رابطهٔ «$\subset$» را برای افاده مفهوم proper subset استعمال میکنند. در sets A و B را در نظر گرفته میگوییم A، subset B ، در صورتیکه تمام عناصر A شامل B باشد. اما شرط نیست که تمام عناصر B نیز شامل A باشد. که در نتیجه رابطهٔ «$\subset$» انعکاسی نمیشود. رول ای را که رابطهٔ «$<$» در بین دو عنصر بازی میکند عین رول را رابطهٔ: «$\subset$» بین دو set می بازد. و به همین قسم رول رابطهٔ: «$\subseteq$» در بین دو set معادل رول رابطهٔ «$\leq$» در بین دو عنصر است. بنابر این طرز تعبیر رابطهٔ «$\subset$» انعکاسی نبوده اما رابطهٔ «$\subseteq$» انعکاسی میباشد. ولی در این پروگرام ما در بین proper subset و improper subset کدام فرق قایل نگشته هر دو را مشترک بعنوان subset مطالعه میکنیم که در نتیجه هر set یک subset خودش شده میتواند.

196. اگر $S=\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ باشد، رابطه "|" را درنظر بگیرید و اگر: $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in S \text{ and } x|y\}$ باشد:

(1). آیا رابطه $x|x$ برای تمام[1] ($\forall$) اعداد set، که قابل حقیقت است؟

(2). بنابراین رابطه "|" در set، که خاصیت انعکاسی را ____.

حل: (1) خیر! زیرا صفر عددی که نوشته نزد رابطه "|"، تحقق نمیکند.
(2). بنابراین . . . انعکاسی را ندارد.

197. اگر که، set اعداد تام غیرصفر: non zero Integers
یعنی: $S=\{\dots,-3,-2,-1,1,2,3,4,\dots\}$ بوده باشد،
با درنظر گرفتن: $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in S \text{ and } x|y\}$:

(1). آیا برای هر $x\in S$، رابطه $x|x$ حقیقت دارد؟

(2). بنابراین خاصیت در set اعداد non zero Integers انعکاسی ____

حل: (1) بلی، (2). میباشد.

198*. یک binary relation، R را در یک set، که تعریف کنید.

حل: یک binary relation، R در یک set، که انعکاسی است درصورتیکه برای هر $x\in S$، $(x,x)\in R$ باشد.

199. (1) برای اینکه نشان داده بتوانیم که یک binary relation، R در یک set، که انعکاسی است - باید نشان دهیم که برای ____، ____ میباشد.

(2). برای اینکه نشان دهیم که یک binary relation، R در یک set، که انعکاسی نیست، نشان باید داد که اگر محض برای یک $x\in S$ ____ میباشد.

[1] ($\forall$) مفهوم "برای تمام" را افاده میکند.

حل: (1). هر $x\in S$ ، $(x,x)\in R$ و یا xRx .
(2). $(x,x)\notin R$ و یا $x \not R x$.

200. این وضعیت در بعضی حالات در ریاضی معمول است که محض یک مثال کافی است تا برای ثبوت یک مطلب بکار برده شود. چنانچه شما میتوانید که محض توسط یک مثال کدام عنصر یک ست S، که را دریافت کنید که برای عنصر مذکور رابطهٔ $(x,x)\notin R$ موجود باشد. در مثل گفته میشود که R انعکاسی در ست ——. ممکن عناصر زیاد موجود باشند که رابطهٔ: $(x,x)\notin R$ را تصدیق کنند، اما محض یک مثال کافی است تا عدم خاصیت انعکاسی را در R ثابت نمائید. این یک ادعای کاملاً حقیقت است زیرا تعریف خاصیت انعکاسی مستوجب است که برای —— رابطهٔ: $(x,x)\in R$ حقیقت دارد.

حل: نمیباشد، هر $x\in S$

201. فرضاً: $S=\{0,1,2,3\}$ و $R=\{(0,0),(0,1),(1,2),(3,3)\}$ باشد، آیا R در ست S دارای خاصیت انعکاسی میباشد و یا خیر؟

حل: نخیر! زیرا $1\in S$ اما $(1,1)\notin R$. توجه نمائید: $2\in S$ اما $(2,2)\notin R$. اما یک مثال کافی است تا عدم انعکاسی بودن R را ثابت کند.

202. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ بوده $R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(3,1),(4,1),(4,4)\}$ باشد: آیا R دارای خاصیت انعکاسی در ست میباشد؟

حل: بلی! زیرا: برای هر $x\in S$ رابطهٔ: $(x,x)\in R$ حقیقت دارد.

203. بملاحظه از Panel-2 بگویید که آیا R_1 خاصیت انعکاسی را در S دارد و یا خیر؟

حل: نخیر! زیرا $a \in S$ بوده ولی $(a,a) \notin R_1$ و یا $a \not R_1 a$.

204. بملاحظه از Panel-2 بگویید که آیا R_2 دارای خاصیت انعکاسی در S میباشد؟

حل: بلی! زیرا برای هر $x \in S$، $(x,x) \in R_2$ میباشد.

205. یک binary relation، R، انعکاسی است در S، در صورتیکه برای هر $x \in S$ رابطه: $(x,x) \in$ ______ موجود گردد.
اگر S یک تعداد sets تمام مثلث ها بوده و $R=\{(x,y) | x,y \in S \text{ and } x \cong y\}$ باشد:
آیا R یک binary relation انعکاسی در S میباشد و یا خیر؟

حل: R، بلی! زیرا هر مثلث با خودش انطباق پذیر است.

206. یک binary relation، R انعکاسی است در S، در صورتیکه ______
______.

حل: رابطه: xRx و $(x,x) \in R$ برای هر $x \in S$ موجود باشد.

207. یک binary relation، R انعکاسی در S نیست در صورتیکه حد اقل یک عنصر $x \in S$ موجود باشد تا برای آن ______ گردد.

حل: $(x,x) \notin R$ و یا $x \not R x$ گردد.

208. اگر $S=\{a,1,d\}$ و $R=\{(a,1),(a,a),(1,a),(1,1),(1,d),(d,1),(a,d)\}$ باشد
R انعکاسی نیست زیرا: ______ بوده اما ______ میباشد.

حل: $d \in S$ بوده اما $(d,d) \notin R$ و یا $d \not R d$

209. فرضاً $S=\{1,2,a,g\}$ باشد، اگر شما بجوهید از انتخاب عناصر $S\times S$ یک binary relation، R را بدست آرید، واگر شما محض اجازهٔ انتخاب کردن چهار عنصر را داشته باشید، عناصری را که برای بدست آوردن R انتخاب بنمائید کدام اند؟

حل: $R=\{(1,1),(2,2),(a,a),(g,g)\}$

210. اگر $S=\{0,1,a,b\}$ و $R=\{(0,0),(0,1),(1,0),(a,a),(b,b),(a,1)\}$ باشد؟ R انعکاسی در S گفته نمیشود زیرا: ________ .

حل: $1\in S$ بوده ولی $(1,1)\notin R$ یعنی $1 \not R 1$ میباشد.

211. اگر $S=\{1,17,38\}$ توجه خانه‌گی ذیل پر کنید تا R انعکاسی گردد:
$R=\{(1,1),(1,2),(38,2),(17,17),(38,1),(38,38),$ —— $\}$.

حل: $(2,2)$

212. اگر $S=\{1,38,a,x\}$ و $R=\{(a,x),(a,a),(38,38),(1,38),(1,1),(x,a),(x,38),(x,x),(1,x)\}$ باشد، آیا R انعکاسی است؟

حل:- بلی، برای تمام $y\in S$ در رابطهٔ $(y,y)\in R$ موجود میباشد.

213. اگر $S=\{\pi,a,11\}$ و $R=\{(\pi,\pi),(\pi,a),(a,a),(11,a),(\pi,11)\}$ باشد، آیا R انعکاسی است ویا خیر؟

حل: نه خیر! زیرا: $11\in S$ بوده ولی $11 \not R 11$ میباشد.

214. اگر $S=\{a, 2, 13, b, 25\}$ و R یک binary relation انعکاسی در S باشد، پس ضرورت است که R لا اقل دارای ـــــ عنصر بوده که هر کدام آن یک ـــــ میباشد.

حل: 5 عنصر، جوره مرتب (ordered pairs)

215. اگر $S=\{a, b, c\}$ بوده و برای زیر یک subset R، آن انعکاسی در S باشد، پس باید که R لا اقل دارای ـــــ عنصر که هر کدام آن یک جوره مرتب باشد؛ درینصورت R عبارت است از ـــــــــــ.

حل: 3 ، $R=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

216. اگر $S=\{a, b, c\}$ و R یک binary relation انعکاسی در S باشد:
(1) آیا ضرورت است که (c,c) شامل R باشد؟
(2) آیا ضرورت است که (a,c) شامل R باشد؟

حل: (1) بلی، (2) نه خیر! ضرورت نیست، اما وجود آن باکی ندارد.

217. اگر $S=\{1, \pi\}$ باشد آیا $R=\{(1,1)\}$ یک رابطه binary rel. انعکاسی در S شده میتواند؟

حل: نه خیر! زیرا $\pi \in S$ بوده اما $(\pi,\pi) \notin R$.

218. اگر $S=\{1, 2, 3\}$ و $R=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ و } \frac{x}{y}=1\}$ باشد، آیا R در S دارای خاصیت انعکاسی شده میتواند؟

حل: بلی! زیرا برای هر $x \in S$ چون $x/y=1$ است پس $(x,x) \in R$ میشود.

۲۱۹. اگر $S=\{0,1,2\}$ و $R=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } \frac{x}{y}=1\}$ باشد،
آیا R میتواند که در S دارای خاصیت انعکاسی باشد؟

حل: نه خیر! زیرا که $0\in S$ بوده لا $(0,0)\notin R$،
واین بنابر دلیل است که $\frac{0}{0}\neq 1$ است.

۲۲۰. به ملاحظه از Panel-2، R_3 انعکاسی است در S.
زیرا:

حل: برای هر $x\in S$ رابطهٔ $(x,x)\in R_3$ حقیقت دارد.

۲۲۱. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } x\simeq y \mid 2\}$ باشند.
پس درینصورت: $(1,1)\in R$، $(2,2)\in R$، $(3,3)\in R$ بوده
و گفته میتوانیم که R یک binary relation ________
در S است.

تذکر: در اینجا رابطهٔ: "$x\simeq y \mid 2$" برای ارائهٔ مفهوم:
«x و y دارای عین باقیمانده اند که اگر بر 2 تقسیم گردند. یعنی x
دارای همان باقیمانده است که y است درصورتیکه بر 2 تقسیم شوند.»

حل: انعکاسی

۲۲۲* (a) اگر S، ست اعداد تام فرض شده و
$R=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } x/y=1\}$ باشد،
آیا R دارای خاصیت انعکاسی در S میباشد ویا خیر؟

حل: نه خیر! زیرا $0\in S$ بوده $\frac{0}{0}\neq 1$ است
لذا $(0,0)\notin R$

(ط). اگر S، set اعداد مثبت تام Positive Integ. باشد،
آیا R یک binary relation انعکاسی در S شده میتواند؟ چرا؟

حل: بلی! زیرا برای هر $a \in S$ رابطهٔ $(a,a) \in R$ برده درحالیکه $a \neq 0$ است.

223. (1). اگر S، set اعداد non zero Integ. باشد، آیا درصورت
$R = \{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x/y = 1\}$ یک binary relation
انعکاسی در S شده میتواند؟ ویا خیر؟
(2). اگر S، set اعداد non negative Integ. باشد، آیا درینصورت
R انعکاسی در S میباشد؟ ویا خیر؟

حل: (1). بلی، (2). نه خیر. زیرا $0 \in S$ است لیکن $0 \not R 0$

224. اگر S، set اعداد تام ویک رابطهٔ aRb در S موجود باشد،
طوریکه: $a,b \in S$ برده $a+b =$ یک عدد جفت تام باشد. آیا R
دارای خاصیت انعکاسی در S میباشد؟

حل: بلی! زیرا: تمام اعداد تام x رابطهٔ $(x+x) = 2x$ را تحقیق میکند.

225. اگر S، set تمام انسان ها نشان داده و
$R = \{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and }$ x دارای عین رنگ موی y است$\}$ باشد،
آیا R خاصیت انعکاسی را در S دارا میباشد ویا خیر؟

حل: بلی! زیرا هر انسان عین رنگ مو دارد که خودش دارد. برای xRx است.

226. فرضاً S، set تمام انسان ها و
$R = \{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and }$ x پدر y است$\}$ باشند،
آیا R دارای خاصیت انعکاسی در S شده میتواند؟

حل : نه خیر ! زیرا هیچکس پدر خودش نیست . پس $x \not R x$.

227. فرضاً S ، set اعداد تام و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\cdot y>0\}$ باشند،
آیا R دارای خاصیت انعکاسی در S میباشد؟

حل: نه خیر ! زیرا $0\in S$ اما $0\cdot 0 \not> 0$ است. یعنی $(0,0)\notin R$

228. فرضاً S ، set non zero Integ.. بوده و
$R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\cdot y>0\}$ باشد، آیا R انعکاسی در S است؟

حل: بلی ! زیرا برای تمام $x\in S$ درحالیکه $x\neq 0$ باشد xRx موجود است.

229. اگر S، set اعداد تام و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } (x-y)|2\}$ باشند،
آیا R دارای خاصیت (انعکاسی) در S است؟

حل: بلی ! زیرا هر عدد تام که به 2 تقسیم گردد دارای عین باقیمانده است که
خودش دوباره به 2 تقسیم گردد. پس $(x,x)\in R$ است.

230. اگر S ، set اعداد تام و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x+y=\text{جفت}\}$ باشد،
آیا R دارای خاصیت انعکاسی در S میباشد؟

حل: بلی ! زیرا برای $\forall x\in S$؛ $x+x=2x$ میشود. پس xRx است.

231. اگر S ، set اعداد حقیقی reals بوده $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\neq y\}$
باشد. آیا set R انعکاسی در S میباشد؟

حل: نه خیر! زیرا اگر $x\in S$ باشد این حقیقت ندارد که $x\neq x$ گردد،
لذا $x \not R x$ و یا $(x,x)\notin R$.

*232. بملاحظهٔ از Panel-2 آیا R_4 خاصیت انعکاسی را دارد؟

حل: بلی! زیرا: هر $x \in S$ ، $\forall$ رابطهٔ: $(x,x) \in R_4$ یا xRx حقیقت دارد.

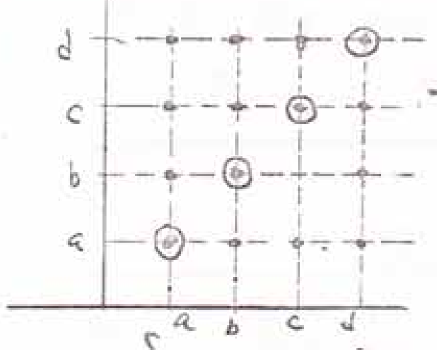
*233. باشاش Panel-2 ، R_8 انعکاسی نیست زیرا ______.

حل: زیرا: هر $a \in S$ بوده تا $(a,a) \notin R$ ، همچنان b استعمال شده میتواند.

234. یک S یک set و یک binary relation R که در S انعکاسی است مفروض است، بالفرض: هر $x \in S$ باشد محض یک عنصر R را نام بگیرید.

حل: (x,x)

235. اگر $S=\{a,b,c\}$ بوده و R یک binary relation در S باشد. گراف $S \times S$ را رسم کنید. اگر ما بخواهیم که R در S انعکاسی باشد، درینصورت دور نقاطی را دایره بکشید که بالقوه در شامل R باشند.



حل: گراف مقابل ملاحظه شود:

236. فرضاً S یک set زوایای مشترک المتوازی (دوری یک مشتری)، بوده و R طوریکه $R=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x+y=90^\circ\}$ باشد. آیا R انعکاسی در S میباشد؟

حل: نه خیر! بجز از یک زاویه 45° برای دیگر زوایا $(x,x) \notin R$

237. اگر S، set اعداد حقیقی و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x>y\}$ باشند، آیا R انعکاسی در S میباشد؟

حل: نه خیر! زیرا اگر $x\in S$ باشد پس $x \not> x$ میشود یعنی $(x,x)\notin R$

238. اگر S، set اعداد حقیقی و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x\geq y\}$ باشند، آیا R انعکاسی در S شده میتواند؟ چرا؟

حل: بلی! زیرا: برای هر $x\in S$ رابطهٔ $x \geq x$ حقیقت دارد.

239. اگر S، set تمام انسان ها را ارائه کرده و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x$ دارای عین والدین $y\}$ است باشد. آیا R انعکاسی در S شده میتواند؟

حل: بلی! اگر x یک انسان باشد، پس x دارای عین والدین (پدر و مادر) است که خودش است. بنابران $(x,x)\in R$ و xRx حقیقت داشته، و R انعکاسی در S میباشد.

240. اگر S تمام خطوط مشترک المستوی بوده و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x\perp y\}$ باشند، آیا R انعکاسی در S میباشد؟

حل: نه خیر! هیچ خط عمود بخودش نمیباشد، پس اگر $a\in S$ باشد $(a,a)\notin R$

241. اگر $S=\{1,3,a\}$ و $R=\{(1,1),(1,3),(a,a)\}$ باشد، آیا R انعکاسی در S میباشد؟ چرا؟

حل: نه خیر! زیرا: $3\in S$ لیکن $(3,3)\notin R$.

III. امتحان سوم Test - III

1. (p,q) با ______ یاد میشود که در p بنام ______ و q را بنام ______ یاد میکنند.

2. مساوات دو جوره مرتب را به اشتراک سمبول تعریف کنید.

3. در یک set، S بوده، پس (1). $S \times S$ بنام ______ یاد میشود. (2). شکل لستمبولیک: $S \times S$ عبارت از ______ میباشد.

4. اگر $S=\{1,2\}$ و $T=\{a,b,c\}$ باشد. $S \times T$ را شکل roster بنویسید.

5. تعریف ذیل را تکمیل کنید: R یک binary relation در $S \times T$ است در صورتیکه ______ ______ باشد.

6. یک binary relation، R را در S تعریف کنید.

7. فرضاً S set اعداد تام بوده آیا روابط: "$\leq$" در S انعکاسی بوده میتواند؟

8. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(c,c),(c,d),(d,d)\}$ باشد آیا R در S انعکاسی شده میتواند؟

9. اگر I set اعداد تام باشد و $R=\{(x,y) | x,y \in S \text{ and } x|y\}$ باشد، آیا R انعکاسی در S بوده میتواند؟ چرا؟

10. اگر $S=\{e,\pi,\sqrt{2}\}$ باشد، میخواهیم که یک binary relation R را در S بدست آوریم طوریکه R انعکاسی بوده و دارای کمترین تعداد عناصر باشد. شکل roster، R را بنویسید.

IV-b . تناظری : Symmetric

242 . اگر S ، set تمام خطوط را در یک plane ، p و R یک subset ، به طوریکه : $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x\perp y\}$ بوده در نظر بگیریم، میدانیم در صورتیکه خط m عمود بر خط n باشد ، و در همین صورت خط n نیز بر خط m عمود میباشد . پس دیده میشود در صورتیکه $(m,n)\in R$ باشد ، پس در همین صورت (n,m) نیز ــــــ R میباشد یعنی : ــــــ

حل : شامل ، $(n,m)\in R$.

243 . فرض کنید S ، set اعداد تام تاق و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x<y\}$ باشد ، اگر $p,q\in S$ و $p<q$ باشد ، در همین صورت $(p,q)\in R$ میباشد .
از طرف دیگر میدانیم اگر $q<p$ موجود باشد $q\nless p$ موجود میشود .
در همین صورت اگر $(p,q)\in R$ باشد ، ــــــ $\notin R$ میشود .

حل : (q,p)

244 . اگر S ، set تمام مثلث ها بوده و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x\cong y\}$ باشد ، در نظر گرفته شود :
(1) . اگر $a,b\in S$ و $a\cong b$ باشد ، پس ــــــ میباشد .
(2) . در صورتیکه $a\cong b$ بوده و $b\cong a$ میگردد پس در همین صورت ــــــ میباشد .

حل :- $(a,b)\in R$ ، $(b,a)\in R$

245 . اگر S ، set تمام انسان های ذکور بوده و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x \text{ برادر } y\}$ باشد ، در نظر گرفته شود :
(1) . اگر $a,b\in S$ و a برادر b باشد پس ــــــ میباشد .
(2) . اگر a برادر b است ، پس b را نیز برادر a بوده (در صورتیکه هر دو این شخص مذکر یعنی هر دو جنس باشد) در همین صورت بالضرور ــــــ نمیشود .

حل: $(a,b)\in R$ ، $(b,a)\in R$

247. اگر S، ست تمام خطوط و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x$ قطع میکند $y\}$ باشد:-

(1) ، واگر $p,q\in S$ بوده و p قطع کند q را در اینصورت ______ $\in R$ میباشد،

(2) ، واگر p قطع میکند q را ، میدانیم که q نیز قطع میکند p را پس در اینصورت ______ میشود.

حل: (p,q) ، $(q,p)\in R$

248. از مثال فوق بمشاهده میرسد روابطیکه دارای خواص مانند « عمودیت ، انطباق پذیری ، تقاطع ، تساوی ، . . . » باشند ، از خاصیت مشترکهٔ ذیل پیروی میکردند که اگر $(x,y)\in R$ باشد پس رابطهٔ ______ موجود نیز میگردد.

حل: $(y,x)\in R$

249. هر binary relation ، R که دارای خواص متذکره شماره 248 باشد ، تناظری symmetric گفته میشود.

تعریف :- یک binary relation R تناظری است درصورتیکه شرایط ذیل را تحقیق کند:

هرگاه $(x,y)\in R$ باشد پس بالضروره ______ نیز میباشد.

حل: $(y,x)\in R$

250. اگر R یک binary relation بوده باشد درصورت تناظری گفته میشود که اگر ______ باشد ، پس ______ نیزمیباشد.

حل: $(x,y)\in R$ باشد پس $(y,x)\in R$.

251. دریک رابطهٔ binary relation ، R ، اگر در صورت موجودیت $(x,y)\in R$ ، دررابطهٔ R ، $(y,x)\in R$ نیز موجود گردد ، دراینصورت گفته میشود که R ______ میباشد ،

حل : تناظری symmetric

252. یک رابطهٔ binary relation ، R در یک set ، که تناظری میباشد، درصورتیکه اگر و تنها اگر شرط : ________ را تحقیق کند.

حل : هرگاه رابطهٔ : $(x,y)\in R$ موجود باشد ، بالاثر در رابطهٔ : $(y,x)\in R$ موجود گردد.

تبصره : ما میتوانیم که بجای افاده : « اگر $(x,y)\in R$ باشد پس $(y,x)\in R$ میباشد. » ویا « موجودیت $(x,y)\in R$ مستوجب وجود $(y,x)\in R$ میشود » شکل سمبولیک آنرا یعنی : « $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$ » را استعمال کنیم . وبهمین قسم بعوض افادهٔ فوق : « اگر $(x,y)\in R$ موجود باشد پس $(y,x)\in R$ نیز موجود میباشد » افاده ؛ « اگر xRy باشد پس yRx نیز میباشد » ویا شکل سمبولیک خلص آنرا یعنی : « $xRy \Rightarrow yRx$ » را استعمال کرده میتوانیم . تازمانیکه بمفکورهٔ اساسی خاصیت تناظری کدام صدمه ای وارد نگردد ما میتوانیم که افادهٔ خاصیت مذکور را بهر عبارتیکه خواسته باشیم تعریف وبیان کنیم .

253. درصورتیکه R یک رابطهٔ binary relation در S باشد برای هر $x\in S$ که رابطهٔ $(x,x)\in R$ موجود گردد ، پس گفته میشود که R ____ است.

حل : انعکاسی reflexive

254. اگر R یک رابطهٔ binary relation در S بوده درصورت وجود « xRy » رابطهٔ : « yRx » نیز موجود گردد ، پس گفته میشود که R ____ در S میباشد.

حل : تناظری symmetric

255. فرضاً : $S=\{a,b,1,2\}$ و $R=\{(a,1),(1,a),(2,1),(1,2),(2,2)\}$ باشد ،

(1). آیا درصورت وجود $(x,y)\in R$ موجودیت $(y,x)\in R$ حقیقت دارد؟

(2). آیا R خاصیت : ____ را در S دارا بوده میتواند؟

حل : (1) . بلی ، (2) تناظری Symmetric ، بلی میتواند .

256. (1). یک رابطه binary relation R در یک set، S که تناظری است درصورتیکه $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$ باشد، ویا بشکل سمبولیک دیگر ________ باشد.
(2). فرضاً $S=\{a,b,1\}$ و $R=\{(a,b),(b,a),(b,1),(1,b)\}$ باشد،
آیا R دارای خاصیت تناظری symmetric در S میباشد؟

حل: (1). $xRy \Rightarrow yRx$، (2). بلی.

257. اگر $S=\{1,a,x,y\}$ و $R=\{(1,a),(a,1),(1,x)\}$ باشد، آیا R دارای خاصیت تناظری symmetric میباشد؟

حل: نه خیر؛ زیرا $(x,1)\notin R$ ولی $(1,x)\in R$ است.

258. یک binary relation R در S تناظری نیست، درصورتیکه اگر رابطه $(x,y)\in R$ موجود بوده لیکن رابطه ________ موجود نباشد.

حل: $(y,x)\in R$

259. یک binary relation R تناظری نیست اگر ________ گردد.

حل: xRy موجود بوده لیکن $y \not R x$ موجود گردد.

260. یک رابطه binary relation تناظری نیست درصورتیکه وجود ________ مستوجب وجود رابطه ________ گردد.

حل: xRy ، $y \not R x$

261. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(b,d),(d,b),(a,a),(a,b)\}$ باشد
رابطه R تناظری نیست زیرا: ________.

حل: $(a,b)\in R$ بوده لیکن $(b,a)\notin R$ میباشد.

.262 اگر $S=\{17, a, d\}$ و $R=\{(17,a),(a,a),(a,17)\}$ باشد، آیا R تناظری است؟

حل: بلی، زیرا: برای هر $(x,y)\in R$ رابطهٔ $(y,x)\in R$ موجود است.

.263 اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,1),(1,4)\}$ باشد، آیا:-

(1). تناظری symmetric میباشد؟ (2). انعکاسی reflexive میباشد؟

حل: (1). بلی، (2). نه خیر! زیرا: $4\in S$ اما $(4,4)\notin R$.

.264 اگر $S=\{1,3,5,7\}$ و $R=\{(7,7)\}$ باشد، آیا:

(1). تناظری است؟ (2). انعکاسی است.

حل: (1). بلی، (2) نه خیر.

.265 اگر یک کورس یک nonempty set و R یک empty set باشد میگویند که R تناظری در S میباشد. اگرچه در مرحلهٔ اول این افاده و بیانیه غیرقابل قبول تلقی میشود، اما اگر دقت شود مستدل و قناعت بخش است. اینست استدلالی که بکار برده میشود: هرگاه $(x,y)\in R$ (درحالیکه $R=\Phi$) پس $(y,x)\in R$ میباشد؛ ازینکه جوړهٔ (x,y) موجود شده نمیتواند که شامل R باشد به همین قسم: (y,x) نیز موجود شده نمیتواند که عدم شمول وجود آن مانع تناظری بودن R گردد. ازینکه درینصورت R را تناظری میگویند، این بیانیه خوق العاده قناعت بخش حس نمیشود بلکه یک افاده مشکوک تلقی میشود، که به اصطلاح ریاضی از آن بنام default میگویند. پس ازینکه empty set تناظری در یک set Vacuously افاده شود، میگویم که empty set خاصیت تناظری را Vacuously در یک set غیرخالی تعقیب میکند.

اگر $R=S\times S$ باشد، آیا R تناظری در S میباشد؟

حل: بلی! زیرا: برای هر $(x,y)\in R$ یک $(y,x)\in R$ موجود شده میتواند.

266. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(2,2)\}$ باشند، آیا R تناظری در S میباشد؟

حل: - بلی! زیرا درصورتیکه $(x,y)\in R$ باشد پس $(y,x)\in R$ نیز میباشد.

*267. یک binary relation، R در یک set، S مفروض است:

(1). برای اینکه انعکاسی بودن R را دریافت کنید، ضروری است، که آنرا برای هر $x\in S$ بررسی نمائید.

(2). برای اینکه تناظر بودن R را بدانید کافیست که برای ___ $(x,y)\in$ موجودیت $(y,x)\in R$ را جستجو کنید.

حل: R.(2)، (1). جواب ایجاب نمیکند.

268. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ باشد، برای اینکه بدانیم که آیا R انعکاسی در S است ویا خیر؟ باید که ما برای هر عنصر x طوریکه $x\in S$ باشد موجودیت $(x,x)\in R$ را جستجو کنیم. وبهمین قسم برای اینکه بدانیم که آیا R تناظری در S میباشد ویا خیر؟ باید که برای هر جوره مرتب شامل R، جوره مرتبی را که coordinates عناصر آن معکوس reverse، coordinates عناصر جوره مرتب اولی باشد جستجو داریم. آیا: (1). R انعکاسی است در S؟ (2). R تناظری است در S؟

حل: (1). بلی، (2). نخیر؛ زیرا: $(1,2)\in R$ اما $(2,1)\notin R$

*269. R یک binary relation در یک set، S:

(1). انعکاسی گفته میشود درصورتیکه شرط: ______________ را تحقیق کند.

(2). تناظری گفته میشود درصورتیکه شرط: ______________ را تحقیق کند.

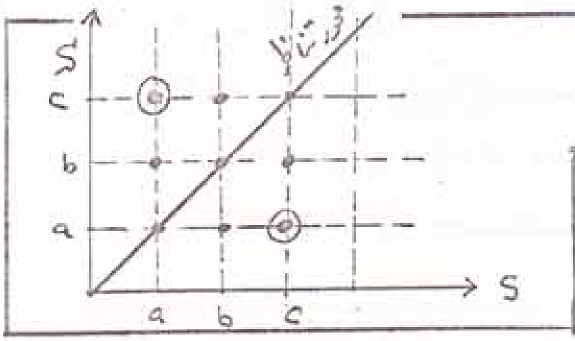
حل: (1). $(x,x)\in R$ را برای هر $x\in S$، (2). هرگاه $(x,y)\in R$ باشد $(y,x)\in R$ گردد

270. یک binary relation، R در یک set، S:

(1). انعکاسی نیست درصورتیکه: ______________ باشد.

(2). تناظری نیست درصورتیکه: ______________ باشد.

271. بنا بر ملاحظه: Panel-2، دلیل استعمال کلمه «متناظری یا symmetric» واضح میشود. چه اگر محورهای عمودی و افقی به عین scale (اسکیل) درجه بندی داده شوند، دیده میشود که ناصف زاویه که توسط محورهای مذکور تشکیل میشود عبارت از محور تناظر the axis of symmetry. تمام جوره های مرتب را که به اشکال: (x,y) و (y,x) افاده شده میتوانند تشکیل میدهد. میتوان گراف را مانند: Panel-2 رسم و محور تناظر را در آن نشان دهید. دور نقاط که جوره های مرتب: (a,c) و (c,a) را نمایش میدهند دایره بکشید.



حل :

272. اگر $S=\{1,9,13\}$ و $R=\{(1,1),(9,9)\}$ باشد:

(1). آیا R انعکاسی است؟ چرا؟

(2). آیا R تناظری است؟ چرا؟

حل : (1). نخیر! زیرا: گرچه $13 \in S$ است اما $(13,13) \notin R$

(2). بلی! برای هر $(x,y) \in R$ یک $(y,x) \in R$ موجود است.

273. اگر $S=\{a,b,4\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(4,4)\}$ باشد، آیا:

(1). R انعکاسی است؟ چرا؟

(2). R تناظری میباشد؟ چرا؟

حل : بلی! برای هر $x \in S$، $(x,x) \in R$ موجود است. (1).

بلی! برای هر $(x,y) \in R$ یک $(y,x) \in R$ موجود است. (2).

274. اگر $S=\{a,b,c,d,e,13\}$ و $R=\{(a,a)\}$ باشد. آیا R:

(1). انعکاسی است؟ (2). تناظری است؟

حل : (1). نخیر، (2). بلی.

۲۷۵. اگر $S=\{a, 1, \pi\}$ و
$R=\{(a,1),(1,a),(1,1),(1,\pi),(\pi,1),(a,\pi),(a,a),(\pi,\pi)\}$ باشد:
(۱). آیا R انعکاسی است؟ چرا؟ (۲). آیا R متناظری است؟ چرا؟

حل: - (۱). بلی! زیرا: برای هر $x \in S$ که رابطه: $(x,x) \in R$ صدق مینماید.
(۲). نه خیر! زیرا: $(a,\pi) \in R$ بوده لیکن $(\pi,a) \notin R$

۲۷۶. گیانه راه که یک رابطه binary R را غیر متناظری ثابت کنیم اینست که برای یک $(x,y) \in R$ با یکه: (۱). ________ را نشان داده میتوانیم.
(۲). فرضاً $R=\{(1,1),(3,a)\}$ باشد، درینصورت R متناظری نیست زیرا: ________ از ________ میباشد.

حل: $(y,x) \notin R$ (۱): ، (۲). $(3,a) \in R$ ، $(a,3) \notin R$

۲۷۷. فرضاً $S=\{p,q,r,s\}$ و
$R=\{(p,p),(p,q),(q,q),(q,r),(r,r),(r,q),(\ \ ),(\ \ )\}$ باشد
عناصر ذیل R را تکمیل کنید طوریکه R انعکاسی و متناظری گردد.

حل: (s,s) ، (q,p)

۲۷۸. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\Phi$ باشند:
(۱). آیا کدام جوره مرتب $(x,y) \in R$ را پیدا کرده میتوانید که متناظر آن $(y,x) \notin R$ باشد؟
(۲). آیا R و یا Φ متناظری در نظر گرفته میتوانند؟

حل: (۱). نه خیر ، (۲). بلی

۲۷۹. اگر $S=\{1,g\}$ و $R=\{(1,1),(g,g)\}$ باشند: آیا R (۱). متناظری، (۲). انعکاسی شده میتواند؟

حل: (۱). بلی ، (۲). بلی

280. اگر $S=\{1,g\}$ و $R=\{(1,1)\}$ باشد، آیا R :-
(1). انعکاسی است چرا؟ (2). تناظری است چرا؟

حل: (1). نخیر: $g\in S$ ولی $(g,g)\notin R$
(2). بلی برای $(1,1)\in R$ ، $(1,1)\in R$ است.

281. اگر $S=\{1,g\}$ و $R=\{(1,1),(g,g),(1,g)\}$ باشد: آیا R :
(1). انعکاسی است چرا؟ (2). تناظری است چرا؟

حل: (1). بلی: زیرا: $1,g\in S$ ، $(1,1)\in R$ و $(g,g)\in R$ است.
(2). نخیر: زیرا: $(1,g)\in R$ ولی $(g,1)\notin R$.

282. اگر $S=\{1,g\}$ و $R=\{(1,1),(1,g)\}$ باشند، آیا R :
(1). انعکاسی است؟ چرا؟ (2). تناظری است؛ چرا؟

حل: (1). نخیر: $g\in S$ ولی $(g,g)\notin R$.
(2). نخیر: $(1,g)\in R$ ولی $(g,1)\notin R$

283. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\neq y\}$ باشند:
(1). شکل roster ، $S\times S$ را بنویسید.
(2). شکل roster ، R را بنویسید.
(3). آیا R تناظری میباشد؟ چرا؟

حل: (1). $S\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
(2). $R=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)$
(3). بلی: برای هر $(x,y)\in R$ ، $(y,x)\in R$ موجود است.

284. فرضاً R یک binary relation در یک set S باشد، R انعکاسی میشود، درصورتیکه ________ باشد.

حل: $(x,x)\in R$ برای هر $x\in S$

285. فرضاً R یک binary relation در یک set S باشد. R متناظر است در صورتیکه ______ باشد.

حل: در صورتیکه به ازای $(x,y) \in R$ رابطهٔ $(y,x) \in R$ موجود.

286. فرضاً $S=\{a,b,13\}$ باشد یک binary relation، R را تشکیل نمائید طوریکه انعکاسی، متناظر در یک بوده و عنصر $(a,13)$ را نیز دربرداشته باشد.

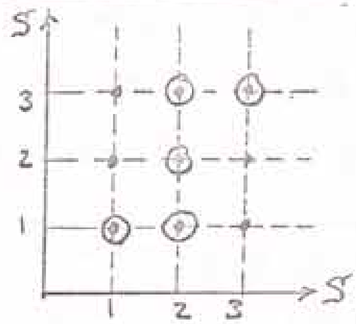
حل: $R=\{(a,a),(b,b),(13,13),(a,13),(13,a)\}$

287. با در نظر داشت از Panel-2 بگوئید که کدام از روابط binary، متناظر است؟

حل: R_1، R_3، R_5 و R_7 متناظر اند

288. فرضاً S یک set خطوط مستقیم مشترک المستوی P را نشان داده و $R=\{(w,v) \mid w,v \in S \text{ and } w \parallel v\}$ را ارائه کند. آیا R متناظر است؟

حل: بلی: در صورتیکه $v \parallel w$ باشد پس $w \parallel v$ میباشد.



289. $S \times S$ توسط گراف مقابل نشان داده شده. set نقاطی که دور آن ها دایره کشیده شده را در نظر بگیرید: آیا این set نقاط، (1). انعکاسی است؟ (2) متناظر است چرا؟

حل: (1). بلی، (2). نخیر! زیرا: $(2,3) \in R$ اما $(3,2) \notin R$

290. اگر S یک set نقاط یک مستوی، $R=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and }$ فاصلهٔ بین x و y کمتر از یک است$\}$ را نشان دهد:

(1). آیا R دارای خاصیت انعکاسی بوده میتواند؟
(2). آیا R دارای خاصیت تناظری بوده میتواند؟ چرا؟

حل: (1). بلی! اگر $x\in S$ باشد، فاصله بین x و خودش صفر است، کمتر است از 1 سم.
(2). بلی! اگر $x,y\in S$ بوده اگر فاصله بین x و y کمتر از 1 سم باشد، پس درین صورت فاصله بین y و x نیز کمتر از یک سانتی متر میباشد.

291. اگر S، set نقاط یک مستوی و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x+y>1\}$ سم باشد،
پس درین صورت آیا رابطهٔ R: (1) انعکاسی شده میتواند؟ (2) تناظری شده میتواند؟

حل: (1). نه خیر: زیرا فاصله بین x و خودش کمتر از 1 سم است، (2). بلی.

292. اگر $S=\{A,B,C\}$ بوده و اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{a\}$ و $C=\{1,a\}$ در حالیکه
$R=\{(X,Y)\mid X,Y\in S \text{ and } X\subset Y\}$ باشند، آیا R تناظری گفته میشود؟

حل: نه خیر! $B\subset C$ بوده لیکن $C\not\subset B$. پس: BRC است اما $C\not R B$ میباشد.

293. اگر S، set اعداد تام و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x+y=\text{تام جفت}\}$ را نشان دهد،
آیا R تناظری است، چرا؟

حل: بلی: اگر $(x,y)\in R$ یعنی جفت باشد درینصورت $(y,x)\in R$ نیز جفت بوده و حقیقت دارد.

294. اگر S، set اعداد تام و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x\cdot y>0\}$ را نشان دهد،
(1). آیا برای تمام $x\in S$ رابطهٔ $(x,x)\in R$ حقیقت دارد؟
(2). بنابران R یک binary relation انعکاسی در S ______.
(3). اگر هر $(x,y)\in R$ باشد موجب یک $(y,x)\in R$ میشود؟
(4). پس درینصورت R یک تناظری در S ______.

حل: (1). نه خیر: $0\in S$ است، $0\cdot 0\not>0$. (2) نمیباشد.
(3). بلی. (4). میباشد.

295. اگر S set اعداد تام nonzero بزرگتر از صفر در $R=\{(x,y)| x,y\in S \text{ and } x\cdot y>0\}$ را نشان دهند:
آیا R: (1). انعکاسی است؟ (2) تناظری است، چرا؟

حل: (1). بلی: چون $0\notin S$ پس برای تمام $x\neq 0$، رابطهٔ $x\cdot x>0$ حقیقت دارد. نابراین برای هر $x\in S$، $(x,x)\in R$ است.
(2). بلی: اگر $(x,y)\in R$ باشد، $x\cdot y>0$ بوده هم $y\cdot x>0$ میباشد: یعنی $(y,x)\in R$.

296. اگر S، set اعداد تام در $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\cdot y\geq 0\}$ باشند:
آیا R: (1). انعکاسی است؟ (2). تناظری است؟ چرا؟

حل: (1). بلی: چون $0\cdot 0\geq 0$ بوده پس برای تمام $x\in S$، $(x,x)\in R$ میشود.
(2). بلی.

297. اگر S set اعداد تام غیر صفر nonzero را در $R=\{(x,y)| x,y\in S \text{ and } x\cdot y\geq 0\}$ را ارائه کنند:
(1). آیا R انعکاسی است؟ (2). آیا R تناظری است؟

حل: (1). بلی، (2). بلی.

298. اگر S مجموعه set تمام مضلعات polygons در $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and}$ y دارد x به تعداد رئوس دارد که y دارد بوده باشند:
آیا R: (1). انعکاسی است! (2). تناظری است، چرا؟

حل: (1). بلی: اگر x یک مضلع باشد دارای همان تعداد رأس است که خودش دارا است. پس اگر $x\in S$ باشد، xRx میباشد.
(2). بلی: اگر $(x,y)\in R$ بوده یعنی مضلع x به اندازهٔ مضلع y رأس دارا میباشد، پس مضلع y نیز به اندازهٔ مضلع x دارای رأس بوده یعنی $(y,x)\in R$ است.

.299 اگر S یک set از subsets غیر خالی nonempty باشد درصورتیکه:

$R=\{(X,Y)|X,Y\in S \text{ and } X\cap Y=\Phi\}$ را نشان دهد:

(1). درصورتیکه $A\in S$ بوده درحالیکه $A\neq\Phi$ است، آیا $(A,A)\in R$ حقیقت دارد؟

(2). بنابران R انعکاسی ______ .

(3). اگر $A,B\in S$ بوده و $A\cap B=\Phi$ میگردد،

بنابران: $A\cap B=$ ______ بوده پس: R ______ (B,A) میباشد.

(4). بنابران R تناظری در که ______ .

حل: (1). نخیر: زیرا $A\neq\Phi$ بوده $A\cap A\neq\Phi$ و یا $(A,A)\notin R$

(2). نمیباشد. (3). $B\cap A$، $\in$، (4). میباشد.

.300 فرضاً $S=\{1,2,3\}$ باشد:

(1). شکل roster، $S\times S$ را بنویسید.

(2). رابطهٔ "$\leq$" را در S در نظر گرفته، اگر R کدام set که توسط رابطهٔ "$\leq$" تعیین میشود، باشد؛ شکل roster، R را بنویسید.

(3). آیا R انعکاسی است، چرا؟

(4). آیا R تناظری است، چرا؟

حل: (1). شکل روستر یا roster، $S\times S$ عبارت است از:

$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

(2). $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

(3). بلی: برای هر $x\in S$ رابطهٔ $(x,x)\in R$ موجود است.

(4). نخیر: $(1,3)\in R$ اما $(3,1)\notin R$

شما میتوانید که: (1,2)، و (2,3) را برای اثبات مطلب (4) بکار برید.

IV-c . انتقالی : Transitive

301. اکنون یک خاصیت دیگری را که بعضی وقت یک binary relation دارا میشود مورد مطالعه قرار میدهیم. این خاصیت بنام خاصیت انتقالی و یا transitive یاد میکنند. بطور مثال، اگر S، set اعداد تام را نمایش داده و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x<y\}$ باشد، درینصورت با درنظر گرفتن رابطهٔ "<" اگر p و q دو عدد تام، طوریکه $p<q$ باشد، پس واضح است که: $(p,q)\in R$ میباشد. بهمین قسم فرضاً q و r دو عدد تام طوریکه: $q<r$ ثابت باشد درینصورت: $(q,r)\in R$ نیز میگردد.
حال دیده میشود که سه عدد: p، q و r تام موجود اند که در رابطهٔ:- $p<q$ و $q<r$ را تحقیق پذیراند. حالانکه بنابر حقایق الجبری ما میدانیم که در رابطهٔ: $p<q$ و $q<r$ متوجب رابطهٔ: $p<r$ میگردد. پس درینصورت گفته میتوانیم که ____ نیز یک عنصر R میباشد.

حل: (p,r)

302. فرضاً S، set اعداد تام مثبت و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x|y\}$ ... را نشان دهند:
(1). اگر $(p,q)\in R$ باشد، پس درینصورت p و q اعداد ____ بوده و p ____ q میباشد.
(2). اگر $(q,r)\in R$ باشد، پس درینصورت q و r اعداد ____ بوده و q ____ r میباشد.
(3). بنابر مکملات الجبری ما میدانیم که اگر p قاسم q و بهمین قسم q قاسم r باشد پس بالعموم ____ قاسم ____ میباشد.
(4). بنابران ____ نیز شامل میباشد.

حل: (1). مثبت تام، قاسم، (2). مثبت تام، قاسم (3). p، r، (p,r).

303. فرضاً S یک set مثبت اعداد
$R=\{(x,y)\mid x,y\in S \text{ and } x\sim y\}$ را نشان دهند،

(درحالیکه شمبول "~" تشابه دوشنت را ارائه میکند):

(1). اگر a و b دوشنت طوریکه $a\sim b$ است باشند پس ___ $\in R$ میباشد.

(2). اگر b و c دوشنت عبده طوریکه $b\sim c$ باشد پس ___ میباشد،

(3). ما از حقایق هندسی میدانیم اگر a، b و c مثلث آبوده درصورتیکه دو رابطه؛ $a\sim b$ و $b\sim c$ موجود باشد پس رابطهٔ: ___ نیز موجود گردیده و ___ $\in R$ میشود.

(4). بنابران ___ نیز عنصر R میباشد.

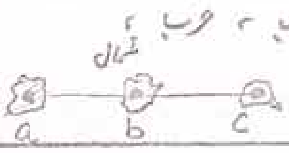
حل: (1). (a,b)، (2). $(b,c)\in R$،
(3). $a\sim c$، (a,c)، (4). $(a,c)\in R$

این نیز حقیقت دارد که اگر $a\sim b$ باشد پس $b\sim a$ میشود؛ که این حقیقت خاصیت تناظری را نشان میدهد. بهمین قسم رابطهٔ "~" انعکاسی نیز میباشد، که درحال حاضر ما از بررسی خواص تناظری و انعکاسی صرف نظر میکنیم.

304. فرضاً که S تمام شهرهای افغانستان بوده و
$R=\{(x,y)|x,y\in S$ هم که x بطرف غرب y است$\}$ را ارائه کند:

(1). اگر $(a,b)\in R$ و $(b,c)\in R$ باشند، پس a، b و c عبارت از شهرهای افغانستان میباشند طوریکه a بطرف ___ b و بهمین قسم b بطرف ___ c موقعیت دارند.

(2). توسط سکیچ (sketch) نشان دهید که ___ بطرف غرب ___ بوده، پس ___ نیز یک عنصر R میباشد.

حل: (1). غرب، غرب،
(2). شرق  غرب، a، c، (a,c)

305. تمام روابط چهارگانه (301) الی (304) دو رابطه را که حاوی خاصیت ذیل اند ارائه مینمایند:
هرگاه $(x,y)\in R$ و نیز $(y,z)\in R$ باشند درنتیجه: $(\_\_)\in R$ میگردد.

حل: (x,z)

306. یک binary relation که دارای خاصیت مربوط شماره 305 فوق باشد نام binary relation که دارای خاصیت انتقالی (و یا بصورت خلص انتقالی) است یاد میشود.

تعریف: یک binary relation ، R انتقالی گفته میشود در صورتیکه شروط ذیل را تحقیق کند:
هرگاه $(x,y)\in R$ ، و همچنان $(y,z)\in R$ باشند، پس ——— $\in R$ تمام گردد.

حل: (x,z) حاصل گردد

307. اگر R یک binary relation باشد طوریکه اگر: (1). ——— $\in R$ و همچنان ——— $\in R$ بوده پس در نتیجه (3). ——— $\in R$ حاصل گردد (بدست آید)، گفته میشود که R انتقالی است.

حل: (1). (x,y) ، (2). (y,z) ، (3). (x,z)

308. یک رابطهٔ binary relation ، R انتقالی میباشد در صورتیکه شروط ذیل را تعقیب نماید: (1). ——— و همچنان (2). ——— بوده، پس (3). ——— باشد.

حل: (1). $(x,y)\in R$ ، (2). $(y,z)\in R$ ، (3). $(x,z)\in R$

309. یک رابطه R ، binary relation که شروط ذیل را تعقیب کند انتقالی گفته میشود:
هرگاه ——— .

حل :- هرگاه $(x,y)\in R$ و هم $(y,z)\in R$ بوده موجب $(x,z)\in R$ گردد.

تبصره :-

(1). در توضیح مفهوم خاصیت انتقالی یک رابطهٔ binary relation ، R ، استعمال بردو افاده ذیل که عین مطلب را بیان میکنند مجاز است:

a. " هرگاه xRy و yRz باشد پس xRz میباشد."

b. " اگر رابطهٔ: $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R$ موجب $(x,z)\in R$ گردد "

و یا بصورت خلص:

(i). xRy ، $yRz \Rightarrow xRz$

(ii). $(x,y)\in R,\ (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$

پس در صورت رابطهٔ موصوف انتقالی گفته میشود.

(2)- بالفرض اگر $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R$ باشند، موقعیت‌های y را بررسی کنید:

$$(x,y),(y,z)$$

اگر R دارای خاصیت انتقالی باشد، پس بالضروره وجود (x,z) در آن حتمی است. فرضاً $R=\{(1,2),(3,5),(4,2),(7,3)\}$ باشد.

طوریکه دیده میشود صورت نوشته فعلی عناصر R کدام pattern ویا شکل: $(x,y),(y,z)$ را تعقیب نمیکند. برای اینکه خاصیت انتقالی را در آن به آسانی جستجو کرده بتوانیم، عناصر R را باید طوری ترتیب دهیم که pattern ویا فارم form: $(x,y),(y,z)$ را بخود بگیرند:

$$R=\{(1,2),(7,3),(3,5),(4,2)\}.$$

با ترتیب عناصر R از ابر دیده میشود که:

$(7,3),(3,5)$ یک pattern (روش مشخص) را تعقیب میکند. چون $(7,5)\notin R$. بنابران R انتقالی Transitive نیست.

اگر یک R بشکل roster نوشته شده باشد وشما بخواهید تا معین کنید که آیا R انتقالی میباشد ویاخیر؟ درینحالت شما باید که هریک از دو عنصر را باهم مقایسه کنید، تا (درصورت موجودیت) عناصری که شکل: $(x,y),(y,z)$ را دارا باشند پیدا کنید. اگر درصورت موجودیت $(x,y),(y,z)$ - عنصر (x,z) در R موجود نمیشد، R انتقالی transitive نمیباشد.

در روابطی مانند relations: " $<, \le, =, \cong$ ، وغیره ...،
خاصیت انتقالی یک binary relation را با شکل تخنیک‌های الجبری دریافت نموده میتوانید، با استفاده از قضیه متقدمه الجبری خویش درحل مسایل ذیل استفاده نمائید.

310 . یک رابطه binary relation R انتقالی است درصورتیکه شرط ذیل را تحقیق کند: اگر $(x,y)\in R$ وهم $(y,z)\in R$ باشد پس بالضروره $(x,z)\in R$ میباشد.
یک binary relation، R انتقالی نیست درصورتیکه اگر $(x,y)\in R$ وهم $(y,z)\in R$ بوده آنگاه ______ .

حل: $(x,z)\notin R$.

311. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,b),(b,c),(c,c)\}$ باشد. پس R انتقالی نیست زیرا: $(a,b)\in R$ و هم $(b,c)\in R$ بوده اما ______ نمیباشد.

حل: $(a,c)\notin R$

312. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,b),(b,a),(a,a)\}$ باشد، در ترتیب موجوده عناصر R، چنین فکر خواهیم کرد که R انتقالی است، اما اگر R طبق ذیل ترتیب شود: $R=\{(b,a),(a,b),(a,a)\}$، دیده میشود که: ______ $\in R$ و هم: ______ $\in R$ بوده اما ______ $\notin R$. بنابران R انتقالی نمیباشد.

حل: (b,a)، (a,b)، (b,b)

313. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(1,2),(2,4),(1,4)\}$ باشد، اکنون برای آن جوره های مرتب که یک pattern نام: $(x,y),(y,z)$ را تشکیل داده بتوانند تلاش میکنیم:

چون $(1,1)\in R$ و هم $(1,2)\in R$ میباشد، در صورتیکه R انتقالی باشد باید که $(1,2)\in R$ باشد، که میباشد.

چون $(1,2)\in R$ و هم $(2,4)\in R$ بوده برای اینکه R انتقالی باشد باید که $(1,4)\in R$ باشد، میباشد.

چون $(1,1)\in R$ و هم $(1,4)\in R$ بوده برای اینکه R انتقالی باشد باید که $(1,4)\in R$ باشد، میباشد.

بصورت عموم: چون هر $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R$ یک $(x,z)\in R$ برای موجود شود بنابران R ______ میباشد.

حل: انتقالی یعنی transitive

314. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(1,2),(4,1)\}$ باشد، جمله جوره گی که pattern را تعقیب کنند حاصل نمائید:

چون $(1,1)\in R$ و هم $(1,2)\in R$ بوده برای اینکه R انتقالی باشد باید که $(1,2)\in R$ باشد، است.

چون: $(4,1)\in R$ و هم $(1,2)\in R$ بوده برای اینکه R انتقالی باشد باید که $(2,4)\in R$ باشد، اما نیست.

بنابران R ______.

حل: انتقالی یا transitive نیست.

315. اگر $S=\{1,2,a\}$ و $R=\{(2,1),(a,2)\}$ باشد. آیا R انتقالی میباشد؟ چرا؟

حل: نه خیر! زیرا: $(a,2)\in R$ و $(2,1)\in R$ می‌باشد اما $(a,1)\notin R$

316. برای اینکه ثابت نمایم که یک binary relation ، R ، انتقالی نیست باید که دو جوره، جوره‌های مرتب را که داریم: (x,y) ، (y,z) را دارا باشند در R پیدا نمایم (درصورت موجودیت‌شان) طوریکه: xRy و yRz بوده اما $x\not R z$ باشد. فرضاً: $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(1,3),(2,2)\}$ باشند. آیا دو جوره‌ای مرتب را که شرط داده شده فوق را تحقیق کند در R پیدا کرده میتوانید؟

حل: نخیر: در اینجا شما ثابت کرده نمیتوانید که R انتقالی است اما شما بصورت Vacuously گفته میتوانید که R انتقالی است، زیرا ما کدام استثنای به موضوع: "aRb و bRc بوده ولی aRc میشود" پیدا کرده نمیتوانیم

317. فرضاً $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(3,1),(2,4),(2,1)\}$ باشد. آیا R انتقالی بوده میتواند؟

نوت: بخاطر باید داشت که برای اثبات عدم انتقالی بودن باید دو جوره عنصر یک pattern را تعقیب کنند پیدا نمایم.

حل: بلی! زیرا: هرگاه aRb و bRc موجود باشد پس aRc میشود. در این جوکات کدام مثال که وضعیت عدم انتقالی را نمایش دهد موجود نیست. بنابراین Vacuously میگوییم که R انتقالی است.

318. فرضاً $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(b,c),(a,a),(c,a)\}$ باشد، آیا R انتقالی میباشد؟

حل: نخیر! زیرا: bRc و هم cRa بوده اما $c\not R c$.

319. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\Phi$ باشد، آیا R انتقالی است؟

حل: بلی! زیرا شرط که عدم وجود انتقالی را نمایش داده بتواند موجود نیست.

320. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(b,c),(a,a),(d,d)\}$ باشد، آیا R انتقالی میباشد؟ چرا؟

حل: بلی! چون xRy و yRz موجود/وجود دارند پس xRz می‌باشد
حتی در R دو جوره مرتب را پیدا کرده نمیتوانید که مانع حالت فوق گردد.

321. فرضاً $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\phi$ باشد، آیا R متناظر می‌باشد؟ چرا؟

حل: بلی! چون xRy و yRz واقع گردد پس xRz واقع می‌شود.

322. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ بوده و $R=\phi$ باشد، آیا R انعکاسی در S می‌باشد؟

حل: نخیر: زیرا برای تمام $x\in S$ باید که xRx موجود باشد.
حال آنکه $R=\phi$ برای هیچکدام عنصر S، رابطه xRx را تحقیق نمیکند.

323. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(a,a),(d,b),(b,a)\}$ باشد، آیا R انتقالی می‌باشد؟

حل: نخیر! زیرا dRb و bRa پس dRa.

324. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ باشد، آیا R انتقالی می‌باشد؟

حل: بلی! چون aRb و bRc موجود گردد، aRc موجود خواهد شد.

325. ملاحظه از Panel-2 دیده میشود که R_1 انتقالی است زیرا در صورت وجود
xRy و yRz پس xRz موجود میشود. پس R_3 انتقالی نیست
زیرا: aRb و bRa بوده پس aRa می‌باشد. کدام‌ها از روابط
relations مرتبط به Panel-2 انتقالی می‌باشند؟

حل: R_1، R_2، R_3، R_6

326. در Panel-2، R_4 چرا انتقالی نیست؟

حل: $(a,c)\in R$ و $(c,b)\in R$ بوده پس $(a,b)\notin R$.

327. ملاحظه از Panel-2، R_5 انتقالی نیست چرا؟

حل: aRb و bRa بوده پس aRa.

328. مربوط از Panel-2، R_7 چرا انتقالی بوده نمیتواند؟

حل: aRb و bRc میباشد تا $a \not R c$

329. فرضاً S، set تمام اعداد تام مثبت و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x<y\}$ باشد، آیا R انتقالی میباشد؟

حل: بلی! هرگاه $a<b$ و $b<c$ باشد، پس $a<c$ میشود.

330. اگر S set تمام اعداد حقیقی Reals را افاده نموده و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x=y\}$ باشد، آیا R انتقالی میباشد؟

حل: بلی! اگر $a=b$ و $b=c$ باشد، پس $a=c$ میشود.

331. فرضاً S، set تمام انسانها موجود و $R=\{(x,y)|x,y\in S$ and x پدر y است$\}$ باشد، آیا R انتقالی شده میتواند؟

حل: نخیر! اگر a پدر b و b پدر c باشد، پس a پدر c نه بلکه پدرکلان میشود.

332*. آیا رابطه انطباق پذیری در set شکل‌ها یک رابطه را که انتقالی باشد تعریف میکند؟

حل: بلی! اگر $a\cong b$ و $b\cong c$ باشد، پس $a\cong c$ میشود.

333*. آیا رابطه تشابهات در set مثلث‌ها یک رابطه را که انتقالی باشد تعریف میکند؟

حل: بلی! اگر $a\sim b$ و $b\sim c$ باشد، پس $a\sim c$ میباشد.

334*. آیا عمودیت خطوط مشترک المستوی یک رابطه انتقالی بین خطوط متعامد تعریف کرده میتواند؟

حل: نخیر: اگر $a\perp b$ و $b\perp c$ پس $a\not\perp c$.

335. اگر S، set اعداد تام و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\cdot y>0\}$ باشد، آیا R یک رابطه انتقالی میباشد؟

حل: درصورتیکه $x\cdot y>0$ و $y\cdot z>0$ باشد، پس $x\cdot z>0$ میباشد. بلی!

336. اگر S، set اعداد تام و $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in S \text{ and } x\cdot y\geq 0\}$ باشد:

(1). آیا $(-2,-5)\in R$ ؟ (2). آیا $(-3,0)\in R$ ؟

(3). آیا $(0,5)\in R$ ؟ (4). آیا $(-3,5)\in R$ ؟

(5). آیا R انتقالی میباشد؟ چرا؟

حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی، (4). نخیر.

(5). نخیر: بطور مثال: $(-3,0)\in R$ و هم $(0,1)\in R$ ولی $(-3,1)\notin R$.

337. اگر S یک set از sets های غیر خالی و $R=\{(A,B)\,|\,A,B\in S \text{ and } A\subset B\}$ باشند؛ آیا R انتقالی شده میتوانند؟

حل: بلی: اگر $A\subset B$ و $B\subset C$ باشد، پس $A\subset C$ میباشد.

338. اگر S set اعداد تام و $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in S \text{ and } x+y=\text{عدد جفت}\}$ باشند، آیا R، انتقالی میباشد؟

حل: بلی! اگر $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R$ باشد پس دو عدد k و m موجود شده میتوانند طوریکه $k,m\in S$ و $x+y=2k$ و $y+z=2m$

$$\therefore\ x-z=2k-2m$$

$$x+z=2(k-m+z)$$

بنا بران $x+z$ نیز یک عدد جفت بوده پس $(x,z)\in R$ میباشد، پس R انتقالی است.

339. یک binary relation R را در یک set مشخص کنید طوریکه دارای خواص که ما تعریف کردیم باشد، (دیانا باشد). یعنی در رابطه: انعکاسی، تناظری و انتقالی را در R توضیح کنید.

حل: (1). R انعکاسی است در صورتیکه: "برای هر $x\in S$، xRx موجود گردد."

(2). R تناظری است در صورتیکه: "اگر xRy باشد پس با الفرور yRx موجود گردد."

(3). R انتقالی است در صورتیکه: "هرگاه xRy و yRz باشد پس xRz موجود گردد!!"

340 - این شرخاصیت فوق برای تشخیص یک رابطهٔ binary relation مهم است، چه در تشخیص یک binary relation، R خود به سوالی که آیا R کدام یک از خواص: انعکاسی، تناظری و یا انتقالی را دارا میباشد و یا نمیباشد؟ برخورد میکنیم. بطور مثال، کدام یک از خواص تذکره در رابطه: "≤" در سیت اعداد Reals دارا میباشد؟

حل:- انعکاسی، و انتقالی

341 - باشناس Panel-2 جدول ذیل را خانه پری نموده و برای استعمال آینده انرا حفظ کنید:

روابط	Reflexiv	Symmetric	Transitive
R_1		✓	✓
R_2	✓		✓
R_3			
R_4			
R_5			
R_6			
R_7			
R_8			

این جدول برای حل تمام مربوط به سوالات: 342 الی 348 بکار برده میشود، کدام یک از روابط جدول دارای هر سه خاصیت: انعکاسی، تناظری، انتقالی میباشند؟

حل: R_3،

342 - کدام یک از روابط Panel-2: انعکاسی در عین تناظری میباشد آنها نه انتقالی؟

حل: R_7، درصورتیکه جواب شما درست نباشد، دوباره به استفاده از استعمال چارت انرا تکرار کنید تا اینکه قانع گردید.

343 - کدام از روابط مربوط Panel-2، انعکاسی و انتقالی است که از نظر تناظری نمیباشد؟ در حل آن از چارت استفاده نماید.

حل: R_2

344. کدام یک از روابط در ربط Panel-2، متناظر و انتقالی است که انعکاسی هم نمی‌باشد؟

حل: R_1

345. Set تمام مثلث‌ها را در نظر گرفته و فرضاً:

P_1 خاصیت - داشتن زاویه: 30 درجه‌ای، و

P_2 خاصیت - داشتن زاویه: 60 درجه‌ای، و بالاخره

P_3 خاصیت - داشتن زاویه: 90 درجه‌ای را افاده کنند.

حال کدام مثلث دو خاصیت ازین سه خواص را دارا باشد آیا ضروری است که خاصیت سوم را نیز دارا گردد؟

حل: بلی.

346. به جدول (چوکات) که برای روابط Panel-2 ربط تشخیص مؤدی binary relation تکمیل نموده اید ملاحظه فرمائید

اگر کدام رابطهٔ binary relation دارای دو خاصیت ازین سه خاصیت: انعکاسی، متناظری، و انتقالی باشد، آیا ضروریست که خاصیت سومی را دارا باشد؟

حل: نه خیر! امثال زیاد درمورد موجود است که یک رابطه دارای دو خاصیت بوده اما خاصیت سومی را دارا نمیباشد.

347. چون یک رابطه binary relation R میتواند که هر کدام از دو خاصیت - خواص سه گانهٔ مذکور را بدون داشتن خاصیت سومی دارا باشد، درینصورت گفته میشود که هر سه خاصیت سه گانه: "انعکاسی، متناظری و انتقالی" مستقل ازیکدیگر independent میباشند.

اگر در یک set مثلث‌ها: P_1 خاصیت متساوی الاضلاع بودن و P_2 خاصیت متساوی الزوایا بودن را ارائه کنند، آیا P_1 و P_2 خواص مستقل indep. بوده میتوانند؟

حل: نخیر: زیرا هر مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الزوایا نیز میباشد، که عکس این قضیه نیز صحت دارد.

348. حال دیده شد که یک R، binary relation میتواند که خواص یک، یا دو، و یا هر سه خواص متذکره را دارا باشد و یا هیچکدام یک آن را دارا نباشد. برای درک این مطلب جدول تکمیل کرده خود را موظف مطالعه قرار دهید، که کاپی آن یکجا جواب این شاگرد در ذیل تقدیم مینمایم:

حل:

Relations	Reflexive انعکاسی	Symmetric متناظری	Trasitive انتقالی
R_1		✓	✓
R_2	✓		✓
R_3	✓	✓	✓
R_4	✓		
R_5		✓	
R_6			✓
R_7	✓	✓	
R_8			

349. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,b),(b,a),(b,b), \quad \}$ باشند، به R عناصر دیگر را انتخاب نمایید طوریکه R، متناظری، و انتقالی گردیده تا انعکاسی نباشد.

حل: (a,a)

350. یک set، S که یک binary relation، R، در S معروض است، R در S انعکاسی نمیباشد در صورتیکه ______ باشد.

حل: برای هر $x\in S$ رابطهٔ $(x,x)\in R$ موجود.

351. به Panel-3 مراجعه کرده و بگویید که کدام از روابط مربوط آن در S انعکاسی بوده میتوانند؟

حل: R_8، R_{13}، R_{14}، R_{16}

352. مربوط از Panel-3 بگویید که چرا R_2 انعکاسی در S نیست؟

حل: زیرا: $2\in S$ است، اما $(2,2)\notin R_2$

353. یک رابطهٔ binary relation، R در یک set، S، که متناظری نیست درصورتیکه یک عنصر (p,q) در R موجود گردد طوریکه ________ باشد.

حل: $(q,p) \notin R$

354. به راشش Panel-3 بگوئید که کدام از روابط مربوطهٔ آن symmetric است؟

حل: R_1، R_2، R_5، R_7، R_9، R_{12}، R_{15}، R_{16}

355. بملاحظه از Panel-3 بگوئید که چرا R_{13} متناظری نیست؟

حل: زیرا: $(1,2) \in R_{13}$ موجود، اما $(2,1) \notin R_{13}$

356. یک R، binary relat. انتقالی نمیباشد درصورتیکه ________ باشد.

حل: اگر $(p,q) \in R$ وهم $(q,r) \in R$ موجود بوده اما $(p,r) \notin R$ باشد.

357. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2)\}$ باشد، R انتقالی نیست زیرا: ________

حل: $(3,2) \in R$ و $(2,3) \in R$ بوده، اما $(3,3) \notin R$ میباشد.

358. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(2,4),(3,3)\}$ باشد. آیا جوره‌ئی: $(p,q) \in R$ و $(q,r) \in R$ را پیدا کرده میتوانید که برای آن $(p,r) \notin R$ موجود گردد؟

حل: نه خیر: بنابرین ما باید R را یک رابطهٔ انتقالی قبولدار گردیم.

359. به Panel-3 ملاحظه نمائید. کدام از روابط S انتقالی اند؟ برای اینکه ثابت نمائید که کدام یک ازین روابط انتقالی نیست، شما باید به نشان دادن دو جوره مرتب R راکه برای آن شرائط انتقالیت transitivity تحقق پذیر نباشد قادر گردید.

حل: R_1، R_2، R_3، R_4، R_5، R_6، R_7، R_8، R_{10}، R_{11}، R_{13}، R_{14}، R_{16}

360. به ملاحظه از Panel-3 بگوئید که چرا R_{12} انتقالی نیست؟

حل: زیرا: $2R1$ و $1R2$ بوده اما $2 \not R 2$ است.

٧. رابطهٔ معادل: Equivalence Relation

361. یک نوع مهمی روابط binary relations عبارت از آن است که دارای هر سه خواص: "انعکاسی، تناظری، وانتقالی" باشد.

بالفرض: $R=\{(x,y)\mid x,y \in$ مثلث set, and $x\cong y\}$ باشد. آیا R:

(1). انعکاسی میباشد؟

(2). تناظری شده میتواند؟

(3). انتقالی شده میتواند؟

حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی.

362. اگر $R=\{(x,y)\mid x,y \in$ set Reals, and $x\leq y\}$ باشد آیا R:

(1). انعکاسی شده میتواند؟

(2). تناظری شده میتواند؟

(3). انتقالی شده میتواند؟

حل: (1). بلی: هر عدد حقیقی رابطهٔ " $\leq$ " با خودش دارد.
(2). نخیر: بطور مثال، اگر: $3\leq 2$ باشد، $3\nleq 2$.
(3). بلی: اگر $a\leq b$ و $b\leq c$ باشند پس $a\leq c$ میباشد.

363. تعریف: - یک binary relation که دارای هر سه خواص: "انعکاسی، تناظری وانتقالی" باشد بنام روابط متعادل یا Equivalence relation یاد میشود.

بطور مثال، اگر S، مثلث set و $R=\{(x,y)\mid x,y\in S$ and $x\cong y\}$ باشند:

(1). چون برای $a\in S$ رابطهٔ: $a\cong a$ صدق میکند پس R ________ میباشد.

(2). اگر a و b مثلث بوده، درصورتیکه $a\cong b$ باشد، $b\cong a$ نیز میباشد، بنابران گفته میشود که R ________ میباشد.

(3). درصورتیکه a، b و c مثلث باشند، اگر $a\cong b$ و $b\cong c$ باشند پس $a\cong c$ نیز موجود میشود، بنابران گفته میشود که R ________ میباشد.

(4). چون R دارای هرسه خواص: «انعکاسی، تناظری، و انتقالی» است، بنابرآن از روی تعریف ادعا کرده میتوانیم که R یک ______ است.

حل: (1). انعکاسی، (2). تناظری، (3). انتقالی،
(4). رابطهٔ معادل Equivalence relat.

364. (1). یک binary relation، R یک equivalence relation را بوجود می آورد، درصورتیکه R دارای خواص: ______، ______ و ______ باشد.

اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(a,c),(b,b),(c,c)\}$ باشند:

(2). اگر دقت کنید خواهید دید که: R دارای خواص انعکاسی و انتقالی بوده اما تناظری نمیباشد، چرا؟

(3). بنابرآن R یک رابطهٔ equivalence ______.

حل: (1). انعکاسی، تناظری، انتقالی،
(2). زیرا: $(a,c)\in R$ بوده اما $(c,a)\notin R$، (3). نمیباشد.

365. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ باشند، پس چرا R یک رابطهٔ معادل equivalence relation در S نمیباشد؟

حل: چون $(3,3)\notin R$ پس R انعکاسی نمیباشد. ذیلاً یک مثال که این حقیقت را واضح بنماید: زمانیکه ما یک set مشخص داشته باشیم باید لزوماً تمام عناصر آنرا مطالعه نموده و سپس نتیجهٔ مورد نظر را در آن حکم کنیم. اگر در set $T=\{1,2\}$، R مورد بررسی قرار گیرد دیده میشود که R یک equivalence rel. را تشکیل میدهد.

366*. یک equivalence relation در یک set، S عبارت از یک binary relation است که دارای هرسه خواص: ______ میباشد.

اگر: $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ باشد. دیده میشود که R دارای هرسه خواص: «انعکاسی، تناظری، انتقالی» بوده، پس R یک ______ را در S بوجود می آورد.

حل : انعکاسی ، تناظری ، انتقالی — equivalence relation

367. یک binary relation در یک set ، که دارای هر سه خواص : انعکاسی ، تناظری و انتقالی باشد بنام ———— یاد میشود .

حل : equivalence relation یا رابطهٔ متعادل

368. اگر S ، set اعداد حقیقی را نشان داده و رابطهٔ : xRy موجود گردد در صورتیکه $x \le y$ باشد . آیا R یک equivalence relation در که میباشد ؟ چرا ؟

حل : نه خیر ! زیرا : R تناظری نیست . (بطور مثال : $2 \le 3$ مگر $3 \not\le 2$)

369. اگر S ، set اعداد حقیقی و رابطه ، xRy موجود گردد ، در صورتیکه : $x < y$ باشد . آیا R یک equivalence relation در که شده میتواند ؟ چرا ؟

حل : نه خیر ! زیرا : R ، انعکاسی و تناظری نیست .

370. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$ باشد ، آیا R انعکاسی میباشد ؟

حل : بلی ! زیرا برای هر $x \in S$ یک $(x,x) \in R$ موجود است .

371. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$ باشد ، آیا R تناظری میباشد ؟

حل : بلی ! زیرا : برای هر $(x,y) \in R$ یک $(y,x) \in R$ موجود است .

372. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(c,a),(a,c)\}$ باشد ، آیا R انتقالی میباشد ؟

حل : بلی ! زیرا : هرگاه xRy و yRz باشد ، xRz موجود میشود .

*373. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$ مفروض گرفته شود،
از مطالعه شامل روابط، چگونگی های: 370 الی 372 دیده میشود که R
انعکاسی، تناظری و انتقالی بوده بنابرآن گفته میتوانیم که R یک:
________ را بوجود می آورد.

حل: equivalence relation: رابطهٔ متعادل

374. با ملاحظه از Panel-3 بگوئید که آیا R_2 یک equivalence relation در
S تشکیل شده میتواند؟ چرا؟

حل: نخیر! زیرا: انعکاسی نیست. $2 \in S$ است اما $(2,2) \notin R$.

375. با مشاهده از Panel-3، آیا R_{13} یک equivalence relation در S تشکیل شده میتواند؟

حل: نخیر! زیرا تناظری نیست. $(1,2) \in R_{13}$ است اما $(2,1) \notin R_{13}$

376. با مشاهده از Panel-3 آیا R_{14} یک رابطهٔ متعادل شده میتواند؟ چرا؟

حل: نخیر! زیرا R_{14} تناظری نیست. $(2,1) \in R_{14}$ اما $(1,2) \notin R_{14}$.

377. از جملهٔ روابط مربوط به Panel-3 کدام آن یک رابطهٔ متعادل در S تشکیل شده میتواند؟

حل: R_8 ، R_{16}

378. اگر S، set تمام زنان کابل و $R=\{(x,y) \mid x,y \in S$ and x دارای عین تعداد شوهر مثل y است$\}$ باشد،
آیا R یک equivalence relation پیدا میکند؟

حل: بلی

379. اگر S، مجموعهٔ تمام شیت ها و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\cong y\}$ باشند،
آیا R : (1). انعکاسی میباشد؟
(2). متناظری میباشد؟
(3). انتقالی میباشد؟
(4). یک رابطهٔ معادل یا equivalence relation میباشد؟

حل : (1). بلی ، (2). بلی ، (3). بلی ، (4). بلی .

380. فرضاً که S، مجموعهٔ تمام انسان ها بوده ، که $(a,b)\in S$ ونیز $(a,b)\in R$ میباشد ، درصورتیکه قد a باندازهٔ قد b بلند باشد. باشش این شرایط آیا R :
(1). انعکاسی بوده میتواند؟
(2). متناظری بوده میتواند؟
(3). انتقالی بوده میتواند؟
(4). رابطهٔ معادل equivalence relation بوده میتواند؟

حل : (1). بلی ، (2). بلی ، (3). بلی ، (4). بلی

381. اگر که S، مجموعهٔ اعداد تام را ارائه کرده ، $p,q\in S$ ونیز pRq میباشد
درصورتیکه شرط : $p\cdot q>0$ بین p و q موجود گردد. آیا R :
(1). یک equivalence relation شده میتواند؟
(2). انعکاسی میباشد؟

حل : (1). نخیر زیرا ، انعکاسی نیست ، (2). نخیر : $0\in S$ اما $0R0$.

382. اگر که S، مجموعهٔ تمام شیت ها در یک مستوی باشد. $a,b\in S$ ونیز aRb میباشد
درصورتیکه $a\cong b$ باشد ، آیا R یک رابطهٔ معادل میباشد؟

حل : بلی

383 . اگر S ست اعداد تام بوده و برای $a,b \in S$ پس $a\,R\,b$ موجود میشود، درصورتیکه $a.b \geq 0$ باشد. آیا درینصورت R :-

(1) . انعکاسی شده میتواند؟

(2) . تناظری شده میتواند؟

(3) . انتقالی شده میتواند؟

(4) . یک رابطهٔ متعادل و یا equivalence relation بوده میتواند؟

حل : (1) . اگر x یک عدد تام باشد پس $0 \leq x.x$ بوده یعنی: $(x,x) \in R$. بلی

(2) . بلی! اگر $x,y \in S$ باشند درصورتیکه $0 \leq x.y$ باشد، $0 \leq y.x$ بوده، پس اگر xRy موجود گردد، پس yRx نیز موجود میگردد.

(3) . نخیر! بطور مثال $-1,0,1 \in S$ بوده درصورتیکه $(-1,0) \in R$ و $(0,1) \in R$ باشد، $(-1,1) \notin R$. یعنی: $-1.1 \ngeq 0$

(4) . بوده نمیتواند! زیرا: انتقالی نیست.

---

384 . اگر S، ست اعداد حقیقی بوده و درصورتیکه $p,q \in S$ باشد $p\,R\,q$ وقتی حاصل شده میتواند که $p \neq q$ باشد. درینحالت آیا R :

(1) . انعکاسی بوده میتواند؟ چرا؟

(2) . تناظری بوده میتواند؟ چرا؟

(3) . انتقالی بوده میتواند؟ چرا؟

(4) . یک رابطهٔ متعادل را بوجود آورده میتواند؟ چرا؟

حل : (1) . نخیر! زیرا درصورتیکه $x \in S$ بوده و $x \neq x$، پس $(x,x) \notin R$.

(2) . بلی! اگر $x \neq y$ پس $y \neq x$.

(3) . نخیر! بطور مثال، $(2,3) \in R$، $(3,2) \in R$ اما $(2,2) \notin R$.

(4) . نخیر! زیرا: R انعکاسی (ویا انتقالی) نیست.

385* . فرض کنید، S ست اعداد حقیقی و $R=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x<y\}$ باشد. آیا R یک equivalence relation میباشد؟

حل: نه خیر! زیرا R انعکاسی نیست (و یا تناظری نیست.)

386. اگر S، یک ست اعداد حقیقی و $R=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } x \leq y\}$ باشند.
آیا R یک رابطهٔ معادل equivalence relation میباشد؟ چرا؟

حل: نه خیر! زیرا: تناظری نیست.

387. ازینکه رابطهٔ معادل ویا equivalence relation دارای اهمیت خاص در ریاضی است،
بنابران دارای سمبول و علامهٔ خاص و نیز دارای افادهٔ یک عبارت خاص نیز
میباشد. در صورتیکه R کدام رابطهٔ معادل equivalence relation
در S باشد، برای اینکه افادهٔ: $(x,y) \in R$ را به علاوهٔ xRy
ارائه نمایم آنرا توسط سمبول خاص خودش « ≈ » نشان میدهیم. بهمین قسم بجای
اینکه آنرا به عبارت: « x رابطهٔ R را به y دارد.» بیان کنیم آنرا به عبارت:
« x معادل y است.» ویا « x is equivalent to y » بیان میکنیم.
پس با شش طرز افاده جدید ما $(x,y) \in R$ به شکل: ——— نوشته و
بعبارت: ——— بیان میکنیم.

حل: a ≈ b ، a معادل b است.

389. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ باشند، در صورت
R یک رابطهٔ معادل میباشد. آنرا امتحان کنید، چون $(a,a) \in R$ است پس a ≈ a.
(1). چون $(a,b) \in R$ است، پس ——— میباشد، و بهمین قسم
(2). چون $(c,c) \in R$ است، پس ——— میباشد.

حل: (1). a ≈ b ، (2). c ≈ c .

390. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(a,b),(b,b),(b,d),(c,c),(d,b),(d,d)\}$ باشند!
R یک رابطهٔ معادل در S میباشد. امتحان کنید. زیرا:

برای $(a,a)\in R$ ، a معادل a است ، بهمین قسم برای $(b,b)\in R$ درحصه
$(b,d)\in R$ ، b معادل d و معادل b است. و بهمین قسم:

(1). چون $(c,c)\in R$ است پس c معادل ____ بوده، و بالاخره:

(2). چون $(d,b)\in R$ و $(d,d)\in R$ بوده، پس d معادل ____ و
d معادل ____ میباشد.

حل: (1). c ، (2). b ، d

391. اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ بوده و
$R=\{(a,a),(b,b),(b,e),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d),(e,b),(e,e)\}$ باشد:
R یک رابطهٔ معادل در S میباشد. ازرا امتحان کنید.

(1). عناصریکه a معادل آن است کدام اند؟

(2). عناصریکه b معادل آن است کدام اند؟

(3). عناصریکه c معادل آن است کدام اند؟

حل: (1). a ، (2). b ، e ، (3). c ، d

392. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$ باشد،
علامه «≈» را در استعمال نموده و ازرا به عبارت: «معادل است به» بگردانید، و جوربات
ذیل را تعبیر نمائید. چنانچه که $(1,1)\in R$ را به افاده «$1\approx 1$» نشان دهید.
پس درینصورت: (1). $(2,2)\in R$ را به افاده: ____
(2). $(3,4)\in R$ را به افاده: ____ نشان دهید.

حل: (1). $2\approx 2$ ، (2). $3\approx 4$

393. با استفاده از علامه و notation «≈» فرض یک رابطه معادل طبق ذیل نوشته
شده میتواند:- خاصیت انعکاسی: برای هر که $a\in S$ ، رابطه $a\approx a$ موجود است.
(1). خاصیت تناظری: اگر که $a,b\in S$ و $a\approx b$ باشد، پس ____ میباشد.

(2) . خاصیت انتقالی : اگر $a,b,c \in S$ بوده و $a \approx b$ و $b \approx c$ باشند، پس ______ میشود .

حل : (1) . $b \approx a$ ، (2) . $a \approx c$

394 . توجه نمائید ! اگر در یک رابطهٔ متعادل R در یک Set ، S ، درصورتیکه $x \in S$ باشد ، پس بالفرور xRx میباشد ؟ .

(1) . چرا ؟ (2) . بنابر آن برای هر $x \in S$ رابطهٔ : ______ به x موجود است .

حل : (1) . زیرا : R یک رابطهٔ متعادل بوده ، پس بالفرور انعکاسی است (2) . x

395 . پس درهر رابطهٔ متعادل داده شده R در یک Set ، S ، هر عنصر x Set ، S لااقل یک عنصر که عبارت از ______ است متعادل میباشد .

حل : x

396 . اگر $S=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $R=\{(a,a),(a,d),(b,b),(b,c),$
$(b,f),(c,b),(c,c),(c,f),(d,a),(d,d),(e,e),(f,b),(f,c),(f,f)\}$
باشد ، درینصورت R یک رابطهٔ متعادل در S میباشد : امتحان کنید :
چنانچه دیده میشود که a متعادل به a و متعادل به d است .

(1) . b متعادل است به ______
(2) . c متعادل است به ______
(3) . d متعادل است به ______
(4) . e متعادل است به ______
(5) . f متعادل است به ______

حل : (1) . b ، c و f (2) . b ، c و f (3) . a و d (4) . e (5) . b ، c و f

397. اگر R یک رابطه متعادل در یک set، S بوده و اگر $(x,y) \notin R$. میگوییم که x متعادل y نیست. فرضاً: $S=\{a,b,c\}$ بوده و $R=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ باشد:

(1). چون $(a,a) \in R$ پس ثابت a متعادل به ___ است.

(2). چون ___ (b,c) ثبوت، پس b متعادل به c ___.

حل: (1). a ، (2) $\notin R$ ، نیست.

398. اگر $S=\{a,b,d\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(b,d),(d,b),(d,d)\}$ باشد. درینصورت R یک رابطه متعادل در S بوده و انرا امتحان کنید:

فرضاً $S_1=\{x \mid b \approx x\}$ باشد، درینحالت b متعادل به x میشود، پس $S_1=\{b,d\}$ است. فرضاً $S_2=\{x \mid a \approx x\}$ باشد. پس $S_2=$ ___ میشود.

حل: $\{a\}$

399. فرضاً $S=\{a,b,c,d,e\}$ بوده و
$R=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$ باشد:
درینصورت R یک رابطهٔ متعادل در S میباشد، امتحان کنید:

فرضاً: $S_1=\{x \mid a \approx x\}$ باشد، پس: $S_1=\{a\}$ است:

فرضاً: $S_1=\{x \mid b \approx x\}$ باشد، پس: $S_2=\{b,c\}$ میشود،

فرضاً: $S_3=\{x \mid c \approx x\}$ باشد، پس $S_3=$ ___ میشود.

حل: $\{b,c\}$

400. اگر R یک رابطه متعادل در یک set، S باشد، پس $S_1=\{x \mid a \approx x\}$ یعنی:
"set تمام xهای که متعادل به a اند" را دارد.

فرضاً $S=\{0,1,2,3\}$ و $R=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ باشند:

اگر: $S_1=\{x|0\approx x\}$ باشد، پس: $S_1=\{0,1\}$ میباشد،

(1). اگر $S_2=\{x|1\approx x\}$ باشد، پس: $S_2=$ ______ میشود.

(2). اگر $S_3=\{x|3\approx x\}$ باشد، پس: $S_3=$ ______ میباشد.

حل: (1). $\{0,1\}$، (2). $\{3\}$

401. اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ بوده،

$$R=\{(a,a),(b,b),(b,d),(b,e),(c,c),(d,b),(d,d),(d,e),(e,d),(e,b),(e,e)\}$$

باشد، درصورتیکه R یک رابطهٔ متعادل را در S تشکیل میدهد.
آنرا تکمیل کنید:

اگر $S_1=\{x|a\approx x\}$ بوده، پس: $S_1=\{a\}$ میشود.

(1). اگر $S_2=\{x|b\approx x\}$ باشد، پس: $S_2=$ ______ میشود.

(2). اگر $S_3=\{x|c\approx x\}$ باشد، پس: $S_3=$ ______ میشود.

(3). اگر $S_4=\{x|d\approx x\}$ باشد، پس: $S_4=$ ______ میشود.

حل: (1). $\{b,d,e\}$، (2). $\{c\}$، (3). $\{b,d,e\}$

402. بالفرض ما یک رابطهٔ متعادل R در یک set، S داشته باشیم و $S_1=\{x|a\approx x\}$ و $S_2=\{x|b\approx x\}$ باشند.
درصورتیکه: $y\in S_1$ بوده باشد، پس $a\approx y$ است، واگر $z\in S_2$ باشد، پس درصورت ______ میباشد.

حل: $b\approx z$

VI. انقسام یک سیت و صنوف متعادل:

Partition of A Set And Equivalence Classes

403. بخاطر خود بسپارید که دو sets، S و T که $S \cap T = \Phi$ بنام set های غیر متقاطع ویا disjoint sets یاد میکنند. اگر: $S = \{a, d\}$ و $T = \{c\}$ باشند، پس: $S \cap T =$ ___ میشود، که در نتیجه set های S و T بنام set های غیر متقاطع ویا disjoint sets یاد میگردند.

حل: Φ

404. فرضاً: $S = \{1, a, b\}$ و $T = \{2\}$ باشد، پس $S \cap T =$ ___ بوده، بنابران S و T دو set ___ ویا ___ را تشکیل میدهند.

حل: Φ ، غیر متقاطع ویا disjoint

405. اگر مجموعه از set ها موجود باشد، طوریکه تقاطع هر جوره آن ها عبارت از یک empty set باشد، درینصورت میگوییم که set های متقابله غیر متقاطع ویا mutually disjoint میباشند. فرضاً: $S_1 = \{a, b, c\}$ و $S_2 = \{d, f\}$ و $S_3 = \{e\}$ باشند، درینصورت:

(1). $S_1 \cap S_2 =$ ___ ، (2). $S_1 \cap S_3 =$ ___ ،

(3). $S_2 \cap S_3 =$ ___ ،

(4). بنابران sets های S_1، S_2 و S_3 ___ میباشند.

حل: (1). Φ ، (2). Φ ، (3). Φ (4). mutually disjoint ویا متقابله غیر متقاطع

406. اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ باشد، set های ذیل را در نظر بگیرید:
$S_1=\{a,d\}$ ، $S_2=\{b,c\}$ ، $S_3=\{e\}$ بوده، درینصورت دیده میشود که:
(1). $S_1 \cap S_2 =$ ——— ، (2). $S_1 \cap S_3 =$ ——— ، (3). $S_2 \cap S_3 =$ ———
(4). بهمین قسم نیز $S_1 \cup S_2 \cup S_3 =$ ——— میشود.

حل: (1). ϕ ، (2). ϕ ، (3). ϕ ، (4). S

407. فرضاً: $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ بوده، $S_1=\{2,4,5\}$ ، $S_2=\{1\}$
و $S_3=\{3,7\}$ و $S_4=\{6\}$ باشند. توجه نمائید که:
(1). تقاطع intersection هر جوره ای ازین set ها عبارت از یک empty set
بوده و set های مذکور متقابله غیرمتقاطع یعنی ——— میباشند.
(2). $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 =$ ——— میباشد.

حل: (1). mutually disjoint ، (2). S

408. یک set، S بحیث مجموعهٔ یکعده subset های مفروض است اگر:
(1). تمام subset های S باهم متقابله غیرمتقاطع mutually disjoint بوده و
(2). اتحاد union تمام این subset های مذکور عبارت از S میباشد.
درینصورت گفته میشود که subset های مذکور یک انقسام partition
را در S بوجود آورده اند.
مثلاً، اگر $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $S_1=\{1\}$ ، $S_2=\{2,3,4\}$ و
$S_3=\{5,6\}$ باشند، درینصورت بملاحظه میرسد که: S_1 ، S_2
و S_3 بصورت متقابله غیرمتقاطع mutually disjoint بوده و ضمناً
اتحاد یا union آنها عبارت از S میباشد. بنابران
گفته میشود که set های: S_1 ، S_2 و S_3 یک ——— را
در S تشکیل داده اند.

حل: انقسام ، partition

.409 توجه نمائید برای اینکه یکعده subsets های S، S را انقسام نماید درینصورت ضرورت است که شرایط ذیل را تحقیق کنند:

(1). این subsets های مذکور متقابلاً غیرمتقاطع mutually disjoint بوده،

(2). اتحاد، union آن شامل set، S گردد.

فرضاً $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $S_1=\{1,2\}$ و $S_2=\{3,5\}$ و $S_3=\{6\}$ باشند. آیا این sets های S_1، S_2 و S_3 یک انقسام partition را در S بوجود آورده اند؟

حل: نخیر! زیرا: $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \neq S$

.410 اگر S کدام یک set باشد، یکعده subsets های S یک انقسام partition را در S بوجود می آورند درصورتیکه:

(1). subsets های مذکور بصورت ______ غیرمتقاطع ______ بوده و

(2). اتحاد union آن عبارت از ______ باشد.

حل: (1). متقابلاً غیرمتقاطع mutually disjoint، (2). S.

.411 اگر S یک set بوده آن subset های S یک partition انقسام را در S بوجود می آورند که: (1). ______ بوده و

(2). ______ باشد.

حل: (1) از آن متقابلاً غیرمتقاطع، (2). اتحاد آن ها عبارت از S

.412 اگر $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ بوده و $S_1=\{1,2,4\}$، $S_2=\{3,5\}$ و $S_3=\{2,6\}$ باشند، آیا S_1، S_2 و S_3 یک انقسام را در S بوجود می آورند؟

حل: نخیر! زیرا: $S_1 \cap S_3 \neq \phi$ بوده متقابلاً غیرمتقاطع نیستند.

413 . بخاطر داشته باشید برای اینکه یک partition (یا انقسام) در یک set ، S تولید شود، باید که صرف subset های موجود یک باهم متقابلاً غیرمتقاطع (یا mutually disjoint) بوده، و اتحاد آن عبارت از set ، S که تولید شده باشد.
فرضاً: $S=\{a,b,c,d\}$ بوده و $S_1=\{a\}$ ، $S_2=\{b\}$ ، $S_3=\{c\}$ و $S_4=\{d\}$ باشند، آیا S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 یک partition را در S تولید میکنند؟

حل: بلی! زیرا: S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 متقابلاً غیرمتقاطع و اتحادشان S میباشد.

414 . فرضاً $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $S_1=\{1,3,5\}$ و $S_2=\{2,4\}$ و $S_3=\{3,6\}$ باشند
آیا S توسط S_1 ، S_2 و S_3 انقسام یافته است؟

حل: نخیر! زیرا: S_1 و S_3 غیرمتقاطع disjoint نیستند.

415 . اگر $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $S_1=\{1\}$ و $S_2=\{2,4\}$ و $S_3=\{3,6\}$ باشند،
آیا set S ، توسط این subset های خویش انقسام گردیده است؟

حل: نخیر! زیرا: $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \neq S$ است.

416 . اگر S ، set اعداد تام و S_1 ، set اعداد جفت even تام و S_2 set اعداد تاق odd را ارائه کند، در آنصورت:
(1). $S_1 \cap S_2 =$ ___ ، (2). $S_1 \cup S_2 =$ ___
(3). S_1 و S_2 یک ___ یا ___ را در S بوجود میآورند.

حل: (1). ϕ ، (2). S ، (3). انقسام یا partition

417* . فرضاً S ، set اعداد تام غیرمنفی nonnegative Int. بوده و

$S_1=\{0,3,6,9,\dots,3n,\dots\}$
$S_2=\{1,4,7,10,\dots,(3n+1),\dots\}$
$S_3=\{2,5,8,11,\dots,(3n+2),\dots\}$ را ارائه کنند،

آیا S_1، S_2 و S_3 یک partition (انقسام) را در S بوجود آورده اند؟ چرا؟

حل: بلی! زیرا: آنها ست های غیر متقاطع بوده و نیز اتحاد شان S میشود.

418. اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ و ست
با $R=\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,e),(c,a),(c,c),(d,d),(e,b),(e,e)\}$
R یک رابطهٔ متعادل equivalance relat. در S میباشد، امتحان کنید.
حال: فرض: $S_1=\{x|a\approx x\}$؛ $\therefore$ $S_1=\{a,c\}$ میباشد.
(1). فرضاً $S_2=\{x|b\approx x\}$، $\therefore$ $S_2=\{\text{———}\}$ میباشد.
(2). فرضاً $S_3=\{x|c\approx x\}$، $\therefore$ $S_3=\{\text{———}\}$ میباشد،
(3). فرضاً $S_4=\{x|d\approx x\}$، $\therefore$ $S_4=\{\text{———}\}$ میباشد،
(4). فرضاً $S_5=\{x|e\approx x\}$، $\therefore$ $S_5=\{\text{———}\}$ میباشد.

حل: (1). $S_2=\{b,e\}$، (2). $S_3=\{a,c\}$، (3). $S_4=\{d\}$، (4). $S_5=\{b,e\}$

419. subset های که بر حرکات 418 حاصل شده اند عبارت اند از:
$S_1=\{a,c\}$، $S_2=\{b,e\}$، $S_3=\{a,c\}$، $S_4=\{d\}$، $S_5=\{b,e\}$
توجه نمائید: - اگر شما هر دو subset را که انتخاب دارید خواهد آن ها باهم مساوی اند و یا غیر متقاطع disjoint.
اگر ما subset های متمایز را لست کنیم در آنصورت خواهیم داشت: -
$S_1=\{a,c\}$، $S_2=\{b,e\}$ و $S_4=\{d\}$، در اینجا از انتخاب subset های: S_3 و S_5 صرف نظر کرده ایم، زیرا آن ها یک تکرار کنندهٔ subset های انتخاب شدهٔ فوق میباشند. در صورتیکه $S=\{a,b,c,d,e\}$ میباشد، آیا S_1، S_2 و S_4 یک انقسام را در S بوجود آورده میتوانند؟

حل: بلی! زیرا S_1، S_2 و S_4 باهم ست های غیر متقاطع بوده و اتحاد آن ها عبارت از S میباشد.

.420 فرضاً S مجموعهٔ اعداد تام و $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in S \text{ and } x+y=$ یک عدد جفت $\}$ باشند؛ ما دیدیم که R یک رابطهٔ معادل را در S بوجود می‌آورد. حال اگر $S_1=\{x\,|\,\bar{x}=0\}$ و $S_2=\{x\,|\,\bar{x}=1\}$ فرض شوند، درینصورت؛

$$S_1=\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots,2n,\cdots\}$$

و $S_2=\{\cdots,-3,-1,1,3,5,\cdots,(2n+1),\cdots\}$ میشوند.

توجه داریم؛ درصورتیکه:

(1). اگر $a,b\in S_1$ باشند، $a\approx b$ میشود،

(2). اگر $a,b\in S_2$ باشند، $a\approx b$ میشود.

(3). اگر $a\in S_1$ و $b\in S_2$ باشند، پس $a\not\approx b$ میشود. بنابران گفته میتوانیم که S_1 و S_2 یک ——— را در S بوجود آورده‌اند.

حل: انقسام ویا partition

.421 فرضاً $S=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c),(d,d)\}$ باشند؛ ما نشان داده میتوانیم که R یک رابطهٔ معادل در S است. ازان استفاده کنید. اگر ما تمام subset های S را طوری ترتیب دهیم که: آن های را که عناصرشان معادل یکدیگر اند در یک دسته و آن های را که عناصرشان معادل یکدیگر نیستند در دستهٔ دیگر قرار دهیم، درصورتیکه ما subset های معادل را بصورت تکرار لست نکنیم؛ پس درینصورت ما خواهیم داشت:

$$S_1=\{a,c\} \text{ و } S_2=\{b\} \text{ و } S_3=\{d\}$$

حال دیده میشود که S_1، S_2 و S_3 بصورت متقابله غیرمتقاطع mutually disjoint بوده و علاوه بران: $S_1\cup S_2\cup S_3=S$ میشود. پس گفته میتوانیم که S_1، S_2 و S_3 یک ——— را در S بوجود آورده اند.

حل: انقسام partition

.422 اگر $S=\{a,b,c,d,e,f\}$ بوده و $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(b,e),(e,b),(a,e),(e,a),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)\}$ باشد، R

R یک رابطه متعادل در یک set میباشد. ازا امتحان کنید. subset های را تشکیل دهید، طوریکه: آن عناصر که با یک متعادل یکدیگر اند در همین subset قرار داده و آنهایکه متعادل یکدیگر نیستند در subset های جداگانه قرار دهید. subset های را که دارای همین عناصر اند بصورت تکراری لست نکنید.

حل: $S_1=\{a,b,e\}$ ، $S_2=\{c\}$ ، $S_3=\{d\}$ ، $S_4=\{f\}$

423. آیا subset های که در حرکات مثال 422 لست گردیده اند یک partition را در یک set بوجود آورده میتوانند؟ بخاطر باید داشت که $S=\{a,b,c,d,e,f\}$ میباشد.

حل: بلی

424. یک رابطه متعادل R در یک set، که مفروض است، یک طریقه طبیعی برای انقسام که باساس R موجود است. و آن عبارت از نیست: subset های را که عناصر آن از رابطه R پیروی میکنند در یک دسته قرار دهید، و به همین قسم subset های را که عناصر آن رابطه R را تعقیب نمیکنند در دسته دیگر قرار دهید. طبیعی است که این دسته subset ها در set، که یک انقسام را بوجود می آورند. فرضاً $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$ باشند: درینصورت subset های مطلوب را چنانچه در فوق تذکر داده شد، تعیین کنید.

حل: $S_1=\{a\}$ ، $S_2=\{b,c\}$

425. انقسام، یا partition، که در حرکات مثال 424 تذکر یافته یکی از خواص ممیزه یک رابطه ثنائی، binary relation، R را توضیح میکند. subset های که بااین اساس تشکیل می یابند بنام صنوف متعادل

equivalence classes ، set ها که به اساس R یاد میشوند.

اگر $S=\{1,2,3,4,5\}$ و

$R=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,3),(5,5)\}$ باشند:

درینصورت R یک رابطهٔ متعادل equivalence relation را در S تشکیل میدهد.

از آن چک کنید. equivalence classes ، S را به اساس R لست کنید.

حل: $S_1=\{1\}$ ، $S_2=\{2,4\}$ ، $S_3=\{3,5\}$

426. اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ و

$R=\{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,c)\}$ باشند:

R یک رابطهٔ متعادل در S میباشد. اگر:

$S_1=\{x|x\in S \text{ and } aRx\}$ باشد، پس $S_1=\{a,c\}$ میشود.

$S_2=\{x|x\in S \text{ and } bRx\}$ باشد، پس $S_2=\{b\}$ میشود.

$S_3=\{x|x\in S \text{ and } dRx\}$ باشد، پس $S_3=\{d,e\}$ میشود.

درینصورت: S_1، S_2 و S_3 بنام ________ S به اساس R یاد میشوند.

حل: صنوف متعادل یا equivalence classes

427. به Panel-2 ملاحظه کنید، خود دیده میتوانید که R_3 یک رابطهٔ متعادل equivalence rel. در S میباشد. لست equivalence classes ، S را به اساس R_3 ترتیب کنید.

حل: $S_1=\{a,b\}$ ، $S_2=\{c\}$

*428. به Panel-4 ملاحظه کنید. دریافت خواهید کرد که R_4 یک رابطهٔ متعادل را در S بوجود می‌آورد. equivalence class ، S را به اساس R_4 لست کنید.

حل: $S_1=\{a\}$ ، $S_2=\{b\}$ ، $S_3=\{c\}$ ، $S_4=\{d\}$ ، $S_5=\{e\}$

429 - بمنظور از Panel-۲۱ خواهید دید که R_{10} یک رابطهٔ متعادل دیگر میباشد. آن equivalence classes را که باشند، R_{10} ، S را انقسام میکنند لست کنید.

حل : $S_1=\{a\}$ ، $S_2=\{b\}$ ، $S_3=\{c\}$ ، $S_4=\{d\}$ ، $S_5=\{e\}$

430 - اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ و

$R=\{(a,a),(b,b),(b,d),(b,e),(c,c),(d,b),(d,d),(d,e),(e,b),(e,d),(e,e)\}$ باشند:

صنوف متعادل equivalence classes که تشکیل میشوند عبارت اند از:

$S_1=\{a\}$ ، $S_2=\{b,d,e\}$ ، $S_3=\{c\}$

توجه نمائید : 1. S_1 ، S_2 و S_3 ، set، S را انقسام میکنند.

2. اگر دو عنصر x و y از عین equivalence class انتخاب گردند، پس درینصورت $x \approx y$ میباشد.

3. اگر x و y از دو دیگر equivalence class یعنی صنوف غیر متعادل انتخاب گردند، پس درینصورت ______ میباشد.

حل : $x \not\approx y$ (x متعادل y نیست)

431 - این طور انقسام کردن (تقسیم کردن) یک set، S به صنوف متعادل equivalence classes آن یکی از خواص مهمی یک رابطهٔ متعادل است. معلومات ذیل را روی صفحه ای کاغذ نوشته و برای مسائل مربوط چوکات های 432 الی 435 بکار ببرید:

اگر $S=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $R=\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(b,e),$
$(c,a),(c,c),(d,b),(d,e),(d,d),(e,b),(e,d),(e,e),(f,f)\}$ باشند:

درینصورت R عبارت از یک رابطهٔ متعادل equivalence relation در S بوده که دارای equivalence classes ذیل است:

$S_1=\{a,c\}$ ، $S_2=\{b,d,e\}$ و $S_3=\{f\}$.

این مسأله حل ایجاب نمیکند

432. آیا هر $x \in S$ یکعنصر کدام یک از equivalence class بوده میتواند؟

حل : بلی

433. آیا کدام یک $x \in S$ یکعنصر بیشتر از یک equivalence class بوده میتواند؟

حل : نخیر ،

434. اگر x و y عناصر عین یک equivalence class باشند، پس درینصورت $y \approx x$ میباشد . اگر x ، y عناصر equivalence class های متفاوت باشند، پس درینصورت : ________ میباشد ،

حل : $x \not\approx y$ (x معادل y نیست ،)

435. اگر : $y \approx x$ باشد ، درینصورت x و y عناصر عین equivalence class بوده و اگر $y \not\approx x$ باشد ، پس درینصورت x و y عناصر ________ میباشند

حل : equivalence class های متفاوت

436. بخاطر باید داشت اگر x و y عناصر عین equivalence class باشند ، درینصورت $x \approx y$ و ($y \approx x$) میباشد . بالفرض : $S = \{a, b\}$ یک equivalence class ، کدام set ، که باشد ، پس درینصورت روابط : $a \approx a$ ، $a \approx b$ ، $b \approx a$ ، و $b \approx b$ بین عناصر S موجود میباشد . بنابران : ________ ، ________ ، ________ ، ________ بالمزدوج عناصر یک ربط معادل equivalence relation را تشکیل میدهند .

حل : (a, a) ، (a, b) ، (b, a) و (b, b)

437*. بالفرض اگر $S_1=\{1,2,4\}$ یک equivalence class را در یک set S باشد کدام رابطه متعادل equivalence relation تشکیل داده باشد. لست جوره های مرتب را که به رابطه متعادل مذکور مربوط بوده ترتیب دهید طوریکه هر یک subset های set S گردد.

حل: $(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4)$

438. بالفرض S یک set اعداد مثبت نسبتی باشد، توجه نمائید: که تعریف مساوات «=» در set اعداد نسبتی یک رابطه متعادل را بوجود می آورد، بطور مثال:

$$S_1=\{1, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \ldots\}$$

$$S_2=\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\}$$

$$S_3=\{\frac{5}{8}, \frac{10}{16}, \frac{15}{24}, \frac{20}{32}, \ldots\}$$

حالانکه تمام set های: S_1، S_2 و S_3 ... ______ را در S باشد رابطه متعادل تشکیل میدهند.

حل: equivalence classes (صنوف متعادل)

439. اگر R یک رابطه متعادل در یک set S باشد، پس S توسط R به equivalence classes انقسام شده میتواند. بالعکس اگر S انقسام گردد، درینصورت یک رابطه متعادل R موجود شده میتواند طوریکه subset های که باعث انقسام در S گردیده اند عیناً صنوف متعادل equivalence classes R میباشند.

بطور مثال اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ توسط: $S_1=\{a\}$، $S_2=\{b,d\}$ و $S_3=\{c\}$ و $S_4=\{e\}$ انقسام شده باشد، پس یک رابطه متعادل R موجود میشود طوریکه: S_1، S_2، S_3 و S_4، صنوف متعادل را در R تشکیل داده

که درینصورت : $\}$ ______ $R=\{(a,a),(b,b),(b,d),$ میباشد.

حل :	$(d,b),(d,d),(c,c),(e,e)\}$

440. فرضاً : $S=\{a,b,c\}$ بوده که توسط : $S_1=\{a\}$ و $S_2=\{b,c\}$ انقسام یافته است. لست عناصر رابطهٔ متعادل R را در S ترتیب دهید طوریکه S_1 و S_2، صنوف متعادل equivalence classes R را تشکیل دهند.

حل :	$R=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$

441. اگر $S=\{0,1,2,3,4\}$ بوده و توسط : $S_1=\{0\}$ و $S_2=\{2,4\}$ و $S_3=\{1,3\}$ انقسام یافته باشد. لست رابطهٔ متعادل R را در S ترتیب کنید طوریکه S_1، S_2 و S_3 صنوف متعادل equivalence classes R را تشکیل دهند.

حل :	$R=\{(0,0),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$

442*. آن subsets های یک ست S که با شمول یک رابطهٔ متعادل R در S تشکیل شده باشند بنام equivalence classes یاد میشوند.

فرضاً $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ بوده و $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),$
$(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(2,4),(4,2),(5,6),(6,5)\}$ باشد.

R یک رابطهٔ متعادل در S است. آنرا چک (Check) کنید.

درینصورت صنوف متعادل (equivalence classes) که توسط R تعیین میشوند عبارت اند از: (1). $S_1=$ ____ ، (2). $S_2=$ ____ ، (3). $S_3=$ ____ ، (4). $S_4=$ ____ ، (5). $S_5=$ ____ .

حل :	(1). $\{1\}$ ، (2). $\{2,4\}$ ، (3). $\{3\}$ ، (4). $\{5,6\}$ ، (5). $\{7\}$

443. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$ باشند:
آیا R یک رابطهٔ متعادل شده میتواند؟ اگر میشود، صنوف متعادل آنرا لیست کنید.

حل: نخیر: انعکاسی نیست.

444. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ باشند: آیا R یک رابطه متعادل بوده میتواند؟ اگر میتواند: صنوف متعادل آنرا لیست کنید.

حل: بلی. $S_1=\{a\}$ ، $S_2=\{b\}$ ، $S_3=\{c\}$

445. اگر S، یک مجموعه ای که دارای رابطهٔ متعادل «$\approx$» است باشد، بالفرض $S_1=\{a,b,c\}$ و $S_2=\{f,10\}$ عبارت از دو equivalence class ی S باشند. علایم مناسب: "$\approx$ و یا $\not\approx$" بین:
(1). a —— c ، (2). c —— b ، (3). c —— f بگذارید.

حل: (1). $\approx$ (2). $\approx$ ، (3). $\not\approx$

446. اگر S، مجموعه اعداد تام غیر صفر و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\cdot y>0\}$ باشند: ما دیدیم که R یک رابطهٔ متعادل در S است.
فرضاً (1). $S_1=\{a|a\approx -1, \ni \forall a \Rightarrow a\cdot(-1)>0\}$ باشد، عناصر S_1 کدام اند؟
(2). $S_2=\{a|a\approx 1, \ni \forall a\Rightarrow a\cdot 1>0\}$ باشد، عناصر S_2 کدام اند؟

حل: (1). اعداد منفی تام ، (2). اعداد مثبت تام ،

447. اگر S، مجموعه اعداد تام غیر صفر بوده و $R=\{(x,y)|x,y\in S \text{ and } x\cdot y>0\}$ باشد: درینصورت R یک رابطه متعادل را در S تشکیل داده که دارای دو equivalence classes ی S_1 و S_2 میباشد، طوریکه:
(1). $S_1=$ ________ ، (2). $S_2=$ ________ میباشد.

حل: (1). اعداد تام مثبت ، (2). اعداد تام منفی.

VII. امتحان تکرار قسمت اول :

Review Test for Part One

سوال 1 الی 40 که در ذیل ذکر میشوند قسمت زیاد مواد را که تا اکنون تقدیم گردیده است در بر دارد. در صورت که به حل کدام آن ها قادر نباشید، مبحث مرتبط به آن سوال را تکرار نموده و دوباره بحل آن اقدام نمائید.

1. مورد مطالعه قرار دهید $S=\{a,b,c,d,e\}$ که set را در Panel-4 دیده میشود که بیست و پنج دانه نقاطی که بقسم array بشکل مربع در Panel-4 ترتیب یافته اند، برای نمایش دادن بیست و پنج عنصر ______ بکار برده میشوند.

2. در Panel-4 دوازده عناصر $S\times S$ که دایره کشیده شده است؟

3. هر عنصر $S\times S$ عبارت است از یک ______.

4. در Panel-4 که $S=\{a,b,c,d,e\}$ است آیا جوره های مرتب $(a,c)=(c,a)$ ؟

5. در جوره مرتب ordered pairs: (a,b)، a را بنام ______ و b را بنام ______ یاد میکنند.

6. R یک binary relation در S میباشد در صورتیکه ______ باشد.

7. بملاحظه از Panel-4، اگر عناصر $S\times S$ را که بجلائیم: (دایره بشکل مربع شکست) نشانی شده اند انتخاب نموده و یک subset، $S\times S$ را تشکیل نمائیم، چنانچه اگر R_3 این subset بوده و $R=\{(b,c)(c,d)(d,a)(d,d)\}$ باشد، پس R_3 عبارت از ______ میباشد.

8. (1). شکل شبکوئی ۳×۳ را بنویسید.
(2). ۳×۳ را بنام ______ یاد میکنند.

9. اگر یک set، ک و یک رابطه binary relation، R در ک مفروض باشد، R انعکاسی در ک میباشد درصورتیکه شرط: ______ را تحقیق کند.

10. کدام از روابط مربوط Panel-4 انعکاسی reflexive بوده میتوانند؟

11. یک binary relation، R متناظر symmetric است درصورتیکه شرط: ______ را تحقیق پذیر باشد.

12. یک binary relation، R انتقالی ویا transitive است درصورتیکه شرط: ______ را تحقیق پذیر باشد.

13. کدام از روابط مربوط Panel-4 انتقالی transitive اند؟

14. یک رابطه معادل ویا equivalence relat. را تعریف کنید.

15. کدام از روابط مربوط Panel-4: رابطه معادل اند؟

16. اگر یک رابطه معادل در یک set، ک مفروض باشد، یک طریقه طبیعی تشکیل subset های ک موجود است و آن اینست: که آن عناصر set، ک را که باهم معادل اند در یک subset قرار داده و آن عناصر که باهم معادل نیستند در subset های متفاوت دیگر ک قرار میدهیم. درینصورت ما یک ______ را در ک تشکیل میدهیم. و هرکدام از subset های حاصل شده ک بنام ______ یاد میشود.

17. R_6 یک رابطه معادل در ک است. (اینرا امتحان کنید.) شکل roster صنوف معادل equivalence relation اینرا بنویسید.

18. بملاحظه از Panel-4 دیده میشود که R_2 یک رابطه متعادل است. صنوف متعادل ویا equivalence classes در آن کدام اند؟

19. اگر S ستِ اعداد تام و $a, b \in S$ باشند، aRb موجود میشود، درصورتیکه مجموعهٔ = $a+b$ جفت گردد.

(1). آیا R یک رابطهٔ معادل در S شده میتواند؟

(2). درصورتیکه R رابطهٔ معادل باشد، صنوف معادل را که جدا وتمام S گردیده اند تعیین کنید.

20. اگر S، ستِ اعداد تام غیرصفر و $a, b \in S$ باشند، aRb موجود میشود درصورتیکه: $a \cdot b > 0$ باشد:-

(1). آیا R یک رابطهٔ معادل در S شده میتواند؟

(2). اگر R یک رابطهٔ معادل در S باشد، صنوف معادل در آن کدام اند؟

21. اگر $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ بوده و $R = \{(x, y) \mid x, y \in S$ and x دارای عین باقیمانده میشود که y میباشد اگر تقسیم 4 گردد$\}$ باشد

واضح است که درینصورت R یک رابطهٔ معادل را در S تشکیل میدهد. صنوف معادل که توسط R تولید میشوند لست کنید.

22. تقسیم یک ست به صنوف معادل equivalence classes آن بأساس یک رابطهٔ معادل عبارت از یک خاصیت مهمی یک رابطهٔ معادل است.

اگر: $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f),$
$(a,d), (d,a), (a,e), (e,a), (d,e), (e,d), (b,f), (f,b)\}$ باشد

R عبارت از یک رابطهٔ معادل است. (آنرا امتحان کنید.) صنوف معادل equivalence Classes که توسط R تعیین میشوند عبارت اند از:

$S_1 = \{a, d, e\}$ ، $S_2 = \{b, f\}$ و $S_3 = \{c\}$ ،

اگر توجه شود دیده میشود: (1). S_1 ، S_2 و دیگر غیرمتقاطع disjoint اند.

(2). $S_1 \cup S_2 \cup S_3 =$ ____________

(3). اگر x و y عناصر عین صنف معادل باشند:

پس: y ____ x میباشد.

اگر x و y عناصر دو صنف های متفاوت باشند، درینصورت:

y ____ x میباشد.

23. اگر یک set، S به subset های غیر متقاطع: S_1، S_2 و ... تجزیه گردد، درینصورت ما یک رابطهٔ معادل را در S توسط xRy تعریف کرده میتوانیم، درصورتیکه همان subset های که x و y را دربر میداشته باشند همین جزء باشند.
بطور مثال، اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ باشد، اجزای: $S_1=\{a,d\}$ و $S_2=\{b,c\}$ و $S_3=\{e\}$ ، set، S را در نظر بگیرید.
درینصورت برای هر عنصر $x,y\in S$ ما رابطهٔ xRy را تعریف مینمایم طوریکه:
"subset های که x و y را در بر دارند عین جزء باشند"
بطور مثال: اگر $b\in S_2$ و $b\in S_2$ باشد، پس bRb میباشد،
اگر $b\in S_2$ و $c\in S_2$ باشد، پس bRc میباشد.
اگر $b\in S_2$ و $a\in S_1$ باشد، پس $b\not R a$ نمیشود.
اکنون عناصر R را لیست کنید. در خاطر باید داشت که R یک رابطهٔ معادل است.

24. اگر $S=\{0,1,2,3\}$ و $S_1=\{0,2\}$ ، $S_2=\{1\}$ ، $S_3=\{3\}$ باشند، لیست عناصر رابطهٔ معادل R آنکه صنوف معادل از: S_1، S_2 و S_3 تشکیل دهد ترتیب کنید.

25. اگر دو عنصر a و b موجود باشند درینصورت (a,b) بنام ______ یاد میشود.

26. در جوره مرتب ordered pairs (a,b)، a بنام ______ و b بنام ______ یاد میشوند.

27. $(a,b)=(c,d)$ میشود درصورتیکه ______ باشد.

29. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $S\times S=\{(x,y)|x\in S, y\in S\}$ باشد شکل roster، $S\times S$ را بنویسید.

30. $S\times S$ یک set موجود S عبارت از یک set است که عناصر آن جوره های مرتب عناصر S که set تشکیل میدهد. هر subset یک set، $S\times S$ بنام یک ______ در S یاد میشود.

31. برای هر R set که عناصر انرا جوره‌های مرتب تشکیل داده باشند باید یک set را حاصل کرده میتوانیم طوریکه R یک $S \times S$ subset گردد. پس هر set جوره‌های مرتب بحیث یک binary relation در یک set تصور شده میتوانند. بطور مثال، بالفرض: $R = \{(a,2),(1,b),(5,9)\}$ باشد، پس R یک subset ، $S \times S$ است درحالیکه $S = \{\_\_,\_\_,\_\_,\_\_,\_\_\}$ باشد. درینصورت R بنام __________ یاد میشود.

32. اگر یک set ، S ویک binary relation ، R در S داده شود، R انعکاسی است درصورتیکه __________ باشد.

33. اگر یک set ، S ویک binary relation ، R در S موجود باشد، R تناظری میباشد اگر واگر: __________ باشد.

34. اگر یک set ، S ویک binary relation ، R در S موجود باشد، R انتقالی گفته میشود اگر واگر شرط: __________ را تحقیق پذیر باشد.

35. اگر $S = \{0,1,2,3\}$ بوده و $R = \{(0,0),(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3)\}$ باشد، آیا R انتقالی transitive میباشد؟ چرا؟

36. (1). partition ویا انقسام را توضیح کنید.
(2). صنوف معادل ویا equivalence classes را تعریف کنید.
(3). یک رابطهٔ معادل ویا equivalence relation را تعریف کنید.

37. اگر $S = \{0,1,2,3\}$ و $R = \{(0,0),(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3)\}$ باشند:
آیا R: (1). انعکاسی بوده میتواند؟ (2). تناظری شده میتواند؟
(3). انتقالی شده میتواند؟ (4). یک رابط معادل شده میتواند؟

38 . اگر $S=\{0,1,2,3\}$ و
$R=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3)\}$ باشند:

(1) . آیا R انعکاسی است؟ اگر نیست چرا؟

(2) . آیا R تناظری است؟ اگر نیست چرا؟

(3) . آیا R انتقالی است؟ اگر نیست چرا؟

(4) . آیا R یک رابطهٔ معادل شده میتواند؟

39 . یک رابطهٔ معادل R در یک سِت S ، سِت S را به subset های که متقابلاً غیرمتقاطع یا mutually disjoint اند تقسیم میکند، (که این subset ها بنام صنوف معادل یا بصورت equivalence classes یاد میشوند.) طوریکه اتحاد union آن ها عبارت از سِت میباشد. امیدوارم ؛

(1) . اگر x و y عناصر همین صنف متعادل باشند، پس درینصورت xRy میباشد.

(2) . اگر x و y عناصر صنوف متعادل متفاوت باشند، پس درینصورت $x\not R y$ میباشد.

فرضاً $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c)\}$ باشند:
صنوف متعادل سِت را که توسط R تعیین میشوند تشخیص کنید.

40 . برعکس مثال فوق: توسط انقسام یک سِت set ، یک رابطهٔ binary relation تعریف شده میتواند، طوریکه صنوف متعادل آن را آن subset های که سِت را انقسام نموده اند تشکیل میدهند. بطور مثال،
اگر $S=\{1,2,3,4\}$ بوده و $S_1=\{1,3\}$ و $S_2=\{2\}$
و $S_3=\{4\}$ انقسام های سِت باشند، پس رابطهٔ binary relation ، R را که S_1 ، S_2 و S_3 صنوف معادل آن را تشکیل دهند، ترتیب کنید.

قسمت دوم

Part Two

عملیات دوگانه‌ای در یک سِت

Binary Operations on A Set

در قسمت اول ما مفکورهٔ یک رابطهٔ دوگانه‌ای (دوتائی) binary relation را در یک set بصورت عام مطالعه نموده و بعداً یک نوع خاص binary relation را که بنام رابطهٔ معادل equivalence relation یاد میشود مورد بررسی بیشتر قرار دادیم. دیده شد بعضی از روابط که ما به آنها از سابق آشنائی داریم مانند: رابطهٔ مساوات "=" در set اعداد و رابطهٔ انطباق پذیری "≅" در set مثلث‌ها، روابط معادل equivalence relations را تشکیل میدهند. ضمناً یکی از خواص مهم یک رابطهٔ معادل را در یک set، یا انقسام partition، sets مذکور مورد بررسی قرار دادیم. درنتیجه دیده شد (اما ثابت نشده) که هر رابطهٔ معادل در یک set، با یک انقسام مشخص همان set مطابقت میکند. (که درینصورت subsets های خاصهٔ set را بنام صنوف معادل equivalence classes یاد میکنند.) و بالعکس هر انقسام partition یک set با یک رابطهٔ معادل مشخص در set مطابقت مینماید.

درینجا ممکن ما یک نوع دیگر رابطهٔ binary relation را –

ممکن است رابطه‌ای که خواص آن با خواص رابطهٔ "$\leq$" در sets اعداد حقیقی مطابقت داشته باشد تعریف نموده و مورد مطالعه قرار دهیم. اگر شما به بررسی بیشتر همچو روابط دوگانه‌ای binary relations علاقمند بود،[1] درینصورت مطالعهٔ این موضوع تحت عنوان: ست‌ها، منطق و قضایای مبنی بر اصول، خاطرنشان و توصیه میشود.

در قسمت‌های بعدی، مطالعهٔ خود را راجع به موضوعات مربوطه گروه‌ها Groups و ساحه‌ها Fields ادامه خواهیم داد. ازین بعد در هر set مفروض یک و یک رابطهٔ معادل را که به "=" ارائه خواهد شد تصور میکنیم. شکل ساده‌ترین این روابط معادل عبارت از رابطهٔ عینیت Identity است. یعنی هر عنصر عین خودش: "$x = x$" است. افاده و بیانیهٔ: "$x=y$" این معنی دارد که x و y هر دو عین عنصر را ارائه میکنند. با شکل صاف و خاص منطق میگوییم که این رابطهٔ عینیت Identity دارای سه خواص: انعکاسی reflexive، تناظری symmetric، و انتقالی transitive میباشد.

هرگاه غیر از رابطهٔ "عینیت" دیگر رابطهٔ "مساوات" در sets اعداد حقیقی کدام رابطهٔ معادل دیگر مورد بحث ما قرار گیرد درینصورت ما رابطهٔ مورد بحث را با تمام مشخصات آن بصورت مفصل معرفی خواهیم کرد.

برای مثال "=" دارای خواص ذیل است:

(1). برای تمام $x \in S$، $x = x$ است،

(2). برای تمام $x, y \in S$، اگر $x=y$ باشد پس $y=x$ میباشد،

(3). برای تمام $x, y, z \in S$، اگر $x=y$ و $y=z$ باشد، پس $x=z$ میباشد.

---

1. Robert R. Stoll <u>Sets</u>, <u>Logic</u>, <u>and</u> <u>Axiomatic</u> <u>Theories</u>, W. H. Freeman And Company, San Francisco, 1961.

ممکن است از سابق راجع به مفکورهٔ رابطه binary relation (دیگر مانند "کوچکتر است از" "<" ویا "بزرگتر است از" ">" (درسیت اعداد تام) آشنائی درسته باشید
اما یگانه رابطهٔ متداول که در حلقه اول با آن آشنا گردیده اید عبارت از "عینیت" Identity است . یعنی بطور مثال ، یگانه عددی که مساوی به 4 است (ساده ترین شکل عددی آن) عبارت از خود 4 است . ممکن بعداز دانستن مفکورهٔ رابطهٔ "عینیت" شما اجرای طریقه جمع کردن addition را آموخته باشید ، طوریکه برای هرجوره اعداد تام غیرمنفی بطور مثال 3 و 4 (بیک ترتیب مشخص (مثلاً : 3+4) یکعدد مثبت تام تقابل نموده که این عبارت از 7 است . بعدازآن ممکن با کسب ودانستن اشکال وعملیات دیگر ازقبیل : تفریق subtraction و ضرب multiplication واشکال آن که تا درگردیده باشید .

در قسمت دوم یک binary operation عملیه دوگانه ای[1] در یک Set ، یک - که نمونهٔ خاص آن عبارت از عملیه جمع در Set اعداد تام است تعریف کرده و بتفصیل آنرا مطالعه میکنیم . یک binary operation عملیهٔ دوتائی[1] ویا دوگانه ای را بیک نوع تابع Function تعریف خواهیم نمود - بدینمنظور در مبحث اول قسمت دوم مفکوره Function را (که ممکن به آن آشنا باشید) تکرار مینمائیم .

I. توابع ومپینگ : Functions And Mapping

448 . اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $T=\{a,b,c\}$ بوده و یک (ویا یک) binary relation ، R در $S\times T$ توسط افادهٔ : $R=\{(1,a),(1,b),(3,b),(4,a)\}$ تعریف شود .
(1) . یک روشتر ویا Set کاردینت های اول عناصر R را بنویسید .
(2) . Set ، Coordinates های دوم عناصر R را بنویسید .

حل : (1) . $\{1,2,3\}$ ، (2) . $\{a,b\}$

---

(1) . ترجمهٔ اصطلاح : binary operation بهردو افاده مشترک :- عملیهٔ دوتائی ویا عملیه دوگانه ای مجاز است .

449. فرضاً $S=\{1,2,3,4\}$ و $T=\{a,b,c,d\}$ باشند، و اگر $R=\{(1,b),(1,d),(2,a),(2,b)\}$ یک binary relation در $S\times T$ باشد:-

(1). شکل roster ، ست coordinate های اول جوره های مرتب R را بنویسید.

(2). شکل roster ، ست coordinate های دوم جوره های مرتب R را بنویسید.

حل: (1). $\{1,2\}$ ، (2). $\{a,b,d\}$ ،

450. اگر S و T دو ست کیفی و R یک binary relation در $S\times T$ باشد:

(1). یک عنصر p عبارت از اجزای (عنصر) ست ، coordinates های ______ جوره های مرتب R است درصورتیکه یک q موجود باشد طوریکه: $(p,q)\in R$ باشد.

(2). یک عنصر y عبارت از عنصر ست ، coordinates های دوم جوره های مرتب R است درصورتیکه یک x موجود باشد طوریکه ______ گردد.

حل: (1). اول ، (2) $(x,y)\in R$

451. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $T=\{a,b,c\}$ بوده و بالفرض R یک رابطهٔ binary در $S\times T$ باشد:

(1). درینصورت R یک ______ $S\times T$ بوده که عناصر آنرا ______ تشکیل میدهند.

(2). فرضاً $2\in S$ بوده، پس 2 درصورت عناصر ست، coordinates های اول جوره های مرتب R میشود که اگر یک y موجود گردد طوریکه :- $(2,y)\in R$ باشد. بصورت عموم ست، coordinates های اول جوره های مرتب R توسط افادهٔ ذیل توضیح شده میتوانند:

$\{x \mid$ موجود است یک y $\exists$[1] ______ $\}$.

حل: (1). subset ، جوره های مرتب ، (2). $(x,y)\in R$.

(1). صورت "$\exists$" بمفهوم "طوریکه" افاده میشود.

452 - بهمین قسم اگر R یک binary relation در S×T بوده، پس y یک عنصر کلکسیون set coordinate دوم جوره‌ی مرتب R شده میتواند درصورتیکه یک x موجود گردد طوریکه ________ باشد.

حل: $(x, y) \in R$

453. (1). set کلکسیون coordinate های اول جوره‌ی مرتب یک binary relation R، توسط افاده: { ________ $(x,y) \ni$ [1] یک y موجود است $\{x \mid$

ویا: { ________ $(x,y) \ni$ ، [2] $\{x \mid \exists y$

(2). set کلکسیون coordinate های دوم جوره‌ی مرتب یک binary relation R، توسط افاده: { ________ $(x,y) \ni$ یک x موجود است $\{y \mid$ ارائه شده میتوانند.

حل: (1). $(x,y) \in R$ ، (2). $(x,y) \in R$

454. set عام coordinate های اول جوره‌ی مرتب یک binary relation R، در یک S×T را بنام domain R (که ازآن با dom R نشان خواهیم داد.) یاد میکنند.

تعریف: { ________ $\text{dom } R = \{x \mid$

حل: یک y موجود است، طوریکه $(x,y) \in R$ میشود. ویا: $\exists y, \ni (x,y) \in R\}$ ...

455 - set عام coordinate های دوم جوره‌ی مرتب یک binary relation R در یک S×T را بنام range R (که ازآن با rang R.. ویا ran R ارائه خواهیم کرد.) یاد میشود.

---

(1). علامهٔ: " $\ni$ " مفهوم "طوریکه" را در هم جا آن
(2). علامه: " $\exists$ " مفهوم: "دریک ... موجود است" را افاده میکند.

تمرین : $rang\ R = \{ y \mid$ ________ $\}$

حل : یک x موجود است طوریکه $(x,y) \in R$ میشود . و یا $\{ \ldots \exists x,\ \exists (x,y) \in R \}$

456* فرض : R یک binary relation در $S \times T$ باشد :

(1) . set ، coordinate های اول جوره های مرتب R بنام domain R
(dom R) یاد گردیده دیده : $\{$ ________ $\}$ آورده میشود .

(2) . set ، coordinate های دوم جوره های مرتب R بنام range R و یا
(ran R) یاد گردیده دیده : $\{$ ________ $\}$ آورده میشود .

حل : (1) . $dom\ R = \{ x / \exists y,\ \exists (x,y) \in R \}$.
(2) . $ran\ R = \{ y \mid \exists x,\ \exists (x,y) \in R \}$.

457* . البته بجز از x و y ما سمبول های دیگر را نیز در تعریفات فوق استعمال کرده میتوانیم
فرضاً R یک binary relation در $S \times T$ باشد ، در ینصورت :
(1) . ______ $= \{ p \mid \exists q,\ \exists (p,q) \in R \}$.
(2) . ______ $= \{ q \mid \exists p,\ \exists (p,q) \in R \}$.

حل : (1) . dom R ، (2) . ran R

458 . اگر $S = \{a, b, c\}$ و $T = \{p, q, r, s\}$ باشند :
(1) . شکل roster ، set ، dom R را بنویسید .
(2) . شکل roster ، set ، ran R را بنویسید .
درصورتیکه : $R = \{ (a,b), (a,q), (c,q) \}$ باشد .

حل : (1) . $dom R = \{ a, c \}$ (2) . $ran\ R = \{ b, q \}$

۴۵۹. فرض کنید R یک binary relation در $S \times T$ باشد:

(1) ست dom R عبارت از یک subset ـــــ است. یعنی: $dom\,R \subset$ ـــــ.

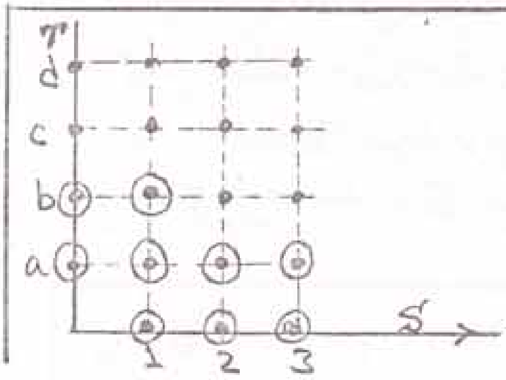
(2) ست ran R عبارت از یک subset ـــــ بوده یعنی: $ran\,R \subset$ ـــــ است.

حل: (1) S، S. (2) T، T.

۴۶۰. (1) بشکل سمبولیک: $dom\,R = \{$ ـــــ $\}$،
(2) بشکل سمبولیک: $ran\,R = \{$ ـــــ $\}$ میشود.

حل:
(1) $dom\,R = \{x \mid \exists y, \ni (x,y) \in R\}$
(2) $ran\,R = \{y \mid \exists x, \ni (x,y) \in R\}$

۴۶۱. فرض: $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{a,b,c,d\}$ بوده و $R=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a)\}$ باشد، شکل گرافیک:
$S \times T$ را رسم نموده، دور نقاط که عناصر ست R را نمایش میدهد دائره بکشید. بهمین قسم دور نقاط روی محور S که از عناصر ست dom R نمایندگی دارند دایره کشیده و دور نقاط روی محور T که عناصر ست ran R را نشان میدهد دایره بکشید.



حل به گراف مراجعه شود:

۴۶۲. اگر $R=\{(a,1),(b,2),(b,3)\}$ باشد:

(1) ست $\{a,b\}$ بنام ـــــ

(2) ست $\{1,2,3\}$ بنام ـــــ یاد میشوند.

حل: (1) dom R، (2) ran R.

.463 اگر: $S=\{a,b,c\}$ و $T=\{1,2\}$ و $R=\phi$ باشد؛ درینصورت: $\text{dom}\,R=$ ___ و $\text{ran}\,R=$ ___ میشود.

حل: ϕ ، ϕ.

.464 فرضاً $S=\{a,b,c\}$ ، $T=\{1,2\}$ و $R=S\times T$ باشد، درینصورت: $\text{dom}R=$ ___ و $\text{ran}\,R=$ ___ میباشند.

حل: $\text{dom}R=\{a,b,c\}=S$ ، $\text{ran}\,R=\{1,2\}=T$

.465 (1). اگر R یک binary relation در $S\times T$ باشد، پس $\text{dom}\,R\subset$ ___ و $\text{ran}R\subset$ ___ میباشند.

(2). اگر T یک nonempty set بوده، پس برای هر subset ، S set ، یک binary relation ، R موجود شده میتواند طوریکه $\text{dom}\,R=S_1$ باشد. بطور مثال، اگر $a\in T$ و $R=\{(x,a)\mid x\in S_1\}$ باشد، پس: $\text{dom}R=$ ___ و $\text{ran}\,R=$ ___ میشود.

توجه نمائید: اگر T یک empty set باشد درینصورت انتخاب R نا ممکن میباشد.

(3). از روابط Σ binary relat. $S\times T$ که دارای domain که میباشند مورد علاقه خاص واقع میشوند (دارای اهمیت اند).

در Panel-1 ملاحظه نمائید، و بگوئید که کدام از روابط مربوط آن دارای domain ، S که میباشند؟

حل: (1). S ، T . (2) S_1 ، $\{a\}$. (3) R_5 ، R_7 ، R_8 ، R_9

.466 یک رابط binary relation ، R در $S\times T$ طوریکه $\text{dom}\,R=S$ باشد بنام binary relation ، " from S into T " یاد میکنند. بملاحظه از Panel-2 ؛ بگوئید که کدام Σ binary relation های مربوط آن

روابط binary «from S into T» تشکیل میدهند؟

حل: R_5، R_7، R_8، R_9

467. (1) یک binary relation R و $S\times T$ را که دارای $\mathrm{dom}\,R = S$ باشد به نام binary relation ______ یاد میکنند.

(2) در حالت خاص اگر $S = T$ باشد، درینصورت R یک رابطهٔ binary در $S\times S$ بوده و $\mathrm{dom}\,R = S$ میشود. و درینصورت R را بنام یک binary relation ______ یاد میکنند.

(3) کدام از روابط مربوط: Panel – 2 – روابط binary از S into S را تشکیل میدهند؟

حل: — (1). S into T، (2). S into S، (3). R_2، R_3، R_4، R_7، R_8

468. (1) یک رابطهٔ binary، R در $S\times T$ بنام رابطهٔ binary: ______ یاد میشود درصورتیکه $\mathrm{dom}\,R = S$ باشد.

(2) بملاحظه از Panel-3 بگوئید که کدام روابط binary مربوط آن عبارت از روابط از S into S میباشند؟

حل: (1). S into T، (2). R_7، R_8، R_9، R_{10}، R_{12}، R_{13}، R_{14}، R_{15}، R_{16}

*469. تعریف ذیل را تکمیل کنید:

یک رابطهٔ binary، R را در $S\times T$ بنام رابطهٔ binary، R: "from S into T" یاد مینمائیم درصورتیکه: ______ باشد.

حل: $\mathrm{dom}\,R = S$

470. بملاحظه از Panel-1 دیده میشود که R_4 یک رابطه binary
از S into T نیست، زیرا: $R_4=\{a,c\}$ بوده حالانکه $S \neq \{a,c\}$.
امّا ما گفته میتوانیم که R_4 یک رابطه binary از S_1 into T
میباشد، درصورتیکه: $S_1=\{a,c\}$ باشد.
(1). R_3 یک رابطه binary، از S into T نمیباشد، زیرا:
________. بهمین قسم ما گفته میتوانیم که:
(2). R_2 یک رابطه binary از S_2 into T میشود درصورتیکه: $S_2=$ ________ باشد.

حل: (1). $\operatorname{dom} R=\{a,b\}$ و $\{a,b\}\neq S$، (2) $S_2=\{a,b\}$

471. اگر $R=\{(1,b),(2,b),(2,c),(5,d)\}$ باشد، R یک binary relation
از S into T میباشد، درصورتیکه: $S=$ ________ بوده و T
میتواند هر ست باشد طوریکه ست ________ را بحیث یک subset
در خود احتوا کرده باشد.

حل: $S=\{1,2,5\}$، $\{b,c,d\}\subseteq T$

تبصره: در مثال روابط چوکات های 470 و 471 دیده شد، که اگر R
یک رابطه binary از S into T نباشد، پس R یک رابطه binary
از یک ست، که در T (S_1 into T) شده میتواند، در حالیکه
S_1 یک proper subset، S میباشد. (proper subset یک
ست، عبارت از یک ست ای است که لااقل یک عنصر کمتر از
ست اول الذکر یعنی: ست super خود باشد.) در مباحثات
ما معمولاً دو ستها: S و T و یک رابطه binary، R انتخاب
میگردد طوریکه R یک رابطه binary را در $S \times T$ بوجود می آورد.
ما به آن R ای علاقمندیم که رابطه binary: ~~from~~ S into T را تشکیل میدهند.
این حالت مشابه بحالت که بیشتر در موضوع دو رابطه معادل equivalence relation
مطالعه شد مشابهت دارد. بطور مثال، اگر ست:

$S=\{a, b, c\}$ را با رابطهٔ: $R=\{(a,a),(b,b),(b,a),(a,b)\}$ را
در نظر بگیریم دیده میشود که R یک رابطهٔ متعادل equivalence relation در S
نمیباشد، زیرا عاری از خاصیت انعکاسی relexive است.
اما R یک رابطهٔ متعادل را در یک set، که در صورتیکه: $S_1=\{a,b\}$
باشد، بوجود می‌آورد. طوریکه بمشاهده رسید در اکثر مثالها،
ما S را ثابت قرار داده و آن حالتی را که آیا R در sets
S یک رابطهٔ متعادل ثابت "دیا نی؟" ملاحظه نمودیم. وما وضعیت R را
با گرفتن set های دیگر مورد بررسی قرار ندادیم.

472. به Panel-3 مراجعه نمائید: کدام ها از روابط R ها یک رابطهٔ
binary: "from S into S" را بوجود می‌آورند.

حل: $R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}$:

473.* (1). اگر R یک subset، $S\times T$ باشد، پس R بنام یک ______
در $S\times T$ یاد میشود.
(2). بصورت شمول: ______ $\text{dom } R=$ بوده و
(3). بصورت شمول: ______ $\text{ran } R=$ میباشد.
(4). R یک رابطهٔ binary را "from S into T" تشکیل میدهد
در صورتیکه: ______ باشد.

حل: (1). رابطهٔ binary
(2). $\{x \mid \exists y, \ni (x,y)\in R\}$ ، (3). $\{y \mid \exists x, \ni (x,y)\in R\}$
(4). $\text{dom } R = S$

تبصره: اگر R یک subset، $S\times T$ بوده و که $\text{dom } R=S$
باشد، درینصورت ما میگوییم که R یک رابطهٔ binary
از S در T: "from S into T" است، مشروط برآنکه

$ran\ R \subset T$ باشد . بطور مثال ، اگر $S=\{1,2,3\}$ و
$T=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(1,b),(1,c),(2,c),(3,d),(3,b),(3,c)\}$ باشند :
چون $dom R = S$ است ، پس R یک رابطه binary از S در T یعنی
from S into T میباشد ، زیرا : $ran\ R=\{b,c,d\}$ که عبارت از یک
proper subset ، T است ، میباشد . اگر ما set
T^* را که set : $\{b,c,d\}$ را بحیث یک proper subset
خود در بر داشته باشد ، درینصورت رابطه R یک رابطه ،
binary از S into T^* را بوجود می آورد . اگر مثل سابق
T set مشخص باشد خوب ! واگر شما میتوانید که یک set T را
بحیث یک super-set ، $ran\ R$ انتخاب نمائید .

474 . از Panel-1 دیده میشود که روابط : R_5 ، R_7 ، R_8 و R_9
روابط binary از S into T اند ، کدام یکی آن دارای
$ran = T$ میباشند ؟

حل : R_7 ، R_8 ، R_9 (زیرا $ran\ R_5=\{1\}$ بوده در حالیکه $\{1\} \neq T$)

II . پرمیوتیشن های درجه Nام :
Permutations of Degree N

475 . (1) اگر R یک رابطه binary از "S into T" باشد ، پس درینصورت ،
$dom\ R=$ ــــــ ، $ran\ R=$ ــــــ میباشد .
(2) . حالا با آن روابط binary ای R که از S into T بوده و دارای
$ran\ R=T$ باشند علاقمندیم

تعریف : اگر R یک رابطه binary از "S into T" و ضمناً $ran\ R = T$
باشد ، درینصورت R بنام یک رابطه binary از "S onto T"
(از S بر T) یاد میشود .

از Panel-1 دیده میشود که روابط: R_5، R_7، R_8 و R_9 روابط binary از S into T میباشند. کدام ازین روابط binary از S onto T را تشکیل میدهند؟

حل: (1). S، $\subset T$. (2). R_7، R_8، R_9

476. اگر R یک subset، $S \times T$ باشد؛

(1). درصورتیکه: $\mathrm{dom}R = S$ باشد پس R یک رابطهٔ binary ______ میباشد.

(2). با علاوه از شرط (1). اگر: $\mathrm{ran}R = T$ باشد پس R یک رابطهٔ bin. ______ میباشد.

حل: (1). from S into T ، (2). from S onto T

478. بخاطر باید داشت: برای اینکه رابطه "onto" باشد، با علاوه "into" میباشد.

(1). R یک رابطهٔ binary از S onto T میباشد، درصورتیکه R یک رابطهٔ binary از S into T بوده و $\mathrm{ran}R =$ ___ باشد.

(2). هر رابطهٔ binary از S onto T عبارت از رابطهٔ از S into T بوده اما شرط نیست که هر رابطهٔ از S ___ T بالعموم یک رابطهٔ از S ___ T باشد.

حل: (1). T ، (2) into ، onto

479. به Panel-1 ملاحظه کرده دیده شود که کدام از روابط مربوط آن یک رابطهٔ binary از S onto T را تشکیل میدهند؟

حل: R_9 و R_8 و R_7. (درصورتیکه در جواب R_3 و R_4 نیز شامل باشد، مسئله 478 را تکرار کنید)

480*. به Panel-2 ملاحظه کنید: (1). لیست روابط binary که از S into T را ترتیب دهید. (2). لیست روابط binary که از S onto T را بنویسید.

حل: (1). R_2, R_3, R_4, R_7, R_8 (2). R_2, R_3, R_4, R_7

481*. یک رابطه binary، R را از S onto T توریف کنید.

حل: یک رابطه binary، R در $S\times T$ یک رابطه binary، از S onto T میباشد، درصورتیکه R یک رابطه binary، از S into T بوده و ran R = T باشد.

482*. توریف دیگر یک رابطه binary: onto عبارت است از: یک رابطه binary، R در $S\times T$ یک رابطه binary، از S onto T را تشکیل میدهد درصورتیکه: dom R = ــــ و ran R = ــــ باشد.

حل: S، T

483*. در توریف افزادنگر اولاد از R به حیث یک رابطه binary کیفی در (1). ــــ نام برده شده و شش شرط: (2). که ــــ کرشبب میگردد تا با الفرد R یک رابطه binary (3) از ــــ گردد، داده شده و با الدرفره شرط: (4). T = ــــ، R را یک رابطه binary، onto موصوف میسازد، داده شده است.

حل: (1). $S\times T$، (2). dom R، (3). S into T، (4). ran R

484*. به ملاحظه از Panel-3 بگوئید که کردم یک از روابط مربوط آن رو روابط از S onto T را تشکیل میدهند؟

حل: $R_8, R_9, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}$

485*. اگر $S=\{a,b,c\}$ شده و $R=\{(a,a),(a,b),(b,b),(c,a)\}$ باشد:

(1). dom R = ــــ و ran R = ــــ

(2). R یک رابطهٔ binary از S into S است زیرا: ________

(3). R یک رابطهٔ binary از S onto S نیست زیرا: ________

(4). R یک رابطهٔ binary از S onto S میشود در صورتیکه: ________ = ________ باشد.

حل: (1). $\{a,b,c\}=S$ ، $\{a,b\}$ ، (2). dom $= S$ ،
(3). ran $R \neq S$ ، (4). $\{a,b\}$ و یا ran R

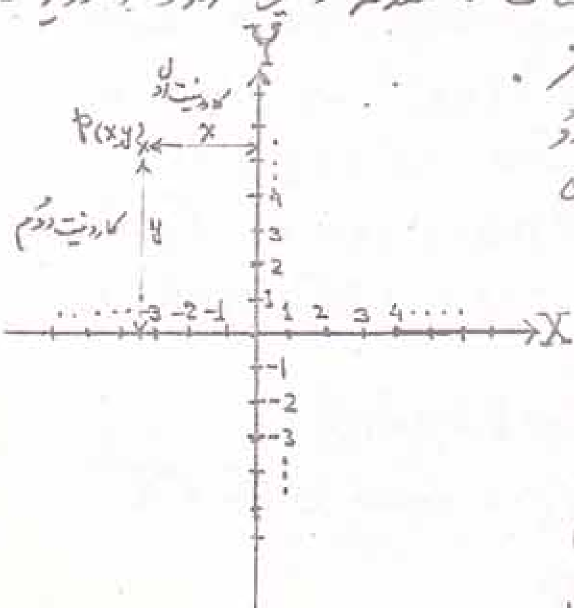
*486. اگر R یک subset ، $S\times T$ باشد.

(1). اگر dom R = ________ باشد، پس R یک رابطهٔ binary از S into T میباشد.

(2). اگر dom R = ________ وهمچنان: ________ باشد، پس درینصورت R یک رابطهٔ binary از S onto T میباشد.

حل: (1). S ، (2). S ، ran $R = T$

تبصره: ـ طوریکه در کورسهای دیگر ریاضیات رسم کردن اشکال و توضیحات اماکل برای ادراک موضوع مفید واقع میشود بهمین قسم درین کورس ریاضی نیز پیروی ازین شیوه شود مفید واقع میشود. طوریکه درین پروگرام برای افاده مطلب ما از اشکال Set های کوچک و محدود استفاده نمودیم. ممکن شما نیز این روش را تعقیب نمائید. تطبیق این اصطلاحات و terminology موجوده بر حقایقات که در شاخه‌های مختلف ریاضی از قبیل: الجبر، مثلثات، هندسه و غیره اندوخته دارید شما را بلاک موضوعات بیشتر کمک میکند.



بطور مثال، شما از سابق به استعمال دو محور کمیات وضعیه coordinates system آشنائی دارید.

بالفرض اگر محور X، Set اعداد Reals را وهمچنان محور Y، Set اعداد Reals را ارائه کنند، پس حاصل ضرب کارتی

عبارت از یک set است که عناصر آنرا اعداد حقیقی Reals Numbers به شکل جوره‌های مرتب
ordered pairs تشکیل داده و بشکل :
$X \times Y = \{(x,y) | x \in X \text{ and } y \in Y\}$ نشان داده میشود.
ارائه گرافیکی یک نقطه مستوی را (از الجبر ابتدایی میدانیم) از اثبات شکل محدودیت کمیات
وضعیه coordinates system تعیین کرده میتوانیم. چنانچه هر نقطه p
مستوی را توسط جوره مرتب (x,y) ordered pairs نشان میدهیم. طوریکه
x، اول coordinate و p و y، دوم coordinate آنرا ارائه میکند.
x فاصله p را از محور y (حوزه چپ و راست آن) و y فاصله نقطه p را
از محور x (حوزه پائین و یا بالای آن) ارائه میدارند. درین صورت دیده
میشود که بین جوره‌های مرتب ordered pairs اعداد حقیقی که بشکل (x,y) وجود دارند
و نقاط مستوی روابط ذیل موجود است:

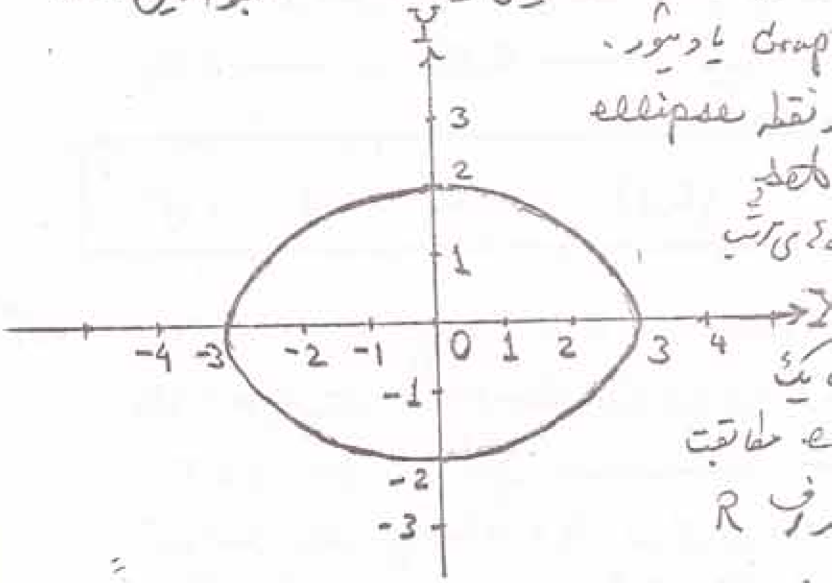
1. به هر جوره مرتب (x,y) طوریکه $x \in X$ و $y \in Y$ مختص
یک نقطه p مستوی تقابل میکند [که درینصورت coordinates ویا
مختصات نقطه p عبارت از (x,y) میباشد.]

2. به نقطه p مستوی مختص یک جوره مرتب (x,y) طوریکه
$x \in X$ و $y \in Y$ مطابقت دارد. [که درینصورت جوره مرتب (x,y) دارای مختصات
شکل rectangular coordinate نقطه p میباشد.]

افاده : $4x^2+9y^2=36$ را در نظر بگیرید: اگر را
$R=\{(x,y) | x \in X, y \in Y \text{ and } 4x^2+9y^2=36\}$ انتخاب کنیم،
درینصورت R یک رابطه binary relation در $X \times Y$ میباشد. R دارای
آن جوره‌های مرتب (x,y)، set، $X \times Y$ میباشد که آن‌ها رابطه:
$4x^2+9y^2=36$ را تعقیب میکند. درینجا شما نشان داده
میتوانید که: $(-3,0)\in R$، $(-2,\frac{2\sqrt{5}}{3})\in R$، $(-1,\frac{4\sqrt{2}}{3})\in R$، $(0,2)\in R$
و $(\frac{3\sqrt{3}}{2},1)\in R$ وغیره...

چون تمام نقاط مربوط (عناصر) set، R، set از کل set
$X \times Y$ میباشند، پس گفته میتوانیم که set R یک subset

$X \times Y$ نصف ... تشکیل میدهد. اگر تمام جوره‌های ترتیبی مربوط set R را
بدست آورده وروزا رسم کنیم درینصورت یک منحنی بسته closed curve را
که بنام بیضوی ellipse یاد میشود، بدست می‌آید. coordinates نقاط مربوط
ellipse تمام set R را تشکیل میدهند. مجموعهٔ این نقاط
بنام گراف Graph R یاد میشود.



coordinates هر نقطه ellipse یک عنصر set R و بالعکس هر جوره‌ای ترتیبی set R به یک coordinates نقطه ellipse مطابقت دارد. از گراف R بآسانی دیده میشود که:

(1). R یک رابطه binary از S در T نیست زیرا $\text{dom}R \neq X$
بطور مثال: $10 \notin \text{dom}R$

(2). $\text{dom}R = [-3,3]$ است یعنی: $\text{dom}R = \{x \mid x \in X, -3 \le x \le 3\}$ است.
پس R یک رابطه binary از [-3,3] در Y؛ "[-3,3] into Y" است.

(3). R یک رابطه binary از [-3,3] onto Y نیست، زیرا که:
$\text{ran}R \neq Y$ است، بطور مثال، $2.5 \notin \text{ran}R$

(4). $\text{ran}R = [-2,2] = \{y \mid y \in Y \text{ and } -2 \le y \le 2\}$ میباشد.
پس R یک رابطه binary از [-3,3] onto [-2,2]،
یعنی: from [-3,3] onto [-2,2] میباشد.

487. اگر R یک subset $S \times T$ باشد:
(1). R یک binary relation در ______ میباشد.
(2). R یک رابطه binary از S into T است درصورتیکه ______ باشد.

حل: (1). $S \times T$ ، (2). $\text{dom}R = S$

488. R_7 در Panel-2 مورد مطالعه قرار دهید، چون $\operatorname{dom} R_7 = S$ است،
پس R_7 یک رابطه binary، from S into T است (این رابطه onto
نیز میباشد زیرا فعلاً موضوع بحث ما نیست.) برای هر $x \in S$ لااقل
یک $y \in T$ موجود است طوریکه $(x,y) \in R_7$ میشود. دراین مثال برای
$c \in S$ دو عنصر دیگر $\_\_\_ \in T$ و $\_\_\_ \in T$ میشود، طوریکه
$\_\_\_ \in R_7$ و $\_\_\_ \in R_7$ میگردند.

حل: 1 ، 2 ، $(c,1)$ ، $(c,2)$

489* فرضاً R یک رابطه binary از S در (into) T باشد:
(1) در اینصورت: $\operatorname{dom} R = S$ بوده و برای هر $x \in S$ لااقل یک عضو
$y \in T$ پیدا شده طوریکه ______ میشود.
آن عناصر رابطه binary، R از S در (into) T توجه خاص را بخود
جلب میکند که برای هر $x \in S$ آن محض یک $y \in T$ موجود بوده
طوریکه باعث موجودیت $(x,y) \in R$ گردند.
(2) فرضاً $S=\{p,q,r\}$ و $T=\{1,2,3,4\}$ بوده و به همین قسم:

$R_1=\{(p,1),(p,2),(q,2),(r,3)\}$

$R_2=\{(p,2),(q,3),(r,3)\}$

$R_3=\{(q,2),(r,3)\}$

کدام یک از این روابط binary دارای صفت است که در بالا ذکر یافت؟

حل: (1) $(x,y) \in R$ ، (2) R_2

490. اگر $R_1=\{(p,1),(p,2),(q,2),(r,3)\}$ باشد! R_1 یک رابطه binary
از S onto T نیست، زیرا: برای ___ دو عضو در T موجود
اند که آن عبارت اند از ___ و ___.

حل: p ، 1 ، 2

۴۹۱. $R_3=\{(8,2),(8,3)\}$ میباشد ، R_3 یک رابطهٔ binary از : $S \longrightarrow T$ نیست
زیرا : $\operatorname{dom} R \neq S$.

حل : مانند into

۴۹۲. ما به آن رابطهٔ binary در یک $S\times T$ عدد تعیین کنیم که :
(1). R یک رابطهٔ binary از $S \longrightarrow T$ باشد ($\operatorname{dom} R = S$)
(2). برای هر $x\in \operatorname{dom} R$ ، ــــــ $y\in T$ موجود باشد که برای آن $(x,y)\in R$ گردد .

حل : (1). into (2). محض یک و یا تنها یک

۴۹۳. به Panel-2 ملاحظه کنید :
(1). کدام یک از روابط binary دارای $\text{domain}=S$ میباشند و یا به الفاظ دیگر کدام آن رابطهٔ binary از S into S را تشکیل میدهد ؟
(2). کدام آن این شرط را « که برای هر $x\in S$ محض یک $y\in T$ موجود میشود طوریکه $(x,y)\in R$ گردد » را تعقیب میکند ؟

حل : (1). R_2 ، R_3 ، R_4 ، R_7 ، R_8 ، (2). R_8

۴۹۴. تعریف : یک رابطهٔ binary R در $S\times T$ عبارت از یک تابع Function از ــــــ است درصورتیکه :
(1). $\operatorname{dom} R = S$ بوده ،
(2). برای هر $x\in \operatorname{dom} R$ ، محض یک $y\in T$ موجود باشد طوریکه برای آن $(x,y)\in R$ گردد .

حل : S into T

۴۹۵. به Panel-3 مراجعه کنید . کدام یک از روابط مربوط آن یک تابع

function from S into T را تشکیل میدهد؟

حل : R_7 ، R_8 ، R_9 و R_{10}

496. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $T=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(a,3),(b,2),(c,3)\}$ باشند؛

(1). اگر ________ باشد، پس R یک رابطه binary از S into T است،

(2). برای هر $x \in S$ ، محض یک $y \in T$ موجود باشد طوریکه برای ________ گردد، پس درینصورت : R ________ از S into T را تشکیل میدهد.

حل : (1). $\operatorname{dom} R = S$ (2) $(x,y) \in R$ ، function

تبصره : از Panel-1 ، اگر R_3 را مورد مطالعه قرار دهیم دیده میشود که R_3 یک تابع function از S into T نیست . زیرا که $\operatorname{dom} R_3 \neq S$.
از انشما درک کرده میتوانید که R_3 یک تابع از S_1 into T شده میتواند، درحالیکه $S_1=\{a,b\}$. درینجا مانند سابق ما بکدام set مشخص A علاقمند گشته و میخواهیم بدانیم که آیا R یک تابع function را (از A طوریکه) از A into T باشد تشکیل داده میتواند و یا خیر؟ برای این مقصد کلمهٔ تابع Function که با شرط : "یک رابطه binary در $S \times T$ که دارای مشخصات که برای هر $x \in S$ محض یک $y \in T$ موجود باشد، طوریکه $(x,y) \in R$ گردد." توضیح میشود بجز کافی مشخص و واضح نیست، چه درین شرط متذکره فوق محض dom R بیشتر مورد توجه ما قرار گرفته است، بنابرین استدلال ما باید کلمه تابع function را بدون اضافه کردن عبارت : "from A into B" و یا "از A در B" استعمال کنیم. (درحالیکه A و B ، set های اند که بصورت ثابت رتبی یا ساده اند.)
درآخر تذکر باید داد یک رابطه binary که یک تابع از S into T را تشکیل میدهد معمولاً بوسیله حروف خورد لاتین مانند : f ، g و یا h و یا توسط حروف یونانی Greek مانند : α ، β ، γ و امثال آن ارائه میشود نه توسط R .

.۴۹۷ یک رابط binary f در $S \times T$ بنام تابع Function از S into T یاد میشود، درصورتیکه اگر dom f = ____ و برای هر ____ محض یک ____ وجود دارد طوریکه $\in f$ ____ میشود.

حل: S ، $x \in S$ یعنی ($x \in$ dom f) ، $y \in T$ ، (x,y)

.498 یک رابط binary α در $S \times T$ بنام تابع از S into T یاد میشود، درصورتیکه: (1). ____ بوده، و (2). ____ باشد.

حل: (1). dom $\alpha = S$. (2). Every $x \in S, \exists y \in T, \ni (x,y) \in \alpha$

.499 به: Panel-3 ملاحظه کرده دیگوئید که کدام از روابط binary توابع از S into S را تشکیل میدهند؟

حل: R_7 ، R_8 ، R_9 ، R_{10}

.500 از نقطهٔ نظر گراف یک تابع f از S into T باید چنین باشد که برای هر عنصر $x \in$ ____ بالاقل در یک نقطهٔ گراف موجود باشد. علاوه بران هر خط مستقیم عمودی که از هر نقطهٔ گراف رسم گردد باید که خط مرسومه گراف f را درکدام نقطهٔ دیگر قطع ____.

حل: یک ، نکند.

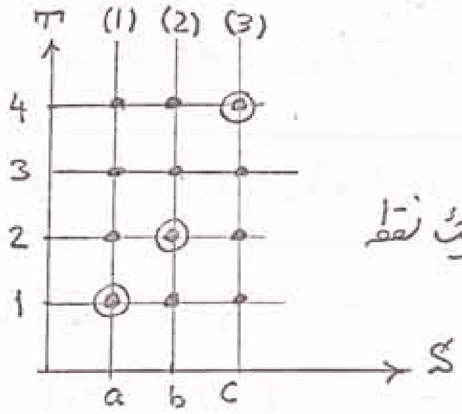
.501 اگر $S=\{a,b,c\}$ و $T=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(a,1),(b,2),(c,4)\}$ باشند:

(1). $S \times T$ را توسط گراف نشان دهید.

(2). دور هر نقطهٔ که مربوط R است دایره بکشید.

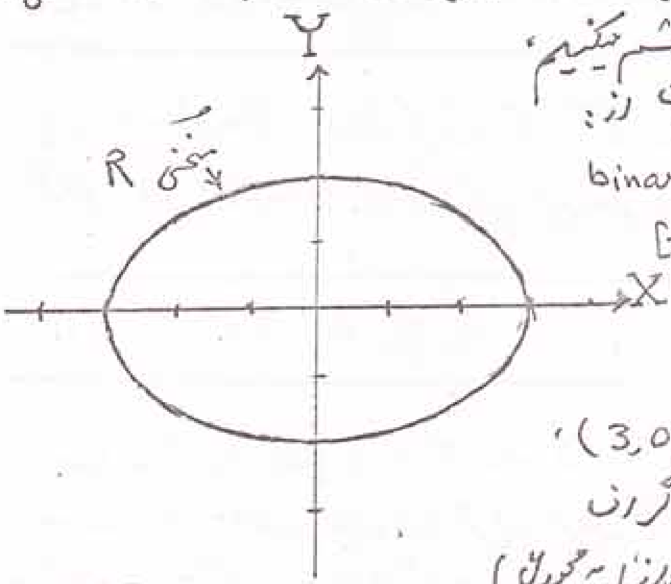
(3). از هر نقطهٔ گراف یک خط مستقیم عمودی رسم کنید.

(4) • هر خط مستقیم عمودی گراف R را محض در ____ نقطه قطع میکند.



حل: (4) . محض در یک نقطه

502. فرضاً X و Y مطلق اعداد حقیقی Reals را ارائه کنند، و $R=\{(x,y) \mid x\in X, y\in Y \text{ and } 4x^2+9y^2=36\}$ باشد. منحنی یا گراف R را رسم میکنیم، و این گراف عبارت است از: R یک رابطه binary از $[-3,3]$ into $[-2,2]$ میباشد. بجز از نقاط: $(-3,0)$ و $(3,0)$، از هر آن یک دیگر نقاط گراف اگر یک خط مستقیم عمود (موازی به محور Y) رسم گردد، این خط عمود گراف را در ____ نقطه قطع میکند.



از این نتیجه میشود که R یک تابع function از $[-3,3]$ into $[-2,2]$ ____.

حل: دو ، نمیباشد.

503. یک رابطه binary f در $S\times T$ یک تابع از S onto T را تشکیل میدهد در صورتیکه f یک تابع از ____ بوده و $\text{ran } f = T$ باشد.

حل: S into T

504. اگر $S=\{a,b,c\}$ ، $T=\{1,2,3\}$ و $\alpha=\{(a,1),(b,1),(c,2)\}$ باشند:-

(1). α یک تابع function از T into S است، زیرا: ______.

(2). α یک تابع funct. از S onto T نمیباشد، زیرا: ______.

حل: (1). $dom\,\alpha = S$ است و ضمناً برای هر $x \in S$ محض یک $y \in T$ موجود است طوریکه $(x,y) \in \alpha$. (2). $ran\,\alpha \neq T$

505. به Panel-3 مشاهده نمائید:-

(1). کدام یک از روابط binary آن تابع از S into S است؟

(2). کدام یک از روابط binary آن تابع از S onto S است؟

حل: (1). R_7, R_8, R_9, R_{10} ، (2). R_8, R_9

506. فرضاً R یک subset $S \times T$ باشد:

(1). اگر $dom\,R = S$ ، پس R بنام ______ یاد میشود.

(2). بر علاوه شرط فوق اگر برای هر $x \in dom\,R$ ، محض یک $y \in T$ موجود گردد طوریکه $(x,y) \in R$ گردد. درینصورت R یک ______ را تشکیل میدهد.

(3). علاوه از شرایط:- (1) و (2) فوق اگر: $ran\,R = T$ باشد درینصورت R بنام یک تابع از ______ یاد میشود.

حل: (1). یک رابطه binary از S into T ، (2). تابع از S into T ، (3). تابع از S onto T ،

507.* فرضاً: $S=\{a,b\}$ و $T=\{1,2\}$ باشد:-

(1): شکل roster تمام توابع ممکنه از S into T را بنویسید.

(2). شکل roster تمام توابع ممکنه از S onto T را تحریر کنید.

حل: (1). $f_1=\{(a,1),(b,1)\}$ ، $f_2=\{(a,1),(b,2)\}$ ، $f_3=\{(a,2),(b,1)\}$

ادامهٔ حل : (1) - $f_4 = \{(a,2),(b,2)\}$
نوشتن لیست این توابع بر ترتیب مجاز است .
(2) . $f_2 = \{(a,1),(b,2)\}$ ، $f_3 = \{(a,2),(b,1)\}$

*508 . یک تابع f از S onto T را تعریف کنید :

حل : ساده‌ترین یک‌تابع f از S onto T عبارت از تعریف ذیل خواهد بود :
f یک‌تابع از S onto T - میباشد ، درصورتیکه اگر و اگر f یک‌تابع از S into T بوده و $\operatorname{ran} f = T$ باشد .

509 . چون اکثراً کلمهٔ " mapping " بعوض کلمهٔ : " تابع ، function " استعمال میشود ، پس ما بعوض عبارت : " f یک ـــــ از S into T است " ، عبارت : " f یک mapping از : S into T است . " را استعمال کرده میتوانیم . بهمین ترتیب ما میتوانیم که عبارت : " f یک ـــــ از S onto T است . " را بجای عبارت : " f یک تابع از S onto T است . " نوشته نمائیم .

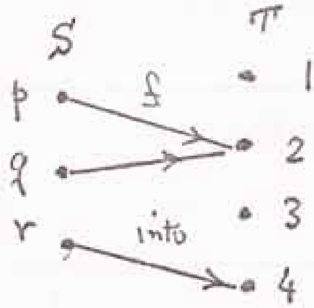
حل : تابع ، mapping

510 . اگر $S = \{p,q,r\}$ و $T = \{1,2,3,4\}$ بوده $f = \{(p,1),(q,1),(r,3)\}$ یک mapping از S into T باشد : (امتحان کنید) بعضی وقت گفته میشود که : " x توسط f mapping در into mapped y شده است " .
در این مثال : (1) . p توسط f mapping در into ـــــ mapped شده است .
(2) . q توسط f ـــــ در into ـــــ شده است .
(3) . r توسط ـــــ .

حل : (1) ، 1 ، (2) . mapping ، 1 ، mapped ،
(3) . f mapping ، در into 3 ، mapped شده است

511 . فرضاً $S=\{p,q,r\}$ و $T=\{1,2,3,4\}$ بوده و $f=\{(p,2),(q,2),(r,4)\}$ باشد: که یک تابع از S into T است. (چک شود.) چنانچه از mapping، set های S و T در پایان دیده میشود، این mapping یک تابع است زیرا هر x شامل S که با یک و یگانه ارتباط می یابد طوریکه $y \in T$ میباشد.

اگر به تیرهای رسم شده متوجه گردید، خواهید دید که:



(1) . p توسط f به ___ mapped شده است.

(2) . q توسط f به ___ mapped شده است.

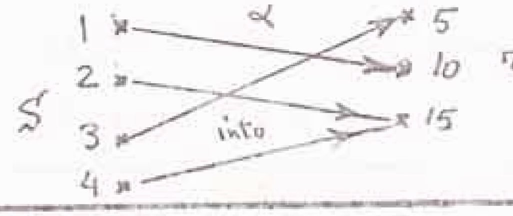
(3) . r توسط f به ___ mapped شده است.

پس این mapping عبارت از یک تابع function از S ___ T میباشد.

حل: (1) . 2، (2) . 2، (3) . 4، (into) در

512 . اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $T=\{5,10,15\}$ و $\alpha=\{(1,10),(2,15),(3,5),(4,15)\}$ باشند: مانند مسأله حرکات 511 فوق رابطهٔ جوره های مرتب α را توسط تیرها نشان داده و ملاحظه کنید که α یک mapping از S into T میباشد.

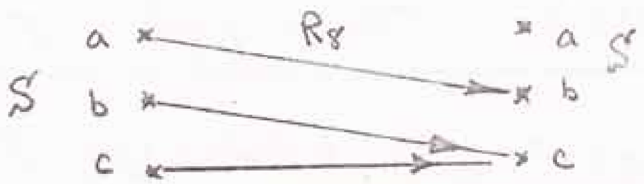
حل:



بلی میباشد.

513 . از Panel-2 دیده میشود که R_8 یک mapping از S into S است. این mapping را توسط دیاگرام تیری مانند فوق نشان دهید:

حل:



514. فرضاً S و T دو ست غیر خالی بوده و f یک تابع از S into T باشد:

(1). برای هر $x\in S$ تحت یک و یگانه $y\in T$ موجود است طوریکه: ______ باشد، و این y یگانه بنام تصویر (image) x تحت f mapping یاد میشود.

اگر $S=\{a,b,c\}$ و $T=\{1,2\}$ و $f=\{(a,2),(b,1),(c,1)\}$ باشند، درینصورت: (2). تصویر a image تحت f mapping عبارت از ______ بوده،

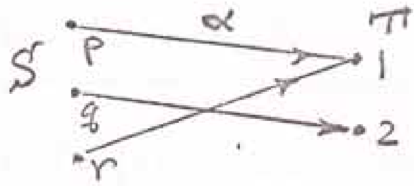
(3). ______ عبارت است از ______ b تحت f mapping دهم خوانده،

(4). ______ عبارت از ______ c تحت f mapping را اشکیل میدهد.

حل: (1). $(x,y)\in f$، (2). 2، (3). 1، image (تصویر)

(4). 1، image (تصویر)،

515. اگر دیاگرام تیری ذیل یک α mapping را از S بر T (S onto T) نشان دهد، درینصورت: –



(1). تصویر p تحت α mapping عبارت از ______ بوده و

(2). تصویر q تحت α mapping عبارت از ______ میباشد.

(3). ______، r تحت α mapping عبارت است از ______.

(4). شکل roster α عبارت از ______ میباشد.

حل: (1). 1، (2). 2، (3). تصویر (image)، 1

(4). $\alpha=\{(p,1),(q,2),(r,1)\}$

516. تعریف: اگر f یک تابع از S into T باشد، پس برای $x\in S$، ______ x تحت f عبارت از یک $y\in T$ است طوریکه ______ میباشد.

حل: تصویر (image)، $(x,y)\in f$

517. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $T=\{p,q,r\}$ و $f=\{(1,q),(2,q),(3,q),(4,q)\}$ باشند:

(1) . f یک تابع از S into T است زیرا: ________________ .

(2) . تصویر image ، 1 تحت f عبارت است از : ____________ .

تصویر image ، 2 تحت f عبارت است از : ____________ .

تصویر image ، 3 تحت f عبارت است از : ____________ .

تصویر image ، 4 تحت f عبارت است از : ____________ .

حل : (1) . f یک رابطه binary از S into T است بطوریکه برای هر $x\in S \; \exists \; y\in T$ طوریکه $(x,y)\in f$. پس f یک تابع است. چون $\text{dom} f = S$ بنابرآن <u>into</u> است.

(2) . q ، q ، q ، q

518 . اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $\alpha=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,4)\}$ باشند، درینصورت:

(1) . α یک ____ از ______ میباشد .

(2) . ____ 3 تحت α عبارت است از ____ .

حل : (1) تابع یا mapping ، از S into S

(2) . image ، 4 .

519 . اگر f یک function از S into T بوده و فرضاً برای هر $x\in S$ یگانه تصویر یا image x را به f(x) ارائه میکند. بطور مثال، اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $T=\{p,q,r,s\}$ ، همچنین $f=\{(1,q),(2,r),(3,s),(4,s)\}$ باشد:-

(1) . درینصورت : f(1) عبارت از تصویر 1 تحت f گفته میشود. که f(1) عبارت است از ____ .

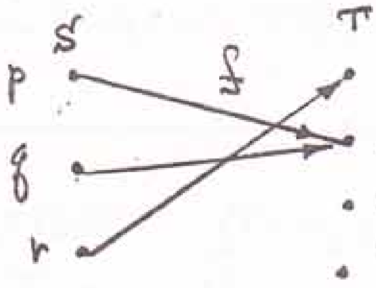
(2) . ______ عبارت از تصویر 2 تحت f نامیده میشود که این ______ عبارت از ______ میشود .

حل: (1) . q ، (2) . f(2) ، f(2) ، r .

*520. (1). اگر f یک mapping از S into T باشد. فرضاً برای $x\in S$ ، یک y یگانه طوریکه $y\in T$ موجود گردد، درینصورت: ــــــ میباشد.
(2). یک y بنام ــــــ x تحت f یادگردیده وبه ــــــ ارائه میشود.

حل: (1). $(x,y)\in f$ ، (2). image ، $f(x)$

521. فرضاً f یک mapping از S into T طوریکه در دیاگرام تیری ذیل آورده شده است، باشد:



(1). تصویر p تحت mapping ، f عبارت از ــــــ بوده وبه ــــــ ارائه میشود.
(2). تصویر q تحت f عبارت از ــــــ بوده وبه ــــــ نشان داده میشود.

حل: (1). 2 ، $f(p)$ ، (2). 2 ، $f(q)$

522. فرضاً α یک تابع ویا mapping از S در T یعنی S into T باشد، پس درینصورت:
(1). برای هر ــــــ یک ــــــ موجود است طوریکه ــــــ ــــــ گردد.
(2). y بنام ــــــ ای ــــــ تحت f یادگردیده وبه ــــــ نشان داده میشود.

حل: (1). $x\in S$ ، $y\in T$ ، $(x,y)\in\alpha$
(2). تصویر ، x ، $f(x)$

523. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ بوده وفرضاً $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,2)\}$ یک تابع از S into T باشد. درینصورت:
(1). $f(2)$ ــــــ ای ــــــ را تحت f نشان داده وعبارت از ــــــ میباشد،
(2). $f(3)$ ــــــ ای ــــــ را تحت f ارائه کرده وعبارت از ــــــ است.

524. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $T=\{p,q,r\}$ بوده و بهمین قسم:

$\alpha=\{(1,q),(2,q),(3,r),(4,r)\}$ یک تابع از S into T را نشان دهد:

(1). $f(1)$ تصویر ___ را تحت α ارائه کرده و عبارت از: ___ میباشد،

(2). $f(2)$ تصویر ___ را تحت α نشان داده و عبارت از: ___ میباشد،

(3). $f(3)$ عبارت از: ___ و بهمین قسم: $f(4)=$ ___ میشود.

حل: (1). 1، q، (2). 2، q، (3). r، r

تبصره ۵: اگر f یک تابع از function S into T بوده و $x\in S$ باشد، درینصورت تصویر x یا image x را تحت f به $f(x)$ نشان میدهیم. امّا ناگفته نماند که بعضی از نویسندگان این تصویر را به "$(x)f$" ارائه مینمایند.

توجه نمائید: اگر f یک تابع از S into T نبوده و بلکه محض یک رابطهٔ binary را در $S\times T$ بوجود بیاورد، درینصورت: symbol و عبارهٔ: $f(x)$ در حالیکه $x\in S$ یا بی معنی تلقی شده و یا اینکه یک شکل مبهم و گنگ ambiguous را بخود میگیرد.- بطور مثال: اگر $S=\{a,b,c\}$ و $T=\{1,2,3\}$ و $R=\{(a,1),(a,2),(b,2)\}$ باشند: R یک تابع از S into T نبوده، امّا یک رابطهٔ binary در $S\times T$ میباشد. درینحالت اگر ما بخواهیم که توسط این عباره گذاری symbolism که تصویر یک عنصر را تحت تابع R حاصل نمایم واضح است که: $R(c)$ وجود ندارد و همچنان $R(a)$ در آن بصورت یگانه یا uniquely تعیین شده نمیتواند. درینحالت شکل عباره گذاری یا symbolism: «$f(x)$» مطلب را افاده کرده نمیتواند و گنگ و مبهم ambiguous میباشد.

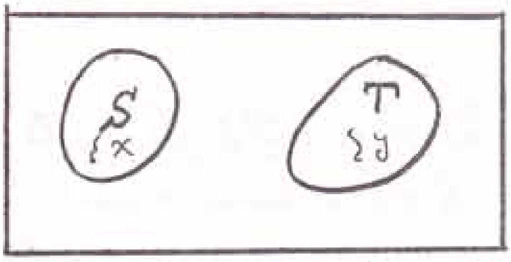
درصورتیکه f یک تابع از S into T باشد، درینصورت در تعریف تابع بصورت خودبخودی مفاهیم ذیل گنجانیده شده است:

(1). $\text{dom } f = S$ بوده برای هر $x\in S$ یک $y\in T$ موجود است طوریکه: $(x,y)\in f$ میشود.

(2) ۰ هر $y \in T$ یگانه unique است. یا بعبارهٔ دیگر:
امکان ندارد که $(x, y_1) \in f$ و هم $(x, y_2) \in f$ باشند در صورتیکه $y_1 \neq y_2$ باشد.

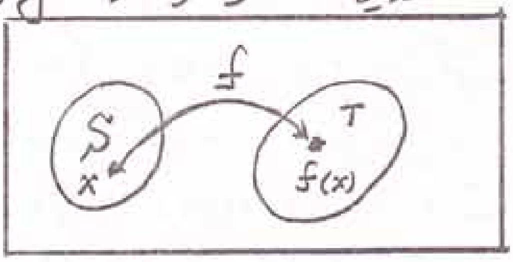
در نتیجه گفته میتوانیم که Symbolism ویا علامه گذاری $f(x)$ در حالیکه f یک تابع از S into T باشد دارای معنی است و مطلب را بصورت واضح بیان میکند.

مفکورهٔ تابع روی دیاگرام طی اشکال ذیل تعبیر شده میتواند: اگر عناصر S، T را علی الترتیب توسط set



نقاط که داخل اشکال S و T واقع اند ارائه نمائیم، درصورتیکه f یک تابع ویا mapping از S into T باشد پس درینصورت f هر عنصر $x \in S$ را بیک عنصر $y \in T$ ارتباط میدهد (mapped میکند). این عنصر $y \in T$ به $f(x)$ ارائه میشود.

درینحالت اگر هر نقطهٔ شکل S



انتخاب گردد تابع f از ا بیک و محض یک نقطهٔ y شکل T mapped میکند. همان نقطهٔ T که تحت f mapped گردیده به x اجتماع کرده بنام تصویر ویا image نقطهٔ x یاد گردیده و به $f(x)$ نشان داده میشود.

اگر f یک تابع از S into T باشد، پس هر عنصر S بالعموم بیک و محض یک عنصر T اجتماع نموده و mapped میشود، درینصورت عنصر T set بتصویر ویا image عنصر S set را تشکیل داده و بالعکس عنصر S set بیک عنصر preimage عنصر T set را بوجود می آورد.

بخاطر باید داشت: درصورتیکه f یک تابع از S into T باشد درینصورت:

(1) ۰ هر $x \in S$ باید بیک و تنها یک عنصر T mapped گردد.

(2) ۰ عناصر مختلف (چند عنصر) x، S set، که با محض یک عنصر T set mapped کرده میتوانند،

(3) ۰ هریک از عناصر T set ضرور نیست که تصویر کدام یک عنصر S set باشد.
مگر در صورتیکه تابع f مورد بحث ما یک تابع از S onto T باشد.

امتحان چهارم :- Test - IV

1. فرض R یک subset $S \times T$ باشد، R یک رابطه binary در $S \times T$ است در صورتیکه: (1). dom R = ______ (2). ran R = ______ باشند (بصورت سمبالیک داده شوند)

2. اگر R یک subset $S \times T$ باشد، R یک رابطه binary در $S \times T$ باشد در صورتیکه ______ باشد پس گفته میشود که R یک رابطه binary از S into T را تشکیل نموده است.

3. اگر R یک subset $S \times T$ باشد وضمناً R یک رابطه binary را در $S \times T$ تشکیل داده باشد، R یک رابطهٔ binary، از S onto T را نیز تشکیل میدهد، درصورتیکه دو شرط ذیل را حایز گردد:
(1). ______ ، (2). ______ .

(4). اگر R یک subset $S \times T$ بوده، R یک تابع را mapping از S into T را تشکیل میدهد، درصورتیکه ______ باشد.

(5). اگر α یک تابع از S into T باشد، پس α یک تابع از S onto T نیز میشود، در صورتیکه ______ گردد.

(6). اگر f یک function از S into T باشد، درینصورت برای هر $x \in S$ محض یک $y \in T$ موجود بوده طوریکه ______ میشود. که این y را بنام ______ یاد نموده و به ______ ارائه میکنند.

(7). اگر f یک تابع از S into T باشد عناصر مربوط set S بنام ______ عناصر set T یاد گردیده و با اشکال عناصر set T بنام ______ عناصر set S یاد شده و به ______ نمایش داده میشوند.

---

5 25. اگر $S=\{a,b\}$ باشد، بشکل roster تعداد کلیه mapping از S onto S را بنویسید.

حل: $\{(a,a),(b,b)\}$ ، $\{(a,b),(b,a)\}$

526. اگر $S=\{a,b,c\}$ باشد بشکل roster تمام mapping های ممکنه S onto S را بنویسید:

حل: $\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$	$\{(a,a),(b,c),(c,b)\}$
$\{(a,b),(b,a),(c,c)\}$	$\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$
$\{(a,c),(b,a),(c,b)\}$	$\{(a,c),(b,b),(c,a)\}$

527.* تعریف: فرضاً S که عبارت از یک ست که دارای N عنصر باشد:
هر تابع از S onto S بنام پرمیوتیشن درجه N ام Permutation of degree N
یاد میشود.
فرضاً اگر $f=\{(a,b),(b,d),(c,c),(d,a)\}$ بوده $S=\{a,b,c,d\}$ باشد،
درینصورت f یک تابع از S into S است. علاوه برآن چون
____ $=$ ran f میباشد، بنابران f یک تابع از S onto S میشود:
پس درینصورت f بنام یک ____ درجه ____ یاد میشود.

حل: S، permutation، 4

528. یک permutation درجه N عبارت است از یک ____
که از S به ____ S بوده درحالیکه تعداد عناصر S عبارت
از ____ عنصر میباشد.

حل: تابع ویا mapping، onto، N

تبصره: در تمام مسایل مربوط Permutation درجه N ام ما از استعمال ست
اعداد تام که دارای N عنصر بوده که به $\{1,2,3,\cdots,N\}$ ارائه میشود
مستفید خواهیم شد. واضح است که باستفاده از استعمال این علامه گذاری
notation کدام نقص در عمومیت و generality موضوع وارد نمیگردد.

529. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(2,3),(3,4),(4,2)\}$ باشد، درینصورت R عبارت از یک Mapping از S onto S میشود. بنابران R یک Permutation درجه —— میباشد.

حل: 4

530. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $R=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ باشد؛ درینصورت:
(1). R یک mapping از —— بوده، بنابران R یک —— درجه —— را تشکیل میدهد. و معمولاً R را بشکل:

$$R=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 3, & 2, & 1\end{pmatrix} \text{ یا } R=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

نشان میدهند. که درینصورت اجزای مربوط first coordinate های اول جوره های مرتب را در شطر اول و اجزای مربوط coordinate های دوم انرا در شطر دوم (پایین آن) مینویسند.
(2). درصورتیکه اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ یک پرمیوتیشن Perm. درگه باشد؛ f را به عرضه گذاری notation پرمیوتیشن Perm. بنویسید.

حل: (1). S onto S ، Permutation ، 3 (2). $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

531. درعرضه گذاری پرمیوتیشن Permutation ، n عدد تام (مربوط coordinate های اول) در شطر بالایی (اول) نوشته شده و مستقیماً زیر هر عدد تام تصویر مربوط آن که در اثر mapped شدن عدد اولی تحت تابع موذکر حاصل گردیده نوشته میشود. چنانچه اگر $R=\{(1,4),(2,3),(3,1),(4,2)\}$ باشد، پس درینصورت باشکل عرضه گذاری Perm. : $R=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ میباشد. هرگاه تحت R، mapping (یک) 1 به 4 و همچنان 2 به 3 و 3 به —— و بالاخره 4 به —— mapped —— شده اند.

حل: 1 ، 4 به 2

532 . اگر $R=\{(1,4),(2,2),(3,3),(4,1)\}$ باشد: از شکل عمده گذاری پرمیوتیشن Permutation بنویسید.

حل: $R=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$

533 . اگر: $R=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ باشد: شکل roster آنرا بنویسید:

حل: $R=\{(1,3),(2,1),(3,2)\}$

534 . اگر: $R=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&2&5\end{pmatrix}$ باشد، پس R عبارت از ______ .

حل: یک پرمیوتیشن درجه 5 ویا mapping $\{1,2,3,4,5\}$ بر خودش است.

535 . تحت Permutation $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$:

(1). 1 mapped شده به ____ ، (2). 2 mapped شده به ____

(3). 3 mapped شده به ____ ، (4). 4 mapped شده به ____ .

حل: (1). 2 ، (2). 1 ، (3). 3 ، (4). 4

536 . دو پرمیوتیشن یا Permutations:

$R_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ و $R_2=\begin{pmatrix}1&3&2&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$

را در نظر گرفته:

(1). شکل roster هر دو پرمیوتیشن موضوع را بنویسید.

(2). آیا $R_1=R_2$ ؟

حل: (1). $R_1=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$ ، $R_2=\{(1,2),(3,4),(2,1),(4,3)\}$

(2). بلی! عین چیز اند، اما صرف ترتیب عناصر آن فرق دارد.

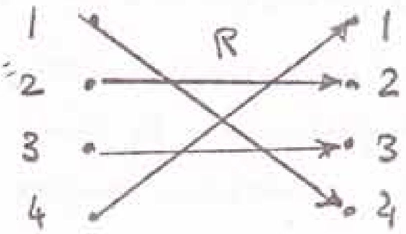
.537 معمولاً اعداد مربوط سطر اول یک Permutation را به ترتیب طبیعی آن می‌نویسند. پرمیوتیشن Permutation : $\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$ را طبق شرط فوق ترتیب دهید.

حل: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$

.538 اگر $S=\{1,2,3,4\}$ باشد در مجموعه 24 بیست و چهار پرمیوتیشن درجه 4 متمایز در یک مجموعه شده میتوانند. به یک صفحه کاغذ پرمیوتیشن‌هایی که حاصل میشوند بنویسید.

حل: برای جواب به Panel - 6 مراجعه شود.

.339 اگر $R=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$ باشد: پرمیوتیشن R در ان مانند ذیل رسم شده میتواند که

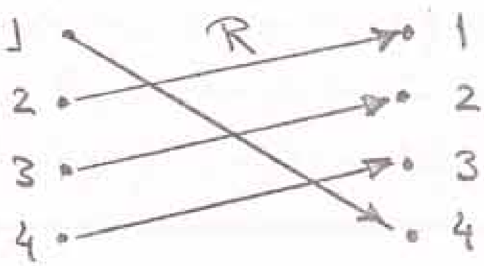


(1). 1 توسط R به ____ ،
(2). 2 " " به ____ ،
(3). 3 " " به ____ ،
(4). 4 " " به ____
mapped شده رفته.

حل: (1). 4 ، (2). 2 ، (3). 3 ، (4). 1

.340 اگر $R=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ باشد، گراف آنرا طبق حرکات 339 رسم کنید.

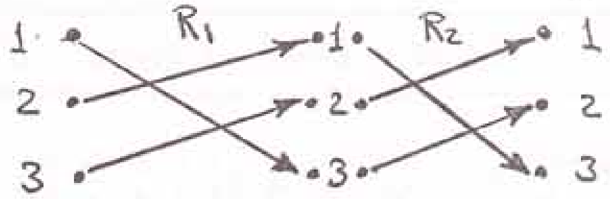
حل:



III. ضرب پرموتیشن :-

Permutation Multiplication

541. اگر $R_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ و $R_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ عبارت از دو Permutation درجه 3 باشند. به mapping، R_1 که توسط mapping، R_2 تعقیب میشود در گراف ذیل ملاحظه کنید:



(1). عنصر 1 را بررسی قرار دهید اولاً عنصر 1 توسط R_1 mapped شده و سپس تصویر آن بالترتیب توسط R_2، mapped گردیده است. 1 توسط R_1 به ___ mapped شده که این تصویر 1 توسط R_2 به ___ mapped گردیده است. نتیجه عمومی R_1 که تعقیب گردیده توسط R_2؛ عبارت از آن است که 1 به 2 mapped میشود.

(2) عنصر را 2 را که توسط R_1 mapped شده است تعقیب کنید، گرچه این image 2 توسط R_2 mapped شده است. 2 توسط R_1 به ___ mapped شده که تصویر 2 را تحت R_1 تشکیل نموده است، سپس این تصویر توسط R_2 به ___ mapped گردیده است. نتیجه عمومی تأثیر R_1 توسط R_2 تعقیب میشود عبارت از map شدن 2 به 3 میباشد.

(3). به همین قسم تصویر 3 تحت تأثیر تابع R_1 عبارت از ___ بوده و بالترتیب تصویر- تصویر 3 تحت R_2 عبارت از ___ میباشد. که در نتیجه تعقیب تابع R_1 توسط R_2: ___ بحیث تصویر تصویر 3 بدست می آید.

حل: (1). 3، 2. (2). 1، 3، (3). 2، 1، 1

542. اگر $R_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ و $R_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ دو Permutation درجه سوم باشند، میخواهیم که تأثیر مجموعی تعقیب R_1، mapping توسط R_2 روی یک دیاگرام مطالعه نمائیم.

اکنون ما تأثیر کلی این دو mapping را روی دیاگرام

$$R_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \qquad R_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

که بشکل پروجیکشن باشند طبق شکل مقابل برسی مینمائیم: از تعقیب کردن تیر در شکل فوق نتیجه میشود که:

(1). 1 توسط R_1 به —— mapped شده که این بالنوبه توسط R_2 به —— mapped گردیده است. نتیجهٔ تأثیر عمومی که R_1 تعقیب میشود توسط R_2 بالای 1 آنست که 1 را به —— mapped میکند.

(2). 2 توسط R_1 به —— mapped شده که این بالنوبه توسط R_2 به —— mapped گردیده است. نتیجهٔ تأثیر عمومی که R_1 تعقیب میشود توسط R_2، بالای 2 آنست که 2 را به —— mapped میکند.

(3). بهمین سوال روی همین استدلال نتیجهٔ تأثیر عمومی که R_1 تعقیب میشود توسط R_2، بالای 3 آنست که 3 را به —— mapped میکند.

حل: (1). 2، 3، 3، (2). 1، 2، 2، (3). 1،

543*. فرضاً $R_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ و $R_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ بوده باشد، نتیجهٔ عمومی mapping R_1، توسط R_2 تعقیب میشود طبق ذیل بدست آرید:

(1). 1 تحت mapping R_1، تعقیب میشود توسط R_2 به —— mapped میشود.

(2). 2 تحت mapping R_1، تعقیب میشود توسط R_2 به —— mapped میشود.

(3). 3 تحت mapping R_1، تعقیب میشود توسط R_2 به —— mapped میشود.

حل: (1). 3 (2). 2 (3). 1

544. به ملاحظه از: Panel-6: تأثیر عمومی mapping R_5، تعقیب میشود توسط R_4 را بدست بیاوریم.

(1) . از اثر تعقیب R_5 mapping توسط R_7 : 1 به ــــ mapped شده،
(2) . از اثر تعقیب R_5 mapping توسط R_7 : 2 به ــــ " "
(3) . " " " R_5 mapping " R_7 : 3 به ــــ " "
(4) . " " " R_5 mapping " R_7 : 4 به ــــ " " است،

حل: (1) . 2 ، (2) . 4 ، (3) . 1 (4) . 3

545 . از مطالعه حرکات 544 نتیجه تأثیر عمومی تعقیب R_5 mapping توسط R_7 طبق ذیل خلاصه شده میتواند:
1 به 2 mapped شده
2 به 4 " "
3 به 1 " "
4 به 3 " " است،
صرف یک permutation در Panel-6 موجود است که درین mapping را به تنهائی خودش در یک مرحله دارا بوده میتواند . آن پرمیوتیشن کدام است؟

حل: R_{11}

546 . به Panel-6 مراجعه کرده تأثیر R_{11} mapping را که توسط R_{14} تعقیب میشود مطالعه دقیق دارید .
(1) . از اثر تعقیب R_{11} mapping توسط R_{14} : 1 به ــــ mapped میشود.
" " " R_{11} " " R_{14} : 2 به ــــ " میشود.
" " " R_{11} " " R_{14} : 3 به ــــ " "
" " " R_{11} " " R_{14} : 4 به ــــ " "
(2) . صرف یک permutation در Panel-6 موجود است که به تنهائی خودش در یک مرحله عین جواب فوق را ارائه میکند . آن کدام است؟

حل: (1) . ۱ ، 2 ، 3 ، 4 (2) . R_1

547 . به منظر از Panel-6 تأثیر مپینگ R_{16} که توسط mapping R_{15} تعقیب شود بررسی کنید.

(1) . 1 تحت mapping R_{16} که توسط R_{15} تعقیب میشود به: ___ mapped شده

2 تحت mapping R_{16} " " R_{15} " " " ___ " "

3 " R_{16} " " " R_{15} " " " ___ " "

4 " R_{16} " " " R_{15} " " " ___ " " یثبت

(2) . یک Permutation درجهٔ Panel-6 بیابید که هر دو مرحله mapping فوق را در یک مرحله انجام داده میتوانند. آن پرمیوتیشن کدام است؟

حل: (1) . 1، 2، 4، 3 . (2) . R_2

548 . اگر R_1 و R_2 دو ___ درجه Nام باشند، محض یک Permutation درجه Nام موجود شده میتوانند که عین نتیجهٔ تأثیر Permutation R_1 که R_2 ___ شود دارا باشد.

حل: پرمیوتیشن که، permutations، تعقیب

549 . در مسالهٔ چوکات 547 ما دیدیم که تأثیر مجموعی پرمیوتیشن R_{16} که توسط R_{15} تعقیب عبارت از همین تأثیر R_2 است. برای ساده ساختن عملیه گذرا در مورد بحث خویش، ما هر دو پرمیوتیشن های موضوع را بشکل یک جوره مرتب در ترتیب که تعامل مینمایند مینگاریم. پس بجای اینکه بنویسیم که تأثیر R_{16} توسط R_{15} تعقیب میشود، ما مینویسیم: ___

حل: (R_{16}, R_{15})

550 . برای مسایل مربوط چوکات های 550 الی 564 از Panel-6 مستفید میگردیم: پرمیوتیشن R_{23} را تکمیل کنید:
$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

حل: $R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

551. پرمیوتیشن permutation $R_{10} = (\qquad)$ را بنویسید.

حل: $R_{10} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$

552. اکنون میخواهیم که تأثیر مجموعی R_{23} که توسط R_{10} تعقیب شود، بحیث یک پرمیوتیشن حاصل نماییم.

چنین میشود: $R_{10} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ $\quad R_{23} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$

(1). تحت رابطهٔ: تأثیر R_{23} تعقیب میشود توسط R_{10} $(R_{23} ، R_{10})$ که به پرمیوتیشن: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&-&-\end{pmatrix}$ مطابقت میکند تکمیل کنید.

(2). $(R_{23} ، R_{10})$ به محض یک پرمیوتیشن که آن عبارت از ____ میباشد مطابقت میکند.

حل: (1). $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$ ، (2). R_5

553. رابطهٔ: $(R_{16} ، R_{15})$ که تحت شرط: "... تعقیب میشود توسط ..." بوجود می‌آید عبارت است از: ____

حل: R_2

554. اگر R_1 و R_2 دو پرمیوتیشن درجه N باشند، پس محض یک ____ درجه N هم موجود است که عین نتیجهٔ تأثیر مجموعی R_1 توسط R_2 تعقیب شود را افاده کند.

حل: پرمیوتیشن permutation

*555. یک طرز افاده دیگر رابطهٔ: تعقیب R_1 توسط R_2 اینست که به جوره‌ای مرتب (R_1, R_2) ارائه شوند. ترتیب که به اساس آن پرمیوتیشن‌ها نوشته شده‌اند دارای اهمیت ______ . زیرا این ترتیب نشان ______ (میدهد ویا نمیدهد) که کدام یک از دو پرمیوتیشن توسط دیگرش تعقیب میشود.

حل: میباشد ، میدهد .

*556. تحت رابطهٔ: «تعقیب میشود . . » (R_{19}, R_{20}) به پرمیوتیشن: ______ مطابقت میکند.

حل: R_{11}

557. تحت رابطهٔ: ______ ، (R_{10}, R_{15}) به R_8 مطابقت دارد. (امتحان کنید)

حل: « . . . تعقیب میشود . . . »

558. دیده شد که از تأثیر مجموعی ترکیب « تعقیب میشود توسط » دو پرمیوتیشن یک پرمیوتیشن حاصل میشود. بطور مثال از (R_{10}, R_{15}) R_8 حاصل گردید. حال ترکیب یک permutation را با خودش مطالعه مینمائیم. رابطهٔ ترکیب یک پرمیوتیشن فرضاً R_{18} با خودش را طبق ذیل نشان میدهیم: $(\_\_\_ , \_\_\_)$.

حل: (R_{18}, R_{18})

559. تحت رابطهٔ ترکیب: « تعقیب میشود توسط » نتیجهٔ: (R_{18}, R_{18}) به: ______ مطابقت دارد.

حل: R_8

.560 از ترکیب پرمیوتیشن های (R_1 و R_1) پرمیوتیشن ــــ حاصل میشود.

حل: R_1

.561 ترکیب (R_2 و R_1) به ــــ مطابقت دارد.

حل: R_2

.562 (1). ترکیب (R_4 و R_2) به ــــ تطابق میکند.
(2). ترکیب (R_5 و R_4) به ــــ مطابقت میکند.

حل: (1). R_{11} ، (2). R_{19}

.563* از اینکه نتیجه ترکیب های (R_2 و R_4) و (R_4 و R_2) در پرمیوتیشن های R_2 و R_4 عین چیز ــــ (است یا نیست). بنابران گفته میشود که ــــ در ترکیب پرمیوتیشن ها دارای اهمیت ــــ .

حل: نیست ، ترتیب ، order میباشد.

.564 یکعده پرمیوتیشن های مربوط Panel-6 را بحیث جوره های مرتب بررسی نمودیم در صورتیکه در Panel-6 : $S=\{1, 2, 3, 4\}$ میباشد، حال میخواهیم بدانیم که چند جوره پرمیوتیشن ها را مطالعه نمایم تا تمام پرمیوتیشن های مربوط Panel مذکور را بشکل جوره بررسی کرده باشیم چون $S=\{1, 2, 3, 4\}$:
(1). Set S دارای ــــ عنصر میباشد،
(2). از 4 عنصر به تعداد ــــ پرمیوتیشن تشکیل میشود.
(3). پس بصورت مجموع 24^2 ویا ــــ پرمیوتیشن درجه 4 را برای مطالعه تمام پرمیوتیشن های مربوط Panel-6 موجود است.

حل: (1). 4، (2). 24، (3). 576

565. اگر $S=\{1,2,3\}$ باشد، درینصورت:

(1). S ست دارای ______ عنصر میباشد،

(2). این تعداد عناصر به تعداد ______ پرمیوتیشن های درجه سوم تشکیل داده میتوانند.

(3). پس 6^2 جوره و یا ______ پرمیوتیشن ها برای مطالعه موجود شده میتوانند.

حل: (1). 3، (2). 6، (3). 36

566. اگر $S=\{1,2,3\}$ بوده و گروپ پرمیوتیشن های متشکله آنرا به $P=\{a,b,c,d,e,f\}$ ارائه کنیم. پرمیوتیشن های ناتکمیل را تکمیل کنید:

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$d=\begin{pmatrix}-&-&-\\1&3&2\end{pmatrix},\quad e=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-&-\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}1&2&3\\-&-&3\end{pmatrix}$$

یک کاپی مکمل این جوکات را نقل و حفظ دارید..

حل: $d=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad e\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

567. ما ______ جوره عناصر $P\times P$ (جوره های مرتب پرمیوتیشن ها) را به شکل ذیل ارائه میکنیم:

$$P\times P=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,a)\cdots(f,f)\}$$

حل: سی و شش (36)

568. بعضی عناصر $P\times P$ را [زوج (d,c) را] تذکر بگیرید!

(1) . پرمیوتیشن های ذیل را تکمیل کنید:

$$d=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}1&2&3\\-&-&-\end{pmatrix}$$

$$(d,c)\ \text{corresponds to}\ \begin{pmatrix}-&-&-\\-&-&-\end{pmatrix}.$$

مطابقت دارد به

(2) . تحت عملیهٔ ترکیب «تعقیب میشود توسط followed by»
(d,c) مطابقت دارد به ____ .

حل: (1) . $c=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$، $(d,c)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

(2) . مطابقت دارد به: e

یادداشت: در شامل روابط چوکات های 569 الی 574 ما منحصر همان محض یک پرمیوتیشن که به جوره های از عنصر P×P مطابقت دارد تحت طریقه ای که ما از رابطه «تعقیب میشود توسط ...» که بعداً این رابطه را بنام «ترکیب» یاد کردیم، پیدا نمائیم. از اینکه P×P دارای 36 جوره عنصر است، پس در نتیجه 36 برای حل بوجود می آید. ما شش ـ شش مسأله را از چوکات ها سوال گنجانیده و به حل آن اقدام میکنیم. اگرچه اجرای این عمل یک کار پرحوصله بوده اما از اینکه به استعمال نتایج آن بعداً نیازمندیم بناءً بحل آن اقدام نمائیم. نتایج شامل چوکات 569 الی 574 را در صفحه کاغذ نقل نموده و حفظ کنید که بعداً از آن استفاده خواهیم نمود.

569 . تحت عملیهٔ «تعقیب میشود followed by» ویا «ترکیب»:

(1) . (a,a) مطابقت دارد به ____ ،

(2) . (a,b) مطابقت دارد به ____ ،

(3) . (a,c) مطابقت دارد به ____ ،

(4) . (a,d) مطابقت دارد به ____ ،

ادامه دارد ...

(5). (a,e) مطابقت دارد به ــــــ ،
(6). (a,f) مطابقت دارد به ــــــ .

حل: (1). a، (2). b، (3). c، (4). d، (5). e، (6). f

570. تحت عملیهٔ «تعقیب میشود» ویا ترکیب:
(7). (b,a) مطابقت دارد به ــــــ ،
(8). (b,b) مطابقت دارد به ــــــ ،
(9). (b,c) مطابقت دارد به ــــــ ،
(10). (b,d) مطابقت دارد به ــــــ ،
(11). (b,e) مطابقت دارد به ــــــ ،
(12). (b,f) مطابقت دارد به ــــــ .

حل: (7). b، (8). c، (9). a، (10). e، (11). f، (12). d

571. تحت عملیهٔ ترکیب:
(13). (c,a) مطابقت دارد به ــــــ ،
(14). (c,b) مطابقت دارد به ــــــ ،
(15). (c,c) مطابقت دارد به ــــــ ،
(16). (c,d) مطابقت دارد به ــــــ ،
(17). (c,e) مطابقت دارد به ــــــ ،
(18). (c,f) مطابقت دارد به ــــــ .

حل: (13). c، (14). a، (15). b، (16). f، (17). d، (18). e

572. تحت عملیهٔ ترکیب:
(19). (d,a) مطابقت دارد به ــــــ ،
(20). (d,b) مطابقت دارد به ــــــ ،

ادامه دارد ...

(21). (d,c) مطابقت دارد به ____ ،

(22). (d,d) مطابقت دارد به ____ ،

(23). (d,e) مطابقت دارد به ____ ،

(24). (d,f) مطابقت دارد به ____ .

حل: (19). d ، (20). f ، (21). e ، (22). a ، (23). c ، (24). b

573. تحت عملیه "تعقیب میشود ..." ویا ترکیب :

(25). (e,a) مطابقت دارد به ____ ،

(26). (e,b) مطابقت دارد به ____ ،

(27). (e,c) مطابقت دارد به ____ ،

(28). (e,d) مطابقت دارد به ____ ،

(29). (e,e) مطابقت دارد به ____ ،

(30). (e,f) مطابقت دارد به ____ .

حل: (25). e ، (26). d ، (27). f ، (28). b ، (29). a ، (30). c

574. تحت عملیه ترکیب :

(31). (f,a) مطابقت دارد به ____ ،

(32). (f,b) مطابقت دارد به ____ ،

(33). (f,c) مطابقت دارد به ____ ،

(34). (f,d) مطابقت دارد به ____ ،

(35). (f,e) مطابقت دارد به ____ ،

(36). (f,f) مطابقت دارد به ____ .

حل: (31). f ، (32). e ، (33). d ، (34). c ، (35). b ، (36). a

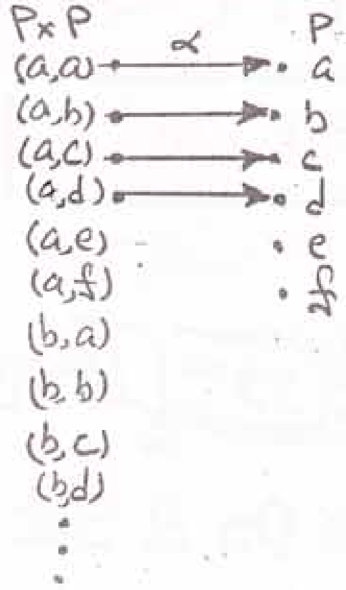
575. تحت عمل "ترکیب" و یا "تعقیب میشود توسط..." از حل 6 مسایل فوق نتیجه میشود که هر عنصر $P \times P$ محض ______ عنصر P مطابقت میکند.

حل: محض بیک عنصر

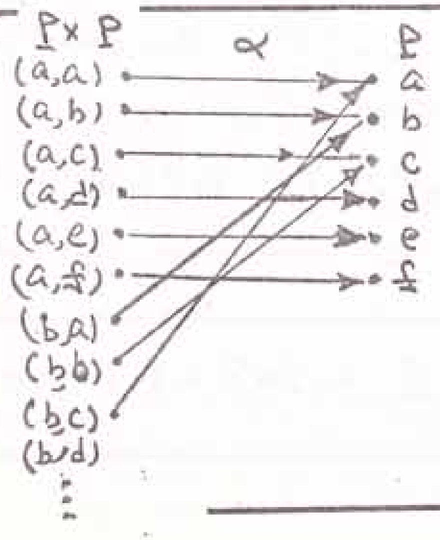
576. هر عنصر $P \times P$ عبارت از ______ جوره و محض ______ عنصر P مطابقت میکند.

حل: جوره مرتب [illegible] ، بیک

577. اگر نتایج مسایل مربوط حرکات 6 ی 569 الی 574 به دیاگرام تیری ارائه کنیم درینصورت مانند شکل مقابل افاده شده میتوانند. اگر عملیه "تعقیب میشود" و یا ترکیب را به α نشان دهیم، جوره های مرتب: (a,a)، (a,b)، (a,c) و (a,d) مربوط $P \times P$ بالترتیب به عناصر: a، b، c و d مربوط P مطابقت میکنند. عناصر: (a,e)، (a,f)، (b,a)، (b,b) و (b,c)، مربوط $P \times P$ بالترتیب با کدام عناصر P مطابقت دارند؟ توسط دیاگرام نشان دهید.



حل:



578 . از حل شماره 577 نتیجه میشود که α یک تابع از ___ into ___ را ارائه میکند. در حقیقت α یک تابع onto میباشد.

حل : $P \times P$ ، P یعنی از $P \times P$ into P

579 . اگر $\alpha = \{((x,y),z) \mid (x,y) \in P \times P \text{ and } z \in P \text{ and } (x,y) \xrightarrow{\text{عمل تعقیب میشود}} z\}$ تصور شود درینصورت α یک رابطه binary را در $(P \times P) \times P$ بوجود می آورد، طوریکه : (1) . $dom\,\alpha =$ ______ بوده و
(2) . برای هر $(x,y) \in dom\,\alpha$ ، ______ $z \in P$ موجود شود
طوریکه : $((x,y),z) \in \alpha$ میباشد .

حل : (1) . $P \times P$ ، (2) . محض یک .

IV . عملیات دوگانه ای بر یک Set :

Binary Operations On A Set

580 . تعریف : (1) . هرگاه S یک set غیرخالی nonempty باشد :
هر یک تابع از ___ در ___ را بنام عملیه دوگانه ای (دوتائی) binary-operation در S یاد میکنند . چنانچه :
(2) . در شماره 579 ، ما α را طوری تعیین کردیم یک تابع از $P \times P$ into P را (تحت عملیه ترکیب) بوجود آورد . بنابران α یک عملیه : ______ را در P تشکیل میدهد .

حل : (1) . $S \times S$ ، S (2) . binary operation

581. درباره نتایج شایل جوکات : 569 الی 574 را مورد مطالعه قرار داده و علامه‌گذاری پیشتر را که درباره تصویر یک عنصر از S در T وضع نموده بودیم بخاطر بیاورید :

(1) . تصویر : (d, e) تحت عملیه ترکیب (α) عبارت از c است .
پس در صورت ما میتوانیم بنویسیم : $\alpha(d, e) =$ ــــــ .

(2) . ــــــ (b, f) تحت عملیه α عبارت از d است .
پس در صورت ما مینویسیم : ــــــ = ــــــ .

حل : (1) . c ، (2) . image یا تصویر ، $\alpha(b, f) = d$

582. تصویر (e, f) تحت عملیه α عبارت از ــــــ است . پس مینویسیم : ــــــ

حل : c ، $\alpha(e, f) = c$

583*. ما افاده : $\alpha(e, b) = d$ را به عبارت : ــــــ تحت α که عبارت از d است میخوانیم .

حل : تصویر (e, b)

584. اگر S یک ست غیر خالی باشد ، یک عملیه binary در S عبارت از ــــــ از S×S into S است .

حل : ـ mapping یا تابع

585. در یک ست غیر خالی S یک ــــــ یا ــــــ از ــــــ بنام عملیه binary در S یاد میشود .

حل : mapping ، تابع ، از S×S into S .

586. اگر S یک عملیه binary در یک ست S باشد ، پس برای هر $(x, y) \in S \times S$ محض یک $x \in S$ موجود است که بنام ــــــ (x, y)

تحت عملیه f یاد میشود و توسط علامه ______ ارائه میگردد.

حل : تصویر ، $f(x,y)$

587. اگر ه یک عملیه binary در P بوده که بوسط رابطه ، و تعقیب میشود یا تعریف میشود
در اینصورت ترکیب (a,b) تحت α عبارت از b بوده و به افاده :
$b =$ ______ نشان داده میشود.

حل : $\alpha(a,b)$

588. ارائه یک عملیه binary در یک S set غیر خالی توسط علایم و سمبول های ذیل میشود:
$*$ ، $\circ$ ، $+$ ، O ، $\oplus$ ، $\times$ ، $\odot$ و امثال آنها معمول است . حال
اگر $*$ یک عملیه binary در S بوده که تصویر (x,y) تحت عملیه $*$
عبارت از z باشد . در اینصورت بعوض افاده : $*(x,y) = z$
مینویسیم : $x * y =$ ___ . بالفرض علامه و سمبول :
"۰" یک عملیه binary را که توسط "تعقیب میشود و یا عملیه ترکیب" تعریف
میشود در P نشان دهد ، در اینصورت بعوض اینکه بنویسیم :
$\circ(a,b) = c$ مینویسیم : $a \circ b =$ ___ .

حل : z ، c

589. اگر S، set اعداد تام را ارائه کند عملیه "+" جمع را در نظر بگیرید :
تحت این عملیه برای هر $(x,y) \in S \times S$ در یک $z \in S$ عرض وجود میکند .
بعبارت دیگر عملیه جمع "+" یک تابع و یا mapping "+" را در ______ تعریف میکند .

حل : از (from $S \times S$ into S)

590. تصویر $(3,2)$ تحت تابع "+" عبارت از 5 است . پس بجای اینکه

بنویسیم: $+(3,2) = 5$ ، امینویسیم ___ = ___ .

حل: $3+2 = 5$

591. اگر کدام یک set غیرخالی باشد، پس یک عملیه binary در S عبارت از ___ از ___ بیابا شد.

حل: mapping ، از from S×S into S

592. عملیه * یک عملیه binary در یک set S شده میتواند در صورتیکه برای هر جوړه مرتب $(x,y) \in S \times S$. محض یک عنصر $z \in S$ موجود گردد، طوریکه: ___

حل: z تصویر (x,y) را تحت * تشکیل دهد. یا: $x*y = z$ یا: $*(x,y) = z$ گردد (هر یک از جوابات ذیل صحیح است.)

593. اگر * یک عملیه binary در یک set S باشد، پس در صورت ___ z وجود دارد طوریکه $z \in S$ بوده و $x*y = z$ برای هر جوړه مرتب $(x,y) \in S \times S$ گردد.

حل: محض یک

594. اگر $S=\{1,2,3,4,5\}$ باشد، میخواهیم بدانیم که آیا $(5,1) \in S \times S$ ، که تحت عملیه "+" mapped شده بتواند.

(1). $+(5,1) =$ ___ ، یا $5+1 =$ ___ میشود.

(2). $6 - S$ ، (3) بنابران $(5,1)$ تحت عملیه + به S ___ .

حل: (1). 6 ، 6 ، (2) $\notin$ ، (3) . mapped شده نمیتواند.

595. اگر $S=\{1,2,3,4,5\}$ باشد:

(1). آیا $(4,3)$ تحت عملیه معمولی جمع $+$ به S، mapped شده میتواند؟

(2). جواب مثبت ویا منفی مسئله را نشان دهید؟

حل: (1). نخیر! (2). بطور مثال: $3+4=7$ بوده حالانکه $7 \notin S$

596. اگر $S=\{1,2,3,4,5\}$ باشد:

(1). برای آنکه $+$ یک عملیه binary در S باشد، پس برای هر جوره مرتب $(x,y) \in S\times S$ باید که محض یک ____ $\in z$ موجود شده بتواند طوریکه: $x+y=z$ گردد.

(2). آیا عملیه جمع یک عملیه binary در S شده میتواند؟

حل: (1). S، (2) نخیر.

597*. اگر S یک set غیرخالی باشد، یک عملیه binary در S عبارت از یک ____.

حل: تابع ویا mapping از $S\times S$ into S میباشد.

598*. اگر S یک set غیرخالی بوده و $*$ یک عملیه binary در S باشد:

(1). $*$ یک mapping از ____ در ____ بوده.

(2). برای ____ $(x,y) \in S\times S$، محض ____، $z \in S$ وجود دارد طوریکه: ____ گردد.

(3). $dom* =$ ____ و $ran* =$ ____ میباشد.

(4). اگر $*$، (x,y) را در z map میکند، یا بعبارت دیگر اگر z تصویر (x,y) تحت $*$ باشد پس مینویسیم: ____.

حل: (1). $S\times S$، S (2). هر، یک، z، $x*y=z$ (3). $S\times S$، S (4). $x*y=z$

تبصره: برای مطالعه عملیه binary در ست‌های معین و محدود finite بهتر است که یک جدول ترتیب داده شود. چه یک جدول وسیلهٔ خوب برای افاده خواص و موجز عملیات زیاد شده میتوانند. ذیلاً یک جدول افاده عملیه binary "∘" در P را که عبارت از یک permut. درجه 6 است رسم نمائیم. (خاصیت‌ها را که از شکل چوکات: 569 الی 574 کاپی نموده اید بکار ببرید.) از اینکه: $P=\{a,b,c,d,e,f\}$ یک ست که دارای 6 عنصر میباشد پس یک جدول 7 در 7 P را طبق ذیل ترتیب داده میتوانیم:

∘	a	b	c	d	e	f
a						
b						
c						
d						
e						
f						

جدول را کاپی و نقل نموده و بعداً از آن استفاده خود حاصل کرده.

599. "∘" در گوشه بالای طرف چپ جدول – یک عملیه binary را در جدول ارائه میکند. (در اینجا عملیه binary عبارت از عملیه "ترکیب و یا تعقیب میشود" میباشد.) شش حروف در جدول شش عنصر ست، ——— را نمایش میدهند. شش و شش خانه جدول به 36 عنصر ست، ——— مطابقت کرده میتواند.

حل: P ، P×P

600. درین کتاب عناصر مربوط سطور جدول اجزای coordinate‌های اول جوره‌های مرتب را ارائه کرده و عناصر مربوط ستون جدول اجزای coordinate‌های دوم ——— را ارائه میکنند.

حل: جوره‌های مرتب ordered pairs

601. (1) . آن خانهٔ جدول که از تقاطع سطر b و ستون d حاصل میشود، جوړهٔ مرتب: (___) را ارائه میکند.

(2) . به استفاده از اشتمال شامل حرکات 569 الی 574، تصویر این جوره مرتب حاصله عبارت از ___ میباشد، این تصویر را در خانه که از تقاطع سطر b و ستون d حاصل میشود، نوشته کنید.

حل:

•	a	b	c	d	e	f
a						
b				e		
c						
d						
e						
f						

602. تصاویر داده شدهٔ ذیل را به جدول بگذارید:

$(a,b)=b$ ، $(e,e)=a$ ، $(b,f)=d$ ، $(f,c)=d$

حل:

•	a	b	c	d	e	f
a		b				
b						d
c						
d						
e					a	
f			d			

603. با استفاده از استعمال نتایج ربط حرکات 569 الی 574 جدول را تکمیل کنید.

حل: جواب این مسأله در Panel-7 داده شده.

604. یک عملیه binary در یک set فرضی عبارت است از: ___ .

حل: یک تابع در یک mapping: from SxS into S است.

605. یک عملیه * binary در سِت شده نمیتواند درصورتیکه اگر یک جفت ——— $(x,y) \in S\times S$ موجود شده بتواند طوریکه دارای کدام تصویر در سِت تحت عملیه * بوده نتواند. پس درینحالت * ، ——— در ——— map کرده نمیتواند.

حل: یک ، $S\times S$ در سِت

606. اگر * ، $S\times S$ را در سِت map کرده نتواند، پس * ——— (میتواند و یا نمیتواند) که یک عملیه * در کدام subset سِت باشد.

حل: نمیتواند.

607. اگر S ، set اعداد Reals را ارائه کند، در سِت عملیه تقسیم "÷" مدنظر بگیرید: یک مثال پیدا کنید که دران یک عنصر سِت $S\times S$ دارای تصویر در سِت تحت عملیه "÷" نباشد. درینصورت "÷" یک عملیه binary در set ، اعداد Reals حقیقی شده نمیتواند.

حل: $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(-\sqrt{2},0)$ ، $(\sqrt{2},0)$ وغیره..

608. * نمیتواند که یک ——— در سِت باشد درصورتیکه اگر حتی یک عنصر $(x,y) \in S\times S$ موجود گردد که تصویر آن تحت عملیه * عنصر سِت نباشد. درینصورت * ، $S\times S$ در سِت map کرده نمیتواند.

حل: عملیه binary یا binary operation

609. اگر S ، set اعداد Reals باشد دیدیم که عملیه "÷" یک عملیه binary در set ، Reals شده نمیتواند. یک set ، S_1 را

هر یک عملیه تقسیم: "÷" در یک عملیه binary باشد.

حل: S میتواند که set تمام اعداد حقیقی غیر صفر باشد.

610. اگر S یک set اعداد تام غیر منفی باشد عملیه تفریق (−) را در آن در نظر بگیرید:

(1). آیا $(5,7) \in S\times S$، پس: $(5,7)$ − تحت عملیه "−" دارای یک تصویر در S میباشد؟

(2). آیا $(9,2) \in S\times S$، پس: $(9,2)$ − تحت عملیه تفریق دارای یک تصویر در S شده میتواند؟

(3). آیا $(10,11) \in S\times S$، پس: $(10,11)$ − تحت عملیه تفریق دارای یک تصویر در S میباشد؟

حل: (1). نه خیر! زیرا: $-(5,7)=(5-7)=-2 \notin S$، (2). نخیر، (3). نخیر!

611. اگر S یک set اعداد تام غیر منفی باشد:

(1). هر جوره مرتب $(x,y) \in S\times S$ در صورتیکه: y ___ x باشد نتیجه آن تحت عملیه معمولی تفریق یک عدد منفی میباشد.

(2). اعداد منفی در ___ شامل نیست.

حل: (1). >، (2). set S

612. آیا عملیه معمولی تفریق "−" در set اعداد تام غیر منفی یک عملیه binary میباشد؟

حل: نه خیر!

613. عملیه ☆ نمیتواند که یک عملیه binary در یک set S باشد در صورتیکه اگر حتی یک عنصر ___ $(x,y) \in$ دارای یک تصویر در set S تحت ___ نباشد.

حل: $S\times S$، ☆

614. ☆ نمیتواند که یک عملیه binary در یک set S باشد در صورتیکه اگر ___

$(x,y) \in S \times S$ طوریکه دارای دو تصویر در یک تحت $*$ گردد، یا بعبارهٔ دیگر تصویر باید unique ویگانه باشد.

حل: یک

615. فرضاً که S سِت اعداد real numbers را ارائه کند و ما بخواهیم که یک عملیهٔ binary $*$ را طبق ذیل تعریف نمائیم:

$a,b,c \in$ Reals درحالیکه $*(a,b) = c$ and $c^2 = a^2 + b^2$

(1). جوره $(3,4)$ را منظور بگیرید: $(3)^2+(4)^2=(\pm 5)^2$.
پس درینصورت: $c =$ ___ و $c =$ ___ میشود.

(2). ازینکه c یگانه unique نیست. پس ما کدام ___ ___ دارا شده نمیتوانیم.

حل: (1). 5، -5، (2). binary operation، دا عملیهٔ binary

616. فرضاً هدف دانستن اینموضوع باشد که آیا $*$ یک عملیهٔ binary operation در یک S بوده میتوانند و یا خیر؟ درینصورت باید ما شکل ذیل را مطالعه و بررسی کنیم:

(1). آیا هر ___ ، ___ $\in (a,b)$ دارای کدام تصویر تحت عملیهٔ $*$ بوده میتوانند؟

(2). آیا این تصویر یک ___ ، ___ میباشد و یا خیر؟

(3). آیا این ___ یگانه و uniques است؟ ویا خیر؟

(4). اگر کدام یکی از جوابات فوق یک جواب منفی باشد، درینصورت گفته میشود که $*$ یک ___ در ___ شده نمیتوانند.

حل: (1). جورهٔ مرتب (ordered pairs) ، $S \times S$
(2). عنصر ، set S
(3). تصویر ، (4). عملیهٔ binary ، S

تبصره : بسیاری از مسایل ذیل به عملیات دوگانه و یا binary operations که ما به آن آشنا هستیم ارتباط دارند . توقع برده که شما به این عملیات binary آشنایی داشته و در صورت لزوم از امثال آن مستفید میشوید. اگر پرسیده شود که آیا عملیه معمولی ضرب "." در set اعداد حقیقی Reals یک عملیه binary شده میتواند ؟ جواب صحیح این سوال مستوجب یک عده معلومات است . (از شما پرسان نشده که روز ثابت نمایید .) از طرف دیگر اگر جواب این سوال نزد شما منفی باشد ، یک ضرورت است که شما یک مثال مخصوص را که جواب "چرا منفی است ؟" را توضیح کرده بتواند ، نشان داده بتوانید .

بطور مثال : اگر S ، set اعداد Odd integers ، تاق تام را نشان داده و عملیه جمع "+" را در این موقع بگیرید : سوال اینکه آیا عملیه جمع در S یک عملیه binary شده میتواند ؟ طبق ذیل جواب داده میشود : چون $(1,3) \in S \times S$ است اما تصویر $(1,3)$ تحت عملیه جمع "+" که عبارت از 4 میباشد ($4 \notin S$) در S موجود نمیشود . بنابران گفته میتوانیم که عملیه جمع "+" در set اعداد تام تاق S یک عملیه binary نمیباشد .

در بعضی از مسایل آینده عملیات binary جدید با شامل عملیات سابق تعریف خواهند شد . بطور مثال ، اگر ما S ، set اعداد Integers تصور نموده و برای هر $(a,b) \in S \times S$ و نشان $a \star b = 2ab$ تعریف کنیم . درینجا افاده طرف راست شامل عملیه ضرب معمولی را نشان میدهد . حال برای اینکه $\star$ را یک عملیه binary در S بررسی کرده بتوانیم ، تمام حقایق که راجع به عملیه ضرب در set اعداد تام موجود است بپردازیم . طوریکه تذکر داده شد :

$\star$ یک عملیه binary در set اعداد تام میباشد در صورتیکه $2ab$ یک عنصر تنها و unique در set ، S بوده و برای هر جوره مرتب ordered pairs $(a,b) \in S \times S$ موجود باشد .

طوریکه در عملیه ضرب معمولی عمدتاً ضرب "." را حذف میکنند به همین قسم با معمول عمدتاً "." را که برای توضیح افاده ؛ "تعقیب میشود توسط" و یا "ترکیب" که در set ، پردوسیون کمی در N بکار برده شد حذف مینماییم .

617. در set های محدود-معیّن finite sets که دارای عدۀ قلیل عناصر باشند تشکیل جدول برای توضیح عملیه * مفید است. درصورتیکه ____ خانۀ جدول مخصوص باشد «بیک طریقه» "exactly in one way" توسط عناصر ____ پُر گردد. درینصورت شما نشان داده میتوانید که عملیه * یک ____ در S است. زیرا: وقتیکه شما جدول را خانه پری میکنید درحقیقت تمام عملیه mapping از S×S در S را توضیح نموده اید.

حل: هریک، S، یک عملیه binary (binary operation)

618. نشان دهید که عملیۀ ضرب معمول یک عملیه binary در {1,-1} بوده و جدول ذیل را تکمیل کنید:

•	1	-1
1	1	
-1	-1	

حل:-

•	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

619. (1) بالفرض ____ از خانه های جدول توسط استعمال «•» بر S×S پُر نشود.
(2) بالفرض خانه های جدول توسط بیشتر از یک عنصر ____ پُر شده باشد.
(3) کدام یک از entries دارای عناصر ____ نباشد.
(4) اگر هرکدام یکی از شرایط فوق موجود شود درینصورت عملیۀ «•» یک binary ____ شده نمیتواند.

حل: (1) یکی، (2) S، (3) S، (4) operation.

620. اگر S={A,B,C,D} بوده درحالیکه: A=φ ، B={a} ، C={a,b} و D={a,b,c} باشند.

نشان دهید که union (∪) اتحاد یک رابطهٔ binary در یک ست میباشد و جدول ذیل را تکمیل کنید:

∪	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	B	C	D
C				
D				

حل:

∪	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	B	C	D
C	C	C	C	D
D	D	D	D	D

621: فرضاً $S=\{A,B,C,D\}$ بوده درحالیکه $A=\Phi$ ، $B=\{a,b\}$ ، $C=\{b,c\}$ ، $D=\{c,d\}$. نشان دهید که (∩) تقاطع intersection یک عملیه binary در یک ست نمیباشد. (نشان دهید $X\cap Y=\{x\}$ طوریکه $\{x\}\notin S$ است.)

حل: $B\cap C=\{b\}$ ، $C\cap D=\{c\}$ که نه $\{b\}$ و نه $\{c\}$ عنصر کدام ست است.

622: اگر $S=\{1,-1,i,-i\}$ تحت عملیه ضرب بوده و جدول $S\times S$ را جدول ذیل نشان میدهد نشان دهید که عملیه ضرب "." یک عملیه binary در یک ست است. درحالیکه $i=\sqrt{-1}$ است.

·	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1			
i	i			
-i	-i			

حل:

·	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

V. خواص یک عملیهٔ دوگانه ای :-

Properties Of A Binary Operation

a. تبدیلی : Commutative

623. به Panel-7 مشاهده کنید :

(1). d.c=e یا بعبارت دگر تحت عملیه binary که توسط رابطهٔ : «تعقیب میشود توسط ... » ویا «ترکیب» ارائه میگردد ، خاطرنشان میسازد که جوره مرتب ___ به ___ mapped شده است .

(2). c.d= ___ خاطرنشان میسازد که تحت عملیه binary «.» جوره مرتب ___ به ___ mapped گردیده است .

حل : (1). (d,c) به e ، (2). f ، (c,d) به f

624. اگر S ، Set اعداد تام بوده و عملیهٔ معمولی تفریق «−» را در S مدنظر بگیرید:

(1). تصویر (5,2) تحت عملیهٔ «−» عبارت از ___ بوده

(2). تصویر (2,5) تحت عملیهٔ «−» عبارت از ___ میباشد

حل : (1). 3 ، (2). −3

625. اگر مسایل 623 و 624 مشاهده میشود اگر ★ یک عملیه binary در S باشد ، ضروری نیست که : ★(a, b) = ___ برای هر a و b شامل S باشد .

حل : ★(b,a)

626 • فرض کنید S set اعداد تام مثبت و عملیه معمولی ضرب "•" را در آن در نظر بگیرید.

(1) • تصویر $(5,3)$ تحت عملیه ضرب "•" عبارت از ــــ میشود.

(2) • تصویر $(3,5)$ تحت عملیه ضرب "•" عبارت از ــــ میباشد.

(3) • درینحالت برای هر $a,b \in S$ داریم: $a \cdot b =$ ــــ

حل: (1) • 25 ، (2) • 15 ، (3) • $b \cdot a$

627 • اگر S set اعداد تام با عملیه معمولی جمع "+" را در آن در نظر بگیرید:

(1) • آیا برای هر $a,b \in S$ رابطه $a+b=b+a$ حقیقت دارد؟

(2) • یک مثال را برای اثبات ادعای خویش بیان کنید.

حل: (1) • بلی ، (2) • $3+4=7$ و $4+3=7 \Rightarrow 3+4=4+3$

628 • اگر * یک عملیه binary را در S افاده کند، درصورتیکه اگر * عملیه + را نشان دهد، پس درینصورت؛ برای هر $a,b \in S$ رابطه: $*(a,b) = *(b,a)$ صحت حقیقت دارد، و بهمین قسم اگر * عملیه ضرب "•" را ارائه کند پس درینصورت رابطه؟ $\cdot(a,b) =$ ــــ (درحالیکه $a,b \in S$ باشد) نیز دارای حقیقت میباشد.

حل: $\cdot(b,a)$

629 • تعریف: اگر ⋆ یک عملیه binary در یک set غیرخالی باشد، پس گفته میشود که ⋆ یک عملیه binary تبدیلی Commutative در S است درصورتیکه برای تمام $a,b \in S$ ، رابطه $a \star b =$ ــــ موجود باشد.

حل: $b \star a$

630 • اگر ⋆ یک عملیه binary در یک set ، S غیرخالی باشد درینصورت

* یک mapping از ــــ در ــــ میباشد. برای اینکه * تبدیلی commutative نیز باشد، ضروریست که برای تمام $x,y \in S$: تصویر (x,y) تحت عملیه * عین عنصر (یا چیز) با تصویر (y,x) تحت * باشد. یا بعباره دیگر: $*(x,y) =$ ــــ برای هر $x, y \in S$ باشد.

حل: $*(y,x)$

631 • ازین به بعد به عوض استعمال عبارهٔ: $*(y,x)=*(x,y)$ برای هر $x,y \in S$ ما از استعمال عبارهٔ ذیل: $y*x=x*y$ برای هر ــــ استفاده خواهیم کرد.

حل: $x,y \in S$

632 • عبارت ذیل را تکمیل کنید: یک عملیه binary * در یک ست غیرخالی S ــــ گفته میشود درصورتیکه برای هر $x,y \in S$: ــــ = ــــ باشد.

حل: commutative، $x*y=y*x$

633 • عبارت ذیل را تکمیل کنید: یک عملیه binary * در یک ست غیرخالی S ــــ نیست در صورتیکه لااقل یک جوره از عناصر $x,y \in S$ موجود گردد طوریکه: ــــ $\neq$ ــــ باشد.

حل: commutative، $x*y \neq y*x$

634 • فرضاً S، ست اعداد تام و "∘" عملیه معمولی ضرب را در S نشان دهد، از مشقات خویش میدانید که برای هر $a,b \in S$، $a \circ b =$ ــــ میشود، بنابراین عملیه ضرب در ست تام یک عملیه binary ــــ میباشد.

حل: b.a ، Commutative

635. فرضاً $S=\{a, b, c\}$ بوده و جدول $S \times S$ تحت عملیه $*$ تشکیل شده:

(1). آیا عملیه $*$ در S یک عملیه binary است؟ و یا خیر؟

(2). آیا $*$ در S تبدیلی Commutative است؟

*	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	b
c	c	a	b

حل: (1). بلی ، (2). نخیر! زیرا: $b*c \neq c*b$

636. ست اعداد تام منفی negative Integers را تحت عملیه ضرب "." در نظر بگیرید: آیا عملیه ضرب "." یک عملیه binary درین set است؟ چرا؟

حل: نخیر! بطور مثال، جزئیه: $(-1, -2)$ دارای کدام تصویر درین ست نیست!

637. اگر S، ست اعداد تام Integers باشد، آیا عملیه معمولی جمع "+" در S یک عملیه binary میباشد؟ چرا؟

حل: بلی! زیرا برای هر $a, b \in S$ ، حاصل جمع آنها $a+b$ یک عنصر یگانه در S است.

638. بکدام انواع زیاد سمبول ها مانند: $+$ ، $\circ$ ، $\times$ ، $*$ ، $\circledast$ ، o وغیره برای نشان دادن عملیات دوتائی binary operations موجود است. درصورتیکه علامه جمع "+" بین دو عنصر مانند $a+b$ استعمال گردد، ما از اینه عبارت: "a جمع b" میخوانیم. اگر یک جدول برای ارائه و توضیح عملیه جمع تشکیل گردد، ما آنرا جدول جمع می نامیم. بهمین قسم عملیات binary دیگر را افاده و توضیح مینمائیم. فرضاً: $S = \{0, 1, 2, 3\}$ بوده "جدول جمع" set ، S را در طبق ذیل تکمیل میکنیم:

(1) . آیا عملیهٔ جمع در S binary میباشد و یا خیر؟

(2) . آیا عملیه جمع "+" در S تبدیلی Commutative میباشد؟ و یا خیر؟

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

حل: (1) . بلی! برای هر $a, b \in S$ ، $a+b$ حاصل که مربوط به S گذاشته شده است.
(2) . بلی! برای هر $a, b \in S$ ، $a+b=b+a$ میباشد.

639 . اگر علامه: "×" و یا "•" بحیث ارائه یک عملیه binary در یک ست بکار برده شود. درینصورت $a \times b$ و یا $a \cdot b$ به عبارت "a دفعه b" و یا "a مرتبه b" خوانده میشود. جدول که برای توضیح این عملیه بکار برده میشود بنام "جدول ضرب" یاد میشود.

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

"جدول ضرب" ست S، که طبق فوق تشکیل شده از آن مطالعه کنید،

(1) . آیا "•" یک عملیه binary در S میباشد؟
(2) . آیا "•" تبدیلی Commutative در S میباشد؟

حل: (1) . بلی ، (2) . بلی ،

340 . از مسأله 577 حل دیده میشود که α یک تابع از — در — را ارائه میکند. (درحقیقت این تابع از $P \times P$ — P میباشد.)
این جوره تکرار داده شده α و جای لازم است ،

حل: $P \times P$ در P ، onto (بر) این تکرار داده شده است

۶۴۰ . اگر علایم: * ویا ⚬ وغیره برای ارائهٔ یک عملیه binary در یک ست S استعمال گردد . درینصورت: $a*b$ ویا $a \circ b$ واشکال آن به عبارت: " a عملیه b " خوانده میشود . جدول تشکیل عملیه * بنام جدول عملیه * یاد میکنند. اگر $S=\{0,1,2,3\}$ باشد، جدول: $S*S$ قرار شکل مقابل داده شده است . ملاحظه فرمائید .

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

آیا * یک عملیه binary در S میباشد ؟

حل : نخیر! زیرا: برای هر $a,b \in S$ ، $a*b$ حل که در S گنجانیده نشده باشد. مثلاً برای: $2*3=5$ ، $5 \notin S$.

۶۴۱ . در یک ست S ، یک عملیه binary ؛ " ⚬ " را در نظر بگیرید اگر برای هر عملیه $a,b \in S$: $a \circ b = b \circ a$ موجود باشد درینصورت گفته میشود که عملیهٔ " ⚬ " در S ________ است .

حل : تبدیلی commutative

۶۴۲ . لغت: " commute " ویا " تبادل " درینجا مفهوم تبدیل کردن را افاده میکنند. زمانیکه برای: $a*b$ با افاده: $b*a$ را مینویسیم ؛ این افاده ترجیع میکنند که جاهای a و b تبدیل شده (commuted) است . اگر برای هر ________ ، $a*b=b*a$ موجود باشد ، درین صورت گفته میشود که عملیه binary ؛ * در S تبدیلی ویا ________ نیز میباشد

حل : $a,b \in S$ ، commutative

۶۴۳ . در صورتیکه برای ارائهٔ یک عملیه binary ⋆ جدول آن موجود باشد:

★	a	b	c
a			
b			
c			

خاصیت تبدیلی Commutativity

عملیهٔ ★ از جدول - بنابر تناظر بودن عناصر مندرجهٔ Symmetry جدول با شکل محور قطری Symmetry about the diagonal جدول به آسانی بررسی و مطالعه شده میتواند. طوریکه اگر برای تمام: $x, y \in S$، افاده‌های $x \star y$ و $y \star x$ موقعیت‌های متناظر را نظر به محور و یا خط قطری اخذ نمایند، درینصورت ★ تبدیلی است.

	c	
	a	b

فوقاً سه خانهٔ خالی قسمت تحتانی خط قطری توسط عناصری که در شکل: خانه پُری شده باشد، عناصر مربوط سه خانهٔ خالی قسمت فوقانی خط قطری را درصورتیکه ★ تبدیلی باشد، بنویسید.

حل:

c	a	
	b	

644 . اگر یک جدول یک عملیهٔ binary در یک set، که داده شده باشد، اگر عناصر قسمت گوشهٔ فوقانی جدول نظر به خط قطری آن با عناصر قسمت گوشهٔ تحتانی جدول متناظر باشند، درینصورت عملیهٔ binary موضوع (فرضاً " * " در set)، که مفروض ________ بوده و عکس آن نیز دارای حقیقت است. اگر عناصر متذکره جدول نظر به قوانین متناظر نباشند، پس درینصورت عملیهٔ * در که ________ نبوده و عکس این مسأله نیز دارای حقیقت میباشد.

حل: تبدیلی Commutative، تبدیلی Commutative

645 . آیا عملیهٔ ⊕ در جدول مقابل Com. یا تبدیلی است و یا خیر؟

⊕	0	1	2
0	1	0	1
1	0	1	2
2	1	2	0

حل: بلی.

646. میخواهیم که چند عملیه binary را در S set اعداد تام مطالعه نمائیم:
مطلوب اگر برای تمام $x, y \in S$ عملیه * طبق: $x*y = (2\cdot x)+y$
تعریف کنیم. (که در اینجا: "·" و "+" عملیات معمولی ضرب و جمع را ارائه میکنند)
پس در صورت: $3*5 = (2\cdot 3)+5$
ویا $3*5 = 11$ را نشان میدهد.
چون برای تمام اعداد تام طوریکه $(x,y) \in$ ___ تحت عملیه "*" محض به یک عنصر ___ set ، map میشود (توجه نمایید که برای هر $(a,b) \in S\times S$ با محض یک عنصر یگانه "a*b" را دارا میشویم)، پس در صورت گفته میتوانیم که * یک ___ در S میباشد.

حل: $S\times S$ ، یگانه unique ، S ، binary operation

647. از مطالعه شماره مربوط چوکات 646 دیده شد که در S set عملیه *
یک عملیه binary بوده طوریکه برای هر $x, y \in S$ رابطه: $x*y = 2\cdot x+y$ را تشکیل
میدهد. در صورت: $4*3 = (2\cdot 4)+3$
ویا $4*3 = 8+3$
ویا $4*3 = 11$ میشود.
و به همین قسم: $3*4 =$ ___
$3*4 =$ ___ میشود.

حل: $(2\cdot 3)+4$ ، 10

648. از مطالعه نتیجه شماره چوکات 647 دیده میشود که $4*3 \neq 3*4$ بوده
بنابران عملیه * در S ، ___ نیست.

حل: تبدیلی Commutative

649. فرضاً S . set اعداد تام Integers و عملیه "*" را در S مد نظر بگیرید:

عملیه * در سِت S با شاشِ رابطهٔ ذیل برای تمام $x,y \in S$ تعریف شده:

$$x * y = (x \cdot y) + 3$$

(درحالیکه عملیات: «.» و «+» عبارت از عملیات معمول ضرب و جمع اند.)

درینصورت ما داریم: (1). $2 * 4 = (2 \cdot 4) + 3$

ویا: $2 * 4 =$ ____

بهمین قسم: (2). $4 * 2 = (4 \cdot 2) + 3$

$4 * 2 =$ ____

ما میدانیم که عملیات: «.» و «+» عملیات binary در S اند، درنتیجه برای هر عنصر $x * y$ یک تصویر image یگانه در S موجود میشود.

پس گفته میتوانیم که عملیه * یک ____ در ____ میباشد.

حل: 11 ، 11 ، binary operation ، S

650. از بررسی نتیجه شانه حرکات 649 دیده میشود که در سِت S set اعداد تام عملیه * ، با شاشِ رابطه: $x*y = (x \cdot y) + 3$ تعریف شده است. از طرف دیگر از حسابات ابتدائی ما میدانیم که عملیه ضرب «.» در set اعداد تام تبدیلی commutative است. یعنی: $x \cdot y = y \cdot x$ میباشد. که ازین نتیجه میشود:

$$(x \cdot y) + 3 = (y \cdot x) + 3$$

ویا اینکه $x * y = y * x$.

از روابط فوق دیده میشود که عملیه * در سِت S set اعداد تام یک عملیه binary ____ میباشد.

حل: commutative (تبدیلی)

651. اگر عملیه ⊛ در سِت S set (اعداد تام) طبق آتی تعریف شود: که برای هر $x,y \in S$ ، رابطه: $x*y = x^2+y^2$ موجود گردد.

(درحالیکه «+» عملیه معمولی جمع را افاده میکند.) پس درینصورت:-

$$3 \oplus (-2) = 3^2 + (-2)^2$$
$$= \_\_\_\_\_\_$$

حل: 13

652. از شماره 651: $x \oplus y = x^2 + y^2$ برای تمام $x, y \in S$ درحالیکه S، ست اعداد تام است دیده میشود که (1). را داده:
$x \oplus y = x^2 + y^2$ تکمیل تام ______ . ازطرف دیگر ما میدانیم که عملیه جمع "+" در ست اعداد Integers همیشه commutative بوده، پس ما میتوانیم بنویسیم: $x^2 + y^2 = y^2 + x^2$ برای $\forall x, y \in S$ و یا $x \oplus y = \_\_\_\_\_\_$.
بنابران گفته میتوانیم که عملیه $\oplus$ در ست اعداد تام یک عملیه binary و نیز ______ است.

حل: میباشد، $y \oplus x$، commutative

653*. اگر S ست اعداد تام و عملیه * در S طبق ذیل تعریف شده است: که برای هر $x, y \in S$ ربط: $x * y = x + (2 \cdot y)$ باشد. (درحالیکه + و · عملیات معمولی جمع و ضرب را ارائه میکنند.) ازانیکه عملیات: + و · عملیات binary در S میباشند، بنابرین برای هر $x, y \in S$ نتیجه ی: $x + (2 \cdot y)$ در S یگانه unique میباشد. ازین ادعا میشود که * یک عملیه binary در S میباشد. توسط یک مثال نشان دهید که * تبدیلی commutative در S نمیباشد.

حل: یک مثال عبارت است از:

$$\left.\begin{array}{l} 5*3 = 5+(2\cdot 3) \\ 5*3 = 11 \\ 3*5 = 3+(2\cdot 5) \\ 3*5 = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow 11 \neq 13$$

$5*3 \neq 3*5$ ،

پس تبدیلی نیست.

654^*. اگر یک Set اعداد تام بوده و عملیه $\oplus$ در آن طبق ذیل تعریف شده باشد که برای تمام $x, y \in S$ رابطه :- $x \oplus y = 2 \cdot x \cdot y$ موجود میباشد. درحالیکه عملیه "." عملیه ضرب معمولی را ارائه میکند.

ازانیکه "." یک عملیه binary در سِت است، پس $2 \cdot x \cdot y$ برای تمام $x, y \in S$ یک عنصر یگانه و unique که میباشد، یا بالفاظ دیگر تصویر ویا image $x \oplus y$ در S یگانه است. پس گفته میتوانیم که $\oplus$ یک عملیه binary در سِت میباشد. نشان دهید که $\oplus$ یک عملیه تبدیلی یعنی commutative نیز در سِت میباشد.

حل :- برای هر $x, y \in S$ داریم : $x \oplus y = 2 \cdot x \cdot y$

$y \oplus x = 2 \cdot y \cdot x$

چون "." در سِت تبدیلی است؛ پس $2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot y \cdot x$ بوده و در نتیجه $x \oplus y = y \oplus x$ میشود

بنابران عملیه $\oplus$ در سِت تبدیلی commutative است.

655. یک عملیه binary $*$ در یک set غیرخالی سِت تبدیلی commutative است، درصورتیکه برای تمام ________

حل : $\forall x, y \in S$ رابطهٔ $x * y = y * x$ همیشه موجود باشد.

ط. تجمیعی ویا اتحادی :- Associative

656. فرضاً $*$ یک عملیه binary در یک set غیرخالی سِت باشد، پس درینصورت افاده مانند $x * y * z$ دارای کدام مفهوم نمیباشد. زیرا عملیه "$*$" عبارت از یک mapping از $S \times S$ در سِت بوده و به ________ تطبیق میشود نه به سه‌گانه‌ها یا Triples.

اما افاده : $(x*y)*z$ که از اثر استفاده از استعمال علامه گروپبندی به افاده اولی حاصل میشود دارای یک مفهوم است. درینجا علامه گروپ بندی ویا یکجا کردن آن به طریقهٔ معمول ذیل تعبیر و تفسیر شده میتواند:

یعنی: $x*y$ تصویر (x,y) را تحت عملیهٔ $*$ ارائه مینماید. که درینصورت افادهٔ داخل قوسین یک جوره مرتب که ______ گفته میشود است نشان میدهد، اگر این عنصر را به e نشان دهیم، درینصورت ما نوشته کرده میتوانیم:

$$(x*y)*z = e*z$$

حل: ordered pairs ، یگانه عنصر

657. بهمین قسم داخل قوسین: $(y*z)$ تصویر (y,z) را افاده میکند. اگر ما آنرا به b نشان دهیم درینصورت ما نوشته میتوانیم:

$$x*(y*z) = \_\_\_\_\_\_$$

حل: $x*b$

658. بنابر معلومات که تا حال داریم کدام تضمین موجود نیست که رابطه:

$x*(y*z) =$ ______ باشد.

حل: $(x*y)*z$

659. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $*$ یک عملیه binary در آن باشد. جدول $S\times S$ را تحت عملیهٔ $*$ که مقابل داده شده مطالعه نمائید. از جدول دیده میشود که:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$$(c*b)*d = d*d = a$$
$$c*(b*d) = c*d = b$$

درینصورت دیده میشود که : ________

حل : $(c*b)*d \neq c*(b*d)$.

660 . تعریف : در یک ست غیر خالی که یک عملیه binary * ، انجمنی Associative گفته میشود درصورتیکه برای تمام $x, y, z \in S$ رابطهٔ : $x*(y*z)=(x*y)*z$ عملیه موجود بوده و حقیقت داشته باشد .
در مثال 659 بنتیجه رسیدیم که برای $b, c, d \in S$ در S :
$(c*b)*d \neq c*(b*d)$ بوده ، بنابران عملیهٔ *
در S دارای خاصیت : ________ .

حل : انجمنی Associative نیست .

661 . کلمهٔ انجمن ویا تجمیع ویا "Associate" که بعضی ها برای آن کلمهٔ "اتحادی" "یکجایی" را نیز بکار برده اند یک کلمهٔ تشریحی است ، در افادهٔ :
$x*(y*z)$ کلمهٔ انجمنی چنین تطبیق میشود که : " اولاً عناصر y و z بین هم تحت عملیه * اجتماع و تجمیع گردیده یک عنصر S ، که را تولید نمایند و ششم نتیجهٔ اجتماع آن که (عنصر تولید شده) تحت عملیهٔ * با x اجتماع و تجمیع کند . " اگر کدام عملیه binary فرضاً "*" ، Associative باشد ، درینصورت کدام فرق بوجود نمی آید که گراجتماع بین عنصر اول ودوم صورت گیرد ویا بین عنصر دوم و سوم درتیج شود . یعنی هردو افاده : $(x*y)*z$ و $x*(y*z)$ عین چیز اند .

مسأله حضناه کدام جواب ایجاب نمیکند .

662 . در ست اعداد تام (S) عملیهٔ تفریق "−" را مدنظر بگیرید :
(1) . $5-(3-1)=$ ________ ، (2) . $(5-3)-1=$ ________
(3) . بنابران عملیهٔ تفریق "−" در S انجمنی Associative ________ .

حل : (1) . 3 ، (2) . 1 ، (3) . نیست

663- در set اعداد تام فرض کنید که عملیه binary ضرب "٠" معمولی را در نظر گیرید؛ از معلومات سابقه میدانیم که برای تمام $x,y,z \in S$ رابطه: $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ عملیه موجود است. بنابران عملیه ضرب "٠" در S ———— .

حل: انجمنی ویا Associative میباشد.

تبصره: قبلاً تذکر داده شد در یک set ای که * یک عملیه binary در آن باشد افاده: $x*y*z$ در set مذکور دارای کدام مفهوم نمیباشد اما در صورتیکه عملیه * دارای خاصیت انجمنی Associative باشد درینصورت:

حقیقت (1) ... $x*y*z=(x*y)*z$ ،

ویا (2) ... $x*y*z=x*(y*z)$ ... قبول میکنیم.

زیرا در صورتیکه عملیه binary "*" مورد بحث ما انجمنی Associative باشد درینصورت جای کدام شک و تردید ambiguity نیست که هر دو تعبیر فوق عین افاده: $x*y*z$ را ایضاح میکند.

در صورتیکه عملیه binary * مورد بحث ما انجمنی نباشد درینصورت ما میتوانیم که با یک قرارداد کدام تعبیر و معنی به افاده: $x*y*z$ اتخاذ نمایم. چنانچه با یک قرارداد میتوانیم که افاده $x*y*z$ را به معنی: $(x*y)*z$ تعبیر کنیم. چنانچه پیروی ازین شیوه در اجرای عملیه تفریق در set اعداد Reals معمول است. که بطور مثال: افاده: $8-3-5$ به افاده: $(8-3)-5$ تعبیر میشود، اما تعبیر افاده: $8-3-5$ به افاده: $8-(3-5)$ قابل قبول نیست.

664- عبارت ذیل را تکمیل کنید: یک عملیه binary * در یک set، S انجمنی است، در صورتیکه اگر و اگر ———— رابطه: ———— همیشه حقیقت داشته باشد.

حل: برای: $\forall x,y,z \in S$ - $(x*y)*z=x*(y*z)$

• 665* اگر $S=\{a,b\}$ مجموعه، binary عملیه $\oplus$ طوریکه در جدول توضیح شده در نظر بگیرید:
آیا عملیه $\oplus$ Commutative است؟

$\oplus$	a	b
a	a	b
b	b	a

حل: بلی.

• 666* فرض کنید S یک set غیرخالی و + یک عملیه binary در آن باشد، طوریکه برای تمام $a,b \in S$ رابطهٔ $a+b=b+a$ حقیقت داشته باشد، پس درینصورت عملیه + یک عملیه ______ در S میباشد.

حل: تبدیلی (Commutative)

• 667* اگر S یک set و + یک عملیه binary در آن باشد طوریکه برای $\forall a,b,c \in S$ رابطهٔ $a+(b+c)=(a+b)+c$ عملیه صحیح باشد، درینصورت گفته میشود که عملیه binary + در S ______ است.

حل: Associative

• 668* فرض کنید S – set اعداد تام مثبت و عملیه * توسط رابطهٔ ذیل در S تعریف شود: $x*y=(2\cdot x)+y$. ما دیدیم که عملیه * در S – binary است، حال افادهٔ: $(3*2)*5$ را در نظر بگیرید. که درین افاده قوسین: $(3*2)$، تصویر و یا image $(3,2)$ را تحت عملیه * افاده میکند، که نتیجهٔ آن با 5 تحت عملیه * قرار میگیرد. اولتر ما تصویر $(3,2)$ را طبق ذیل بدست میآوریم: برای $x=3$ و $y=2$ ما داریم:

$$x*y=(2\cdot x)+y$$
$$3*2=(2\cdot 3)+2$$

$3*2 = \_\_\_\_$

بهمین قسم: $(3*2)*5 = 8*5$

$= (2\cdot 8)+5$

$= \_\_\_\_$

حل: 8 ، 21

669 ∙ فرضاً کنید set اعداد تام بوده و عملیه * در آن طبق افاده ذیل تعریف شود:
برای $\forall x,y,z \in S$ رابطه: $x*y = 2x+y$ همیشه صحیح باشد.
پس درینصورت افاده: $(1*3)*4$ چنین ساده میشود:

$1*3 = 2\cdot 1 + 3$

پس: $1*3 = \_\_\_\_$

بهمین قسم: $(1*3)*4 = 5*4$

$= 2\cdot 5+4$

ویا $(1*3)*4 = \_\_\_\_$

حل: 5 ، 14

670 ∙ اگر S، set اعداد تام بوده و برای تمام $x,y,z \in S$ عملیه * در یک روی افاده: $x*y=(2x)+y$ تعریف شده باشد، درینصورت افاده: $3*(2*5)$ چنین تعبیر میشود که 3 با تصویر $(2,5)$ تحت عملیه * قرار میگیرد، پس واضح است که اولاً تصویر افاده: $2*5$ را بدست آریم، که چنین حل میشود،

$2*5 = 2\cdot 2 + 5$

$2*5 = 9$

پس $3*(2*5) = 3*9$

ویا $3*9 = 2\cdot 3+9$

ویا $3* = 15$

$\therefore\ 3*(2*5) = 15$

شما نتیجهٔ رابطه: $1*(3*4)$ را بدست آرید.

حل:

$$3*4 = 2\cdot3+4$$
$$3*4 = 10$$
$$1*(3*4) = 1*10$$
$$1*10 = 2\cdot1+10$$
$$= 12$$
$$\therefore\ 1*(3*4) = 12$$

671. با استفاده از اشکال عملیه binary * مربوط شکل 669 و 670 دریافتیم

که: $(1*3)*4 = 14$

و: $1*(3*4) = 12$

چون $(1*3)*4 \neq 1*(3*4)$

بنابراین گفته میتوانیم که عملیه binary * یک عملیهٔ ________ در S نیست.

حل: Associative

672.* تا حال دو خاصیت یک عملیه binary * را در یک set توضیح نمودیم:

(1) عملیه * تبدیلی است در صورتیکه: ________

(2) عملیه * اتحادی است در صورتیکه: ________

حل: (1). برای $\forall x,y \in S$ رابطه: $x*y = y*x$ همیشه حقیقت داشته باشد.

(2). برای $\forall x,y,z \in S$ رابطه: $x*(y*z) = (x*y)*z$ همیشه حقیقت داشته باشد.

673. عملیه binary «+» در set اعداد حقیقی Reals (S) تبدیلی است،

زیرا: ________.

حل: برای $\forall x,y \in S$ رابطه: $x+y = y+x$ همیشه حقیقت است.

674. عملیه "+": binary در Set Reals (S)، انجمنی است.
زیرا: ____

حل: برای ست S، $\forall x,y,z \in S$ رابطهٔ: $x+(y+z)=(x+y)+z$ حقیقت است. عملیه موجود بوده و دارای

675. فرضاً S اعداد نسبتی rational بوده و عملیه * که توسط افاده: $x*y = 2\cdot x\cdot y$ برای $\forall x,y \in S$ تعریف شده است. در اینجا "·" عملیه معمولی ضرب را ارائه میکند. این معلومات را کاپی و نقل کرده که برای مسایل 676 الی 680 بکار خواهید برد.

این مسألهٔ جواب ایجاب نمیکند.

676. چون عملیه ضرب در Set اعداد نسبتی یک عملیه binary است، بنابران برای $\forall x,y \in S$، $2xy$ یک عنصر ____ که set S میباشد. چون $x*y = 2\cdot x\cdot y$ بوده، حالانکه $2xy$ یک عنصر ____ که است، بنابرین $x*y$ دارای یک image ____ در S بوده، پس گفته میتوانیم که * یک عملیه ____ در S میباشد.

حل: یگانه، یگانه، یگانه (unique)، binary ____

677. نتیجهٔ افادهٔ: $3*\frac{2}{3}$ را بنابر استعمال عملیه binary * که در مسایل 675 و 676 ذکر شده بدست آرید.

حل:

$$x*y = 2\cdot xy$$
$$3*\frac{2}{3} = 2\cdot 3\cdot \frac{2}{3}$$
$$3*\frac{2}{3} = 4$$

678. نتیجهٔ: $\frac{2}{3}*(\frac{-5}{7})$ را بنابر استعمال تعریف * در مسألهٔ 675 حاصل کنید.

حل :
$$\frac{2}{3} * \left(\frac{-5}{7}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{7}\right) = -20/21$$

679. ثابت کنید که * بنابر تعریف : $x*y = 2 \cdot x \cdot y$ طوریکه $x, y \in S$ باشند تبدیلی است.

حل :
$$x*y = 2xy$$
$$y*x = 2yx$$
چون $2xy = 2yx$ است، پس $x*y = y*x$ بوده، لذا * تبدیلی است.

680. ثابت کنید که برای $\forall x, y, z \in S$ عملیه * مربوط شده 679 اتحادی است.

حل :
$$(x*y)*z = (2xy)*z = 2(2xy)z$$
$$(x*y)*z = 4xyz \quad \ldots\ldots (1) \text{ or}$$
$$x*(y*z) = x*(2yz) = 2x(2yz)$$
$$x*(y*z) = 4xyz \quad \ldots\ldots (2) \text{ or}$$
چون طرف راست (1) و (2) عین چیز است.

لذا :
$$(x*y)*z = x*(y*z)$$
با ثبوت رابطه آخر گفته میتوانیم که * در سټ، Associative،

681. اگر S ست اعداد مثبتی بوده و عملیه ⊕ در ست طبق افاده : $x \oplus y = x + (2 \cdot y)$ تعریف شده باشد، درحالیکه + و . علی الترتیب عملیات جمع و ضرب معمولی را ارائه میکنند. مسؤلات فوق را نقل در کاپی کرده برای حل مسایل 682 الی 684 بکار ببرید.

نتیجه افاده $\frac{3}{5} \oplus 7$ را بدست آرید.

حل :
$$x \oplus y = 3/5 \oplus 7 = 3/5 + (2 \cdot 7) = 14\frac{3}{5}$$

682. چون عملیات: «+» و «.» شامل 681 عملیات binary در ست S میباشند. بنابران برای $\forall x,y \in S$ ارائه $x+(2y)$ یک عنصر ——— در ست S میباشد. پس برای هر $x,y \in S$ ارائه: $x \oplus y$ یک عنصر یگانه در ست موجود است. بنابران عملیه $\oplus$ یک عملیه ——— در ست میباشد.

حل: یگانه unique، binary

6. ثابت کنید که $\oplus$ تبدیلی و (Commutative) نیست.
(برای اثبات این مطلب آوردن یک مثال که عدم تبدیلی را نشان دهد کافی است.)

حل: در نظر یک مثال عدم تبدیلی: $3 \oplus 4 = 3+(2\cdot 4)$
$3 \oplus 4 = 11$ و $4 \oplus 3 = 4+(2\cdot 3) = 10$
چون: $3 \oplus 4 \neq 4 \oplus 3$ بنابران $\oplus$ Commutative نیست.

6. ثابت کنید که $\oplus$ در ست انجمنی Associative نیست.
(برای حل این مطلب نشان دادن یک مثال که عدم انجمنی را در $\oplus$ نشان دهد کافی است.)

حل: اینست یک مثال:

$$3 \oplus (4 \oplus 5) = 3 \oplus [4+(2\cdot 5)]$$
$$= 3 \oplus 14 = 3+(2\cdot 14) = 31$$
$$\therefore 3 \oplus (4 \oplus 5) = 31$$
$$(3 \oplus 4) \oplus 5 = [3+(2\cdot 4)] \oplus 5$$
$$= 11 \oplus 5 = 11+(2\cdot 5) = 21$$
$$\therefore (3 \oplus 4) \oplus 5 = 21$$

چون $31 \neq 21$ بوده
پس $3 \oplus (4 \oplus 5) \neq (3 \oplus 4) \oplus 5$ میباشد
بنابران $\oplus$ در ست انجمنی یا Associative نیست.

c. Identity Element :- عنصر عینیت .c

685. بعضی وقت یک عنصر مخصوص در یک set (فرض کنید S) موجود میباشد که اگر با هر یک از عناصر دیگر set موصوف تحت یک عملیهٔ binary داده شده قرار گیرد کدام تأثیری بالای عناصر مذکور وارد نمیشود. بطور مثال اگر در set اعداد حقیقی Reals عملیهٔ binary جمع "+" در آن مدنظر گرفته شود، دیده میشود که برای تمام اعداد حقیقی x رابطه ذیل موجود است:

• $0+x=$ ___ و $x+0=$ ___

حل: x ، x

686. تعریف: یک set ، S که موصوف در یک عملیهٔ binary $\odot$ را در کدام set مدنظر بگیرید. اگر یک عنصر فرضاً e در کدام set S موجود باشد طوریکه برای هر $x \in S$ رابطه:- $e \odot x = x$ و یا $x \odot e = x$ همیشه حقیقت داشته باشد پس درینصورت گفته میشود که e عبارت از عنصر وحدت Unity و یا عنصر عینیت* Identity ، کدام set S میباشد.

بطور مثال: اگر S عبارت از set اعداد تام بوده و عملیه binary در S عبارت از عملیه جمع "+" باشد، درینصورت ما میدانیم که برای هر عدد تام p رابطهٔ: $0+p=p$ و یا $p+0=p$ همیشه دارای حقیقت است. بنابر آن گفته میشود که "0" و یا صفر ___ در set اعداد تام عملیه جمع "+" میباشد.

حل: عنصر عینیت identity element و یا عنصر وحدت Unity element

* بعضی ها Identity Element را بنام عنصر بی اثر و یا عنصر خنثی neutral element نیز یاد میکنند.

687. ثبوت و اثبات خواهیم کرد که یک set تحت یک عملیه binary بیشتر از یک عنصر عینیت را دارا شده نمیتواند. درصورتیکه کدام عنصر عینیت Identity در یک set موجود باشه ما آنرا بنام عینیت Identity همان set موصوف تحت عملیه binary مذکور (ویا عنصر عینیت عملیه مذکور) یاد میکنیم. فرضاً S، set اعداد تام را نشان دهد و عملیه binary مطلوب درینجا عبارت از ضرب معمولی باشد. ما میدانیم که برای هر $x \in S$، عدد 1 در S موجود است طوریکه: $1 \cdot x = x$ ویا $x \cdot 1 = x$ میشود. بنابران: 1 عبارت از ——— S set را تحت عملیه ضرب، تشکیل میدهد.

حل: Identity element

688. عنصر عینیت identity یک set، S را تحت یک عملیه binary فرضاً "*" بعضی‌ها بنام عنصر "خنثی" ویا بی اثر neutral element نیز یاد میکنند. زیرا: زمانیکه این عنصر با کدام عنصر دیگر a، set مذکور تحت عملیه قرار میگیرد، کدام تأثیری (ویا اثری) بالای عنصر a وارد نمیکند.
بطور مثال، اگر set اعداد نسبتی را تحت عملیه ضرب معمولی مطالعه نمایم، دیده میشود که عدد 1 در set اعداد نسبتی تحت عملیه ضرب بی اثر است، زیرا: درصورتیکه 1 با هر عدد نسبتی دیگر فرضاً a ضرب شود، بالای آن (a) کدام تأثیری وارد نمیکند، پس ما نوشته میتوانیم:
$a \cdot 1 = 1 \cdot a =$ ———

حل: a

689*. اگر S یک set که حاوی عملیه binary "*" بوده و بالعوض یک عنصر $e \in S$ موجود باشد که برای هر $x \in S$ رابطه: $x * e = x$ ویا ——— بوجود آرد، پس گفته میشود که e عنصر ——— S set میباشد؟

حل: $e * x = x$، identity

690. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ بوده که دارای یک عملیه binary * میباشد، فرضاً S، دارای عنصر عینیت Identity ، b باشد. درینصورت شرط دشتن جدول را که دارای عنصر b است خانه پری نمائید.

*	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

حل :

*	a	b	c	d
a		a		
b	a	b	c	d
c		c		
d		d		

691. اگر $S=\{a,b,c\}$ بوده عملیه binary * طبق جدول مقابل در S تعریف شده:- از خلاصه جدول ما داریم:

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	c

توجه فرمائید: $a*b=a$ و $b*a=a$

$b*b=b$ و $b*b=b$

$c*b=c$ و $b*c=c$

بنابر جدول دیده میشود که —— عنصر عینیت identity است در S set

حل : b

692. اگر $S=\{0,1\}$ بوده و عملیه + یک عملیه binary در S است که بنابر جدول مقابل تعریف شده است. از جدول دیده میشود:

*	0	1
0	0	0
1	0	1

$0+1=0$ و $0+0=0$

$1+0=0$ و $1+1=1$

بنابران برای هر $x \in S$ ، $1+x=x+1=x$ بوده از گفته میتوانیم که یک عنصر Identity : $S=\{0,1\}$ = که میباشد

حل : 1

593. به Panel-7 مراجعه نمائید. آیا که دارای کدام یک عنصر Identity تحت عملیه ضرب پرمیوتشن که Permutation Multiplication میباشد؟ درصورت که دارا باشد آن عنصر کدام است؟

حل : a است زیرا: برای $\forall x \in S$ داریم، $a \cdot x = x \cdot a = x$ ؛

594. فرضاً S که، set اعداد تام حقیقی بوده و عملیه معمولی جمع "+" را در نظر بگیرید. آیا که دارای کدام عنصر عینیت Identity تحت عملیه + بوده میتواند؟ اگر میتواند و آن عنصر کدام است؟

حل : بلی، 0 است، متوجه گردید صفر عدد تام حقیقت است.

595. اگر $S=\{A,B,C\}$ که بوده در حالیکه $A=\Phi$ ، $B=\{1,2\}$ و $C=\{1,2,3\}$ باشد، عملیه U را در نظر گرفته و جدول مقابل را خانه پری کنید.

U	A	B	C
A	A	B	C
B	B		
C			

حل :-

U	A	B	C
A	A	B	C
B	B	B	C
C	C	C	C

696 • بنابر جدول که تشکیل نموده اید – گفته میتوانید که آیا $\cup$ یک عملیه binary در S میباشد؟

حل : بلی ، زیرا : برای $\forall X, Y \in S$ ؛ $X \cup Y$ عنصر یگانهٔ S است.

697 • از جدول متشکله عملیه $\cup$ – گفته میتوانید که آیا $\cup$ تبدیلی در S میباشد یا خیر؟

حل : بلی ، زیرا : برای $\forall X, Y \in S$ رابطهٔ $X \cup Y = Y \cup X$ همیشه موجود است.

698 • از جدول متشکله $\cup$: آیا S دارای عنصر identity تحت عملیه $\cup$ میباشد؟ اگر است کدام است؟

حل : بلی A دیا ϕ – زیرا : $\forall X \in S$ رابطهٔ :–

$X \cup A = A \cup X = X$ و $X \cup \phi = \phi \cup X = X$ همیشه موجود است.

699 • اگر $S = \{A, B, C, D\}$ بوده در حالیکه : $A = \phi$ ، $B = \{a, b\}$ ، $C = \{a, b, c\}$ و $D = \{c\}$ باشد ، درینصورت :

$$A \cap B = A$$
$$D \cap C = D$$
$$B \cap C = B \ .$$

جدول $\cap$ ، data ، S را تکمیل کرده و آنرا برای حل تمرین بعدی نگهدارید.

حل :

$\cap$	A	B	C	D
A	A	A	A	A
B	A	B	B	A
C	A	B	C	D
D	A	A	D	D

700. به جدول مسأله 699 ملاحظه کرده دگوئید که آیا $\cap$ یک عملیه binary میباشد ویا خیر؟

> حل: بلی.

701. باشاش جدول خوق آیا $\cap$ Commutative درکد بوده میتوانند؟

> حل: بلی Symmetry تناظر جدول را باشاش خط قطری آن ملاحظه فرمائید.

702. باشاش جدول آیا $\cap$ دارای کدام عنصر عینیت identity میباشد؟ ویا خیر؟ درصورتیکه باشد آن عنصر کدام است؟

> حل: بلی، آن عنصر عبارت از C است، که برای هر $x \in S$ رابطه $x \cap C = C \cap x = x$ همیشه موجود است.

703. یک set دارای بیشتر از یک عنصر عینیت identity (درصورتیکه در set موجود باشد) بوده نمیتوانند.

ثبوت:

فرضاً یک set دارای دو عنصر عینیت identity: e_1 و e_2 تحت یک عملیه binary: $*$ باشد. درینصورت پس برای هر $x \in S$ روابط ذیل موجود شده میتوانند:

$$e_1 * x = x * e_1 = x \quad \ldots (1)$$

$$e_2 * x = x * e_2 = x \quad \ldots (2)$$

حال تعامل e_1 و e_2 را تحت عملیه $*$ مدنظر میگیریم: اگر e_1 بحیث عنصر عینیت درنظر گرفته شود پس درینصورت ما داریم:

$$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2 \quad \ldots (3)$$

اگر e_2 بحیث یک عنصر عینیت تصور گردد درینصورت ما داریم که:

$$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1 \quad \ldots (4)$$

از مقایسه نتایج روابط: (3) و (4) نتیجه میشود که: ـــ = ـــ میباشد.

حل: e_1 ، e_2

704. از اینکه یک set بیشتر از یک عنصر عینیت Identity را دارا شده نمیتوانند، از عنصر مذکور را در زبان انگلیسی توسط ارتیکل The یعنی بدون دو: The Identity Element توصیف میشود. عنصر عینیت Identity، set اعداد تام جفت Even Integers تحت عملیه جمع کدام است؟

حل: صفر

705. اثبات وجود عنصر identity بجدا اگر یک (در صورتیکه موجود باشد) تک تک عملیه binary داده شده توسط جدول مربوطه عملیه خوب تعیین شده میتوانند؛ بطور مثال: اگر $S=\{a,b,c,d\}$ بوده و عملیه binary "*" توسط جدول مقابل تعریف شده است. اگر ما بخواهیم که کدام عنصر را فرضاً b را بحیث عنصر identity S قرار دهیم، پس درینصورت قسمت سطر و ستون b را در جدول طوری خانه پری میکنیم که b شرط یک عنصر عینیت را دارا گردد. پس اگر بخواهیم که set مفروض دارای کدام عنصر عینیت دیگر فرضاً d نیز گردد، درینصورت برای خانه پری کردن سطر و ستون مربوط d، جدول به مشکلات برخورد میکنیم، آن مشکلات کدام است؟

*	a	b	c	d
a		a		
b	a	b	c	d
c		c		
d		d		

حل: دیده میشود که یک یک خانه مربوط سطر و ستون d پر شده طوریکه: $d*b=d$ و $b*d=d$ میگردد.

*	a	b	c	d
a		a		a
b	a	b	c	d
c		c		
d	a	d	c	d

706. میدانیم که یک set بیشتر از یک عنصر عینیت را تحت کدام عملیه binary دارا شده نمیتوانند.

•	0	1
0	0	1
1	1	0

به جدول داده شده مقابل ملاحظه کرده آیا در جدول موضح کدام عنصر identity موجود است؟ و یا نیست؟ در صورتیکه باشد آن عنصر کدام است؟

حل: بلی! آن عنصر عبارت از صفر "0" است.

*707. یک set غیر خالی S را که دارای عملیه binary $\odot$ است مد نظر گیرید:

(1). اگر برای $\forall x,y \in S$ رابطهٔ: $x \odot y = y \odot x$ همیشه دارای حقیقت باشد گفته میشود که عملیه $\odot$ یک عملیه binary ——— در S است.

(2). اگر برای $\forall x,y,z \in S$ رابطهٔ $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$ همیشه دارای حقیقت باشد، درینصورت عملیه $\odot$ یک عملیه binary ——— در S میباشد.

(3). اگر یک عنصر e در S موجود باشد طوریکه برای هر $x \in S$ رابطهٔ: $x \odot e = e \odot x = x$ باشد، پس بنام عنصر ——— S تحت $\odot$ یاد میشود.

حل: (1). Commutative ، (2). Associative ، (3) Identity

708. اگر $S=\{a,b,c\}$ و * یک عملیه binary در S طوریکه در جدول ذیل تعریف شده است باشد:

*	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

(1). آیا * Commutat. میباشد؟

(2). آیا * Associative میباشد؟

(3). آیا S تحت * دارای یک identity element میباشد؟

حل: (1). نه خیر: $a*b \neq b*a$ ، (2). نه خیر ، (3) نمیباشد.

اگر که، set اعداد Rationals نسبتی را نشان دهد و عملیه *
در آن بنابر روابط : $x * y = 2 \cdot x \cdot y$ تعریف شده باشد.
ما قبلاً نشان دادیم که * یک عملیه binary، تبدیلی را
Commutative، انجمنی را Associative در Q میباشد.
ثابت کنید که $\frac{1}{2}$ عبارت از عنصر عینیت یا identity در Q
میباشد.

ثبوت :- برای هر $x \in Q$ داریم :

$$\frac{1}{2} * x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x$$
$$\frac{1}{2} * x = x$$

و همچنان :

$$x * \frac{1}{2} = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$
$$x * \frac{1}{2} = x$$

چون $x * \frac{1}{2} = x$ و هم $\frac{1}{2} * x = x$ میشود،
بنابراین $\frac{1}{2}$ عنصر identity عملیه * در Q میباشد.

امتحان پنجم : Test-V

1. این تعریف را تکمیل کنید : اگر S یک set غیر خالی باشد، ارتباط یک عملیه binary در S عبارت است از : ____________

2. این تعریف را تکمیل کنید : یک عملیه binary "*" در یک set غیر خالی S، تبدیلی commutative است در صورتیکه : ____________

3. فرضاً "*" یک عملیه binary در یک set غیر خالی S باشد
عملیه * انجمنی Associative در S میباشد در صورتیکه
و اگر ____________ باشد.

4. فرضاً "*" یک عملیه binary در S باشد، پس اگر یک عنصر e
در S موجود باشد طوریکه : ____________ صدق کند
گردد، پس e بنام عنصر عینیت، identity تحت * یاد میشود.

5. (1) آیا عملیه جمع "+" در set اعداد تام یک عملیه binary میباشد؟
(2) آیا عملیه جمع "+" در set اعداد تام یک عملیه تبدیلی Commutative میباشد؟
(3) آیا عملیه جمع "+" در set اعداد تام یک عملیه Associative انجمنی میباشد؟
(4) آیا در set اعداد تام تحت عملیه جمع یک عنصر عینیت موجود است؟ و یا نه؟ کدام است؟

6. set اعداد تام را تحت عملیه معمولی ضرب "." مورد مطالعه قرار دهید:
(1) آیا ضرب "." یک عملیه binary در set اعداد تام شده میتواند؟
(2) آیا "ضرب" در set تام Commutative بوده میتواند؟
(3) آیا ضرب در set تام انجمنی Associative بوده میتواند؟
(4) آیا یک عنصر identity تحت عملیه "." در set تام موجود است؟
و یا نیست؟ در صورتیکه موجود باشد، کدام است؟

7. آیا عملیه معمولی تقسیم "÷" در set اعداد تام یک عملیه binary شده میتواند؟

8. آیا عملیه تقسیم "÷" در set اعداد نسبتی یک عملیه binary بوده میتواند؟

9. در set اعداد منفی تام: (1) آیا عملیه معمولی جمع "+" یک عملیه binary شده میتواند؟
(2) آیا یک عنصر عینیت تحت عملیه جمع "+" در set مذکور موجود است؟

10. اگر S، set تمام subsetهای set: {a,b,c} باشد:
(برای حل مسئله یک جدول قسمی ∪ را شکل گیرید و از آن استفاده نمایید.)
آیا عملیه اتحاد و یا union "∪":
(1) یک عملیه binary در S میباشد؟
(2) یک عملیه Commutative در S میباشد؟
(3) یک عملیه Associative در S میباشد؟
(4) دارای یک عنصر identity در S میباشد؟ و یا نه؟
اگر میباشد آن عنصر کدام است؟

d. عنصر معکوس Inverse Element:

.710 بملاحظه از Panel-10 دیده میشود که عنصر عینیت Indentity باز عملیه «٠» عبارت از a است. اگر دقت شود دیده میشود که برای هر که $x \in S$ محض یک عنصر که $y \in S$ در آن موجود است طوریکه: $y \cdot x = a$ وهم $x \cdot y = a$ میگردد.
چنانچه اگر عنصر c را در آن در نظر بگیرید، خواهید دید که:
$c \cdot b = a$ و $b \cdot c = a$ و بهمین قسم برای عنصر f خواهید دید که:
$f \cdot f = a$ و ___ = ___ $\cdot f$ حاصل میشود.

حل: f ، a یعنی: $f \cdot f = a$

.711 فرضاً S. set اعداد تام را نمایش داده و عملیهٔ معمولی جمع "+" را در آن در نظر بگیرید. میدانیم که عنصر identity عملیه جمع در set اعداد تام عبارت از صفر است. علاوه بر آن دیده میشود که برای هر عنصر که $x \in S$ یک عنصر که $y \in S$ موجود است طوریکه: $x + y = 0$ وهم $y + x = 0$ گردد.
بطور مثال عدد که $-3 \in S$ را در نظر بگیرید دیده میشود که: $-3 + \_\_ = 0$
وبهمین: $\_\_ + (-3) = 0$ میشود.

حل: 3 ، 3

.712 اگر که set اعداد Rationals نسبتی غیر صفر بوده و عملیهٔ ضرب «٠» در آن در نظر گرفته شود، درینصورت 1 عنصر عینیت identity تحت عملیه «٠» در که میباشد. حال دیده میشود که برای هر عنصر که $x \in S$ یک عنصر که $y \in S$ موجود است طوریکه: $x \cdot y = 1$ وهم $y \cdot x = 1$ گردد.
بطور مثال: $(-3/8) \cdot \_\_ = 1$ و $\_\_ (-3/8) = 1$ میشود.

حل: $8/3$ ، $8/3$

713. تعریف: یک set S و یک عملیه binary "$*$" را که دارای عنصر عینیت identity e است داده شده طوریکه برای هر $x \in S$ یک $y \in S$ موجود است که رابطه: $x*y=y*x=e$ تحقیق کند، پس y را عنصر معکوس یا inverse element عنصر x تحت عملیه "$*$" مینامند.

بطور مثال: اگر که، set اعداد تام بوده و عملیه "+" در آن درنظر گرفته شود درینصورت: عنصر عینیت identity عملیه "+" عبارت از ____ بوده و عنصر معکوس 5 عبارت از 5- میباشد.
زیرا: $5+(-5)=0$ و $(-5)+5=0$ میشود. همین قسم عنصر معکوس inverse 3- عبارت از ____ است،
زیرا: ____.

حل: 0 ، 3 ، زیرا: $3+(-3)=(-3)+3=0$

714. اگر set اعداد نسبتی rationals تحت عملیه ضرب "." درنظر گرفته شود دیده میشود که عنصر identity در آن 1 بوده و عنصر inverse 3- تحت عملیه "." در آن عبارت از ____ بوده زیرا:
____ میشود.

حل: $-\frac{1}{3}$ ، $(-3)\cdot(-\frac{1}{3})=(-\frac{1}{3})(-3)=1$

715. توجه فرمائید: عنصر معکوس inverse یک عنصر x یک set مفروض تحت یک عملیه binary داده شده عبارت از یک عنصر است که اگر با عنصر x تحت آن عملیه قرار گیرد از نتیجه آن عنصر عینیت identity حاصل گردد. مثلاً در set اعداد نسبتی

عنصر معکوس inverse، 1/3 تحت عملیهٔ ضرب عبارت از 3 است، زیرا:
$(1/3)\cdot(3)=(3)\cdot(1/3)=1$ میشود،
لیکن عنصر معکوس inverse 1/3 تحت عملیهٔ جمع عبارت از ــــ میشود.
زیرا: ــــــــــ

حل: $-\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}+(-\frac{1}{3})=(-\frac{1}{3})+\frac{1}{3}=0$

716. اگر که set اعداد تام تحت عملیهٔ جمع باشد:
(1). عنصر inverse 7 را تحت عملیهٔ جمع بدست آرید.
(2). عنصر inverse 7 را تحت عملیهٔ ضرب حاصل کنید.

حل: -7 .(1) ، (2). در set اعداد تام عنصر معکوس 7 تحت ضرب موجود نیست.

717. در set اعداد نسبتی عنصر معکوس inverse، 7 تحت عملیهٔ ضرب عبارت از ــــ میباشد، زیرا:

حل: $\frac{1}{7}$ ، $(1/7)\cdot7=7\cdot(\frac{1}{7})=1$

718. توجه: درصورتیکه مطلب شما تعیین کردن عنصر معکوس inverse کدام عنصر $x\in S$ باشد، در اول ضروریست که شما موجودیت عنصر عینیت identity آن عملیهٔ مورد بحث را در کدام set S جستجو دریافت نمائید. بالفرض عنصر عینیت identity در یک set موجود که تحت یک عملیهٔ داده شده فرضاً * موجود باشد. اگر این عنصر را به j نشان دهیم، پس درینصورت عنصر معکوس inverse x تحت عملیهٔ * دیگر عبارت از یک عنصر y، که set S است (درصورتیکه موجود باشد) طوریکه، ــــــــ میشود.

حل: $x*y=y*x=j$

719. بنابر جدول داده شده عملیه * عنصر inverse عنصر b را حاصل کنید. (بروشنی موجودیت عنصر identity و تعیین آن تحت عملیه * شرط ضمنی سوال است. چه بدون تعیین عنصر عینیت ما نمیتوانیم که عنصر معکوس b را تعیین نمائیم.) درینصورت بجدول فوق نظر نموده عنصری را دریابید که رابطهٔ: $x * \_\_ = \_\_ * x = x$ برای هر $x \in S$ تکمیل کند. بعدازان عنصر Inverse، b را بدست آرید.

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

حل: a، a، عنصر معکوس b عبارت از c است: $c*b=b*c=a$

720. اگر S، set اعداد Reals را که عنصر عینیت identity در آن تحت عملیه ضرب «·» عبارت از 1 است نشان دهد. حال اگر عنصر صفر «0» را در set اعداد حقیقی reals در نظر بگیریم دیده میشود که 0 در S دارای ... نیست زیرا کدام عنصر x در S موجود نیست که: $x\cdot 0 = 0\cdot x = 1$ گردد.

حل: دارای عنصر معکوس inverse نیست.

721. اگر S، set اعداد حقیقی بوده برای تمام عناصر $x\neq 0$ یک عنصر معکوس $\frac{1}{x}$ تحت عملیه ضرب موجود شده میتواند. زیرا:

حل: برای هر $x\in S$ در حالیکه $x\neq 0$ باشد رابطهٔ: $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1$ حقیقت دارد.

722. اگر مطلب از مطالعهٔ عنصر معکوس inverse، x تحت عملیه ضرب در یک set باشد در نهایت عنصر inverse، x را معمولاً به x^{-1}

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

ارائه مینمایند . پس درصورت اگر x یک عنصر کدام set که «$\cdot$» یک عملیه binary در S باشد :
درصورت وجود عنصر (e) identity تحت عملیهٔ «$\cdot$» در S، عنصر معکوس inverse x عبارت از $x^{-1} \in S$ میباشد، طوریکه رابطه $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ را صدق تحقیق میکند .
از جدول فوق مشاهده میرسد که عنصر عینیت عملیه «$\cdot$» در جدول عبارت از a است . در همین قسمت دیده میشود که عنصر معکوس inverse b عبارت از c است ، زیرا : $b \cdot c = c \cdot b = a$ میشود .
بنابر عمدهٔ گذارش notation برای عنصر inverse b میتوانیم بنویسیم : $b = c^{-1}$ میباشد ، به همین عنصر معکوس b ، inverse عبارت از ___ بوده ، زیرا : ___ = ___ = ___ میشود و با نوشته میتوانیم که : $b^{-1} =$ ___ .

حل : c ، $b+c = c+b = a$ ، c

.723 بملاحظه از Panel-6 دیده میشود که عنصر عینیت identity عبارت از R_1 میباشد . R_{10} را مد نظر بگیرید : دیده میشود که :

$$R_{10} \cdot R_{19} = R_{19} \cdot R_{10} = R_1$$

بنابران : $R_{10}^{-1} =$ ___ میشود .

حل : R_{19}

.724 اگر S ، set اعداد نسبتی rationals باشد . 1 بنابر عملیه ضرب عنصر identity ، S میباشد ، در صورت عنصر inverse 7 عبارت از $1/7$ میباشد . زیرا : $7 \cdot (\frac{1}{7}) = (\frac{1}{7}) \cdot 7 = 1$

(1). 3^{-1} را بدست آرید.

(2). $(-5)^{-1}$ را حاصل نمائید.

(3). 0^{-1} را بدست آرید.

حل: $\frac{1}{3}$ ، $-\frac{1}{5}$ ، وجود ندارد.

725. اگر $S=\{1,-1,i,-i\}$ باشد، جدول که تحت عملیه ضرب مانند شکل مقابل تکمیل شده است.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

عنصر عینیت در جدول مذکور عبارت از 1 است. عنصر معکوس 1 عبارت است از: $1\cdot1=1\cdot1=1$ بوده است: $1^{-1}=1$ میباشد. بهمین قسم عنصر inverse -1 عبارت است از: $(-1)\cdot(-1)=(-1)\cdot(-1)=1$

بنابران: $-1^{-1}=-1$ میباشد.

چون: $i\cdot\_\_\_=\_\_\_\cdot i=1$ میبود.

بنابران: $i^{-1}=\_\_\_$ میباشد.

حل: $-i$ ، $-i$ ، $-i$

726. تعریف عنصر عینیت identity را تحت یک عملیه binary "*" ، بخاطر بیاورید. و بخاطر خواهید داشت که فقط یک عنصر identity تحت یک عملیه binary در یک set موجود شده میتواند و بس. بطور مثال عنصر identity در set اعداد شبتی تحت عملیه جمع "+" عبارت از عنصر ___ است، که وجود آن در set شبتی یگانه است.

حل: "0" یا zero

727. ما میدانیم که محض یک عنصر عینیت identity تحت یک عملیه binary داده شده در یک set موجود شده میتواند نه بیشتر از یک. اما طوریکه در امثال فوق مطالعه شد ما دیدیم که هر عنصر یک set میتواند که معکوس خودش را دارا گردد. یعنی هر یک عنصر یک دارای محض یک عنصر inverse خود شده میتواند. یا بالفاظ دیگر محض یک عنصر در یک set تحت یک عملیهٔ داده شده binary موجود نیست که عنصر معکوس هر عنصر set مذکور را تشکیل دهد. بطور مثال: اگر یک set اعداد نسبتی و عملیهٔ ضرب بحیث یک عملیه binary در آن در نظر گرفته شود، پس درینصورت 1 عنصر عینیت را در S تحت عملیهٔ ضرب تشکیل میدهد. زیرا: برای تمام x های در حالیکه $x\in S$ بوده و $x\neq 0$ باشد رابطه: $x\cdot 1=1\cdot x=x$ همیشه حقیقت دارد. از طرف دیگر برای هر عنصر $x\in S$ یک $x^{-1}\in S$ ($x\neq 0$) موجود است طوریکه: $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$ گردد. چنانچه:

$\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}=\frac{8}{3}$ است، زیرا: $\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3}=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{8}=1$ میشود.

$(5)^{-1}=\frac{1}{5}$ است، زیرا: $5\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot 5=1$ میشود.

بهمین قسم inverse $\left(-\frac{2}{3}\right)$ عبارت از ــــ است زیرا: ـــ = ـــ . ـــ = ـــ . ـــ میشود.

حل: $-\frac{3}{2}$ ، زیرا: $\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=1$ میشود.

729. یک S یک set که دارای عملیه binary ، انجمنی Associative " * " و حاوی عنصر identity ، e است موجود است. ثابت کنید که یک عنصر $x\in S$ بیشتر از یک inverse را دارا بوده نمیتواند.

ثبوت: بالفرض: $x, y, z\in S$ بوده و هر دو عنصر y و z معکوس های inverse ، x باشند. پس درینصورت ما داریم:

$$x*y=y*x=e$$

و بهمین قسم:

$$x*z=z*x=e$$

چون:

$$\left.\begin{array}{l}x*y=e\\ x*y=e\end{array}\right]$$

پس :

$$x * y = x * z$$

بنابر عملیه کردن y به هر دو طرف رابطه فوق ما نوشته میتوانیم :

$$y*(x*y) = y*(x*z)$$

چون * انجمنی Associative است پس ما نوشته میتوانیم :

$$(y*x)*y = (y*x)*z$$

ویا اینکه :

$$e*y = e*z$$

چون e عنصر identity بنابر عملیه * است، پس میتوانیم بنویسیم :

$$y = z$$

رابطهٔ عینیت ویا identity اخیر فوق الذکر تضمین میکند که هر عنصر $x \in S$ دارای محض یک عنصر inverse (معکوس) بوده میتواند ویس .
این مسئاله کدام جواب ایجاب نمکند .

730 . اگر S یک ست و * یک عملیه binary دران با مدنظر بگیرید . بالفرض * انجمنی نیز در S باشد . راجع به سوال که : " آیا $x \in S$ دارای یک عنصر inverse در S تحت عملیه * میباشد ویا خیر ؟ " چه فکر میکنید ؟

حل : این سوال در نفس خویش دارای کدام مفهوم مشتقل و معنی واضح نیست . زیرا : تا وجود یک عنصر عینیت در S تثبیت نگردد ، ما عنصر معکوس x را تعیین کرده نمیتوانیم

731 . اگر S ست اعداد تام جفت بوده و عملیه ضرب دران مدنظر گرفته شود :-

(1) . عملیه ضرب یک عملیه ـــــ در S میباشد ، زیرا : برای هر $x, y \in S$ حاصل ضرب $x \cdot y$ یک عنصر ـــــ S ست میباشد .

(2) . عملیه ضرب در S ـــــ و ـــــ میباشد .

(3) . سوال اینکه " عنصر معکوس 8 inverse را بدست آرید ؟ " حل ندارد . زیرا عنصر عینیت identity تحت عملیه ضرب که عبارت از ـــــ است ، در S موجود نیست .

حل : (1) . binary ، بیگانه ، (2) . Commutative ، Associative ، (3) . 1 ،

732. در تعریف یک عنصر معکوس (inverse) در یک S set مفروض تحت یک عملیه binary * داده شده نکات ذیل را در نظر باید گرفت:

(1). باید که S set تحت عملیه * دارای یک عنصر identity فرضاً e باشد.

(2). برای هر $x\in S$ یک $y\in S$ عنصر معکوس یا inverse گفته میشود در صورتیکه اگر داشته: $y*x = \_\_*\_\_ = \_\_$ گردد.

حل: $x*y=e$

733. اگر S، set اعداد تام مثبت بوده و جمع معمولی بحیث عملیه ~~binary~~ در آن مد نظر گرفته شود، درینصورت:

(1). آیا جمع یک عملیه binary در S شده میتواند؟

(2). آیا جمع دارای عنصر identity در S میباشد؟

(3). آیا هر عنصر $x\in S$ دارای یک inverse بوده میتواند؟

حل: (1). بلی، (2) نخیر: $0\notin S$، (3). نخیر: عنصر عینیت موجود نیست.

734. اگر S، set اعداد تام غیرمنفی بوده و عملیه معمولی جمع در آن مد نظر گرفته شود:

(1). عنصر عینیت S تحت عملیه "+" عبارت از ـــــ میباشد، زیرا: ـــــــــــ میشود.

(2). inverse، 15 کدام است؟

حل: (1). 0 و $x+0=0+x=x$، (2) ندارد، زیرا: $-15\notin S$

735. اگر S، set اعداد تام بوده و عملیه جمع "+" در آن مد نظر گرفته شود: درینصورت: (1). عنصر عینیت در S عبارت از ـــــ بوده و

(2). عنصر معکوس 8 عبارت از ـــــ میگردد.

حل: (1). 0، (2). -8

736. اگر S، set اعداد تام بوده و عملیه معمولی ضرب "•" در S در نظر گرفته شود،
(1). عنصر عینیت ضرب در S عبارت از ـــــ میباشد.
(2). آیا 5 دارای عنصر inverse در S میباشد؟ و یا خیر؟ کدام است؟

حل: (1). 1، (2). نه خیر، زیرا: $\frac{1}{5} \notin S$

737. اگر S، set اعداد نسبتی باشد، آیا 5 دارای عنصر inverse در S بوده میتواند؟

حل: بلی، آن عبارت از $\frac{1}{5}$ است: $5\cdot(\frac{1}{5})=(\frac{1}{5})\cdot 5=1$

738. (1). اگر S یک set غیر خالی و "*" یک عملیه binary در S باشد: طوریکه S را از ـــــ در ـــــ map میکند.
(2). عبارت: "(x,y) را $*$ در z map میکند." توسط سمبول به ـــــ افاده شده میتواند.
(3). عملیه "*" commutative در S میباشد در طوریکه:
ـــــ.

حل: (1). $S\times S$ در S، (2). $x*y=z$
(3). $\forall x,y\in S$ رابطه $x*y=y*x$ همیشه دارای حقیقت باشد.

739. یک عملیه binary "" در S انجمنی است در صورتیکه: $\forall x,y,z\in S$ رابطه: ـــــ.

حل: $(x*y)*z=x*(y*z)$ همیشه حقیقت باشد.

740. یک set، S که حاوی عملیه binary "" است داده شده؛ اگر یک عنصر $e\in S$ موجود شده بتواند طوریکه: $\forall x\in S$

رابطه : . . . . . $x*j = j*x = x$ همیشه دارای حقیقت باشد،
پس گفته میشود که j عبارت از ________ سِت میباشد.

حل : عنصر عینیت ویا identity element ، set

741* . فرضاً e عبارت از عنصر عینیت identity ، S set تحت عملیه binary ، * باشد : بالفرض برای هر $x \in S$ یک $y \in S$ موجود گردد طوریکه رابطه: ________ را تحقیق کند پس گفته میشود که y عنصر inverse ، x تحت عملیه * میباشد.

حل : $x*y = y*x = e$

742* . عنصر عینیت identity یک S set را نظر به عملیه * تعریف کنید.

حل : اگر S یک set غیرخالی و * یک عملیه binary در S باشد یک عنصر $e \in S$ بنام عنصر عینیت identity در S تحت عملیه * یاد میشود درصورتیکه برای هر $x \in S$ رابطه: $x*e=e*x=x$ را تحقیق کند.

743* . عنصر معکوس x یا inverse را در S تحت عملیه * تعریف کنید.

حل :- اگر S یک set غیرخالی و * یک عملیه binary در S بوده و عنصر e عنصر عینیت identity در S تحت عملیه * باشد. یک عنصر $y \in S$ بنام عنصر معکوس x یا inverse x یاد میشود درصورتیکه $x \in S$ تربه و رابطه: $x*y=y*x=e$ بوجود آمده ودارای حقیقت باشد.

VI. امتحان تکرار قسمت دوم

Review Test for Part Two

1. فرضاً $S=\{a,b\}$ بوده، و بالفرض X، تمام mapping های set ها از S در $S\times S$ (from S into $S\times S$) باشد، درینجا چهار تابع functions موجود شده میتواند. اگر این توابع را تقسیم: پرمیوتیشن های Permutations درجه N نشان دهیم، پس درینصورت:

$X=\{M, N, P, Q\}$ میشود، درحالیکه:

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}$$ میشود؛

اگر عملیه "*" binary تقسیم کرد ضرب پرمیوتیشن های permutations درجه N ترابط شده تعریف شود. درینصورت یک نقل این توابع را کاپی نموده و برای حل سوال: 2، 3 و 5 بکار ببرید.

اکنون نتیجه: $P*N$ را یادداشت آرید.

2. (1). ثابت کنید که "*" یک عملیه binary در X است.
یا بعبارهٔ دیگر نشان دهید که نتیجه عملیه "*" به هر دو عنصر X که تطبیق میشود، نتیجهٔ آن نیز شامل X است.
(2). ثابت که "*" در X تبدیلی Commutative نیست.

3. (1). آیا X دارای یک عنصر identity تحت عملیه "*" شده میتواند. اگر دارد – کدام است؟
(2). کدام عنصر X تحت عملیه "*" دارای عنصر معکوس inverse شده میتواند؟ (فرض کنید که معکوس دارای کدام معنی در X است.)

4. در set اعداد تام "I" عملیهٔ معمولی جمع "+" را در نظر گرفته و به سوالات ذیل جواب دهید:-

(1) . آیا عملیهٔ "+" تبدیلی است، اگر نیست چرا؟ ثابت کنید.

(2) . آیا عملیهٔ "+" انجمنی است، اگر نیست ثابت کنید.

(3) . آیا تحت عملیهٔ "+" یک عنصر عینیت Identity در I موجود است؟ و یا خیر؟ در صورت موجودیت کدام است؟

5. فرض کنید یک set پرمیوتیشن ها permutations درجهٔ 3 بنام S باشد. شش (6) پرمیوتیشن های ذیل آنرا نقل و کاپی کرده و برای حل مسائل 6 بکار ببرید:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

فرضاً S دارای عملیهٔ binary ضرب پرمیوتیشن permutation multip. باشد. آیا این عملیهٔ permutation تبدیلی Commulative است؟ اگر نیست آنرا ثابت کنید.

6. در سوال 5 عملیهٔ binary داده شده را در نظر بگیرید:

(1) . آیا این عملیه انجمنی Associative است؟ اگر نیست ثابت کنید.

(2) . آیا کدام عنصر عینیت تحت این عملیه در S موجود است؟ در صورت موجودیت این عنصر کدام است؟

(3) . آیا هر عنصر S که set بنابر (تحت) عملیهٔ مفروض دارای یک عنصر معکوس inverse بوده میتوانند؟ اگر نمیتوانند حتی یک عنصر S را نشان دهید که بنابر عملیهٔ ضرب پرمیوتیشن permutation multiplication دارای عنصر معکوس نباشد.

7. فرضاً P یک subset غیر خالی A set بوده و عملیه binary "U" را در آن مد نظر بگیرید:

(1) . آیا U تبدیلی Commutative است ؟ اگر نیست چرا ؟

(2) . آیا U انجمنی Associative است ؟ اگر نیست چرا ؟

8 . بنابر فرضیه سؤال 7 مسائل ذیل را جواب دهید :

(1) . آیا یک عنصر عینیت تحت U در set مذکور موجود شده میتواند ؟ درصورت که موجود باشد کدام است ؟

(2) . آیا تمام عناصر set مذکور تحت عملیه U دارای عنصر معکوس بوده میتوانند ؟ ویا خیر ؟ اگر دارای عنصر معکوس بوده نمیتوانند ، محض یک عنصر را در set نشان دهید که تحت عملیه U دارای معکوس نباشد .

9 . اگر S یک set ، و * یک عملیه binary در S بوده و e یک عنصر عینیت S تحت عملیه " * " باشد . ثابت کنید که بجز از e کدام عنصر عینیت دیگر مانند e_1 تحت عملیه * در S موجود شده نمیتواند .

10 . در set R اعداد حقیقی یک عملیه binary " * " داده شده طوریکه عملیه مذکور توسط افاده : $x*y = 5 \cdot x \cdot y$ تعریف میشود ؛ درحالیکه " . " از ضرب معمولی نمایندگی میکند :

(1) . ثابت کنید که " * " Commutative تبدیلی است .

(2) . ثابت کنید که " * " Associative انجمنی است .

(3) . نشان دهید که $\frac{1}{5}$ عبارت از عنصر Identity set R تحت عملیه * میباشد .

(4) . نشان دهید که $\frac{1}{15}$ عبارت از عنصر inverse $\frac{3}{5}$ تحت عملیه " * " میباشد .

قسمت سوم

Part Three

" At one time mathematicians felt groups were the key to secret of the universe, one can hardly blame them. "[1]

W.W.Sawyer

گروه ها Groups

درین قسمت ما یک ساختمان جبری algebraic structure که بنام گروه ویا Group یاد میشود به تفصیل مطالعه مینمایم . یک Group عبارت از یک ساختمان ساده جبری است که لا اقل دارای یک رابطه binary relation ویک عملیه binary operation بوده که یکعده اصول axioms را که بعداً توضیح میشوند ، تعقیب میکند .

بعداً خواهید دید ، که شما بیکعده اصول : axioms ، که خواص گروه ها Groups را تشکیل میدهند ، آشنائی حاصل کرده اید . بدینطور ضمناً بنابر دلیل که گروه ها Groups یک ساختمان نسبتاً ساده الجبری را تشکیل میدهند ما مطالعهٔ Group را از ساختمان های دیگری جبری مقدم انتخاب کردیم . تذکر باید داد که ساختمان های دیگر جبری مانند Semi-groups (نیمه گروه ها) ، Loops وغیره نیز وجود دارند که در ساختمان خویش از Group ساده تر اند ولیکن بعداً آن ها را مطالعه خواهید کرد . ساختمان های نسبتاً مغلق جبری مانند : Rings (حلقه ها) ، Integral domains (میدان های مکمل) و Fields (ساحه ها) که در ساختمان شان دو binary operations

1. <u>Prelude to Mathematics</u>, Penguin Books, Inc., Baltimore, 1955, p. 102.

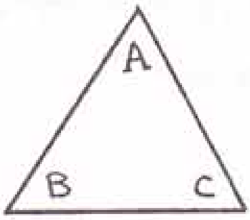
رول دارد، نیز موجود اند. از جمله این دسته ساختمان جبری یا مجموعه Fields را در قسمت چهارم به تفصیل مطالعه خواهیم کرد.

برای مطالعه مجموعه گروه Group در ذیل ما یک عملیه دوگانه ای binary operation جدید (که ممکن به آن آشنائی نداشته باشید) معرفی میکنیم. درعین زمان بعضی از مجموعه های سابق که در قسمت های اول و دوم این کتاب مطالعه نموده اید تکرار نموده و عندالزوم بحیث مرجع از آن مستفید خواهیم شد.

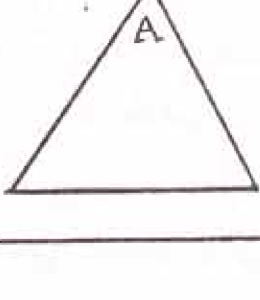
I. تناظر های یک مثلث متساوی الاضلاع :-

Symmetries of an Equilateral Triangle

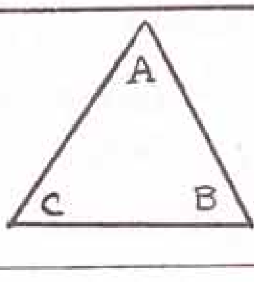
٧٤٩. یک مثلث متساوی الاضلاع ABC را از پارچه کاغذ قطع وطبق ذیل آنرا اعیار label کنید.



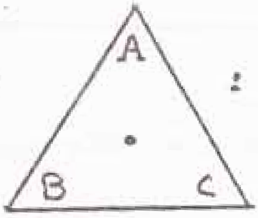
هریک از رؤس های مثلث قطع شده را درهردو طرف صفحه کاغذ توسط عین حروف اعیار ونشانی کنید. درصورتیکه شما مثلث مذکور را چپه کنید مانند شکل مقابل دیده شود. درینحالت حروف نظیر رؤس های باقیمانده آنرا بنویسید.



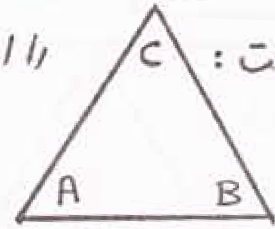
حل :



.745 اگر مثلث :

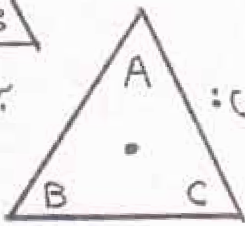


به اطراف مرکزش روی مستوی موجوده اش به اندازهٔ 120° خلاف دوران عقربه‌های ساعت یعنی counterclockwise دور داده شود. درینصورت مثلث مذکور حالت :



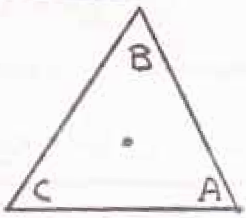
را اختیار میکند.

بالفرض مثلث مفروض :

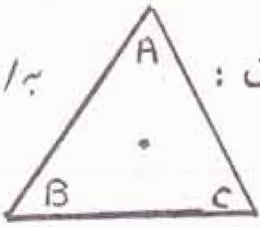


به اطراف مرکزش به اندازهٔ 240° خلاف دوران ساعت دور داده شود شکل جدیدی که مثلث مذکور اختیار میکند دیا حالت جدیدی را نشان دهید.

حل :

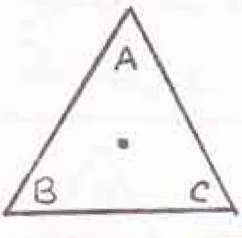


.746 بالفرض مثلث :



به اطراف مرکزش (روی مستوی موجوده اش) به اندازهٔ صفر (0°) درجه دور داده شود حالت جدیدی را که مثلث مذکور اختیار میکند نشان دهید.

حل :



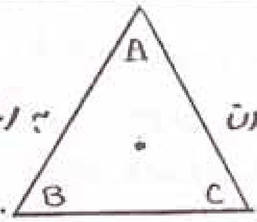
در حالت اولی خود میماند.

.747 بالفرض مثلث :

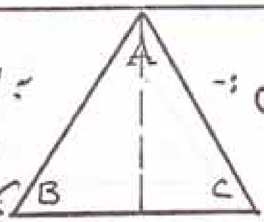
مذکور به اطراف مرکزش به اندازهٔ 360° خلاف دوران ساعت دور داده شود حالت جدیدی را که مثلث موصوف اختیار میکند تعیین کنید.

حل:

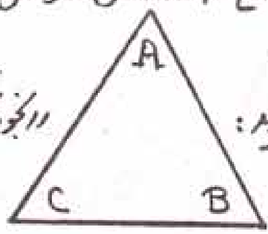
دیده میشود که در صورت دوران به اندازه 360° مثلث مذکور بحالت اولی خود رجعت میکند.



748. اگر مثلث مفروض:-



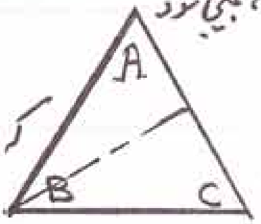
به اطراف ارتفاع که از رأس فوقانی اش (A) رسم گردیده چپه شود. درینصورت مثلث مذکور شکل جدید:



را بخود اختیار میکند.

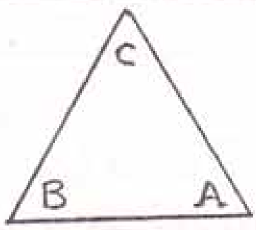
(درینحالت باید که مثلث از مستوی اش بلند کرده شده بدون اینکه محل رأس فوقانی A، بیجا شود چپه گردد.)

اکنون اگر مثلث را به اطراف ارتفاع

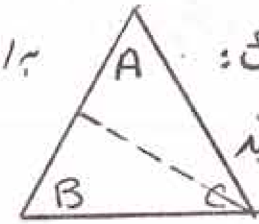


که از رأس تحتانی طرف چپ آن (B) میگذرد دور داده شود، شکل جدیدی را که مثلث مفروض اختیار میکند نشان دهید.

حل:

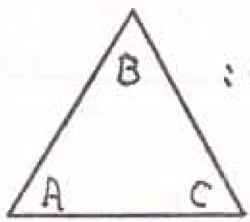


749. اگر مثلث:

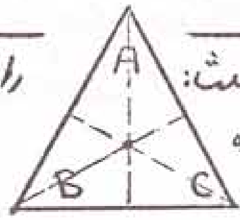


به اطراف ارتفاع که از رأس تحتانی طرف راست آن (C) عبور میکند چپه شده (دور داده شود)، شکل جدیدی را که مذکور بخود میگیرد نشان دهید.

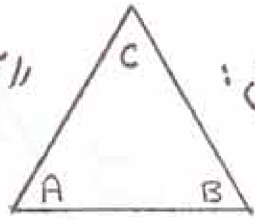
حل:



750. اگر مثلث:

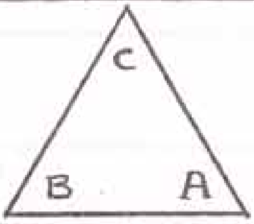


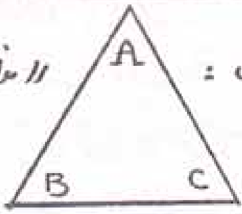
را اولاً در اطراف مرکزش روی مستوی موجوده اش به اندازه 120° خلاف جهت دوران ساعت حرکت دهیم

تا شکل : 

را بخود اختیار کند.

حال اگر مثلث را از این حالت جدیدش به اطراف ارتفاع که از رأس فوقانی آن میگذرد چپه کرده (دور داده شود) حالت جدید مثلث مذکور را نشان دهید.

حل : 

751. مثلث : 

را در نظر بگیرید:

اگر دوران مثلث را به اطراف مرکزش خلاف دوران ساعت به اندازهٔ 0° به : R_0

و دوران مثلث را به اطراف " " " " " به اندازهٔ 120° به : R_1

و " " " " " " " " " " " " به 240° : R_2 نشان دهیم

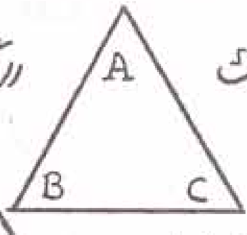
اگر " " را به اطراف ارتفاع مربوط رأس فوقانی آن به : F_1

و " " " را به " " " " چپ تحتانی آن به : F_2

و " " " را به " " " " راست " آن به : F_3 نشان دهیم.

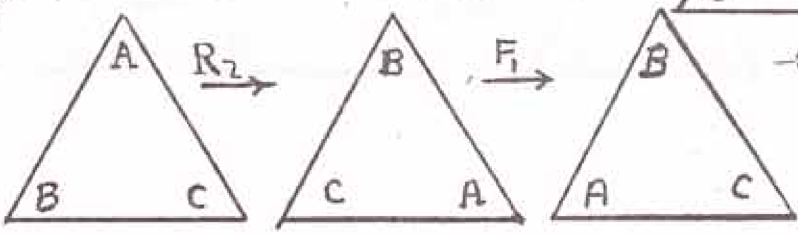
این نتایج را روی صفحه کاغذ نقل کرده و نتایج حرکات مثلث ها را در دوران مقایسه کنید

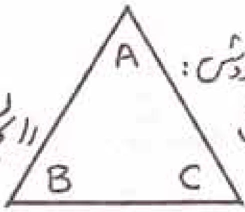
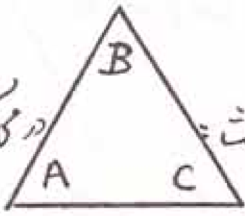
حل :- جواب در Panel-8 تقدیم شده است.

752. اگر مثلث 

را گرفته، اولاً عملیه R_2 را بالای آن اجرا کرده، سپس بالای مثلث نتیجه وی عملیه F_1 را اجرا کنیم،

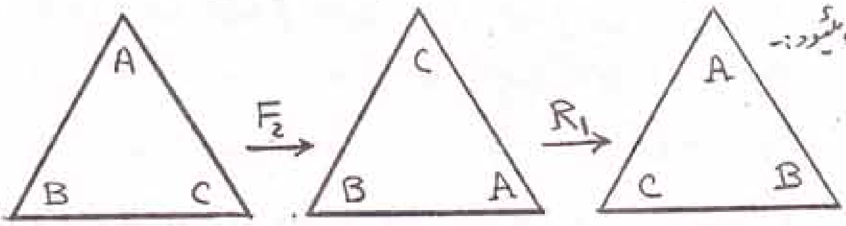
درینصورت داریم :-



یک عملیه موجود است که بتنهائی خودش:
مستقیماً مثلث  را بجای مثلث  در کار آورد.
آن عملیه کدام است؟
جواب خود را با Panel-8 مقایسه کنید.

حل: F_3

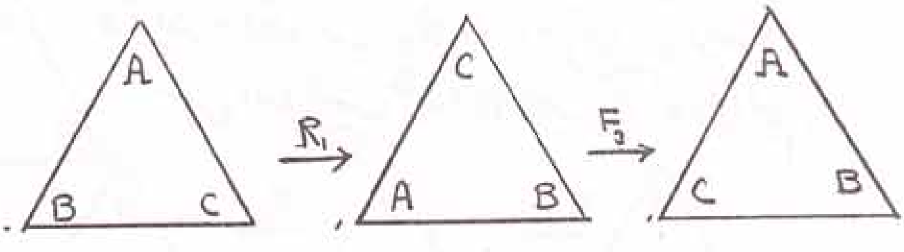
753. در حرکات مسأله 752 اولاً عملیه R_2 بالای مثلث مفروض اجرا گردید و پسش عملیه F_1 آنرا تعقیب نمود. با این طریقه تعقیب عملیه R_2 توسط F_1 را به "$R_2 \cdot F_1$" ارائه میکنیم، که بعبارت: "R_2 توسط F_1 تعقیب میشود." بیان میگردد. در اخیر ما دریافت نمودیم که اگر R_2 توسط F_1 تعقیب شود عین نتیجه را تقدیم میکند که تنها از اجرای عملیه F_3 بالای مثلث حاصل میشود. پس در اینصورت ما مینویسیم: $R_2 \cdot F_1 = F_3$
شما عملیه را بدست آرید که به تنهائی خودش نتیجه: $F_2 \cdot R_1$ داده بتواند.
چنانچه دیده میشود:-

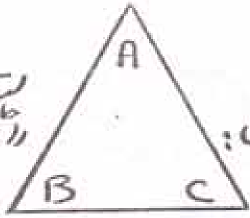
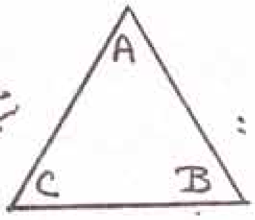


$\therefore\ F_2 \cdot R_1 =$ ——

حل: F_1

754. $R_1 \cdot F_3$ افاده معنی که R_1 توسط F_3 تعقیب میشود دارد:



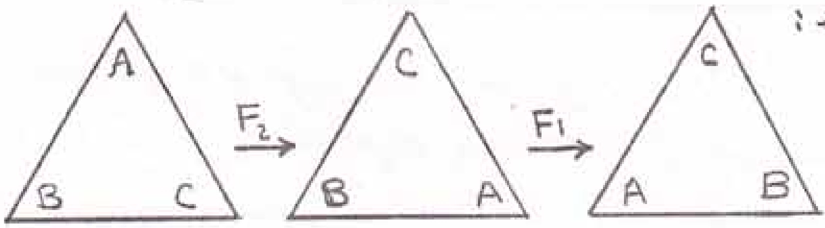
پس عملیه که بتنهائی خودش مثلث:  را به حالت مثلث:  تحویل میکند، بنابر Panel-8 عبارت از F_1 است.

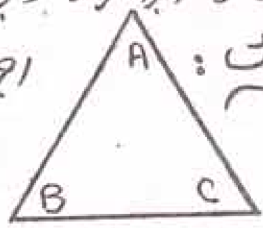
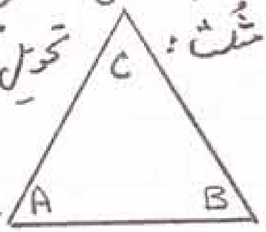
بنابران ما نوشته میتوانیم که: $R_1 \cdot F_3 = F_1$.

بهمین قسم: $R_2 \cdot F_1 =$ ——— را حاصل کنید.

حل: F_3

755. افاده: " $F_2 \cdot F_1$ " این معنی را دارد که اوّله عملیه F_2 و به تعقیب آن F_1 را اجرا نمائید. برای اینکه آن عملیه را بدست آرید که به تنهائی خودش اجرا شده و نتیجه: $F_2 \cdot F_1$ را بدهد، درینصورت مثلث قطع کرده خود را گرفته، اوّله عملیه F_2 را بالای آن اجرا کرده و پسش عملیه: F_1 را اجرا نمائید. و چنین میشود:



اکنون یک شش عملیات را بالای مثلث مقوایی خود اجرا کرده و تجربه نمائید تا کدام یک عملیه را که به تنهائی خودش بالای مثلث:  اجرا شده و آنرا به حالت مثلث:  تحویل کند.

برای جواب به Panel-8 مراجعه نمائید.

حل: R_1

756. ازینکه R_1 عین نتیجه را که: " F_2 توسط F_1 تعقیب شود" داده، پس درینصورت ما مینویسیم $F_2 \cdot F_1 = R_1$. حالا: $R_2 \cdot F_2 =$? را حاصل کنید.

حل: F_1

757. اگر $S=\{R_0, R_1, R_2, F_1, F_2, F_3\}$ بوده و «$\circ$» مفهوم عبارت: «... توسط ... تعقیب میشود.» را افاده کند. در تمام اشکال که در فوق بمشاهده رسید، دیدیم که یک عنصر در ست S موجود شده میتواند که نتیجهٔ تاثیرات عین نتیجهٔ تاثیر دو عنصر دیگر بالای شکل مورد عمل میباشد. حال اگر حقیقت این موضوع بالای تمام x و y طوریکه $x \in S$ و $y \in S$ بوده قابل تطبیق باشد طوریکه برای هر $x, y \in S$ رابطهٔ: $x \circ y$ محض یک (جواب در ست S درشته) عنصر ست S را بحیث جواب قبول کند، پس درینصورت گفته میشود که عملیهٔ: «... توسط ... تعقیب میشود.» یعنی: ($\circ$) یک ______ در S میباشد.

حل: binary operation

758. جدول ذیل را روی صفحه کاغذ نقل کرده و توسط تکمیل نمودن آن نشان دهید که عملیهٔ «$\circ$» یک عملیه binary operation در S میباشد.

فکتور دوم (2nd factor)

فکتور اول (1st factor)

$\circ$	R_0	R_1	R_2	F_1	F_2	F_3
R_0	R_0	R_1	R_2	F_1	F_2	F_3
R_1	R_1	R_2	R_0	F_2	F_3	F_1
R_2	R_2	R_0	R_1	F_3	F_1	F_2
F_1						
F_2						
F_3						

حل: برای جواب به Panel-9 مراجعه شود.

759. از Panel-9 بمشاهده میرسد که برای هر جوره مرتب ای عناصر: $S=\{R_0, R_1, R_2, F_1, F_2, F_3\}$ تحت عملیهٔ: «$\circ$» محض یک عنصر یگانه

در S موجود میباشد. بعبارت دیگر اگر $x, y \in S$ باشد، پس نتیجه $x \circ y$ یک عنصر unique ویگانه در S میباشد. درحالیکه عملیه "∘" مفهوم عبارت "... توسط ... تعقیب میشود." را افاده میکند. درینصورت ما گفته میتوانیم که binary operations (عملیه دوگانه ای) "∘" در set S موجود است.

آیا عملیه "∘" تبدیلی Commutative میباشد ویاخیر؟ چرا؟

> حل: نه خیر! زیرا: $x \circ y \neq y \circ x$ میباشد. بطور مثال:-
> چون $R_1 \circ F_2 = F_3$ حالانکه: $F_2 \circ R_1 = F$ میشود.

760. بملاحظهٔ از Panel-9 بگوئید که آیا S دارای عنصر عینیت Identity element میباشد ویاخیر؟ اگر identity el. دران موجود است، کدام است؟

> حل: بلی! R_0 است. زیرا: $x \circ R_0 = R_0 \circ x = x$ ، S : $\forall x \in S$ میشود.

761. بخاطر خواهید داشت که عنصر معکوس inverse x عبارت از عنصر است که اگر به x^{-1} نشان داده شود درینصورت: $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ میشود. درحالیکه e عنصر عینیت identity element میباشد.

ازینکه R_0 عنصر عینیت identity بوده، بملاحظهٔ از Panel-9 جواب دهید که آیا هر عنصر set S دارای یک عنصر معکوس Inverse بوده میتواند؟

بطور مثال، اگر عنصر inverse ، F_1 را به F_1^{-1} نشان دهیم طوریکه: $F_1 \circ F_1^{-1} = F_1^{-1} \circ F_1 = R_0$ درینصورت دیده میشود که F_1 معکوس خودش بوده. یعنی: $F_1 \circ F_1 = R_0$ میباشد. شما عنصر معکوس Inverse R_2 را بدست آرید.

> حل: R_1 است. زیرا: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 = R_0$ میشود.

762. اگر توسط سمبول: R_1^{-1} عنصر معکوس یا inverse ، R_1 ارائه گردد، چون R_0 عبارت از عنصر عینیت identity element است، پس درینصورت:

$R_1 \circ R_1^{-1} = R_1^{-1} \cdot R_1 = R_0$ میشود.

مبحظات از Panel-9 R_1^{-1} را (در صورت موجودیت) پیدا کنید.

حل: R_2

763. یک مطالعه عمیق Panel-9 نشان میدهد که هر عنصر G دارای یک عنصر معکوس inverse elem. میباشد، طوریکه:

$R_0^{-1} = R_0$ ، $R_1^{-1} = R_2$ و $R_2^{-1} = R_1$

دریافت نمایید: $F_1^{-1} =$ ___ ، $F_2^{-1} =$ ___ و $F_3^{-1} =$ ___

حل: $F_1^{-1} = F_1$ و $F_2^{-1} = F_2$ و $F_3^{-1} = F_3$

764. دیده شد که R_0، F_1، F_2 و F_3 عبارت از معکوس های خود میباشند.
حال اگر که، set اعداد نسبتی rational را ارائه کند، درصورتیکه ضرب را بحیث عملیه binary oper. مدنظر بگیریم، درینحالت ما میدانیم که "1" عنصر عینیت identity elc. ، set، S که را تحت عملیه ضرب تشکیل میدهد.

(1) پس عنصر معکوس 5 در set نسبتی تحت عملیه ضرب عبارت از ___ بوده، زیرا: ___ میشود. با استفاده از عهده inverse ما نوشته میتوانیم که ___ $= 5^{-1}$ میشود.

(2). عنصر معکوس 1، یعنی: "1^{-1}" را حاصل کنید.

حل: (1). $\frac{1}{5}$ ، $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ ، $\frac{1}{5}$ ، (2). 1

765. اگر عملیه جمع بحیث یک عملیه binary operation در یک set، که مدنظر گرفته شود. درینصورت عنصر معکوس a را بجای $\bar{a}$ به a- نشان میدهند.
اگر که، set اعداد تام را نشان دهد، صفر "0" در set اعداد تام عنصر عینیت عملیه جمع میباشد:

(۱). عنصر معکوس 10 تحت عملیه جمع عبارت است از ______ . زیرا ______ میشود.
(۲). عنصر معکوس (تضاد) additive inverse ، -5 را تحت عملیه جمع) بدست آرید.

حل: (1). -10 ، $10+(-10)=(-10)+10=0$ ، (2). 5

766. موجودیت ویا عدم وجود خاصیت ______ از جدول یک عملیه binary ، بنا بر متناظر ویا عدم تناظر بودن جدول نظر به قطرش، به آسانی و فوری معلوم میشود. لیکن (وجود ویا عدم وجود) انجمنی associativity از جدول تعیین شده نمیتواند.

حل: تبدیلی commutativity

767. موجودیت خاصیت انجمنی associativity یک binary operation مربوط Panel-9 (عملیات دوران مثلث) اثبات شده میتواند.
شما میتوانید که دیرا ثابت سازید طوریکه برای هر $x,y,z\in S$ نشان دهید که تمام $x,y,z\in S$ رابطه: $(x\cdot y)\cdot z =$ ______ را تحقیق میکند. حالانکه اجرای همه دین عملیات کاریست طویل و خسته کن. طریقه ئی آسانتر برای اثبات کردن موجودیت خاصیت انجمنی associativity درین ساختمان موجود نیست.

حل: $x\cdot(y\cdot z)$

II. گروه: — Group

768. با ملاحظات ذیل راجع به (ست) S (یعنی حرکات مثلث ها) داریم که:

$$S=\{R_0, R_1, R_2, F_1, F_2, F_3\}$$

(1). یک عملیه «∘» binary operation در S موجود است.

(2). عملیه «∘» انجمنی associative است یعنی: ______ میباشد.

(3). یک عنصر عینیت R_0 در S موجود است طوریکه برای تمام $x \in S$ رابطه: ______ را تحقیق میکند.

(4). برای هر عنصر $x \in S$ یک عنصر x^{-1} در S موجود شده میتواند، که بنام عنصر معکوس inverse، x یاد میشود، طوریکه: ______ را تحقیق میکند.

حل: (1). $\forall x,y,z \in S,\quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ ،
(2). $x\cdot R_0 = R_0\cdot x = x$ ،
(3). $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = R_0$ ،

769. اگرچه: مربوط Panel-7 ملاحظه نمائید، حاصل ضرب {permutation} های درجه 3 را در آن شاهد خواهید نمود، درینجا نیز یک (ست) S و یک عملیه (∘) binary operation موجود میشود، طوریکه:

(1). binary operat. مذکور ______ است، یعنی: $\forall x,y,z \in S$: رابطه: $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ را تحقیق میکند.

(2). یک عنصر ______ a موجود است طوریکه: $\forall x \in S$ ، $x\cdot a = a\cdot x = x$ میشود.

(3). برای هر $x \in S$ یک عنصر ______ x^{-1} موجود است طوریکه $x^{-1} \in S$ بوده و $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = a$ میشود.

حل: (1). انجمنی associative، (2). عنصر عینیت identity، (3). عنصر معکوس inverse.

.770 اگر $S=\{1,-1,i,-i\}$ باشد، جدول عملیه ضرب S را تاسیس کنید.

(1). آیا عملیه ضرب یک binary operat. در S شده میتواند؟

(2). آیا عملیه ضرب در S انجمنی associative میباشد؟

(3). آیا کدام عنصر عینیت identity در S تحت عملیه ضرب موجود شده میتواند؟ اگر میشود ـ آن کدام است؟

(4). آیا هر $x\in S$ دارای یک عنصر معکوس inverse یگانه در S میباشد؟

در حالیکه $i^2=-1$ میشود.

·	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی (1 است)، (4). بلی.

.771 اگر Z set اعداد تام بوده با در نظر گرفتن عملیه معمولی جمع جواب گویید:

(1). آیا عملیه جمع در Z، که یک عملیه binary op. میباشد؟

(2). آیا جمع در Z انجمنی میباشد؟

(3). آیا کدام عنصر عینیت identity در Z برای عملیه جمع وجود دارد؟ در صورت بلی آن کدام است؟

(4). آیا هر عنصر Z دارای یک عنصر معکوس inverse یگانه در Z تحت عملیه جمع شده میتواند؟

حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی (0 است)، (4). بلی

.772 اکنون باز ما در موقف قرار یافته ایم که یک تیم theme دیا ساختمان کلی که عده زیاد مسایل و ساختمان های مشابه فوق را در خود احتوا کند جستجو کنیم. در تمام مسایل فوق ما به یک set که دارای یک

binary operation بوده سروکار داشته ایم، طوریکه این عملیه binary در set مورد بحث از خاصیت (1) —— پیروی کرده، و ضمناً دارای (2) یک —— بوده، و برعلاوه هر عنصر set مورد بحث دارای (3) —— یگانه در set مذکور بوده است. بنابران برای ما خیلی مفید خواهد بود که چنین یک ساختمان را بصورت کلی و عمومی مورد مطالعه قرار دهیم. واضح است هرچیزیکه بصورت عموم در یک موضوع گسترده حائز حقیقت باشد، طبیعی است که در حالات خاص آن موضوع و یا ساختمان نیز دارای حقیقت میباشد. چه مطالعه موضوعات عمومی و کلی ما را بادراک موضوعات خاص کمک بیشتر مینماید.

حل: (1) انجمنی associative، (2) عنصر عینیت identity، (3) عنصر معکوس

773. تعریف: یک set که G که دارای binary op. "*" باشد، گروه یا Group نامیده میشود درصورتیکه:

(1) * —— انجمنی associative در G باشد،

(2) یک عنصر —— در G تحت عملیه binary "*" موجود باشد،

(3) برای هر عنصر G یک عنصر —— و یگانه تحت عملیه "*" در G موجود گردد.

حل: (1) binary op.، (2) عینیت identity، (3) معکوس Inverse

774. فرضاً G، set اعداد تام بوده و در آن عملیه جمع "+" توقف بگیرید:-

(1) set G تحت عملیه "+" انجمنی associative است،

(2) یک عنصر "0" identity تحت عملیه "+" در G موجود است،

(3) برای هر عنصر $a \in G$ یک عنصر $-a \in G$ موجود است، طوریکه: $a+(-a)=(-a)+a=0$ میشود،

بنابران set اعداد تام تحت عملیه —— یک —— را تشکیل میدهد.

حل: +، گروه Group

775. Set اعداد تام تحت عملیه ضرب یک گروه Group را تشکیل داده نمیتواند، زیرا یکی از خواص یک Group دران تحقق پذیر نیست.

(1). آیا عملیه ضرب یک binary operation در که میباشد؟

(2). آیا عملیه ضرب در که انجمنی بوده میتواند؟

(3). آیا عملیه ضرب در که دارای عنصر عینیت identity شده میتواند؟ اگر میتواند کدام است؟

(4). آیا هر عنصر Set اعداد تام (که) دارای یگانه عنصر معکوس در که تحت عملیه ضرب بوده میتواند؟

حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی (1) است. (4). نه خیر! بطور مثال، inverse 5 که $\frac{1}{5}$ میشود عدد تام نیست.

776. عنصر معکوس inverse یک عنصر تحت یک عملیه binary op. ای که دارای عنصر عینیت identity باشد، عبارت از یک عنصر است که اگر با عنصر اولی تحت عملیه binary مذکور قرار داده شود، در نتیجه عنصر عینیت حاصل میشود.

در جوکات شماره 775 دیده شد که عنصر عینیت identity عملیه ضرب (در Set اعداد تام) عبارت از یک (1) میباشد. ضمناً دیده شد که 5 ~~عنصر معکوس~~ در Set اعداد تام تحت عملیه ضرب دارای عنصر معکوس inverse نمیباشد. زیرا اگر عدد تام x پیدا شده نمیتواند طوریکه ______ گردد، بنابران Set اعداد تام تحت عملیه ضرب یک Group را تشکیل ______.

حل: $x \cdot 5 = 5 \cdot x = 1$ ، نمیدهد.

777. اگر ما بخواهیم که Set اعداد تام Integers را انکشاف داده و دران اعداد کسور fractions را نیز شامل سازیم درینصورت Set اعداد Rationals نسبتی حاصل میشود. فرضاً که S، Set اعداد نسبتی Rationals و عملیه ضرب

در آن مدنظر گرفته شود پس در اینصورت :

(1) . آیا ضرب در سِت (set اعداد نسبتی) یک عملیه binary شده میتواند؟

(2) . آیا ضرب در سِت، انجمنی Associative میباشد؟

(3) . آیا یک عنصر عینیت identity در سِت تحت عملیه ضرب موجود شده میتواند؟

(4) . آیا هر عنصر سِت تحت ضرب دارای صرف یک عنصر معکوس inverse میباشد؟

حل : (1) . بلی ، (2) . بلی ، (3) . بلی ، (4) . نخیر! عنصر "0" معکوس ندارد.

778. اگر سِت، set اعداد نسبتی بوده و عملیه ضرب در آن مدنظر گرفته شود، دیده میشود که عملیه ضرب در set نسبتی یک عملیه binary بوده و ضمناً از خاصیت Associative پیروی میکند. دارای عنصر عینیت identity که عبارت از یک 1 است میباشد. اما برای عنصر $0 \in S$ کدام عنصر x در سِت موجود نیست که رابطه : $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 1$ را تحقق کند. بجز از صفر دیگر تمام عناصر set، سِت دارای صرف یک عنصر inverse میباشند. اما با اینهم سِت شرط : "که برای هر عنصر سِت یک عنصر معکوس موجود باشد" را کاملاً صدق کرده نمیتواند. بنابران set، سِت (نسبتی) تحت عملیه ضرب یک Group شده ———— .

حل : نمیتواند .

779. اگر از set، سِت (نسبتی) مربوط مسأله 778 همان یک عنصر که موجب تولید مشکلات گردیده حذف کنیم. (صفر را خارج نمائیم.) set باقیمانده را بنام set اعداد نسبتی بدون صفر nonzero Rationals یاد میکنند. آیا set nonzero Rational Num. یک Group را تحت عملیه ضرب بوجود آورده میتواند؟

حل : بلی .

٢٨٠. از مطالعه شماره چوکات ٢٧٩ نتیجه میشود که Set اعداد نسبتی غیرصفر یعنی non zero Rationals تحت عملیه ضرب:
(1). عملیه ضرب یک عملیه ______ در کد است.
(2). عملیه ضرب از خاصیت ______ در کد پیروی میکند.
(3). یک عنصر ______ تحت عملیه ضرب در کد موجود است، که عبارت از ___ است.
(4). هر عنصر کد دارای یک عنصر ______ تحت عملیه ضرب میباشد.
(5). بنابران Set S تحت عملیه ضرب یک ______ را تشکیل میدهد.

حل: (1). binary، (2). Associative، (3). identity، 1، (4). inverse، (5). Group

٢٨١. یک Group توسط اشتراک شمول قرار ذیل تعریف شده میتواند:
اگر S کدام Set و * یک عملیه binary Operation در کد باشد، S تحت * یک Group را تشکیل میدهد درصورتیکه:
(1). $\forall x,y,z \in S \Rightarrow x*(y*z)=(x*y)*z$
(2). $\exists$ one $e \in S, \ni \forall x \in S \Rightarrow x*e=e*x=x$
(3). every $x \in S, \exists x^{-1} \in S, \ni x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$

حل: شماره مذکور حل ایجاب نمیکند.

٢٨٢. بنابر اهمیت زیاد مفکوره گروه Group و موارد زیاد تطبیق آن ضرورت است که خواص مشخصه یک Group بصورت تکرار بیان گردد.
میگوییم یک Set، کد که دارای یک عملیه binary "*" بوده یک Group را بوجود میآورد درصورتیکه S تحت عملیه "*":
(1). دارای خاصیت ______ بوده، (2). یک عنصر ______ در کد تحت عملیه * موجود باشد، (3). هر عنصر کد تحت عملیه * دارای یک عنصر ______ باشد.

حل: (1). Associative، (2). identity، (3). inverse

783*. تعریف ذیل را تکمیل کنید: یک set که دارای عملیه binary operation * باشد، Group گفته میشود درصورتیکه:

$\forall x, y, z \in S \Rightarrow$ ________ .(1)

$\exists e \in S, \ni \forall x \in S:$ ________ .(2)

$\forall x \in S, \exists x^{-1} \in S, \ni:$ ________ .(3)

حل:
$(x * y) * z = x * (y * z)$.(1)
$x * e = e * x = x$.(2)
$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.(3)

784. برای موجودیت یک Group، وجود یک set که حاوی یک عملیه binary بوده طوریکه تحت عملیه مذکور، set مذبور دارای خاصیت انجمنی Associative بوده، یک عنصر عینیت identity در آن موجود و ضمناً برای هر عنصر set مذکور یک عنصر inverse در آن وجود داشته باشد.

اگر S، عبارت از set اعداد تام جفت بوده * عملیه معمولی جمع را افاده کند آیا set اعداد تام جفت تحت عملیه جمع (*) یک Group را تشکیل داده میتواند؟

حل: بلی

785. آیا set اعداد تام تحت عملیه ضرب یک Group را بوجود می آورند؟ فرض کرده Group را در آن بررسی کنید یعنی آیا:-

(1). عملیه ضرب در S یک عملیه binary میباشد؟

(2). S تحت عملیه ضرب از خاصیت انجمنی Associative پیروی میکند؟

(3). S تحت عملیه ضرب دارای یک عنصر عینیت identity بوده میتواند؟

(4). هر عنصر S تحت عملیه ضرب دارای حتمی یک عنصر معکوس inverse میباشد؟

حل: (1) بلی، (2) بلی، (3) بلی، (4) نخیر، بجز از 1 و -1 دیگر عناصر S معکوس ندارند.

تذکر:- در مسایل مربوط: چوکات های: 786 الی 796 ما مجموعه set که را با بر یک و یا عملیه binary معینه مورد بررسی قرار داده و پرسان میکنیم که آیا یک set مفروض تحت عملیه داده شده ودران یک Group را تشکیل میدهد و یا خیر؟ اگر چه جواب همچو مسایل محض افاده عبارت "بلی" و یا "نه خیر" را ایجاب میکند، اما تذکر باید داد که جواب مطلوب محض جرئت انداز و سرسری نباشد. باید هر یک از خواص و صفات گروه Group را در set های مورد نظر تحت عملیه مفروض نزد خویش جستجو کرده و بعد از اقناع خاطر بجواب بپردازید، قبل از آنکه جواب دهید باید که از خویش جواب چهارگانه ذیل را جستجو دارید:

(1). آیا عملیه مورد نظر در set مفروض یک عملیه binary میباشد؟ و یا خیر؟ درصورتیکه عملیه مورد بحث binary نبوده یعنی جواب منفی باشد، درینصورت ضروری نیست که دیگر خواص گروه Group در set مفروض جستجو گردد. چه یک set بدون داشتن یک عملیه binary یک گروه Group را تشکیل داده نمیتواند.

(2). آیا عملیه داده شده در set مفروض دارای خاصیت انجمنی میباشد؟

(3). آیا یک عنصر عینیه identity در set مفروض تحت عملیه مذکور موجود است؟

(4). آیا هر یک از عنصر set مفروض تحت عملیه داده دارای یک عنصر معکوس inverse در آن set بوده میتواند؟

درصورتیکه هر کدام یک از سوال چهارگانه فوق منفی "نی" باشد، درانصورت set مفروض تحت عملیه داده شده دران — یک گروه Group را تشکیل داده نمیتواند.

درصورت فراموش نمودن خواص Group به Panel-10 مراجعه شود. اگر مطلب از سوال محض عبارت: "بلی" و یا "نه" بجواب نبوده، بلکه افادهٔ تعریف گروه Group باشد، درینصورت از استعمال Panel-10 خودداری فرمائید.

786 - آیا set اعداد تام تاقی تحت عملیه ضرب یک گروه را بوجود آورده میتواند؟ اگر جواب منفی باشد، پس کدام خاصیت گروه Group را تحقیق نمیکند؟

حل: نه خیر، زیرا بجز از 1 ، 1- دیگر هیچکدام از عناصر set اعداد تام تاق دارای عنصر معکوس نیست!

۷۸۷. آیا set اعداد تام غیر منفی تحت عملیه جمع یک Group را تشکیل میدهد؟ چرا؟

حل: نه خیر! بجز از 0 دیگر هیچکدام یک از عناصر آن دارای عنصر معکوس نیست.

۷۸۸. آیا set اعداد مثبت نسبتی تحت عملیه ضرب "." یک گروه Group را تشکیل داده میتواند؟

حل: بلی

۷۸۹. اگر $S=\{1,-1\}$ باشد، آیا S تحت عملیه ضرب یک گروه Group را تشکیل داده میتواند؟ اگر نمیتواند چرا؟ (جدول ضرب آنرا تشکیل داده و مطالعه کنید.)

حل: بلی

۷۹۰. به Panel-7 ملاحظه کنید. ما تذکر دادیم که ضرب permutation از خاصیت انجمنی پیروی میکند. آیا S تحت عملیه ضرب "." یک Group را تشکیل میدهد؟ اگر نمیدهد چرا؟ (به تعقیب مسأله 791 جواب پرداخته شده)

۷۹۱. به Panel-7 ملاحظه نمائید بالفرض که عملیه binary مربوطه آن Associative باشد. آیا S یک Group را تشکیل میدهد؟

حل: جواب مسأله 790: بلی، جواب مسأله 791: بلی

۷۹۲. فرضاً $S=\{\ldots,-9,-6,-3,0,3,6,\ldots,3n,\ldots\}$ باشد. عملیه معمولی جمع "+" را در S مدنظر بگیرید: (1). آیا عملیه جمع در S یک عملیه binary میباشد؟

عملیه جمع در S انجمنی است زیرا S یک subset یک set غیر محدود که در آن عملیه جمع است Associative میباشد.

(2). آیا S دارای عنصر عینیت تحت عملیهٔ جمع بوده میتواند؟ درصورت که باشد، کدام است؟

(3). آیا هر عنصر S دارای یک عنصر معکوس inverse تحت عملیهٔ "+" در S میباشد؟

(4). بنابران S تحت عملیهٔ + یک Group را تشکیل ______.

حل: (1). بلی، (2). بلی، 0، (3). بلی، (4). میدهد.

793. اگر $S=\{0,1,2,3\}$ دارای عملیهٔ binary که درجدول توضیح شده است باشد. فرضاً عملیه Associative انجمنی داده شده باشد. درینصورت آیا S یک Group را تشکیل داده میتواند؟ واگرنه؟ چرا نی؟

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

حل: بلی میتواند.

794. اگر $S=\{1,2,3,4\}$ دارای یک عملیهٔ binary $\odot$ بوده.
(1). بالفرض $\odot$ Associative باشد آیا S یک گروه Group شده میتواند؟ اگر نی چرا؟
(2). عو 2^{-1} را بدست آرید.

$\odot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

حل: (1). بلی. (2). 3 زیرا: $3\odot 2^{-1}=2^{-1}\odot 3=1$

۷۹۵. اگر $S=\{1,3,5,7\}$ که دارای عملیه binary ⊙ که حاوی خاصیت Associative در گروپ است طبق جدول متقابل موضوع است، آیا S یک Group را تحت عملیه ⊙ تشکیل میدهد؟ ویا خیر؟ در صورت نی — چرا نی؟

⊙	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

حل: بلی

۷۹۶. اگر $S=\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$ باشد، آیا S تحت عملیه ضرب طوریکه در جدول نشان داده شده یک گروه Group را تشکیل میدهد ویا خیر؟

$\cdot$	1	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
1	1	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	1
$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

حل: بلی. توجه نمائید که S، set جذرالمکعبی 1 Cube-roots of 1 است.

۷۹۷. یک set، G که دارای عملیه binary * باشد یک Group را تشکیل میدهد در صورتیکه:

(1). $\forall x,y,z \in G \Rightarrow$ ______ = ______

(2). یک عنصر e در G تحت عملیه * موجود باشد طوریکه: $\forall x \in G \Rightarrow$ ______ گردد.

(3). ضرور است که برای هر $x \in G$ یک عنصر $x^{-1} \in G$ موجود باشد طوریکه: ______ گردد.

حل:

(1). $(x*y)*z = x*(y*z)$

(2). $x*e = e*x = x$

(3). $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$

798. در مسأله 797 با خواص Group را بیان نمودیم، امّا ناگفته نماند که یک Group دارای یک رابطهٔ equivalence rel. نیز میباشد، که در حالیکه ما آنرا توسط علامهٔ "=" افاده نموده‌ایم. برای اینکه: "=" یک رابطهٔ متعادل را توضیح نماید باید که دارای خواص ذیل باشد؛ یعنی برای تمام $x, y, z \in G$ باید که:

(1). $x = x$ بوده، یعنی خاصیت ______ را دارا باشد؛

(2). اگر $x = y$ باشد، پس بالعکس $y = x$ بوده، یعنی: خاصیت ______ را دارا باشد؛

(3). اگر $x = y$ و $y = z$ باشد، پس باید که: $z = x$ بوده یعنی خاصیت ______ را دارا باشد.

بنابر دارا بودن شش خاصیت فوق گفته میشود که: "=" یک ______ میباشد.

حل: (1). انعکاسی، (2). تناظری، (3). انتقالی، رابطهٔ متعادل.

799. اگر رابطهٔ متعادل در یک set عبارت از "=" باشد، درینصورت هر یک عنصر set مساوی بخودش میباشد نه بکدام عنصر دیگر. پس درینحالت افادهٔ: $x = y$ این معنی را افاده میکند که دو شمول برای نشان دادن یک ______ بکار رفته است.

حل: عنصر element

800. اگر یک set، G دارای رابطهٔ متعادل عینیت identity "=" باشد، و درینصورت $x = y$ یعنی میدهد که x و y عبارت از دو شمول متفاوت که عین عنصر را نشان میدهند میباشد. بهمین قسم (a, x) و (a, y) عین عنصر set، $G \times G$ را نشان میدهند در صورتیکه * یک رابطهٔ binary در G بوده و * هر دو جوره ترتیب (a, x) و (a, y) را به ______ عنصر set G متنج map کند.

حل: عین یک

801. بالفرض رابطه معادل در یک Set عبارت از رابطه عینیت "=" باشد. پس درینصورت اگر $x=y$ باشد ما میتوانیم بنویسیم: $a*y=$ ——— ، زیرا که سمبول های x و y عین ——— را ارائه میکنند.

حل: $a*x$ ، عنصر element

802. بالفرض رابطه معادل در یک Set مورد بحث عبارت از رابطه عینیت "=" identity باشد. اگر x در افاده: $x*a$ به y عوض گردد، نتیجه: $y*a$ که حاصل میشود، بالضرور مشابه افاده اولی است یعنی: $x*a=$ ——— است.

حل: $y*a$

803. بالفرض رابطه "=" یک رابطه معادل کیفی و جبر الخواهش را ارائه کند، درینصورت:
(1). اگر $x=y$ باشد ضروری ——— که x و y عین عنصر را ارائه کنند. درین صورت این رابطه با رابطه تشابه بین مثلث که شباهت دارد.
(2). ازین رو عناصر عین صنف های Equivalence Class را تشکیل ——— .

حل: (1) نیست ، (2) میدهند.

804. اگر رابطه "=" یک رابطه معادل کیفی را نشان دهد، پس درینصورت تضمین شده نمیتوانند (1). ——— $= a*y$ ویا (2). $y*a =$ ——— ؛ زیرا $*$ میتواند که جوره های مرتب: (a,x) و (a,y) را به دو (3). عناصر ——— Set G تحت map کند. چه درینصورت (a,x) و (a,y) عبارت از دو جوره مرتب متمایز ——— Set میباشد.

حل: (1). $a*x$ ، (2). $x*a$ ، (3). مختلف ، (4). $G\times G$

805 . اگر * یک عملیه binary در یک set G بوده و اگر یک عنصر G مقابل (مخصوص) شان بخودش باشد نه بکدام عنصر دیگر. پس در صورت رابطهٔ موجود در G عبارت از رابطهٔ متعادل ـــــــ ویا ـــــــ میباشد.

حل: identity، عینیت ویا مساوات

806 . اگر * یک عملیه binary در یک set G بوده و افاده: $x = y$ تضمین شرطی را که x و y هردو سمبول عین عنصر را نشان میدهند کرده نتواند. درصورت رابطه "=" عبارت از یک رابطهٔ متعادل ـــــــ میباشد.

حل: خشب الخورهش ویا کیفی

807 . برای جلوگیری از وقوع سوء تفاهم، قرار ذیل را وضع مینمایم: اگر یک رابطه binary در یک set G، با رابطهٔ "=" مطابقت کنند طوریکه اگر $x = y$ باشد (درحالیکه "=" رابطه متعادل identity عینیت را افاده میکند) برای هر $a \in G$ ما خواهیم داشت:

(1) . $a * x =$ ـــــــ و (2) . ـــــــ = ـــــــ

حل: (1) . $a * y$ ، (2) . $x * a = y * a$

808 . یک عملیه ـــــــ که خواص ذیل را تعقیب میکنند، گفته میشود که عملیه مذکور با شاش رابطه عینیت "=" خوب تعریف شده well-defined میباشد:-

(1) . $a * x = a * y$

(2) . $x * a = y * a$

حل: binary

III. اثبات بعضی قضایای مربوط گروه ها

Proofs of Some Theorems On Groups

در مرحلهٔ اول این قسمت پروگرام ما بعضی خواص گروه Groups را که اساس آن ها بعضی قضایای مربوط Groups اقامه و اثبات شده میتوانند ترتیب و تنظیم میکنیم. در اینجا برای اثبات قضایا شیوهٔ را پیروی میکنیم که در هندسهٔ اقلیدسی Eucleadian Geom. معمول است. ادعای صحت حقیقت هر مرحلهٔ یک قضیه را بنا بر یکی از سه قاعدهٔ ذیل متکی نموده و استدلال میکنیم:

1. باساس فرضیه: ممکن ادعای ما جزء فرضیه باشد، و یا:
2. باساس اصول: ممکن ادعای ما بنا بر اصول که در Panel-10 خلص گردیده اند قابل قبول باشد، و یا:
3. باساس نتایج قضایای تثبیت شده: ممکن ادعای ما بنا بر حکم قضایای که از قضیهٔ مورد بحث پیشتر اثبات گردیده مورد قبول واقع گردد.

به Panel-10 مراجعه فرمائید، در آنجا تعریف یک گروه G را با اساسات خواص مربوط آن مشاهده خواهید نمود. آن ها به علایم: G_1، G_2، G_3، E_1، E_2، E_3، B_1 و B_2 و به تعریف-1 و تعریف-2 نشانی شده اند.

که برای سهولت ما خواص گروه Group را توسط این علایم افاده میکنیم. تذکر باید داد که این علامه گذاری صرف برای سهولت کار در این پروگرام قبول شده و کدام عمومیت ندارد. توقع نمیرود که استاد و یا شاگرد ریاضی بدون آنکه از موضوع قرارداد های Panel-10 مطلع باشد به این علایم و Notations کدام عمومیت بخشد. بهتر است قبل از آنکه به استعمال این علایم اقدام گردد به Panel-10 مراجعه شود و به مفاهیم که توسط این علایم ارائه میشوند آشنائی حاصل نمائید. ضمناً بهتر خواهد بود که اگر

اگر اصطلاحات معمولی داخل هر مفهوم مانند: انعکاسی (reflexive)، تناظری (Symmetric)، انتقالی (transitive) داخل این که در موقع استعمال مفهوم مربوط شان بکار برده شوند، چه درین صورت افاده مطلب (مفهوم) نزد هر ریاضیدان واضح و مشخص میباشد. پس درین صورت اگر بعوض "G" عبارت: "* یک عملیه binary انجمنی است" استعمال گردد، مطلب بصورت واضح تر و روشن تر افاده میشود. علاوه برآن بنابر پیروی ازین روش خواننده به اصطلاحات معمولی درجه آشنائی بیشتر حاصل کرده میتواند.

بعضی از بیانیه های صحیح بحیث نتایج قضایای ثابت شده در Panel-11 درج گردیده اند. از Panel-11 مانند Panel-10 بنابر ضرورت استفاده شده میتوانید. اما تذکر باید داد از استعمال آن نتایج مربوط Panel-11 که قضایای مربوط آن به اثبات نرسیده باشد خود داری نمائید.

از شروع مسأله مربوط چوکات 818 اثبات قضایا بشکل بیشتر رسمی و فارمل Formal را بخود اختیار میکند. از زمانیکه به بررسی و ثبوت یک قضیه آغاز میکنید، سعی دارید تا خود را بدلیل واقعی هر مرحله اثبات قضیه مطلع و واقف سازید. برای اینکه در عمق موضوع رسیده باشید سعی دارید تا قضیه ای مانند قضیه مورد بحث اقامه کرده و اونرا اثبات کرده بتوانید. کدام دسته قوانین set of rules در ریاضی موجود نیست که با استفاده ازان ساختمان اثبات هر نوع قضایای ریاضی تضمین شده بتوانند. اما این بهترین توصیه است که در حل یک نتیجه هر مرحله آنرا بغور و دقت تام بررسی کنید.

کدام دلیل واقعی موجود نیست تا باشما معتقد گردیم که هر ثبوت یک قضیه یگانه ثبوت و اثبات صحیح آن است. یگانه ایجاب برای اثبات صحیح یک قضیه آن است که صحت حقیقی بودن هر مرحله آن قدم بقدم تحقیق و بررسی شود، تا اینکه نتیجه واقعی مطلوب حاصل گردد.

809. اگر G یک Group بوده درصورتیکه $p \in G$ باشد، درانصورت $p=p$ میشود. چرا؟ به Panel-10 مراجعه شود.

حل: باساس E_1 (خاصیت انعکاسی رابطهٔ: "=")

810. اگر G یک Group و $x,y,p \in G$ باشند. درصورتیکه $x=y$ باشد، پس: $p*x=p*y$ میشود. چرا؟

حل: باساس B_1 ("=" یک رابطهٔ well-defined در G است.)

811. اگر $p,q \in G$ بوده درحالیکه G یک Group است، درصورتیکه: $p=q$ باشد، پس: $q=p$ میباشد. چرا؟

حل: باساس E_2 (خاصیت تناظری رابطهٔ: "=")

812. فرضاً $p,q,r \in G$ بوده درحالیکه G یک Group میباشد. اگر $p=q$ و $q=r$ باشد، پس $p=r$ میشود، چرا؟

حل: باساس E_3 (خاصیت انتقالی رابطهٔ: "=")

813. اگر G یک Group و $p,q,r \in G$ باشند، پس درانصورت: $p*(q*r)=(p*q)*r$ میشود. چرا؟

حل: باساس G_1 (خاصیت انجمنی Group، Associativity)

814. اگر G یک Group بوده و $p \in G$ باشد. اگر p^{-1} عنصر معکوس p inverse باشد، ازچه میدانید که p^{-1} موجود بوده و $p^{-1} \in G$ میباشد.

حل: با شاش G_3 ، شرط وجود عنصر معکوس p در Group G

۸۱۵. اگر G یک گروه Group و $p \in G$ باشد با استفاده (با شاش G_3) میدانیم که p^{-1} موجود بوده و $p^{-1} \in G$ میباشد. درینصورت: $p * p^{-1} = e$ میشود، چرا؟

حل: با شاش تعریف 2 : Panel-10

۸۱۶. اگر G یک Group بوده و $m, n, p, q \in G$ باشند. درصورتیکه: $n * p = n * q$ باشد؛ درینصورت: $m * (n * p) = m * (n * q)$ میشود، چرا؟

حل: با شاش B_1 . توجه فرمائید! $n * p \in G$ و $n * q \in G$ ما B_1 را استعمال مینمائیم درصورتیکه x بعوض $n * p$ و بجای y $n * q$ فرض شده و a بجای m فرض شود.

۸۱۷. اگر $p, q \in G$ باشد درصورتیکه G یک Group است، چون "$*$" یک عملیه binary در G است، پس $p * q \in G$ میباشد. لذا $e * (p * q) = p * q$ میشود. چرا؟

حل: بنابر تعریف 1 : درصورتیکه x عبارت از $p * q$ فرض شود.

۸۱۸. ثبوت نمائید که در یک Group اگر $p = q$ و $q = r$ باشد $r = p$ میشود.

Proof: 1. ∴ $p = q$, $q = r$ . . . مفروض

2. ∴ $p = r$ . . . . ——

3. ∴ $r = p$ . . . . ——

Q.E.D.

حل: (1). E_3 و (2). E_2

819. اثبات مسأله چرکات 818 را با کمی تفاوت در ذیل مطالعه کنید:
در یک Group ، G اگر $a=b$ و $b=c$ باشد، ثابت کنید که $c=a$ میشود.

Proof:
1. $\because a=b, b=c$ . . . . . Hypothesis
2. پس $c=b, b=a$ . . . . . ——
3. $\therefore c=a$ . . . . ——

Q.E.D.

حل: (2) E_2 و (3) E_3

*820. در یک Group G اگر $a=b$ و $c=b$ باشد، ثابت کنید که $a=c$ میشود.

Proof:
1. $\because \begin{cases} a=b \\ c=b \end{cases}$ . . . . . . Hypoth.
2. . . . . . . Hypoth.
3. $\therefore b=c$ . . . . ——
4. $\therefore a=c$ . . . . ——

Q.E.D.

حل: (با استفاده از بیانگری 1 و 3) (3) E_2 و (4) E_3

*821. در یک Group G اگر $a=b$ و $c=b$ باشد، ثابت کنید که $c=a$ است.

حل: رنیک دو ثبوت واضح مسأله را در ذیل تقدیم مینمائیم. شما ممکن کدام ثبوت صحیح دیگر آن را نیز پیدا کرده بتوانید:

Proof 1:

ثبوت : در ذیل بدو طریقه این مسأله باثبات رسیده، شما ممکن بکدام طریقه دیگر نیز به حل آن قادر گردید.-

Proof: 1

ثبوت اول :-

1. $\because a=b,\ c=b$ . . . . Hypothesis مفروض

2. پس $b=c$ . . . . E_2

3. $\therefore a=c$ . . . . E_3 (با شمول 2و1 فوق)

4. پس $c=a$ . . . . E_2

Proof: 2

ثبوت دوم :

1. $\because a=b,\ c=b$ . . . . Hypothesis مفروض

2. پس $b=a$ . . . . E_2

3. $\therefore c=a$ . . . . E_3 (با شمول جزء دوم 1 و 2)

Q.E.D.

822. ثبوت کنید که در یک Group G اگر $a=b$، $b=c$ و $c=d$ باشد پس $a=d$ میشود.

Proof:

1. $\because a=b,\ b=c$ . . . . Hypothesis

2. پس $a=c$ . . . . E_2

3. $\because c=d$ . . . . —

4. $\therefore a=d$ . . . . —

Q.E.D.

حل : Hypothesis (3)، E_2 (4).

در اثبات حقایق ریاضی (بصورت معمول) در یک مرحله‌ای که استدلال حقیقت آن بکدام قسمت فرضیه اتکا می‌یابد محض از همان قسمت فرضیه در استدلال نام برده میشود که به آن استدلال اتکا دارد، نه از تمام فرضیه.

823. ثبوت کنید که اگر در یک Group G، $a=b$، $b=c$ و $d=c$ باشند پس $a=d$ میباشد.

Proof:

1.	$\because \; a=b \;,\; b=c$	فرضیه
2.	پس $\; a=c$	E_3
3.	$\because \; d=c$	Hypoth.
4.	پس $\; c=d$	E_2
5.	$\therefore \; a=d$	E_3 (با استعمال 4، 2)

Q.E.D.

824. در یک Group G اگر $b, x, y, z \in G$ باشند، اگر $x=y$ و $b*y=z$ باشد، ثابت کنید که $z=b*x$ میشود.

Proof:

1.	$\because \; x=y \;,\; b\in G$ ...	فرضیه
2.	پس $\; b*x = b*y$ ...	B_1
3.	$\because \; b*y=z$ ...	Hyp.
4.	$\therefore \; b*x=z$ ...	E_3 (با استفاده از 3، 2)
5.	یا $\; z=b*x$ ...	E_2

Q.E.D.

توجه نمائید! از تعقیب مراحل اثبات فوق دیده میشود که در بیانیهٔ (1) برای آنکه افادهٔ (2) را حاصل نمائیم ما محض دو افادهٔ فرضیهٔ قضیه را انتخاب کرده ایم. منظور ما ازین انتخاب عبارت از توصل به نتیجهٔ قضیه است، یعنی بدست آوردن افادهٔ: $z=b*x$ میباشد که در قسمت اول قضیه داده نشده است، بلکه در قسمت اخیر قضیه بحیث حکم اثبات از ما خواسته شده است.

825. اگر G یک Group و $b, x, y, z \in G$ بوده، در صورتیکه: $x=y$ ، $y*z=b$ باشد، ثبوت نمائید که $x*z=b$ میباشد.

Proof:

1. $\because \; x=y \;,\; z\in G$ ... فرضیه

2.	پس	$x*z = y*z$	B_2
3.	امّا	$y*z = b$	فرضیه
4.	∴	$x*z = b$	E_3 (با استفادهٔ 2 و 3)

Q.E.D.

826. یادداشت 2، note 2، Panel-10 به تحقیق مطالعه کنید. با استفاده از استعمال B_1 و یا B_2 شما باید که خواه بطرف چپ هر دو عضوی مساوات و یا بطرف راست هر دو عضوی یک مساوات عملیهٔ مورد نظر را اجرا نمائید. هیچ یک خاصیتی در Panel-10 موجود نیست که صحت حقیقت بودن افاده مانند:

" در یک Group، G اگر $x,y,z \in G$ بوده درصورتیکه $x=y$ باشد پس: $z*x = y*z$ میشود. " را در یک گروپ Group تضمین کند.

ضمناً تأکید باید نمود که استعمال افاده مانند: $z*x = y*z$ (درصورتیکه $x=y$ باشد) طوریکه در الجبر بسیط معمول است در Groups همیشه درست نیست. بطور مثال اگر در Panel-7 به جدول پرورش‌های درجه 3 ملاحظه فرمائید، خواهید دید: اگرچه $d=d$ میباشد، امّا $e\cdot d \neq d\cdot e$ است. چرا؟

حل: زیرا: $e\cdot d = b$ است، حالانکه: $d\cdot e = c$ است، چون: $b \neq c$ است، لذا: $e\cdot d \neq d\cdot e$ میشود.

827. اگر عملیهٔ binary: " * " در یک Group G دارای خاصیت ــــ باشد، واضح است که درینصورت برای عناصر: $a,b,c \in G$، درصورتیکه $a=b$ باشد، پس نوشته میتوانیم که: $a*c = c*b$.

امّا درین مبحث ما به شکل عمومی Group شرح کار داریم، نه بصورت خاص گروه Group که دارای یک عملیهٔ binary ــــ Commutative باشد. زیرا خاصیت تبدیلی در لست خواص عمومی Group موضوع بحث ما شامل نیست. Groupهای که دارای خاصیت ــــ نیز میباشند، یک نوع خاص Group بوده بنام: Abelian Groups و یا Commutative Groups یاد میشوند. که بعداً ازان صحبت خواهیم کرد. حال در یک Group G.

اگر $a=b$ و $x \in G$ باشد به استفاده از استعمال B_1 با نوشته میتوانیم که: $x*a = x*b$

و بهمین قسم: با استفاده از استعمال B_2 ما میتوانیم بنویسیم که: ________.

حل: $a*x = b*x$

*828. در یک Group G اگر $a, b, c, d \in G$ بوده درصورتیکه $a=b$ و $c=d$ و همچنان $b*c=d$ باشد، با اثبات برسانید که $a*c=d$ میباشد.

Proof:

1.	$\because$	$a=b$ ، $c \in G$ . . .	Hypothesis
2.	پس	$a*c = b*c$ . . .	B_2
3.	$\because$	$b*c = d$	Hypothesis
4.	$\therefore$	$a*c = d$	E_3 (با استفاده از 3،2)

Q.E.D.

تبصره: ازین به بعد موضوع شمول نکوده عناصر را در فرضیه (Hypoth.) یک Group تذکر نمیدهیم. پس درصورتیکه در فرضیه از کدام عنصر نام برده شود، شما تصور نمائید که عنصر مذکور شامل آن Group مورد بحث میباشد. بهمین قسم ازین به بعد در اثبات نیز موضوع شمول آن عناصر را که در فرضیه ازان ها نام برده شده (در Group مربوطهٔ آن) تذکر نمیدهیم. اما اگر غیر از عناصر یکه در فرضیه ازان ها نام برده شده کدام عنصر دیگر در اثبات حصه بگیرد درینصورت ضرورت است تا موضوع شامل بودن آنرا در Group توضیح نمائیم، بطور مثال، G_2، وجود عنصر identity را در هر Group تضمین میکند. بهمین قسم: برای هر $x \in G$، G_3 وجود یک عنصر x^{-1} را در هر G تضمین میکند، طوریکه: $x^{-1} \in G$ میباشد. درصورتیکه G یک گروه Group فرض شود بصورت خودبخودی برای هر $x \in G$ یک $x^{-1} \in G$ موجود میشود.

829 . در یک Group G اگر $x=y$ و $z*y=w$ باشد، ثابت کنید که: $z*x=w$ میشود.

Proof:

1. $\because$ $x=y$ . . . . . Hypothesis
2. پس $z*x=z*y$ . . . . B_1
3. $\because$ $z*y=w$ . . . . Hypothesis
4. $\therefore$ $z*x=w$ . . . . E_3 (با استفاده از 3 ، 2)

Q.E.D.

830 . در یک Group G اگر $x=y$ و $y=z$ باشد، ثابت کنید که: $a*x=a*z$ میباشد.

Proof (1): در ذیل با دو proofs این مسأله را توضیح میدهیم:

1. $\because$ $x=y$ ، $y=z$ . . . . Hypothesis
2. پس $x=z$ . . . . . E_3
3. $\therefore$ $a*x=a*z$ . . . B_1

Q.E.D.

Proof (2):

1. $\because$ $x=y$ ، $y=z$ . . . . . . Hypothesis
2. پس $a*x=a*y$ ، $a*y=a*z$ . . . B_1
3. $\therefore$ $a*x=a*z$ . . . . . . E_3

Q.E.D.

831 . در یک Group G اگر $x=y$ و $y=z$ باشد، ثابت کنید که: $x*b=y*b$ میباشد.

Proof (1): اینک در ذیل دو proofs مسأله را توضیح میدهیم:-

1. $\because\ x=y,\ y=z$ . . . . . Hypothesis
2. پس $x=z$ . . . . E_3
3. $\therefore\ x*b=z*b$ . . . . . . B_2

Proof (2):

1. $\because\ x=y,\ y=z$ . . . . . . Hypothesis
2. پس $x*b=y*b,\ y*b=z*b$ . . B_2
3. $\therefore\ x*b=z*b$ . . . . . . E_3

Q.E.D.

832. اگر در یک Group G ، $a=x$ ، $a*b=c*d$ باشد، ثبوت کنید که $x*b=c*d$ میگردد.

Proof:

1. $\because\ a=x$ . . . . Hypothesis
2. پس $a*b=x*b$ . . . . . B_2
3. وهم $x*b=a*b$ . . . . E_2
4. $\because\ a*b=c*d$ . . . . Hypothesis
5. $\therefore\ x*b=c*d$ . . . . E_3 (باستفاده از 3، 4)

Q.E.D.

833. در یک Group G اگر $b=x$ ، $a*b=c*d$ باشد، ثابت کنید که $a*x=c*d$ میباشد.

Proof:

1. $\because\ b=x$ . . . . . . Hypothesis
2. پس $a*b=a*x$ . . . . . B_1
3. یا $a*x=a*b$ . . . . . E_2
4. $\because\ a*b=c*d$ . . . . . Hypothesis

5. ∴ $a*x = c*d$ . . . . E_3

834 . در یک Group G اگر $a=x$ و $c=y$ و $a*b=c*d$ باشد، ثابت کنید که $x*b=y*d$ میشود.

Proof:

1. ∵ $a = x$ . . . . Hypothesis
2. پس $a*b = x*b$ . . . . . B_2
3. یا $x*b = a*b$ . . . . . E_2
4. ∵ $a*b = c*d$ . . . . . Hypothesis
5. ∴ $x*b = c*d$ . . . . . E_3
6. ∵ $c = y$ . . . . Hypothesis
7. پس $c*d = y*d$ . . . . . B_2
8. ∴ $x*d = y*d$ . . . . . . E_3 (با استفاده از 7، 5)

Q.E.D.

835 . تمرین قضیهٔ اول Theorem-1 : در یک Group G اگر $a=b$ و $c=d$ باشند، ثابت کنید که: $a*c=b*d$ میشود.

Proof:

1. ∵ $a = b$ . . . . ____
2. پس $a*c = b*c$ . . . . . ____
3. ∵ $c = d$ . . . . ____
4. پس $b*c = d*c$ . . . . . ____
5. ∴ $a*c = d*c$ . . . . . ____

Q.E.D.

حل : (1). Hypoth، (2). B_2، (3). Hypoth، (4). B_1، (5). (با استفاده از 4، 2) E_3.

تبصره: درحقیقت که نتیجهٔ اثبات آن برای ثبوت حقایق دیگر بیشتر مورد استعمال دارد. ما ازان بنام قضیه ویا Theorem یاد میکنیم. نتایج حاصل شده درین قضایا را در ~~Panel-11~~ با شماره متوالی و پی درپی که درین کتاب باثبات برسند در Panel-11 درج میکنیم؛ عندالضرورت ازین نتایج برای حل واثبات قضایا (ویا حقایق) بعدی بدون حرف زیاد و وقت استفاده شده میتواند. ناگفته نماند که از استعمال نتیجهٔ قضیه‌ای که هنوز باثبات نرسیده باشد استفاده مجاز نیست.

• 836. در یک گروه Group G اگر $a=b$ ، $c=d$ باشد، ثابت سازید که $a*d=b*c$ میشود. (با استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ اول که اثبات خانه مورد بحث خویش را شده تر ساخته میتوانید.)

Proof:

1. $\because\ a=b\ ,\ c=d$ . . . . Hypothesis
2. پس $d=c$ . . . . E_2
3. پس $a*d=b*c$ . . . . theorem-1 (استفاده از 1 و 2)

Q.E.D.

• 837. (1) در قضیه اول آیا ترتیب اجزای عملیه دارای کدام اهمیت ــــــ (میباشد ویا نمیباشد)؟
(2) به Panel-7 مشاهده کنید، خواهید دید که:
$e=e$ و هم $d=d$ میباشد،
آیا رابطهٔ $e\cdot d=d\cdot e$ در Panel-7 دارای حقیقت (صحت) ــــــ (میباشد ویا نمیباشد)؟

حل: (1) میباشد، (2) نمیباشد.

* 838. اگر در یک Group G: $x=y$ و $z=w$ و $z*y=b$ باشند، ثابت کنید که: $b=w*x$ میشود.

Proof:

1. ∵ $z = w$ . . . . Hypothesis
2. پس $w = z$ . . . . E_2
3. ∵ $x = y$ . . . . Hypothesis
4. پس $w * x = z * y$ . . . . ——
5. ∵ $z * y = b$ . . . . ——
6. پس $w * x = b$ . . . . ——
7. یا $b = w * x$ . . . . ——

Q.E.D.

حل: (4). قضیهٔ اول، (5). Hpoth، (6). E_3، (7). E_2.

839. در یک Group G اگر $x = y$، $z = w$ و $y * w = d$ باشد، ثابت کنید که $x * z = d$ میشود.

ما دو ثبوت این مسأله را در ذیل تقدیم میکنیم:

Proof(1):

1. ∵ $x = y$, $z = w$ . . . . Hypothesis
2. پس $x * z = y * w$ . . . . قضیهٔ اول
3. ∵ $y * w = d$ . . . . Hypothesis
4. ∴ $x * z = d$ . . . . E_3

Q.E.D.

میتوانیم که اثبات قضیهٔ فوق را بدون استعمال قضیهٔ اول طبق ذیل بنگاریم:

Proof(2):

1. ∵ $x = y$ . . . . Hypothesis
2. پس $x * z = y * z$ . . . . . . B_2
3. ∵ $z = w$ . . . . Hypothesis

4. پس $y*z=y*w$ .... E_1

5. هم $x*z=y*w$ .... E_3

6. ∴ $y*w=d$ .... Hypothesis

7. ∴ $x*z=d$. .... E_3

Q.E.D.

840. تا حال در یک Group ما حقیقت صحت بودن روابط ذیل را ثابت کرده‌ایم:

(1). اگر $a*b=c*d$ و $a=x$ باشد، پس $c*d=$ ______ میشود.

(2). اگر $a*b=c*d$ و $b=x$ باشد، پس $c*d=$ ______ میشود.

(3). اگر $a*b=c*d$ و $c=x$ باشد، پس ______ $=$ ______ میشود.

(4). اگر $a*b=c*d$ و $a=x$ و $c=y$ باشند،
پس ______ $=$ ______ میشود.

این لست بالدشان میدهد که در افاده‌های مختلفه مانند فوق یک عنصر
عنصر معادل خود را تعویض شده میتواند.

حل: (1). $x*b$، (2). $a*x$، (3). $x*d=a*b$.
(4). $y*b=x*b$.

841. بعد ازین در اثبات مسایل ویا قضایای ما عناصر معادل را بدون آنکه به تعویض کردن
آن کدام استدلال نمائیم یکی را بجای دیگرش عوض میکنیم. بطور مثال:

1. $(a*a^{-1})*b=(c*c^{-1})*d$ .... Hypoth. بالفرض:

2. پس $\underset{}{\overset{(1)}{\underline{\qquad}}}*b=\overset{(2)}{\underline{\qquad}}*d$ .... تعریف (2).

3. ویا $\overset{(3)}{\underline{\qquad\qquad}}$ .... تعریف (1).

در حل فوق به مراحل 2 و 3 بصورت خودی ما عناصر $\overset{(4)}{\underline{\qquad}}$ را
به آن $\overset{(5)}{\underline{\qquad}}$ تعویض نمودیم.

حل: (1). e، (2). e، (3). $b=d$، (4). معادل، متساوی، (5). حاصل.

842. ثابت کنید که در یک Group G : $a^{-1}*(a*b)=b$ میشود.

Proof:

1. $\because$ $a^{-1}*(a*b)=(a^{-1}*a)*b$ . . . . . G_1
2. دیا $a^{-1}*(a*b)=e*b$ . . . . . تعریف 2
3. $\therefore$ $a^{-1}*(a*b)=b$ . . . . —

Q.E.D.

حل : (3) . تعریف 1

843. در یک Group G ثابت که: $(x*y)*y^{-1}=x$ میشود.

Proof:
1. $\because$ $(x*y)*y^{-1}=x*(y*y^{-1})$ . . . . . G_1
2. دیا $(x*y)*y^{-1}=x*e$ . . . . . . تعریف 2
3. $\therefore$ $(x*y)*y^{-1}=x$ . . . . . . تعریف 1
Q.E.D.

844. اگر ما بخواهیم که حقیقت ذیل را در یک Group ثابت نمائیم یعنی :
درصورتیکه : $x*y=x*z$ باشد، پس : $y=z$ میباشد.
درینصورت ما باید که از $x*y$ و $x*z$ شروع نموده و طرق را جستجو کنیم
تا توسط آن بتوانیم که x را حذف کنیم، تا درنتیجه عناصر : y و z در
افاده تنها بمانند. برای رسیدن باین هدف بخاطر بیاورید حقیقتی را :-
که هریک از عناصر یک Group دارای یک عنصر inverse میباشد.
درینصورت اگر عنصر معکوس عنصر x، Group که عبارت از
x^{-1} است. به هردو طرف چپ هردو عضوی رابطه تحت عملیهٔ داده شده
"*" قرار داده شود بعد از طی مراحل لازمی به نتیجه مطلوب رسیده میتوانیم،
بطور مثال : اگر : $x*a=x*b$ باشد، ثابت نمائیم که
$a=b$ میباشد.
برای رسیدن باین هدف حل این مسئله را طبق ذیل آغاز مینمائیم :-

$$x*a = x*b$$
$$x^{-1}*(x*a) = \_\_\_\_$$

حل : $x^{-1}*(x*b)$

845. از حل مسأله فوق ما داریم : $x^{-1}*(x*a) = x^{-1}*(x*b)$.
حال بنابر قانون ____ ، نوشته میتوانیم که :
$(x^{-1}*x)*a = (x^{-1}*x)*b$

حل : انجمنی ویا Associative

846. از حل مسأله 845 ما داریم : $(x^{-1}*x)*a=(x^{-1}*x)*b$.
حال با استفاده از تعریف 2 ما نتیجه : ____ = ____ را
بدست آورده میتوانیم که بنابر ____ نتیجه مطلوب $a = b$
حاصل میگردد.

حل : $e \cdot a = e \cdot b$ ، تعریف 1 ،

847. قضیه دوم : Theorem - 2 : در یک Group G اگر :
$x*y=x*z$ باشد، ثابت کنید که : $y = z$ میباشد.

Proof:

1.	$\because$	$x*y = x*z$	Hypothesis
2.	$\because$	$x^{-1} \in G$	G_3
3.	پس	$x^{-1}*(x*y) = x^{-1}*(x*z)$ . .	B_1
4.	یا	$(x^{-1}*x)*y = (x^{-1}*x)*z$ . .	G_1
5.	یا	$e * y = e * z$ . .	تعریف 2
6.	$\therefore$	$y = z$	تعریف 1

Q.E.D.

848. در یک Group G اگر: $a*b = a*c$ و $b = d$ باشد، ثابت کنید که $c = d$ میشود.

Proof:

1. $\because$ $a*b = a*c$ . . . . Hypothesis
2. پس $b = c$ . . . . قضیه دوم
3. دیا $c = b$ . . . . E_2
4. $\because$ $b = d$ . . . . فرضیه
5. $\therefore$ $c = d$ . . . . E_3

Q.E.D.

849. در یک Group G اگر $x*y = x*z$ و $a*z = a*w$ باشد، پس ثابت کنید که $y = w$ میباشد. (از قضیه دوم مستفید شوید.)

Proof:

1. $\because$ $x*y = x*z$ و $a*z = a*w$ . . . مفروض
2. پس $y = z$ و $z = w$ . . . قضیه دوم
3. $\therefore$ $y = w$ . . . . E_3

Q.E.D.

850. قضیه سوم Theorem 3 :- قانون اختصار دست راست "Right Cancelation Law"

در یک Group G: اگر $y*x = z*x$ باشد، پس $y = z$ میباشد.

کمک :- بهردو طرف عضو معکوس x^{-1} را تحت عملیه "*" قرار دهید.

Proof:

1. $\because$ $a*x = b*x$ . . . . Hypothesis
2. $\exists\ x^{-1} \in G$ . . . . G_3
3. پس $(a*x)*x^{-1} = (b*x)*x^{-1}$ . . B_2
4. دیا $a*(x*x^{-1}) = b*(x*x^{-1})$. G_1

5.	پس	$a*e = b*e$	تعریف دوم
6.	$\therefore$	$a = b$	توریف 1

Q.E.D.

851. در یک Group G اگر $a*b=c*b$ و $c=d$ باشد، ثابت کنید که: $a=d$ میشود. (خاطرنشان: از استعمال نتیجه قضیه سوم استفاده گردید.)

Proof:

1.	$\because$	$a*b=c*b$	Hypothesis
2.	پس	$a=c$	قضیه سوم
3.	$\because$	$c=d$	Hypothesis
4.	$\therefore$	$a=d$	E_3

Q.E.D.

852. در یک Group G اگر $a*x=a*y$ و $z*b=w*b$ باشد، پس ثابت کنید که $x*z=y*w$ میشود. (خاطرنشان: از استعمال نتایج: قضیه دو - قضیه سه و بالاخره قضیه اول استفاده نمائید.)

Proof:

1.	$\because$	$a*x=a*y$	Hypothesis
2.	پس	$x=y$	قضیه 2
3.	$\because$	$z*b=w*b$	Hypothesis
4.	پس	$z=w$	قضیه 3
5.	$\therefore$	$x*z=y*w$	قضیه 1

Q.E.D.

853. در یک Group G اگر $a*b=c*b$ و $x*c=x*d$ باشد، ثابت کنید که: $d=a$ میباشد.

Proof:

1.	$\because$	$a*b=c*b$	Hypothesis

2.	∴	$a = c$	قضیهٔ سوم (3)
3.	∵	$x*c = x*d$	Hypothesis
4.	∴	$c = d$	قضیهٔ دوم 2
5.	∴	$a = d$	E_3
6.	∴	$d = a$	E_2

Q. E. D.

854. اگر در یک Group G، $a*b=c*b$ و $x=y$ باشد ثابت کنید که $a*x=c*y$ میگردد.

Proof:

1.	∵	$a*b = c*b$	Hypothesis
2.	∴	$a = c$	قضیهٔ سوم
3.	∵	$x = y$	Hypothesis
4.	∴	$a*x = c*y$	قضیهٔ اول

Q. E. D.

855. تذکر: در دو قانون اختصار (Cancelation laws) که در قضایای 2 و 3 ثابت شد ترتیب دارای اهمیت است. چه ما در یک Group بصورت عموم - حقیقت موضوع: "اگر $a*x=x*b$ باشد، پس $a=b$ میباشد." را ثابت کرده نمیتوانیم. بطور مثال: اگر به گروه‌های Groups مربوط به Panel-۲ مشاهده کنید، شما خواهید دید که: $d\circ c=$ ___ و هم $b\circ d=$ ___ میباشند. ازین که نتیجه‌گیری خواهید نمود که: $b=c$ میشود، حالانکه در حقیقت $b\neq c$ میباشد. اما درصورتیکه عملیهٔ binary مورد بحث قرینهٔ "*" تبدیلی Commutative باشد در آنصورت ما این مشکلات را نداریم.

حل: e، e،

856. قضیه چهارم : Theorem - 4

اگر در یک Group G : $a=b$ باشد، $a^{-1}=b^{-1}$ میباشد.

Proof :

1. ∵ $a=b$ .... —
2. پس $\exists a^{-1} \in G$ ...... G_3
3. پس $a^{-1}*a = a^{-1}*b$ ..... —
4. همچنان $\exists b^{-1} \in G$ ..... G_3
5. پس $(a^{-1}*a)*b^{-1}=(a^{-1}*b)*b^{-1}$. —
6. ∵ $(a^{-1}*a)*b^{-1}=a^{-1}*(b*b^{-1})$. —
7. پس $e*b^{-1}=a^{-1}*e$ .. —
8. ویا $b^{-1}=a^{-1}$ .... —
9. ∴ $a^{-1}=b^{-1}$ .... —

Q.E.D.

حل : (1). فرضیه، (3). B_1، (5). B_2، (6). G_1
(7). تعریف 2، (8). تعریف 1، (9). E_2

857. اگر در یک Group G : $a*b=c*d$ و $b=d$ باشد،
ثابت کنید که : $a=c$ میباشد.

Proof:

1. ∵ $a=c$ .... Hypothesis
2. و $a^{-1}=c^{-1}$ .... قضیه چهارم
3. ∵ $a*b=c*d$ ...... Hypothesis
4. پس $a^{-1}*(a*b)=c^{-1}*(c*d)$ . . قضیه اول
5. ∵ $(a^{-1}*a)*b=(c^{-1}*c)*d$ . . G_1
6. پس $e*b = e*d$ ... تعریف 2
7. ∴ $b=d$ .... تعریف 1

Q.E.D.

۸۵۸. هرگاه در Group G اگر $a*b=c*d$ و $b=d$ باشد، ثابت کنید که $a=c$ میشود.

Proof:

1.	∵	$b=d$	Hypothesis
2.	و	$b^{-1}=d^{-1}$	قضیهٔ چهارم
3.	∵	$a*b=c*d$	Hypothesis
4.	پس	$(a*b)*b^{-1}=(c*d)*d^{-1}$	قضیهٔ اول
5.	همچنان	$a*(b*b^{-1})=c*(d*d^{-1})$	G_1
6.	یعنی	$a*e=c*e$	تعریف 2
7.	∴	$a=c$	تعریف 1

Q.E.D.

۸۵۹. در مسایل مربوط حرکات ای: 860 الی 868 تا بعضی مفکوره های شده و بشیما بر ابتدائی را تکرار مینمائیم. بطور مثال: معادله شرطیه Conditional Equation را در نظر بگیرید: $3x+2=7$ در این صورت ما میگوئیم که: $x=$ —— عبارت از حل معادله —— مذکور است.

حل: 5/3، شرطیه دیا Conditional

۸۶۰. ما $x=5/3$ را عبارت از —— معادله شرطیه Conditional: $3x+2=7$ میدانیم، زیرا در صورتیکه: $x=5/3$ در حل معادله وضع شود، پس در آنصورت: $3x+2=3(5/3)+2=$ —— میشود.

حل: حل، 7

۸۶۱. در صورتیکه: $x=5/3$ باشد، معادله: $3x+2=7$ دارا حقیقت است. اگر بجز از: 5/3، x کدام قیمت دیگر را بخود گرفته نمیتوانند

تا معادلهٔ : $3x+2=5$ را تصدیق ویا تعقیب کنید.
پس درینصورت میگوئیم که حل : $x=5/3$ معادله فوق ——— است.

> حل : یگانه است ؛ یعنی : معادله مذکور یگانه حل $x=5/3$ را دارا دارا میباشد.

862. اگر $x \neq 5/3$ فرض شود، پس درینصورت : $3x+2 \neq 7$ میگردد،
حالانکه این فرضیه — فرضیهٔ اصلی ما را که عبارت از : $3x+2=7$ است
نقض میکند. بنابران حل $x=5/3$ یگانه حل است که معادله
مفروض را ——— میکند. ویا بعبارت دیگر حل $x=\frac{5}{3}$ حل ——— است.

> حل : تعقیب ویا تحقیق ویا تصدیق ، یگانه unique

863. معادله ——— : $2x-4=9$ را مدنظر بگیرید ، درصورتیکه
اگر معادله مذکور دارای یک حل باشد ، انعبارت است از ———.

> حل : شرطیه Conditional ، $13/2$

864. در صورتیکه : $2x-4=9$ باشد، $x=13/2$ میباشد ،
اگر $x \neq 13/2$ باشد ، درینصورت ——— میباشد.

> حل : $2x-4 \neq 9$

865. ما نشان دادیم که اگر کدام یک حل برای معادلهٔ : $2x-4=9$ موجود باشد
ان عبارت از $x=13/2$ میباشد. حالانکه ما نشان نداده ایم که
$x=13/2$ عبارت از حل معادله مذکور میباشد. وچنین میشود :
(1). اگر $x=\frac{13}{2}$ باشد پس $2x-4=2(\frac{13}{2})-4=$ ——— میشود.
(2). اگر $x=\frac{13}{2}$ است پس $2x-4=$ ——— میباشد.

> حل : (1). 9 ، (2). 9،

866 . ما بصورت خاص حل یک معادله شرطیه را از نظر گذشتانده دو مثال آنرا بررسی نمودیم و درنتیجه دیده شود که اگر یک معادله:

مانند: $2x-3=5$ دارای یک حل باشد ______ درینصورت آن حل ______ بوده و عبارت از ______ میباشد.

حل: شرطیه، یگانه unique، 4

867 . تا حال ما یکعده احتمالات زیاد را حذف نموده ایم: ما باید آنرا نشان دهیم که $x=4$ یک ______ معادلهٔ شرطیه: $2x-3=5$ است. ذیلاً آنرا نشان میدهیم:

درصورتیکه $x=4$ باشد، پس:

$$2x-3=2(4)-3=\text{______}$$ میشود

حل: حل، 5

868 . این حقیقت را اثبات باید نمود که بعضی عملیات در معادلات شرطیه معادلات تحت شرط را وادار میسازند که دارای عین حلها باشند. (هرگاه دو یا چند معادله شرطیه که دارای عین solution set و یا set حلها باشند بنام معادلات equivalent یاد میشوند.)

این حقیقت ثابت شده میتواند که معادله: $ax+b=c$ درصورتیکه a، b و c اعداد حقیقی Reals بوده و $a\neq 0$ باشد محض دارای یک ______ میباشد که انعبارت است از:

$$x=\text{______}$$

حل: حل یگانه، $x=\dfrac{c-b}{a}$،

در ذیل به اثبات ______ دو قضیه ای که درین موضوع روشنی می افگنند میتوانند اقدام نموده و در تحت عنوان گروه ها Groups آنرا مطالعه میکنیم:

869. قضیهٔ پنجم: Theorem-5:

در یک Group G، ثابت میکنیم که $a*x=b$ دارای یک حل یگانه موجود بوده که این حل عبارت از: $x=a^{-1}*b$ میباشد.

در اینجا ما باید دو چیز را باثبات برسانیم:

(1). اگر: $a*x=b$ باشد، پس: $x=$ ______ میباشد.

(2). اگر: $x=a^{-1}*b$ باشد، پس: ______ میباشد.

(3). بیانیهٔ 1 ایضاح میکند اگر یک حل موجود باشد آن عبارت از: ______ میباشد.

(4). بیانیهٔ 2 افاده میکند که $x=a^{-1}*b$ یک ______ معادله میباشد.

حل: (1). $a^{-1}*b$، (2). $a*x=b$
(3). $x=a^{-1}*b$، (4). حل

870. ثابت کنید که اگر $a*x=b$ باشد، پس: $x=a^{-1}*b$ میباشد.

Proof:

1.	$\because$	$a*x=b$	Hypothesis
2.	همچنان	$\exists\, a^{-1}\in G$	G_3
3.	پس	$a^{-1}*(a*x)=a^{-1}*b$	B_1
4.	پس	$(a^{-1}*a)*x=a^{-1}*b$	G_1
5.	هکذا	$e*x=a^{-1}*b$	تعریف 2
6.	$\therefore$	$x=a^{-1}*b$	تعریف 1

Q.E.D.

871. تا حال ما نشان دادیم که اگر: $a*x=b$ دارای کدام یک حل باشد، حل مطلوب عبارت از: $x=a^{-1}*b$ میباشد، حال نشان باید داد که: $x=a^{-1}*b$ یک حل آن میباشد.

درینصورت اثبات باید نمود اگر $x=a^{-1}*b$ باشد، پس $a*x=b$ میباشد.

Proof:

1. ∵ $x=a^{-1}*b$ . . . . . . Hypothesis
2. پس $a*x=a*(a^{-1}*b)$ . . . B_1
3. و $a*x=(a*a^{-1})*b$ . . . G_1
4. دیا $a*x=e*b$ . . . تعریف 2
5. ∴ $a*x=b$ . . . . . . تعریف 1

Q.E.D.

.872 قضیهٔ ششم : Theorem 6

در یک Group G، $y*a=b$ دارای یک حل یگانه بوده که آن عبارت از : $y=b*a^{-1}$ میباشد.

درا ینجا دو چیز را ثبوت باید نمود :-

1 – اگر : ______ باشد، پس : ______ میباشد،

2 – اگر : ______ باشد، پس : ______ میباشد.

حل : 1 –: $y*a=b$ باشد، پس $y=b*a^{-1}$ میباشد،

2 –: $y=b*a^{-1}$ باشد، پس $y*a=b$ میباشد.

.873 در یک Group G : $y*a=b$، دارای یک حل یگانه $y=b*a^{-1}$ میباشد.

Proof: (part one) قسمت اول

1. ∵ $y*a=b$ . . . . . . Hypothesis
2. also: $\exists\ a^{-1}\in G$ . . . . . . G_3
3. پس $(y*a)*a^{-1}=b*a^{-1}$ . . . B_2
4. دیا $y*(a*a^{-1})=b*a^{-1}$ . . . G_1

5. پس $y*e = b*a^{-1}$ . . . . . . تعریف 2
6. $\therefore$ $y = b*a^{-1}$ . . . . . . تعریف 1

Q.E.D.

Part Two: قسمت دوم :-

1. $\because$ $y = b*a^{-1}$ . . . . Hypothesis
2. پس $y*a = (b*a^{-1})*a$ . . . . B_2
3. پس $y*a = b*(a^{-1}*a)$ . . . . G_1
4. پس $y*a = b*e$ . . . . تعریف 2
5. $\therefore$ $y*a = b$ . . . . تعریف 1

Q.E.D.

Test VI : امتحان ششم :

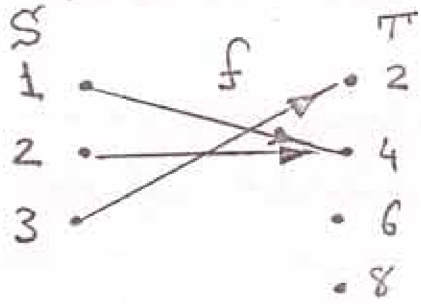
1. اگر S و T دو set غیر خالی باشند، هر subset
S×T بنام ______ یاد میشود.

2. فرضاً R یک رابطهٔ binary relation در S×T باشد، اگر $dom\,R = S$ باشد پس R بنام ______ یاد میشود.

3. فرض R یک رابطهٔ binary from S into T یعنی: از S در T باشد، اگر برای هر $x \in S$ تنها محض یک $y \in T$ موجود گردد طوریکه $(x,y) \in R$ گردد. پس درینصورت R بنام ______ یاد میشود.

4. فرضاً f یک تابع از S در T باشد پس برای هر $x \in S$ محض یک $y \in T$ موجود است طوریکه $(x,y) \in f$ میباشد. این یگانه $y \in T$ بنام ______ x تحت تابع f یاد میشود. و توسط افاده: ______ ارائه میگردد.

5. در یک مثال اگر $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{2,4,6,8\}$ بوده و بالفرض : $f=\{(1,4),(2,4),(3,2)\}$ باشد که ما آنرا توسط دیاگرام تیری طبق ذیل ارائه کرده میتوانیم :



درینصورت :

(1). $dom f=$ ______

(2). برای هر $x\in S$ محض یک ______ موجود است طوریکه $(x,y)\in f$ باشد ،

(3). $f(2)=$ ______

(4). آیا f یک تابع از S در T میباشد؟ چرا؟

(5). آیا f یک تابع از S بر T (onto) شده میتواند؟

6. اگر f یک تابع از S در T باشد پس درصورتیکه $ran f=T$ باشد، درینصورت f یک تابع از ______ میشود.

7. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{-1,0,1,2\}$ بوده واگر $R=\{(-1,1),(0,1),(1,2),(2,2)\}$ باشد. آیا R :

(1). یک تابع از S در T میباشد؟ چرا؟

(2). یک تابع از T در S میباشد؟ چرا؟

(3). شکل دیاگرام تیری آنرا رسم کنید.

(4). اگر یک ست ؛ $\{1,2\}=S_1$ بعوض S مدنظر گرفته شود: آیا R →

(a). یک تابع از T در S_1 شده میتواند؟

(b). یک تابع از T بر S_1 (onto) شده میتواند؟

(c). گراف (دیاگرام) تیری آنرا رسم کنید

تبصره: گرچه تا اکنون نتوانسته ایم که Group Theory (نظریهٔ گروه) را مجدد کافی بررسی نمائیم؛ با آنهم چند قضایای اساسی Group را ثابت نمودیم و تا اندازه راجع مفکوره یک ساختمان جبری معلومات حاصل کردیم.

شما از مطالعه هندسه اقلیدسی Euclidean Geom. میدانید که برای تثبیت قضایای هندسی - وجود یکعده اصول موضوعه postulates ضرورت است، حالانکه اگر این قضایات در اصول هندسی روی یکعده اشکال هندسی بنا یافته اند. مشابه به ساختمان هندسی در مطالعه ساختمان جبری گروه ها Groups ما یکعده set دیگر عناصر آن که مشخص نبوده و دارای یک رابطهٔ متعادل equivalence relation دلخواه arbitrary و یک عملیه binary operation دلخواه که مشخصات و خواص لیست شده Panel - 10 تصدیق میکند - سروکار داریم. قضایای ابتدایی که قبلاً ثابت شده اند بهر set عناصر مشخصه - که دارای یک رابطهٔ معادل equivalence relation و یک عملیه binary که خواص متذکره تعقیب کند تطبیق شده میتوانند. بطور مثال با میدانیم که set اعداد تام integers تحت عملیه جمع "+" معمولی یک Group را تشکیل میدهد. طوریکه عملیه "*" را به "+" و "$\bar{a}$" را به "$-a$" تعویض نمائیم. بهمین قسم set پرمیوتیشن ها permutations درجه 3 تحت عملیه "$\circ$" که رابطهٔ "متذکره" تعقیب میشود توسط ..." یک Group را میسازد. بنابران تمام قضایای تثبیت شده درین set مخصوص نیز قابل تطبیق میباشد.

درحقیقت در هر یک از set عناصر یکه دارای یک عملیه - binary operation و یک رابطه binary که خواص یک گروه ابستراکت abstract Group را تعقیب کند تمام قضایای تثبیت شدهٔ فوق را (ممکن با اندک تغیر سمبول) تطبیق کرده میتوانیم - و این یک دلیل مهمی برای مطالعهٔ ساختمان های جبری نیز شده. دلیل دیگری از مطالعهٔ این ساختمان های جبری اینست: که اگر یک set مشخصه تحت یک عملیه binary یک Group را تشکیل کرده بتواند - درینصورت شما میتوانید که یک مفکوره بهتر ساختمان ارا که

کرنابر صفت مغلق abstract set، و یا رابطهٔ binary و یا عملیهٔ binary آن تحت شعاع قرار گرفته باشد، تشخیص نمائید. یا بعبارهٔ دیگر به اندازه که یک set مغلق و یا عملیه binary آن مغلق باشد درصورتیکه شما بتوانید که set موصوف تحت عملیه مذکور شناختن یک گروه group را دارا میباشد، پس درینصورت (به احتمالات زیاد) شما میتوانید که صفت set ها (و یا علامه گذاری مشکل) و یا عملیه مغلق آنرا بصورت واضح بدانید. این نوع مسائل مغلق چه در ریاضیات و چه در خارج عالم ریاضیات به وافرت موجود است که فهمیدن آن هم در نفس خودشان مشکل بوده تا زمانیکه یکی از شناختن های جبری مطابقت نمودند فهمیدن و حل اینها به آسانی صورت گرفته میتوانند.

IV. میپنگ ها و انتقالات:

Mappings And Transformations.

874. اگر S و T دو set محدود finite بوده و f به شکل روستر roster آن باشد، درینصورت جواب به سوال که آیا:

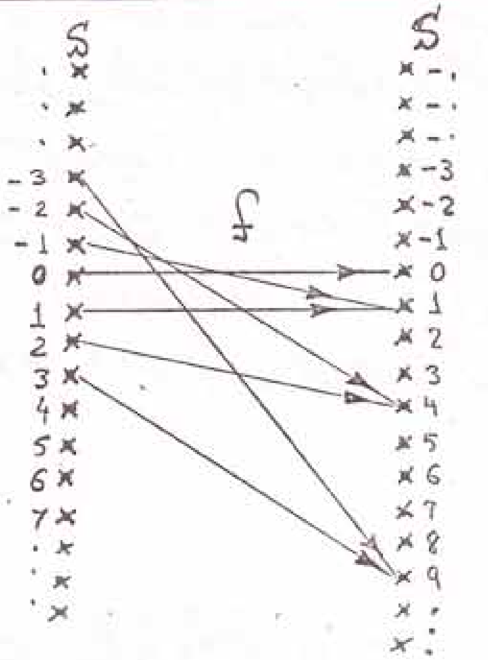
(1). dom f = ___ میباشد؟

(2). برای هر $x \in dom f$، ___ $y \in T$ موجود شده میتواند که رابطهٔ $(x,y) \in f$ را تحقیق کند، تا درینصورت f یک تابع از ___ به ___ را تشکیل دهد؟

مربوط به مطالعهٔ جوره های ترتیبی ordered pairs شامل f میباشد.

حل: (1). S ، (2). محض یک، S به T.

875. اگر S عبارت از set اعداد تام Integers بوده و
$f=\{(x,y) \mid x,y\in S \text{ and } y=x^2\}$ باشد
شما قسمت از دیاگرام تیری f را (از -3 الی 3) تکمیل نموده و
جواب حاصله را برای حل سوالات 876 الی 878 حفظ نمائید.



حل :

876. از جنبهٔ mapping ربط شاه نتن واضح میشود که :
(1) . که برای هر ____ یک $y\in S$ موجود است طوریکه $(x,y)\in f$ بوده و $dom f=$ ____ باشد.
(2) . image هر x تحت f ____ است، یا بعبارهٔ دیگر برای هر $x\in S$ ____ $y\in S$ موجود است طوریکه: $(x,y)\in f$ میشود.
(3) . شما میتوانید اثبات کنید که f یک ____ ویا ____ از S در S میباشد.

حل : (1) . $x\in S$ ، (2) . یگانه ، (3) . تحفهٔ یک ، تابع جنبه

877 . ب : mapping که در شماره 875 رسم نموده اید متوجه گردید :

(1) . از mapping معلوم میشود که اعداد ـــــ تمام تصویر image لازم $x \in S$ شده نمیتوانند .

(2) . پس f یک تابع از S بکدام S است در حالیکه S عبارت از set اعداد ـــــ میباشد .

(3) . علاوه برآن معلوم میشود که f یک تابع از S ـــ S_2 میشود در حالیکه S_2 عبارت از اعداد تام ترتیبات مکمل میباشد .

حل : (1) . منفی ، (2) . تام غیرمنفی ، (3) . بر (onto)

878 . اگرچه سکیچ sketch ورسم کدام چیزی را اثبات کرده نمیتواند ، لکن ناگفته نماند که رسم و دیاگرام برای درک کردن یک مفهوم و روشن ساختن آن کمک زیاد میکند . برای اینکه اثبات نمائیم که f یک mapping ویا تابع از S در S است ، در مرحله اول ما باید نشان داده بتوانیم که عملیه مورد بحث در S عبارت از یک عملیه ـــــ در S میباشد .

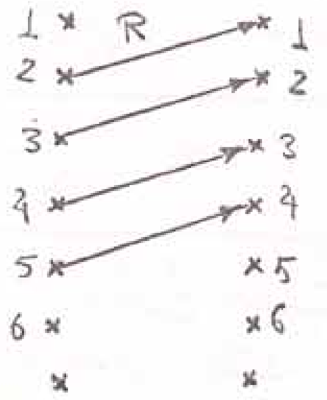
حل : binary

879 . فرضاً S ، set اعداد تام مثبت بوده و

$R=\{(x,y) \mid x,y \in S \text{ and } y=x-1\}$ باشد .

آیا R یک تابع از S در S بوده میتواند ؟

دیاگرام تیری R را برای عناصر اول آن رسم کنید



حل : نه خیر R یک تابع از S into S نیست ، زیرا عدد 1 در S کدام تصویر ندارد .

880. در سوال فوق آیا f میتواند که یک تابع از S در T into را تشکیل دهد در صورتیکه T اعداد تام غیر منفی را نمایش دهد؟

حل: بلی! زیرا: برای عنصر $1 \in S$ تصویری را $0 \in T$ تشکیل میدهیم.

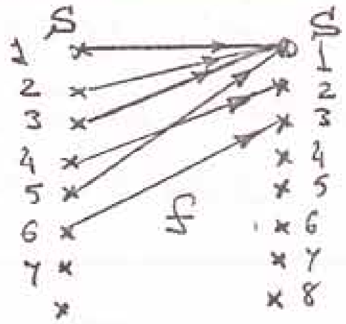
881. فرضاً S، ست اعداد تام مثبت بوده و

$R = \{(x,y) \mid x,y \in S$ and $y = 1$ برای x که طاق and $y = \frac{x}{2}$ در صورتیکه x جفت باشد$\}$ باشد.

(1). یک شکل از mapping از S در S برای 6 عنصر اول که رسم کنید.

(2). آیا f یک تابع از S در S شده میتواند؟

(3). آیا f یک تابع از S بر S شده میتواند؟



حل: (1).

(2). بلی،

(3). بلی.

882. اگر چه یک تابع از S در T عبارت از یک ست جوره های مرتب Ordered pairs است. اما بعضی اوقات بهتر و موزون تر است که بحیث قانون مطابقت که هر عنصر $x \in S$ را یک و فقط یگانه عنصر $y \in T$ اجتماع میتماید. هدف ما از قانون عبارت از map. کردن هر عنصر $x \in S$ به فقط یک عنصر $y \in T$ میباشد. پس اگر $(a,7) \in f$ باشد ما میگوییم که a به — تحت f map. شده است.

حل: 7

8. اگر به نقشه افغانستان متوجه گردید، پی خواهید برد که هر ولایت د عناصر ست تشکیلات داخلی و منطقوی) ان یک پارچه کانند

(یا عنصر set نقشه (خریطه) مطابقت میکند.
بهمین قسم اگر f یک تابع از S در T باشد، هر عنصر S $x \in S$
محض بیک عنصر $\in T$ تحت f مطابقت میکند. بطور مثال،
اگر $f(3)=15$ باشد، درینصورت ___ 15 تحت عملیهٔ f
map شده (یا مطابقت کرده) است.

حل : $\in T$

884. هرگاه استعمال قانون مطابقت در یک set که عناصر آن را جوره های مرتب تشکیل داده، مورد نظر باشد، درینصورت استعمال کلمه مپینگ mapping نظر به استعمال کلمهٔ تابع function بیشتر رواج دارد. لهذا درینصورت اگر f یک تابع از S در T باشد، ما گفته میتوانیم که f ___ میباشد.

حل : mapping from S into T یا (mapping از S در T)

885. اگر f، S را در T، map کند، درینصورت ما مینویسیم:
$f: S \to T$ و چنین خوانده میشود:
« f یک mapping از S در T است.» و یا « f، S را در T map کرده است.» توجه نمائید که علامه گذاری notation
یک مطابقت را بین عناصر set S و عناصر T set ارائه میکند.
در صورتیکه $(a,17) \in f$ باشد، درینصورت: f، a را در 17
map نموده است. و ما آنرا چنین ارائه میدهیم:
$f: a \to 17$ ؛ بهمین قسم: اگر f، -3 را
به 8 map کند ما آنرا چنین مینویسیم: ___ .

حل : $f: -3 \to 8$ یا [$f(-3)=8$]

886. اگر $S=\{1,2,3\}$ و $T=\{a,b\}$ و $f=\{(1,a),(2,a),(3,b)\}$ باشد: با استفاده از علامه گذاری notation، $f:S\to T$، تصاویر عناصر ذیل را بدست آرید:

(1). $f:1\to$ ___

(2). $f:2\to$ ___

حل: a ، a

887. علامه گذاری یا notation : $f:S\to T$ چنین بیان شده میتوانند که:

___

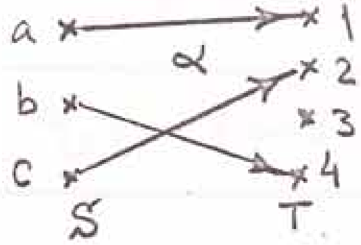
حل: f: mapping ، S را در T map کرده و بنام mapping از S در T یاد میشود.

888. اگر : $f:S\to T$ باشد، پس f یک ___ از S در T میباشد. یعنی تحت f هر عنصر $x\in S$ محض یک عنصر $y\in T$ مطابقت میکند.

حل: mapping یا میپینگ

889. اگر $\alpha:S\to T$ باشد پس α ___ از S در T میباشد، بنابران α یک قانون مطابقت را که به هر عنصر $s\in S$ محض یک عنصر $t\in T$ تطابق میکند، توضیح مینماید.

حل: یک میپینگ (mapping)



890. تحت قانون که در دیاگرام آرایه تیری ملاحظه میشود، دیده میشود که: a تحت α به 1 map شده است.

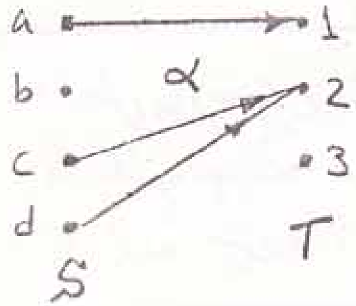
(1). b تحت mapping α به ______ map شده،

(2). c تحت mapping α به ______ map شده،

(3). چون هر عنصر $x \in S$ به یک عنصر $y \in T$، تحت mapping ، α ، map شده است، بنابران α یک ______ میباشد.

حل: (1). 4 ، (2). 2 ، (3). mapping از S در T

891. با استفاده از دیاگرام تیری (در مقابل) درج میشود که:

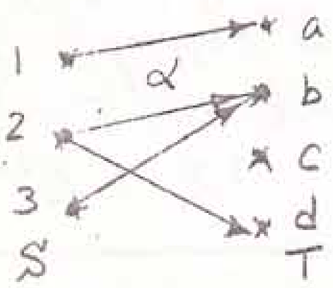


(1). α یک mapping از S در T نیست زیرا: ______ .

(2). α یک mapping از S_1 در T میباشد درصورتیکه S_1 عبارت از ______ باشد.

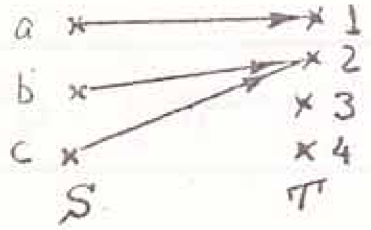
حل: (1). عنصر $b \in S$ بوجه آنکه b دارای image در T نیست.
(2). $S_1 = \{a, c, d\}$

892. بملاحظه از شکل دیاگرام مقابل α یک mapping از S در T شده نمیتواند، زیرا: ______ .



حل: عنصر $2 \in S$ دارای دو تصویر: b و d در T میباشد.

893. شکل مقابل یک دیاگرام تیری است: این دیاگرام یک mapping α را از S در T ارائه میکند.



زیرا: a تحت α به 1 map شده،

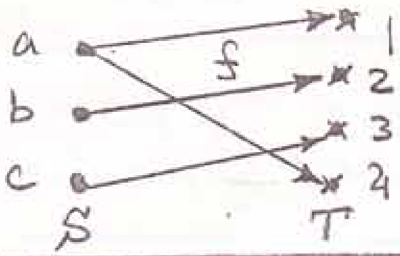
b تحت α به 2 map شده،

(1). c تحت α به ___ map شده است.

(2). چون هر عنصر $s \in S$ محض به یک عنصر $t \in T$ تحت مطابقه α map شده است، بنابران α عبارت از یک:

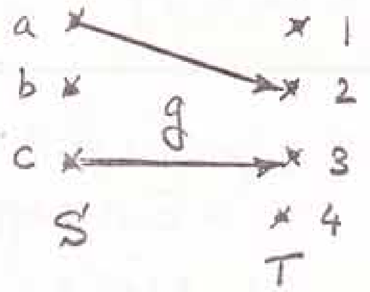
________ .

حل: (1). z ، (2). mapping از S در T میباشد.



894. با شکل دیاگرام تیری مقابل آیا f یک mapping از S در T بوده میتواند؟

حل: نه خیر! زیرا $a \in S$ دارای تصویر یگانه در T نیست.



895. به ملاحظه از دیاگرام تیری مقابل آیا گفته میتوانید که g یک mapping از S در T بوده میتواند؟ یا خیر؟ چرا؟

حل: نه خیر! زیرا: $b \in S$ دارای image (تصویر) در T نیست.

896*. شکل سمبولیکی symbolism افاده $f: S \to T$ خاطرنشان میسازد که f عبارت از ________ .

حل: mapping (یا تابع) از S در T میباشد.

۸۹۶. اگر $f: S \to T$ باشد، درینصورت :-

(1). برای —— $x \in S$، —— $y \in T$ منحصربفرد طوریکه: ———— میشود،

(2). که y بنام —— تحت —— یادشده و به علامه : —— و یا —— نشان داده میشود.

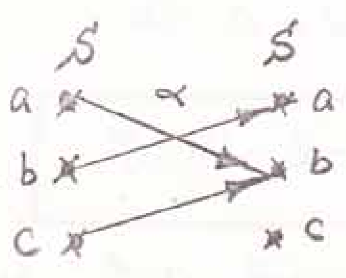
حل : (1). هر، محض یک، $(x, y) \in f$ (2). imageX (تصویر X)، mapping f، (f ی x)، $f(x)$، $(x)f$

۸۹۸. در بعضی نشریه‌ها افاده : "$f: S \to T$" را توسط سمبولیزم و یا علامه گذاری : "$(x)f$" نیز ارائه میکنند. درین مبحث ما نیز از استعمال این علامه‌گذاری استفاده میکنیم، یا بعبارت دیگر درین مبحث ما تصویر : $x \in S$ را به $f(x)$ نشان میدهیم، که چنین خوانده میشود : " تصویر image x تحت mapping f ".

بالفرض : $(2, 10) \in f$ باشد، به استفاده از علامه‌گذاری فوق، پس تصویر 2 تحت mapping f عبارت از —— میشود.

حل : $(2)f = 10$

۸۹۹. دیاگرام تیری مقابل را ملاحظه فرمائید: آیا با شناسائی این دیاگرام α یک mapping از S در S شده میتواند؟



دیده میشود که : (1). $a(\alpha) =$ ——

(2). $b(\alpha) =$ ——

(3). $c(\alpha) =$ ——

حل : (1). b ، (2). a ، (3). b ، بلی

900. اگر S، set اعداد تام را نشان داده و: $f: x \to 2x$ باشد:

پس در صورت: (1). $(2)f = \_\_\_$

(2). $(-2)f = \_\_\_$

(3). بالفرض $a \in S$، پس $(a)f = \_\_\_$

(4). $(\_\_)f = -18$ میشود.

حل: (1). 4، (2). -4، (3). $2a$، (4). -9

901. فرض S، set اعداد نسبتی Rationals بوده و: $\alpha: x \to x+1$ باشد، پس در صورت:

(1). $(5)\alpha = \_\_$، (2). $(\frac{1}{8})\alpha = \_\_$

(3). $(\_\_)\alpha = 0$، (4). $(-2)\alpha = \_\_$

(5). $(\_\_)\alpha = \frac{1}{t}$، ... (درحالیکه $t \neq 0$ باشد) میشوند.

حل: (1). 6، (2). $9/8$، (3). -1، (4). -1 (5). $(1/t + 1)$

902. فرض کنید S، set اعداد نسبتی بوده $\alpha: x \to x+1$ باشد، پس:

(1). $(-7)\alpha = \_\_$، (2). $(\_\_)\alpha = 3/8$،

(3). $(\_\_)\alpha = a$، (4). $(\_\_)\alpha = \frac{1}{p}$، درحالیکه $p \neq 0$

حل: (1). -6، (2). $-5/8$، (3). $a-1$، (4). $\frac{1-p}{p}$

903. اگر S، set اعداد نسبتی بوده و $f: x \to \frac{1}{x}$ باشد، پس:

(1). $(t)f = \_\_$، (2). $(\_\_)\alpha = \frac{1}{8}$، (3). $(\_\_)f = \frac{2}{3}$،

(4). $(\_\_)f = 1+S$، (5). $(\_\_)\alpha = a-3$، (6). $(\_\_)f = \frac{3}{S}+1$،

حل: (1). $\frac{1}{t}$، (2). 8، (3). $\frac{3}{2}$، (4). $\frac{1}{1+S}$، (5). $\frac{1}{a-3}$، (6). $\frac{S}{3+S}$.

904. اگر S عبارت از ست اعداد مثبتی و $f: x \to x^2$ باشد، پس:
(1) $(-3)f = $ ___ ، (2) $(s_1)f = $ ___
(3) $(—)f = 4/9$ ، (4) $(—)f = t_1^2$

حل: (1) 9 ، (2) s_1^2 ، (3) $\frac{2}{3}$ و یا $-\frac{2}{3}$ ، (4) $\pm t_1$

905. اگر S عبارت از ست اعداد تام ربعه و $\alpha: x \to x^2$ باشد، پس:
(1) $(-3)\alpha = $ ___ ، (2) $(3)\alpha = $ ___
(3) $(—)\alpha = 16$ ، (4) $(—)\alpha = 5$

حل: (1) 9 ، (2) 9 ، (3) 4 و یا -4 ، (4) Preimage ندارد.

906. تا حال ما تکیه زیاد در علایم ـ سمبول ها و اصطلاحات را که همین مفهوم را افاده میکنند نشان داده ایم. این عمل روی حقیقت که: تمام سمبول ها در اصطلاحات بقسم جهان شمول (جهانی) مورد قبول واقع نمیشوند، صورت گرفته است. روی این منظور ما خصوصاً تابع و یا ___ از S در T را بصورت مترادف و معادل یکدیگر استعمال نموده ایم.

حل: mapping (میپنگ)

907. بهمین قسم افاده: $(x,y) \in f$ معادل افاده: $y = f(x)$ و معادل افاده: $(x)f = y$ ___ میباشد. همه این افاده ها نشان میدهد که y یک تصویر x تحت ___ f از S در T میباشد.

حل: $f(x) = y$ ، مطابقت و یا تابع.

908. ما یک ___ و یا ___ را از S در T تعریف نمودیم، حال میخواهیم

طریقی را جستجو داریم تا با شناختن آن بعضی از روابط binary ، $\mathbb{R}$ در $S\times T$ که یک تابع دیا ـــــ از S در T را بوجود آورده میتوانند تشخیص کرده بتوانیم.

حل: تابع، mapping ، mapping

909. ما میدانیم که یک رابطه binary ، f در $S\times T$ یک تابع از S در T را بوجود می آورد در صورتیکه:

(1). $dom f = S$ باشد، یا بعبارت دیگر ـــــــــ

(2). برای هر $x\in S$ موجودیت یک $y\in T$ ـــــ باشد، یا بعبارة دیگر در صورتیکه $(x,y_1)\in f$ و $(x,y_2)\in f$ باشد نشان باید داد که بالضرورة ـــــ میباشد.

حل: (1). محض یک $y\in T$ موجود است طوریکه $(x,y)\in f$ میباشد.
(2). یگانه، $y_1=y_2$

910. فرضاً Z ، ست اعداد تام بوده و $\alpha: x\to 2x$ برای هر $x\in Z$ باشد. میخواهیم ثابت کنیم که α عبارت از mapping از Z در Z میباشد.

(1). مطابقه α را تحت دیاگرام تیری ارائه کنید.

(2). برای آنکه ثابت کنیم که α یک تابع است بررسی مراحل ذیل ضرور است:

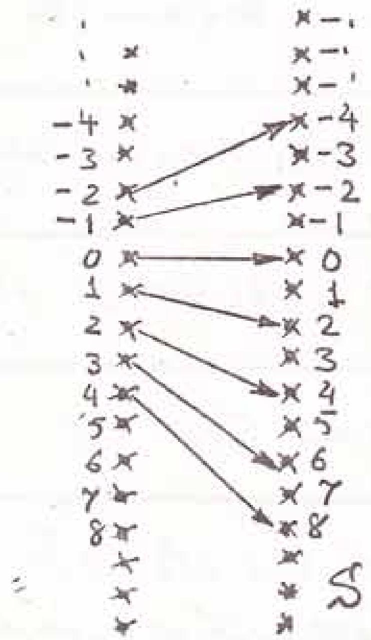
(a). در صورتیکه $p\in Z$ و $2\in Z$ بوده و ضرب "·" یک عملیه binary در Z بوده، پس درینصورت برای هر $p\in Z$ یک ــــ موجود است، (که آن عبارت $2p$ میشود) طوریکه $(p,y)\in\alpha$ میباشد.

(b). بالفرض $(p,y_1)\in\alpha$ و $(p,y_2)\in\alpha$ باشد، درینصورت: $y_1=2p$ و هم $y_2=2p$ میشود،
چون ضرب "·" یک عملیه binary در Z است، بنابران $2p$ یک عنصر ــــ ست Z بوده.

و درنتیجه: $y_1 = y_2$ میشود.

(3). از مطالعه نتایج: (a) و (b) جزء (2) ثابت میشود که α یک ___ دراین ___ از S در S میباشد.

حل: (1). به دیاگرام ملاحظه شود:



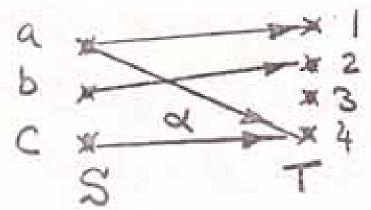
(2).:

(a). $y \in S$

(b). یگانه (unique)

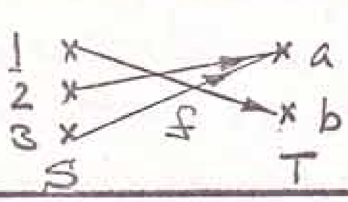
(3). تابع، mapping

911. به دیاگرام تیری مقابل ملاحظه کرده بگوئید که آیا α یک تابع ویا mapping از S در T میباشد؟ دلایل خود؟

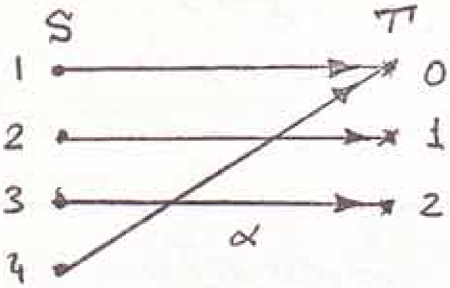


حل: نه خیر! تصویر a یگانه نیست، یعنی حقیقتی که برای هر $x \in S$ اگر $(x,y_1) \in \alpha$ و $(x,y_2) \in \alpha$ بوده پس بالعموم $y_1 = y_2$ میشود" دراینجا صدق نمیکند.

912. با ملاحظه از دیاگرام مقابل آیا f یک تابع از S در T میباشد؟



حل: بلی



913. از دیاگرام تکمیل کنید:

$(1)\alpha =$ ___ . (1)

$(2)\alpha =$ ___ . (2)

$(3)\alpha =$ ___ . (3)

$(4)\alpha =$ ___ . (4)

حل: (1) 0 ، (2) 1 ، (3) 2 ، (4) 0 ،

914. اگر $\alpha : S \to T$ و $(s)\alpha = t$ باشد، پس t عبارت است از ___ .

حل: تصویر s تحت α .

915. اگر S ، ست اعداد تام جفت و $\alpha : x \to x/2$ باشد، درینصورت α یک mapping را از S در S بوجود نمی آورد. زیرا این حقیقت ندارد که برای هر $x \in S$ یک $t \in S$ موجود شود طوریکه: $(s)\alpha = t$ گردد. اگر $s \in S$ باشد ضروری نیست که $\frac{s}{2} \in S$ نیز باشد. (آیا میدانید که S کدام ست را ارائه میکند؟) بطور مثال، اگر $s = 3$ باشد، آیا $\frac{3}{2}$ حل S شده میتواند؟

حل: نه خیر! زیرا $3/2$ عدد تام نیست.

916. ازینکه یک mapping ویا تابع توسط دیاگرام تیری ویا اشکال لکرین جوڑه مربوط آن مطالعه گردد، درصورت امکان بهتر خواهد بود که از اشکال لکرین تا رسول افاده نمائید. بطور مثال، اگر S، ست اعداد تام و T ـ ست اعداد تام جفت را ارائه کند، درینصورت افاده: $\alpha : S \to T$ که برای هر $s \in S$ پس $2s = (s)\alpha$ میشود. درین جا قانونی موجود است که تحت آن به هر عنصر S که فقط محض یک عنصر شیانه ست T اجتماع میکند. بطور مثال:

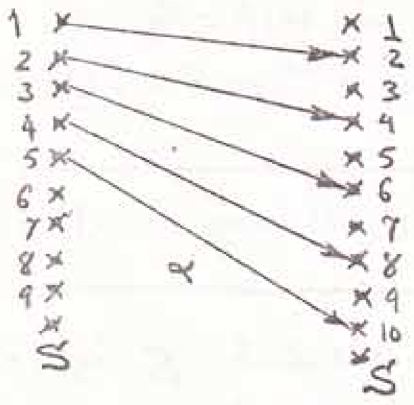
بطور مثال : $(-4)\alpha =$ ___ میشود. واین معنی را افاده میکند که تصویر
4- تحت α عبارت از ___ میشود.

حل : -8 ، -8

917. فرضاً S، ست اعداد حقیقی و T عبارت از ست اعداد غیر منفی حقیقی positive reals باشد، بالفرض $f: S \to T$ بوده، طوریکه $f(s) = s^2$ برای هر $s \in S$ وجود داشته باشد؛ درینصورت image 2 تحت f عبارت از 4 بوده که $f(2) = 4$ میشود.
پس به همین قسم: $f(-11) =$ ___ و $f(\sqrt{2}) =$ ___ و بالاخره $f(-\pi/2) =$ ___ میشود.

حل : 121 ، 2 ، $\pi^2/4$

918. فرضاً S عبارت از ست اعداد تام مثبت و $\alpha: S \to S$ بوده طوریکه $\alpha: a \to 2a$ است یعنی:
$\alpha(a) = 2a$ میشود.
چنانچه بعضی ازین مطابقت در شکل مقابل نشان داده میشود.
طوریکه دیده میشود:



$\alpha: 1 \to 2$ یا $\alpha(1) = 2$
$\alpha: 2 \to 4$ یا $\alpha(2) = 4$
$\alpha: 3 \to$ ___ و یا $\alpha(3) =$ ___ ، $\alpha: x \to$ ___ یا $\alpha(x) =$ ___

حل : 6 ، 6 ، $2x$ ، $2x$

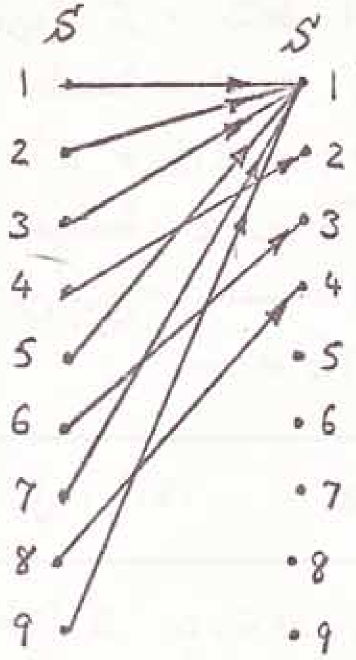
919. فرضاً S، ست اعداد تام بوده $\alpha: a \to 2a$ باشد، پس تصویر 4 تحت α عبارت از 8 بوده و یا $\alpha(4) = 8$ میشود.

بهمین قسم تصویر ۱۰ تحت α عبارت از ـــــ بوده ویا :
ویا ـــــ میباشد.

حل: 20 ، $(10)\alpha = 20$ ، $\alpha(10) = 20$

920. فرضاً S، set اعداد تام جفت
و β یک سینگی mapping که ذیلاً
توضیح میشود باشد:

$$\beta : \begin{cases} n \to 1 & \text{برای } n \text{ تاق} \\ n \to \frac{n}{2} & \text{برای } n \text{ جفت} \end{cases}$$ میباشد.



قسمت ازین mapping در دیاگرام مقابل
ارائه شده است، چون برای هر
$s \in S$ یک عنصر $t \in S$ موجود است.
طوریکه: $\beta : s \to t$ ،
بتفصیل اگر s یک عدد تاق است، درینصورت $\beta(s) = 1$ بوده و اگر s جفت باشد
پس $\beta(s) = \frac{s}{2}$ میشود. پس برای هر عنصر $s \in S$ محض یک ـــــ
یگانه در S موجود است. بنابر آن β یک ـــــ از S در S میباشد.

حل: image (تصویر)، mapping.

921. فرضاً S، set اعداد تام بوده و $\beta : S \to S$ باشد، طوریکه اگر
$a \in S$ باشد پس $\beta : a \to a+1$ گردد. درینصورت تصویر 1 تحت
β عبارت از 2 است، پس: $\beta(1) = 2$ میشود،
بهمین تصویر 2 تحت β عبارت از 3 بوده یعنی: $\beta(2) = 3$
تصویر -1 تحت β عبارت از ـــــ بوده پس: $\beta(-1) =$ ـــــ
تصویر 10 تحت β عبارت از ـــــ مربوط پس: $\beta(10) =$ ـــــ میشود.

حل: ۰ ، ۰ ، 11 ، 11

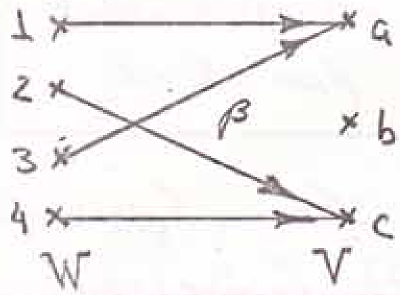
۹۲۲. اگر S، سِت اعداد حقیقی بوده و $\alpha: S \to S$ باشد، طوریکه برای هر $s \in S$ که در اینصورت: $\alpha: s \to \frac{s}{2}$ میشود. پس در اینصورت:

(1). $(5)\alpha = \_\_\_\_$ (2). $(\frac{3}{8})\alpha = \_\_\_\_$

(3). $(0)\alpha = \_\_\_\_$ (4). $(-\pi)\alpha = \_\_\_\_$ میشوند.

حل: (1). $\frac{5}{2}$ ، (2). $\frac{3}{16}$ ، (3). 0 ، (4). $\frac{-\pi}{2}$

۹۲۳. اگر $\beta: W \to V$ باشد در اینصورت W بنام دومین domain mapping β و V بنام کودومین Codomain یاد شده و $\beta(W)$ عبارت از سِت تصاویر (images) W تحت β که بنام range یا رنج mapping، β میباشد.



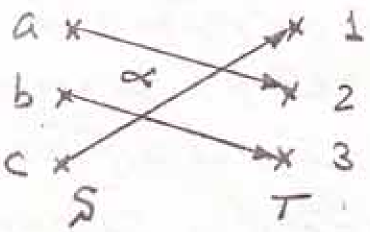
(1). $dom\ \beta = \{\qquad\}$

(2). $Codom\ \beta = \{\qquad\}$

(3). $ran\ \beta = \{\qquad\}$

حل: (1). $\{1, 2, 3, 4\}$ ، (2). $\{a, b, c\}$ ، (3). $\{a, c\}$

۹۲۴. در $\alpha: S \to T$:



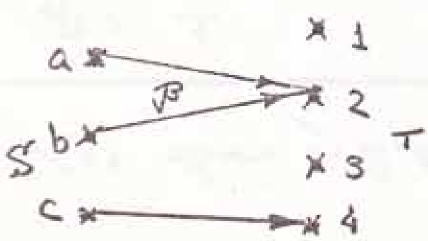
$dom\ \alpha = S$

$Codom\ \alpha = T$

$ran\ \alpha = \_\_\_\_$

حل: $\{1, 2, 3\}$ یا T

۹۲۵*. بملاحظه از دیاگرام تیری دیده میشود:



(1). $dom\ \beta = \_\_\_\_$

(2). $Codom\ \beta = \_\_\_\_$

(3). $ran\ \beta = \_\_\_\_$

حل: (1). $\{a, b, c\}$، (2). $\{1, 2, 3, 4\}$، (3). $\{2, 4\}$.

926*. فرضاً S عبارت از سِت اعداد تام مثبت و $\alpha: S \to S$ عبارت از S در S باشد، طوریکه اگر $a \in S$ باشد، پس: $\alpha: a \to 2a$ یعنی $(a)\alpha = 2a$ باشد، پس درینصورت:

(1). $(1)\alpha = 2$ (2). $(2)\alpha =$ ______

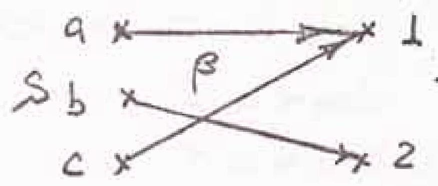
(3). $(3)\alpha =$ ______ (4). $(0)\alpha =$ ______

(5). $dom\alpha =$ ______ (6). $codom\,\alpha =$ ______

(7). $ran\alpha =$ ______

حل: (2). 4، (3). 6، (4). 0، (5). S یا سِت اعداد تام
(6). سِت اعداد تام. (7). سِت اعداد تام جفت

927. ما دیدیم که به ran یک mapping: $\alpha: S \to T$ ضروری نیست که T تمام باشد، یا بعباره دیگر شرط نیست که هر عنصر T یک تصویر کدام عنصر S باشد. امّا در بعضی امثال امکان دارد که هر عنصر T یک image یک و یا چند عنصر سِت S یا دومین domain باشد.

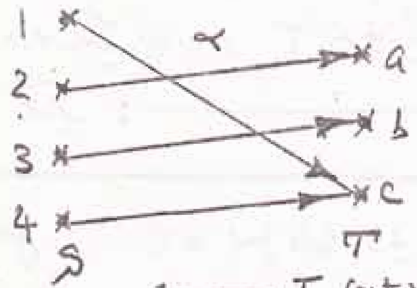


مثلاً در دیاگرام تیری مقابل:-
- دیده میشود که هر $x \in T$ تصویر لااقل یکی از عناصر S میباشد.
و درینحالت: $ran\,\beta =$ کل عناصر دومین میشود.
درین مثال برای هر $x \in S$ لااقل یک تصویر $y \in S$ موجود شده میتواند طوریکه $ran\beta =$ ______

حل: T

928. هرگاه range یک mapping: $\alpha: S \to T$ باشد، یا بعباره

بعبارهٔ دیگر هرگاه هر عنصر T تصویر کدام عنصر S تحت α باشد، درینصورت



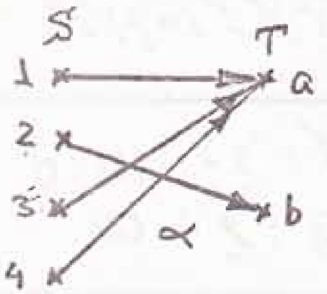
α یک mapping از S بر T میباشد. یعنی: from S onto T

چون: $ran\,\alpha =$ ——

بنابران α یک mapping از S بر T (onto) ——.

حل: T ، میباشد.

929. $\alpha: S \to T$ یک mapping از S بر T: یعنی "from S onto T" میباشد درصورتیکه برای هر $t \in T$ یک $s \in S$ باشد طوریکه: $(s)\alpha = t$ گردد. یا بعبارت ساده هر عنصر T باید تصویر کدام عنصر S باشد.



(1). آیا α یک mapping از S در T میباشد؟

(2). آیا α یک mapping از S بر T میباشد؟

حل: (1). بلی، (2). نی

930. α یک mapping از S در T میباشد درصورتیکه:

(1). برای هر عنصر $s \in S$ یک عنصر $t \in T$ موجود باشد طوریکه: ——.

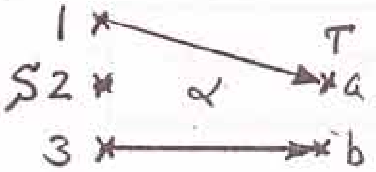
(2). اگر $(s)\alpha = t_1$ و همچنین $(s)\alpha = t_2$ باشد، پس درینصورت: —— میشود.

حل: (1). $(s)\alpha = t$ (2). $t_1 = t_2$

931. اگر $\alpha : S \to T$ بوده ، α یک mapping از S بر T میشود درصورتیکه برای هر $t \in T$ یک preimage : $s \in S$ موجود گردد طوریکه : ________ شود.

حل: $(s)\alpha = t$ و یا $\text{rang}\,\alpha = T$

932. با مشاهده از دیاگرام تیری مقابل :



(1). آیا α یک mapping از S در T میباشد؟

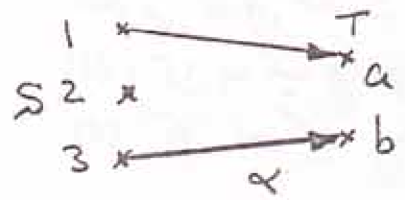
(2). آیا α یک تابع از S بر T میباشد؟

تذکر باید داد که کلمه تابع و mapping یکی بجای دیگر استعمال شده میتوانند.

حل: (1). نه خیر: کدام t در T موجود نیست طوریکه $t = (2)\alpha$ گردد.

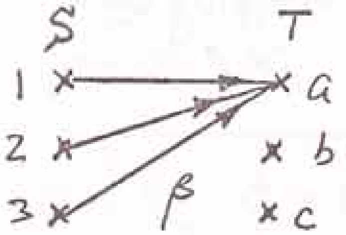
(2). نه خیر: چون α یک تابع از S در T شده نمیتواند پس α یک تابع از S بر T نمیباشد.

933. با مشاهده از دیاگرام α نمیتواند که یک mapping از S_1 بر (onto) T باشد درصورتیکه: $S_1 = \{\quad\}$ باشد.



حل: $S_1 = \{1, 3\}$

934. با مشاهده از دیاگرام مقابل آیا β یک mapping :



(1). از S در T میباشد؟

(2). از S بر T میباشد؟

حل: (1). بلی ، (2). نخیر.

۹۳۵. اگر S، set اعداد تام و $\alpha: s \to s+1$ باشد درینصورت α یک mapping از S در S است، زیرا:

(1). برای هر $s \in S$ یک عنصر $t \in S$ یعنی: $(t = s+1)$ موجود است طوریکه ______ میشود.

(2). اگر $t_1 = (s)\alpha$ و هم $t_2 = (s)\alpha$ باشد پس درینصورت چون $t_1 = s+1$ و $t_2 = s+1$ بوده پس ______ میگردد.

بنابران α ______ میباشد.

حل: (1). $t = (s)\alpha$ ، (2). $t_1 = t_2$ ، یک mapping از S در S

۹۳۶. اگر S، set اعداد تام و $\alpha: x \to x+1$ باشد، باساس نتیجهٔ مسأله 935 گفته میتوانیم که α یک mapping از S در S میباشد. حال ثابت میکنیم که α یک mapping از S بر S نیز میباشد. برای رسیدن به این هدف ضروری است تا نشان دهیم که محض یک $s \in S$ موجود است طوریکه: $t = (s)\alpha$ میگردد. یا بعبارت دیگر برای هر عنصر t، set دومین (dom) محض یک عنصر s، set رنج (ran) موجود شده میتواند طوریکه t عبارت از تصویر s در set، dom. باشد.

چون ما داریم: $(s)\alpha = s+1$ و یا $t = \alpha(s)$

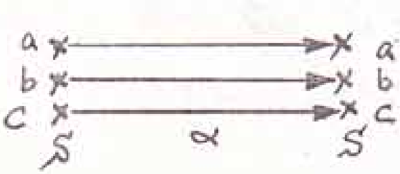
و یا $t = s+1$ میگردد، پس $s = t-1$ میباشد.

از طرف دیگر چون تفریق یک عملیه binary در set S است. بنابران $t-1 \in S$ بوده میباشد که درینصورت: $(t-1)\alpha =$ ______

درین نتیجه میشود که α یک mapping از S ______ S میباشد.

حل: t ، بر (onto)

۹۳۷. مربوط به دیاگرام مقابل بگوئید که: آیا α :



(1) ・ یک mapping از S در S میباشد ؟

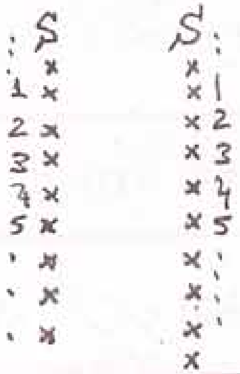
(2) ・ یک mapping از S بر S میباشد ؟

حل: (1) ・ بلی ، (2) ・ بلی ،

938 ・ فرضاً S عبارت از اعداد مثبت تام بوده و $\alpha: x \to 2x$ باشد:

(1) ・ آیا α یک mapping از S در S میباشد ؟

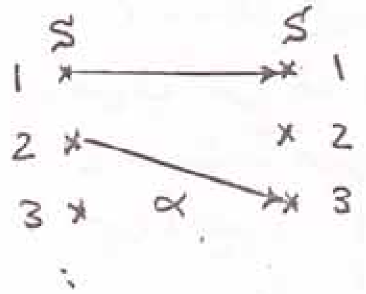
(2) ・ آیا α یک mapping از S بر S میباشد ؟



تذکر: شما باید که mapping بعضی عناصر مخصوص S را توسط دیاگرام آن نشان داده و شکل را بدادن جواب اقدام نمائید.

حل: (1) ・ بلی ، (2) ・ نخیر: بطور مثال $3 \in S$ ، که کدام عنصر preimage در S ندارد.

939* ・ بملاحظه از دیاگرام مقابل آیا α:



(1) ・ یک map. از S در S میباشد ؟

(2) ・ یک mapping از S بر S میباشد ؟

(3) ・ را تقسیم یک mapping در آورده میتوانید (یعنی تعیین کرده میتوانید ؟)

حل: (1) ・ نخیر ، (2) ・ α یک mapping نیست زیرا عنصر 3 کدام عکس تصویر در range ندارد.

(3) ・ در صورتیکه $S_1=\{1,2\}$ باشد ، α یک mapping از S_1 در S میشود.

940 ・ تذکر باید داد که هر mapping که onto باشد بالعموم یک mapping into نیز است. اما ضروری نیست که هر mapping onto یک mapping را بوجود بیاورد. α یک mapping از S در T میباشد،

در صورتیکه: (1). برای هر $s \in S$ که یک $t \in T$ موجود باشد طوریکه: ________ .

(2). اگر $(s)\alpha = t_1$ و $(s)\alpha = t_2$ باشد، پس: ________ میگردد.

(3). اگر α یک mapping از S به T بوده و اگر برای هر $t \in T$ محض یک $s \in S$ موجود شود طوریکه: ________ و یا ________ باشد،

پس درینحالت α یک mapping از S ___ T را تشکیل میدهد.

تذکر:- تکرار باید نمود که $s \in S$ عبارت از نشان تصویر preimage t و همین قسم $t \in T$ (در رابطه sub range) عبارت از تصویر s میباشد.

> حل:- (1). $(s,t) \in \alpha$ و یا $(s)\alpha = t$ ، (2). $t_1 = t_2$
> (3). $(s,t) \in \alpha$ و یا $(s)\alpha = t$ ، onto

941. β یک mapping از S در T میباشد در صورتیکه:

(1). ________

(2). ________

> حل: (1). برای هر $s \in S$ که یک $t \in T$ باشد طوریکه: $(s)\beta = t$ و یا $(s,t) \in \beta$ باشد.
> (2). اگر: $(s)\beta = t_1$ و $(s)\beta = t_2$ باشد، پس: $t_1 = t_2$ میباشد.

942. فرض کنید، S set اعداد تام و T set اعداد حقیقی و $\alpha : x \to \frac{x}{2}$ باشد:

در نتیجه برای هر $s \in S$ که یک $t \in T$ موجود بوده طوریکه: $(s)\alpha = \frac{s}{2}$ میشود. بالفرض: $(s)\alpha = t_1$ و $(s)\alpha = t_2$ باشد،

چون: $t_1 = \frac{s}{2}$ و هم $t_2 = \frac{s}{2}$ میشود، پس: $t_1 = t_2$ میباشد.

بنابر آن ________ .

> حل: α یک mapping از S در T میباشد. اگر توجه شود دیده میشود که α یک mapping از S به T نیست، زیرا که هر عنصر $t \in T$ دارای preimage در S نمیباشد. چنانچه $\frac{1}{3} \in T$ بوده ولی کدام عنصر $s \in S$ موجود نیست که نشان تصویر یا preimage $\frac{1}{3}$ را در S تشکیل نماید.

943. فرضاً که S عبارت از مجموعه اعداد تام بوده و $\alpha: x \to x+5$ باشد.

(1). اگر $s \in S$ بوده، پس که $s+5 \in S$ میشود طوریکه: ______ میباشد.

(2). اگر $(s)\alpha = t_1$ و $(s)\alpha = t_2$ باشد، پس ___ $= t_1$ و ___ $= t_2$ گردیده در نتیجه: ______ میباشد.

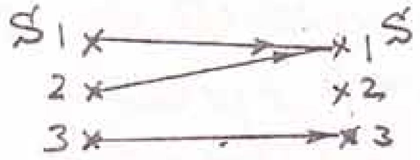
(3). از ملاحظه: (1) و (2) فوق نتیجه گیری میشود که α ______ .

> حل: (1): $(s)\alpha = s+5$ ، (2). $s+5$ ، $s+5$ ، $t_1 = t_2$
> (3). یک mapping از S into S میباشد.

944. ما در شماره (943) ثابت نمودیم که α یک mapping از S into S میباشد. برای اینکه نشان دهیم که α یک mapping از S onto S میباشد، در حقیقت کدام عنصر $t \in S$ را در نظر میگیریم، پس که $t-5 \in S$ میشود. بنابراین برای هر $t \in S$ که یک $s \in S$ که موجود میشود و ___ طوریکه ___ $= (s)\alpha$ میگردد. بنابراین α یک mapping از S ___ که میباشد.

> حل: $(t-5)\alpha = t$ ، t ، S onto S که میباشد.

945. در دیاگرام تیری در مقابل ملاحظه کنید:



(1). برای هر $t \in S$ که یک $s \in S$ موجود است طوریکه: ______ میشود.

بصورت خاص: ___ $= (\ )\alpha$ ، ___ $= (\ )\alpha$ ، ___ $= (\ )\alpha$ میشود.

(2). اگر $(s)\alpha = t_1$ و $(s)\alpha = t_2$ باشد، پس ______ میگردد.

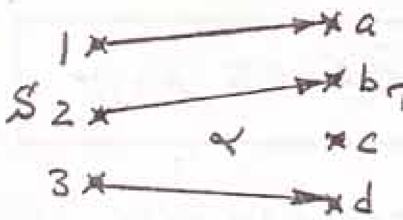
(3). بنابراین α عبارت از یک ______ بوده، اما α یک mapping از ______ نمیباشد.

> حل: (1): $(s)\alpha = t$ ، 1،1 ، 2،1 ، 3،3 ، (2). $t_1 = t_2$
> (3). mapping از S into S که، از S onto S که

946. یک mapping α درصورت از "S" onto "T" میباشد که اگر α یک mapping از "S" into "T" بوده و علاوه برآن برای هر $t \in T$ یک preimage به در S یعنی: $s \in S$ موجود باشد طوریکه $t = \alpha(s)$ گردد.

حل ایجاب نمیکند

947. با ملاحظه از دیاگرام مقابل:



α یک mapping از S در T است. آیا α یک mapping از S بر T میباشد؟ ویا خیر؟ چرا؟

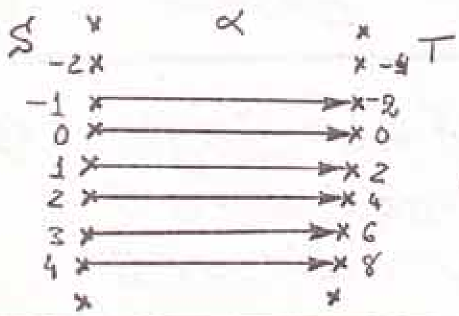
حل: نه خیر! $c \in T$ بوده که کدام عنصر preimage در S ندارد.

948. ما میگوییم که یک mapping α از S onto T میباشد در صورتیکه mapping α از S into T بوده و برای ________

حل: هر $t \in T$ یک $s \in S$ موجود باشد طوریکه $T = \alpha(s)$ گردد.

949. اگر S عبارت از set اعداد تام و T عبارت از set اعداد تام جفت باشد و فرضاً $\alpha : x \to 2x$ باشد؛ قسمت از mapping α را توسط دیاگرام نشان دهید. این فرضیه را کاپی نموده که برای حل تمارین 950 الی 952 بکار برده میشود:

حل:



ادامهٔ دیاگرام صفحه کافی نیست که نمایش استدلال را که α یک mapping از S بر T است تشکیل دهد.

۹۵۰. اگر S، set اعداد تام باشد پس برای هر $s \in S$، $2s$
عبارت از عدد تام جفت است (تعریف عدد تام جفت). پس درینصورت
$2s \in$ ___ بوده و ___ $= \alpha(s)$ میشود. چون ما برای هر
$s \in S$ یک $t \in T$ را دریافت نمودیم، طوریکه برای هر
___

حل: هر $s \in S$ یک تصویر s را در T تحت mapping α بوجود می‌آورد.

۹۵۱. برای اینکه به اثبات برسانیم که هر یک از تصاویر تشکیله یگانه است، ما فرض می‌نمائیم
که کدام s دارای دو تصویر image در T میباشد. با الفرض کدام
s در S موجود بوده طوریکه: $t_1 = \alpha(s)$ و $t_2 = \alpha(s)$ گردد.
درینصورت ما داریم که: $t_1 = 2s$ و هم $t_2 = 2s$ بوده، بنابران
___ میباشد. لذا گفته میتوانیم که کدام یک s در S
موجود شده نمیتواند که دارای دو تصویر باشد، پس تصویر هر
$s \in S$ یک عنصر ___ set T است.

حل: $t_1 = t_2$، یگانه

۹۵۲. از مسایل 950 و 951 نتیجه گیری کرده میتوانیم که α یک مپنگ
mapping from S — T است.

حل: into ، برای اثبات: from S onto T شاخ زیر را
مطالعه نمائید.

۹۵۳. برای ثبوت اینکه α یک mapping از "from S onto T" میباشد،
ما باید دید که برای $t \in T$ یک نشانهٔ تصویر preimage آن در
S موجود است. و یا بعبارهٔ دیگر هر $t \in T$ تصویر image

کدام عنصر S . S میباشد. لذا یک عنصر کیفی $t \in T$ را نظر میگیریم چون t یک عدد جفت است، پس $\frac{t}{2}$ نیز یک عدد تام میشود. یعنی: $\frac{t}{2} \in S$ میباشد. در ___ $= \alpha (\frac{t}{2})$ میشود. بنابرآن برای هر $t \in T$ یک $s \in S$ موجود است طوریکه ___ $= \alpha(s)$ میشود. یا بالفاظ دیگر هر عنصر T یک تصویر کدام عنصر S میباشد. ودر این اساس گفته میتوانیم که α یک mapping از S ___ میباشد.

حل: t ، t ، از S بر T ویا from S onto T

954. بصورت ساده α یک mapping از S در T است درصورتیکه برای هر $s \in S$ یک تصویر یگانهٔ $t \in T$ موجود گردد. برای آنکه نشان دهیم که α یک mapping است، نشان باید داد که هر عنصر S تحت α دارای محض یک تصویر در T است. یا بصورت رسمی و formally بگوییم که:

(1). برای هر $s \in S$ محض یک $t \in T$ موجود است طوریکه ___ بوده،

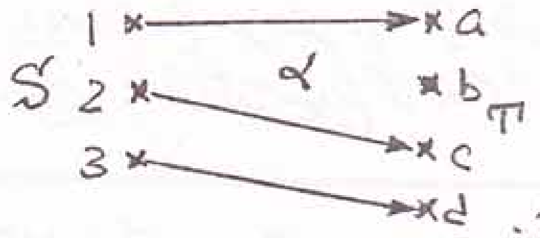
(2). اگر $t_1 = \alpha(s)$ و $t_2 = \alpha(s)$ باشد پس بالضرور ___ میباشد.

حل: (1). $\alpha(s) = t$. (2). $t_1 = t_2$

955. بصورت ساده یک mapping α از S در T یک mapping از S بر T میباشد، درصورتیکه برای هر $t \in T$ لااقل یک $s \in S$ موجود باشد طوریکه t تصویر s گردد. ویا بصورت رسمی: ما باید نشان دهیم که برای هر $t \in T$ یک $s \in S$ موجود است، طوریکه: ___ گردد.

حل: $\alpha(s) = t$

956. بعضی وقت یک mapping ، α طوریکه $\alpha : S \to T$ بوده چنان باشد که هیچکدام از دو عنصر متمایز S دارای عین تصویر نمیباشد درینصورت میگوییم که mapping ، α یک میپنگ یک بیک ویا one-to-one میپنگ ویا one-to-one Mapping از S در T میباشد.



چنانچه از دیاگرام مقابل دیده میشود که هیچکدام یک از عنصر T دارای بیشتر از یک preimage در S بوده نمیتواند.
پس α یک ______ از S در T است.

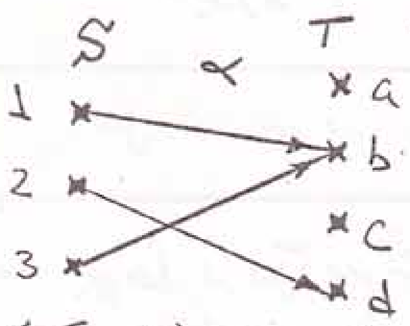
حل: One-to-one-mapping from S into T

تبصره: تذکر باید داد که بین "مطابقت یک بیک" ویا "one-to-one Correspondence" و "میپنگ یک بیک از یک S ست در یک T ست" ویا "one-to-one mapping from S into T" یک فرق موجود است. غرض از "مطابقت یک بیک" عبارت از آن است که mapping one-to-one بوده و علاوه بران from S onto T باشد. یا بالفاظ دیگر:
"مطابقت یک بیک" ویا "one-to-one correspondence" عبارت از mapping است که: "from S onto T" بوده و ضمناً هیچکدام عنصر T ست دارای دو عنصر preimage در S ست نباشد. (مؤلف)

957. تعریف:- $\alpha : S \to T$ یک mapping یک بیک از S در T است درصورتیکه اگر دلخواه $(x_1)\alpha = y$ و $(x_2)\alpha = y$ باشد، پس بالعکس: ______ میشود.

حل: $x_1 = x_2$

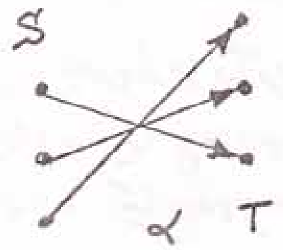
958. توجه فرمائید: یک mapping یک بیک از S در T مستوجب این نیست که هر عنصر T (set of range) بالمقابل یک تصویر کدام عنصر S (domain set) باشد. اما مستوجب این است که هیچکدام یک عنصر T تصویر دو عنصر متمایز S set (dom set) نمیباشد. یا بالفاظ دیگر دو عنصر متمایز S set .dom یک عنصر T set، map شده نمیتوانند.



بملاحظه از دیاگرام فوق آیا α یک mapping یک بیک از S در T میباشد؟

حل: نه خیر: $b\in T$ دارا دو preimages متمایز در S میباشد.

959. برای سهولت عبارت "one-to-one" را به افاده 1-1 اراده مینمائیم. بملاحظه از شکل دیاگرام مقابل آیا α یک mapping یک بیک میباشد؟

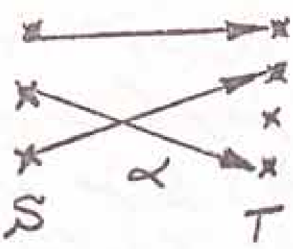


حل: بلی.

960*. تعریف: یک mapping $\alpha: S\to T$ یک mapping 1-1 میباشد در صورتیکه هرگاه ..

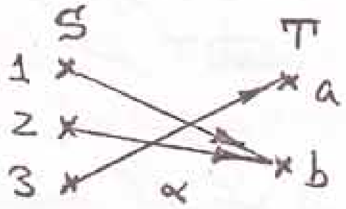
حل: $y=(x_1)\alpha$ و $y=(x_2)\alpha$ باشد پس بالمقابل $x_1=x_2$ میباشد.

961. (1). قرار تعریف در یک mapping 1-1 از S در T هیچکدام یک عنصر T ـــــ بیشتر از یک عنصر S تحت α map شده نمیتوانند.



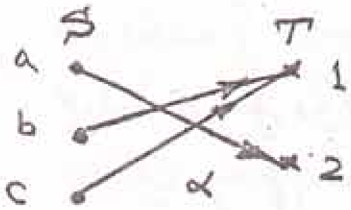
(2) • آیا در دیاگرام مقابل α یک 1-1, mapping از S در T شده میتواند؟

حل : بلی ،



962 • با ملاحظه از دیاگرام مقابل آیا α یک mapping: 1-1 از S در T شده میتواند؟ چرا؟

حل : نخیر، $b=\alpha(1)$ و هم $b=\alpha(2)$ بوده اما $2 \neq 1$



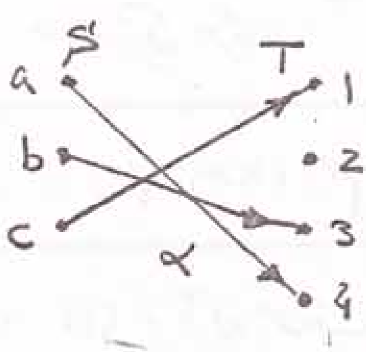
963. با ملاحظه از دیاگرام مقابل آیا α :

(1) • یک mapping از S در T است؟

(2) • یک mapping از S بر T است؟

(3) • یک mapping: 1-1 است؟

حل : (1) • بلی ، (2) • بلی ، (3) • نخیر : 1 دو preimage در S دارد.



964 • با ملاحظه از نتیجه شماره 963 نتیجه میشود که α یک mapping ، onto بوده اما 1-1 نمیباشد.

دیاگرام مقابل را ملاحظه کرده و بگویید که آیا α یک mapping

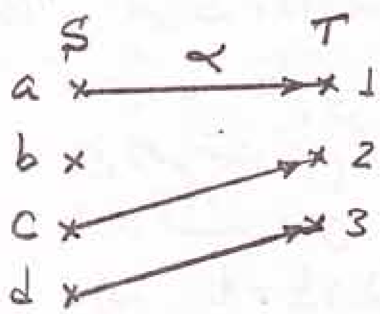
(1) • از S در T میباشد؟

(2). از S بر T میباشد؟

(3). 1-1 شده میتواند؟

حل: (1). بلی، (2). نخیر، (3) بلی؛ زیرا کدام نقاط در T موجود نیست که دارای دو preimage در S گردد.

965. از حل شماره 964 نتیجه گیری میشود که α یک mapping: 1-1 بوده اما "onto" نمیباشد.



مبرهن از دیاگرام مقابل آیا α یک mapping:

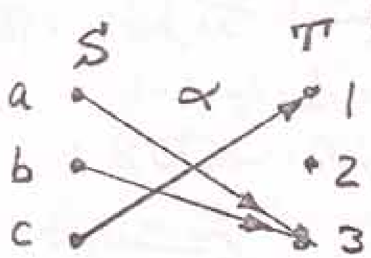
(1). از S در T شده میتواند؟

(2). از S بر T شده میتواند؟

(3). 1-1 شده میتواند؟

حل: (1). نخیر: b دارای کدام تصویر نیست، (2) نخیر، (3) نخیر: زیرا که باید mapping باشد بعد از آن 1-1 باشد.

966. مبرهن از دیاگرام مقابل آیا α یک mapping:



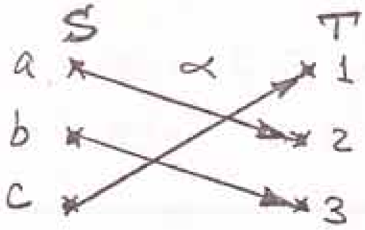
(1). از S در T شده میتواند؟

(2). از S بر T شده میتواند؟

(3). 1-1 بوده میتواند؟

حل: (1). بلی، (2). نخیر، (3). نخیر.

967. مبرهن از دیاگرام تیری ذیل آیا α یک mapping:



(1). از S در T میباشد؟

(2). از S بر T میباشد؟

(3). 1-1 شده میتواند؟

حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی.

968. اگر S، سِت اعداد تام بوده و $f(x) = x+1$ باشد، درینصورت f یک "mapping from S onto S" از S بر S میباشد.
میخواهیم ثبوت نمائیم که f یک mapping، 1-1 نیز میباشد.
(شما قسمتی ازین mapping را تکمیل کرده و ببینید چه واقع میشود؟)
فرضاً $f(s_1)=t$ و هم $f(s_2)=t$ باشد،
پس $s_1+1=t$ و هم $s_2+1=t$ میشود.
و یا $s_1+1 = s_2+1$ بوده و یا $s_1=s_2$ میباشد.
چون هیچکدام دو عنصر سِت S به عین عنصر سِت S map نگردیده اند، بنابرآن گفته میشود که f یک mapping ـــــ میباشد.

حل: 1-1 (one-to-one)

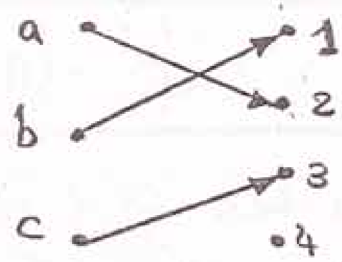
969. بخاطر داشته باشید برای اینکه باثبات برسانید که یک mapping f، 1-1 میباشد، نشان باید داد که هیچ کدام دو عنصر متمایز سِت S، محض بیک عنصر سِت T، mapped نشده باشد.
یا بعبارت دیگر اگر $\alpha(s_1)=t$ و $\alpha(s_2)=t$ باشند، ثبوت باید کرد (نشان باید داد) که ـــــ .

حل: $s_1 = s_2$

970. بالفرض که S عبارت از سِت اعداد تام بوده و $\alpha : x \to x^2$ یک

mapping از S در S باشد. (دیاگرام قسمتی از mapping را رسم نمائید.) در صورت α یک mapping : 1-1 نیست
زیرا: اگر: $t = (s_1)\alpha$ وهم $(s_2)\alpha = t$ باشد،
پس: $t = s_1^2$ وهم $s_2^2 = t$ گردیده
که درنتیجه: $s_2^2 = s_1^2$ میشود. آیا از رابطهٔ: $s_2^2 = s_1^2$
مستوجب این شده میتواند که: $s_2 = s_1$ شود؟

حل: نه خیر: چنانچه: $(-5)^2 = 25$ وهم $5^2 = 25$ بوده
یعنی: $(-5)\alpha = (5)\alpha$ بوده، امّا: $5 \neq -5$ است.



۹۷۱*. بملاحظهٔ دیاگرام مقابل آیا یک mapping: (1). از S در T است؟
(2). از S بر T است؟
(3). 1-1 شده میتواند؟

حل: (1). بلی، (2). نه خیر، (3) بلی

۹۷۲*. فرضاً S عبارت از set اعداد تام و $\alpha: S \to S$ طوری باشد که
برای هر: $s \in S$، $(s)\alpha = 2s$ گردد.
(قسمتی دیاگرام آنرا رسم نمائید.) آیا α یک mapping:
(1). از S در S میباشد؟
(2). از S بر S میباشد؟
(3). 1-1 میباشد؟

حل: (1). بلی، (2). نه خیر! زیرا: $3 \in S$ و یا $3 \in range$ بوده امّا 3
کدام عنصر set - dom. شده نمیتواند. (3). بلی

973. ما بخاطر که mapping از S into S و یا از S onto S (خودش) علاقمندیم. چنانچه در امثال فوق mapping های ذیل S را بخودش مطالعه نموده و دیدیم که:-

(1). 1-1 و هم onto بوده،

(2). onto بوده اما 1-1 نبوده است،

(3). 1-1 بوده اما onto نبوده است،

(4). نه 1-1 بوده و نه onto.

فرضاً S، set اعداد تام بوده و $\alpha: S \to S$ باشد طوریکه $(a)\alpha = a$ گردد

(1). آیا α یک mapping 1-1 میباشد؟

(2). آیا α یک mapping onto میباشد؟

حل: (1). بلی، (2). بلی،

974. فرضاً S یک set اعداد تام مثبت بوده و $\alpha: S \to S$ باشد طوریکه

$$(s)\alpha \begin{cases} = 1 & \text{در صورتیکه } s \text{ تاق باشد} \\ = \frac{s}{2} & \text{در صورتیکه } s \text{ جفت باشد} \end{cases}$$

حتماً قسمتی از دیاگرام شاکله هذا را تکمیل کنید؛ سپس به سوالات ذیل جواب دهید:

(1). آیا α یک mapping از S در S میباشد؟

(2). آیا α یک mapping از S به S میباشد؟

(3). آیا α یک mapping 1-1 است؟

حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). نخیر،

975. (1). یک mapping: $\alpha: S \to T$ عبارت از یک قانون مطابقت است، طوریکه ____ $s \in S$، ____ $t \in T$ اجتماع مینماید.

یا بعباره دیگر: (2). برای هر $s \in S$ محض یک $t \in T$ موجود است، طوریکه ____ میگردد. (3). اگر $t_1 = (s_1)\alpha$ و $t_2 = (s_2)\alpha$ باشند پس بالفرض ____ میباشد.

حل: (1) . هر عنصر، محض یک عنصر، (2) . $(s)\alpha = t$
(3) . $t_1 = t_2$

976 . اگر S عبارت از set اعداد تام بوده و $\alpha: x \to 3x$ باشد، میخواهیم ثبوت نمائیم که α یک mapping از S در S است. (آنرا قسمتی از دیاگرام ازرا رسم کنید.)

(1) . چون ضرب یک عملیه binary در S است، پس هر $s \in S$ یک عنصر $3s \in S$ موجود است طوریکه ______ میباشد.

(2) . فرضاً: $(s)\alpha = t_1$ و $(s)\alpha = t_2$ باشد،
چون: $3s = t_1$ و $3s = t_2$ بوده، درنتیجه: ______ میباشد.

(3) . پس α یک ______ میشود.

حل: (1) . $3s$ ، $(s)\alpha = 3s$. (2) . $t_1 = t_2$ ، (3) . از S در S میشود.

977 . فرضاً S، عبارت از set اعداد نسبتی بوده و $\alpha: x \to \frac{1}{x}$ باشد؛ آیا $\alpha: S \to S$ میشود؟ بخاطر داشته باشید که برای هر $s \in S$ باید که $\frac{1}{s} \in S$ موجود باشد.

حل: نه خیر! زیرا: درصورتیکه $s = 0$ باشد $\frac{1}{s}$ غیر معین بوده لذا α یک mapping از S در S نیست.

978 . اگر S، set اعداد نسبتی غیر صفر بوده $\alpha: x \to \frac{1}{x}$ باشد، آیا $\alpha: S \to S$ شده میتواند؟

حل: درینصورت برای هر $s \in S$ یک $\frac{1}{s}$ موجود میشود. (زیرا تقسیم در set اعداد نسبتی غیر صفر یک عملیه binary شده میتواند) طوریکه $(s)\alpha = \frac{1}{s}$ گردد.
درصورتیکه $(s)\alpha = t_1$ و $(s)\alpha = t_2$ باشد پس $\frac{1}{s} = t_1$ و $\frac{1}{s} = t_2$ دیده $t_1 = t_2$ بوده بنابراین α یک mapping از S در S میباشد.

979 . یک mapping از S در T یک mapping از S onto T میشود در صورتیکه هر عنصر T یک تصویر یک ویا چند عنصر S باشد . یا بالفاظ دیگر برای هر $t \in T$ ________ گردد .

حل : یک $s \in S$ موجود گردد طوریکه $t = (s)\alpha$

980 . mapping : $\alpha : x \to \frac{1}{x}$ شماره (977) را در نظر بگیرید : در صورتیکه S ست اعداد مثبتی غیر صفر باشد ما ثبوت نمودیم که α یک mapping از S into S است . حال میخواهیم با ثبات برسانیم که α یک mapping از S onto S نیز میباشد .
چون برای هر $t \in S$ یک عنصر $\frac{1}{t} \in S$ موجود است که برای آن ___ = ___ = $\alpha(\frac{1}{t})$ میگردد . بنابرین برای هر $t \in S$ یک عنصر preimage (منشأ تصویر) در S موجود میشود که در نتیجه α یک mapping از ________ میگردد

حل : $\frac{1}{1/t} = t$ ، S onto S

981 . mapping : $\alpha : S \to T$ یک "1-1 mapping" است در صورتیکه هر $t \in T$ تصویر بیشتر از یک عنصر S نباشد . یا بعباره دیگر : اگر $t = (s_1)\alpha$ و $t = (s_2)\alpha$ باشد پس ________ میباشد .

حل : $s_1 = s_2$

982 . بطور مثال فرضیه های شماره های 977 و 981 را در نظر بگیرید : دیده میشود که α یک mapping ، onto میباشد ، حال به اثبات برسانیم که α یک mapping ، 1-1 نیز میباشد .
(1) . نشان باید داد که کدام t در S موجود نیست که تصویر ________

_______ گردد.

(2) - زیرا: $(s_1)\alpha = t$ و $(s_2)\alpha = t$ باشد،

پس: $(s_1)\alpha = \frac{1}{s_1}$ و $(s_2)\alpha = \frac{1}{s_2}$ میباشد،

ویا: $\frac{1}{s_1} = t$ و $\frac{1}{s_2} = t$ موجه،

که درنتیجه: $s_1 = \frac{1}{t}$ و $s_2 = \frac{1}{t}$ میشود،

چون $\frac{1}{t} = \frac{1}{t}$ است، پس: _______ میباشد،

(3) - بنابران α یک mapping _______ است،

حل: (1) - که تصویر بیش از یک عنصر کدام S نه گردد، (2) $s_1 = s_2$ (3) - mapping 1-1 است،

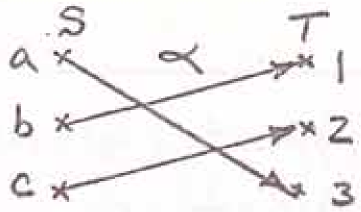
983 - تعریف: یک mapping α از S در T قابل تحویل[1] reversible است، درصورتیکه α هم onto وهم 1-1 باشد.

بطور مثال: فرضاً S، ست اعداد مثبتی غیر صفر باشد، طوریکه مشاهده رسید mapping $\alpha : x \to \frac{1}{x}$ درین که ست S هم "1-1" وهم "onto" میباشد، بنابران گفته میتوانیم که α یک mapping _______ ویا _______ است.

حل: قابل تحویل یا reversible

984 - بملاحظه از دیاگرام صفحه مابعد تثبیت کنید که آیا α یک mapping :

(1) - چنانچه قبلاً اشاره شد: mapping که هم یک بیک بوده وهم onto باشد ما آنرا بنام "مطابقت یک بیک" یا "One-to-one Correspondence" یاد میکنیم.



(1). از S در T هست؟

(2). از S بر T است؟

(3). 1-1 میباشد؟

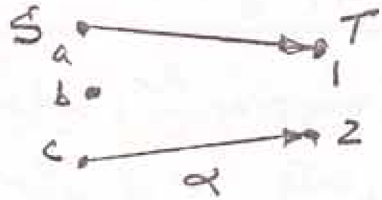
(4). reversible هست؟

حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی، (4). بلی.

985. اگر یک mapping $\alpha: S \to T$، reversible باشد، پس α یک mapping ________ .

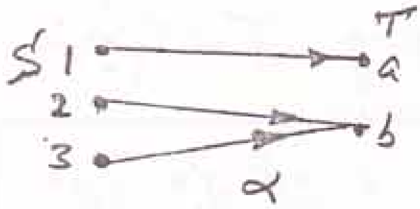
حل: 1-1 بوده و نیز یک onto میباشد.

986. مربوط به دیاگرام مقابل آیا α یک reversible mapping شده میتواند؟ چرا؟



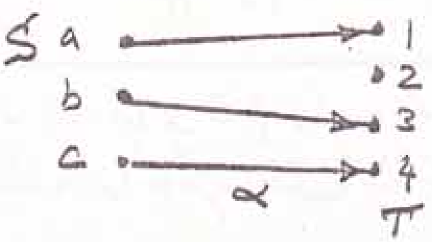
حل: نخیر: α یک mapping نیست.

987. مربوط به دیاگرام مقابل آیا α یک reversible mapping میباشد؟ بلی یا خیر؟ چرا؟



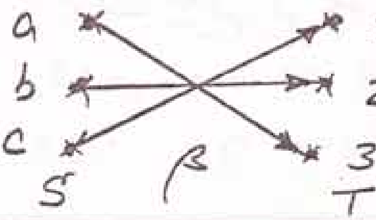
حل: نه خیر: α یک mapping، 1-1 نیست.

988. در دیاگرام مقابل آیا α یک reversible mapping شده میتواند؟ چرا؟



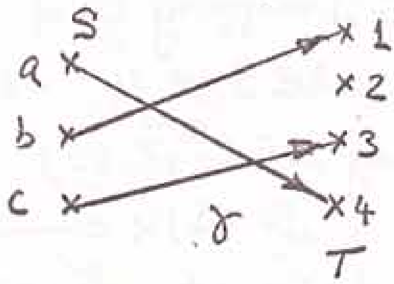
حل: نه خیر! زیرا: α onto نیست.

989. آیا در دیاگرام مقابل β یک reversible mapping از S در T شده میتواند؟



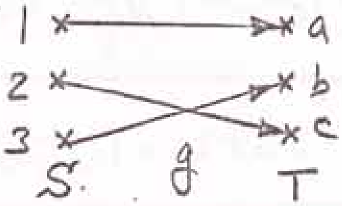
حل: بلی! زیرا هم 1-1 بوده و هم onto میباشد.

*990. در دیاگرام γ یک mapping reversible از S در T_1 گفته میشود در صورتیکه $T_1 = \{ \_\_\_ \}$ باشد.



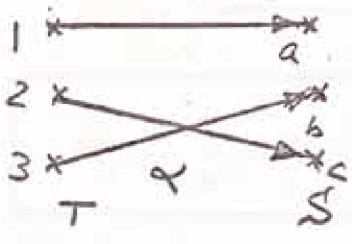
حل: $T_1 = \{1, 3, 4\}$

*991. مطابق از دیاگرام مقابل آیا g یک mapping reversible میباشد؟ و چرا؟



حل: بلی، زیرا: g هم onto بوده هم 1-1 میباشد.

*992. مطابق از دیاگرام مقابل آیا α یک mapping:
(1). از S در T میباشد؟
(2). از S بر T میباشد؟
(3). 1-1 میباشد؟
(4). reversible میباشد؟



حل: (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی، (4). بلی،

993. فرضاً S - الف ست اعداد تام مثبت و $\alpha: x \to x+2$ باشد:
(شاگرد فرق را کاپی کرده و جواب درست مسایل 994 الی 996 بگذارید)
ما ثبوت میکنیم که α یک reversible mapping از S در T است.

(1). $(3)\alpha = \_\_\_$ ، (2). $(n-5)\alpha = \_\_\_$

(3). $(\ \ )\alpha = 7$ ، (4). $(\ \ .\ \ )\alpha = r$ میشود.

حل: (1). 5، (2). $n-3$، (3). 5، (4). $r-2$.

994. α یک mapping از S در S میباشد. زیرا:

(1). برای هر $s \in S$، یک $s+2 \in S$ میباشد،
(زیرا جمع یک عملیه binary در S است.) طوریکه:
$(s)\alpha = \_\_\_$ میشود.

(2). اگر $(s)\alpha = t_1$ و هم $(s)\alpha = t_2$ باشد، درینصورت:
$s+2 = t_1$ و $s+2 = t_2$ بوده
و بالاخره: $\_\_\_$ میشود.

(3). بنابران گفته میتوانیم که α $\_\_\_$ میباشد.

حل: (1). $s+2$، (2). $t_1 = t_2$، (3). یک mapping از S در S

995. α یک 1-1 mapping است، زیرا: اگر $(s_1)\alpha = t$ و $(s_2)\alpha = t$ باشد،
پس $s_1 = t-2$ و هم $s_2 = t-2$ باشد،
درینصورت $\_\_\_$ میشود. که درنتیجه گفته میشود که:
α $\_\_\_$ است.

حل: $s_1 = s_2$، یک mapping 1-1 است.

996. حال ثبوت مینمائیم که α یک onto mapping است.

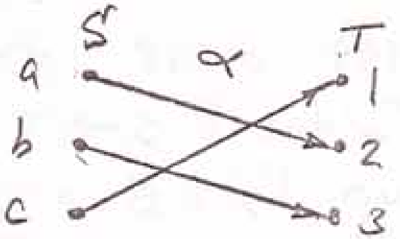
چون توضیح حصول یک عملیه binary در ... S مفروض است. پس اگر $s \in S$ باشد $s-2 \in S$ نیز میباشد. درحالیکه: $(s-2)\alpha =$ ___ میباشد، بنابران α ______ میباشد.

حل: s، یک mapping از S onto S

997. ما به اثبات رسانیدیم که α یک 1-1 mapping بوده وعلاوه برآن یک mapping از S onto S میباشد، بنابران گفته میتوانیم که α یک ______ .

حل: یک reversible mapping نیز میباشد.

998. مسئله از دیاگرام مقابل نشان میدهد α یک reversible mapping از S به T شده میتواند؟



تعریف: α^{-1} را قرار ذیل تعریف مینمائیم:

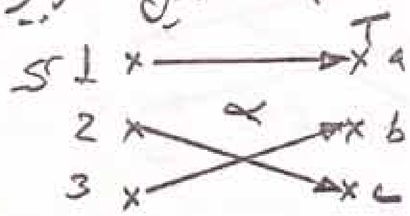
$$\alpha^{-1}: T \to S$$

یعنی: ... $\alpha^{-1}: x \to y$ درصورتیکه $(y)\alpha = x$ باشد؛

طور مثال: $(b)\alpha^{-1} = 3$ درحالیکه $(3)\alpha = b$ میباشد. به همین قسم: $(a)\alpha^{-1} =$ ___ درحالیکه $(\ \ )\alpha = a$ شود.

حل: (بلی) reversible شده میتواند، 2، (2)

999. یک reversible mapping مانند α را در ذیل درنظر بگیرید:

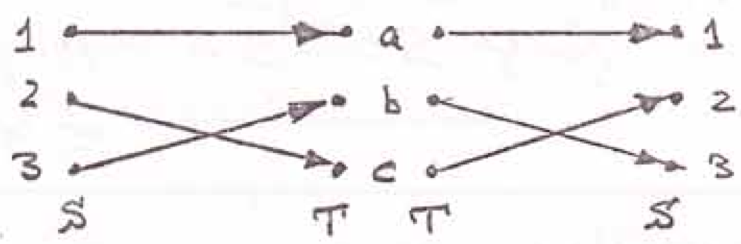


یعنی α یک reversible mapping از S به T است، پس درشکل

درینصورت : $\bar{\alpha}^{1}: T \to S$ را به : $x = \bar{\alpha}^{1}(y)$ تعریف کنید
درصورتیکه : $y = \alpha(x)$ باشد. بطور مثال : $2 = \bar{\alpha}^{1}(c)$ است،
درصورتیکه : $c = \alpha(2)$ باشد.
با شکل دیاگرام: (1). چون $b = \alpha(3)$ است، پس ___ $= \bar{\alpha}^{1}(-)$ میشود.
(2). دیاگرام کری mapping $\bar{\alpha}^{1}$ و α را رسم کنید در
حالیکه $\bar{\alpha}^{1}$ یک mapping از T در S میباشد.

حل :

(2)

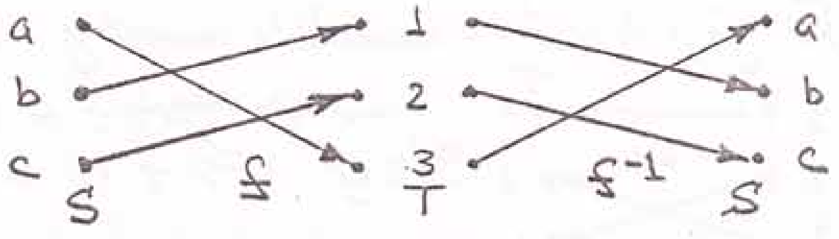


(1). $\bar{\alpha}^{1}(b) = 3$

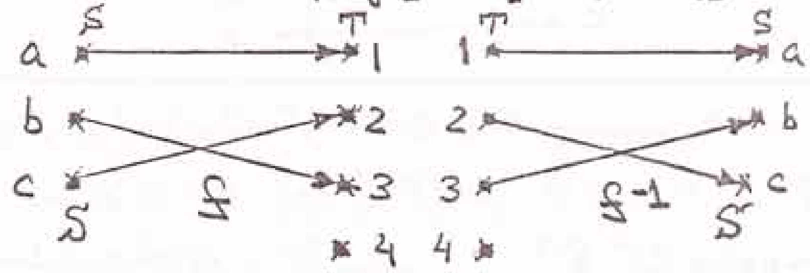
1000. در مثال : 998 و 999 یک reversible mapping
$f: S \to T$ را مطالعه کردیم. درضمن یک mapping f^{-1}
از T در S را توسط map. کردن هر $t \in T$ در $s \in S$ طوریکه
t تصویر image شد تحت mapping f است، تعریف نمودیم.
بطور مثال، اگر $f: x \to y$ بوده درحالیکه: $x \in S$ و $y \in T$ است،
پس درینصورت: ___ $\to$ ___ : f^{-1} میباشد.

حل : $y \to x$ زیرا $f^{-1}: T \to S$

1001. به دیاگرام های ذیل توجه فرمائید که f یک reversible mapping از S در T
بوده و f^{-1} توسط : $f^{-1}(t) = s$ تعریف شده درصورتیکه $f(s) = t$ باشد.

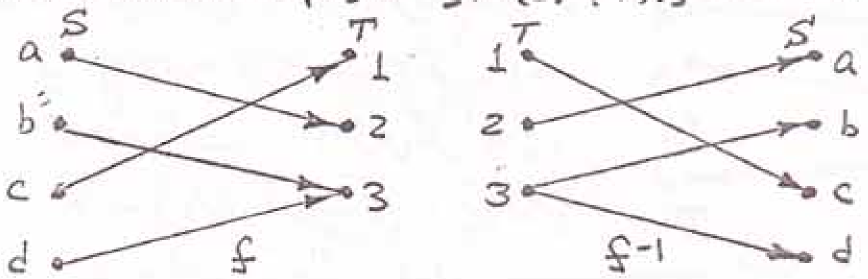


1002. با ملاحظهٔ از دیاگرام‌های ذیل: (1). آیا f یک mapping از S در T میباشد؟ (2). آیا f^{-1} یک mapping از T در S شده میتواند؟



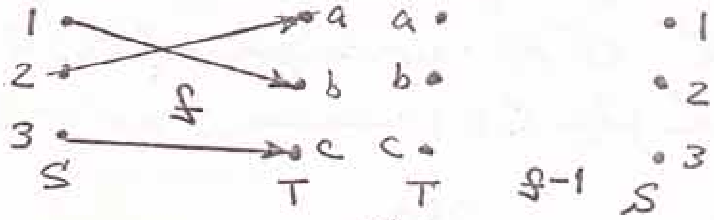
حل: (1). بلی، (2). نخیر: $4\in T$ بوده آن تحت f^{-1} تصویر در S ندارد.

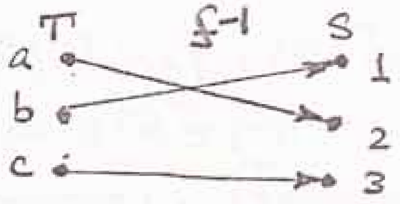
1003. با ملاحظه از دیاگرام‌های ذیل: (1). آیا f یک mapping از S در T شده میتواند؟ (2). آیا f^{-1} یک map. از T در S شده میتواند؟



حل: (1). بلی، (2). نخیر: $3\in T$ تحت f^{-1} دو تصویر در S که $b\in S$ و $d\in S$ دارد یعنی تصویر $3\in T$ در range set (S) یگانه نیست. یا با الفاظ دیگر: $(3)f^{-1}=b$ و $(3)f^{-1}=d$ بوده اما $d\neq b$.

1004. از مثال‌های 1002 و 1003 فوق ملاحظه میشود که یک mapping داده شده: $f: S\to T$ یک f^{-1} را تعریف میکند طوریکه: $f^{-1}: y\to x$ است درصورتیکه: $f: x\to y$ باشد. اما ضرورت نیست که f^{-1} یک mapping از T در S باشد. تیرهای که توسط f^{-1} تعریف میشوند در شکل ذیل تکمیل نمائید. ملتفت خواهید شد که در اینحالت f^{-1} یک mapping از T در S میباشد.

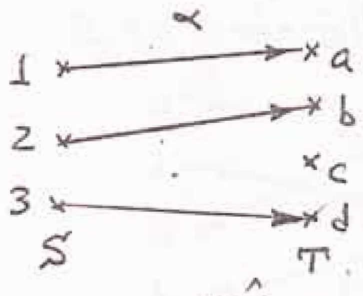




حل :-

۱۰۰۵. بخاطر باید داشت اگر $f: S \to T$ یک mapping "onto" نباشد، بنابر تعریف فوق f^{-1} دیده نشود که برای بعضی $t \in T$ ، $f^{-1}(t)$ موجود شده نمیتواند. و درینصورت: f^{-1} یک mapping از S به T شده ______ .

حل: نمیتواند



۱۰۰۶. بطور مثال، در دیاگرام مقابل α یک mapping از S به T بوده اما "onto" نیست. بالفرض اگر α^{-1} به: $x \to y : \alpha^{-1}$ تعریف کنیم، پس درینصورت $2 = \alpha^{-1}(b)$ میشود. زیرا: ______ است.

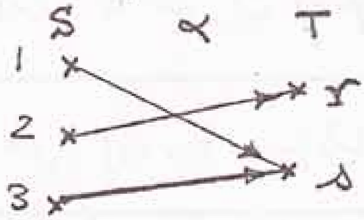
توجه نمائید! که کدام عنصر S موجود نیست که تصویر c را تحت f^{-1} بوجود آرد. یعنی: $\alpha^{-1}(c)$ در S وجود ندارد. بنابران α^{-1} یک mapping از T به S ______ .

حل: $b = \alpha(2)$ ، نمیباشد.

۱۰۰۷. اگر $\alpha: S \to T$ یک mapping "onto" بوده اما یک یک "1-1" نباشد، پس درینصورت لااقل یک $t \in T$ موجود شده میتواند طوریکه برای t مذکور دو عنصر $s_1, s_2 \in S$ موجود گردد که: $s_1 \neq s_2$ بوده و $t = \alpha(s_1)$ وهم $t = \alpha(s_2)$ باشد. درینصورت: $\alpha^{-1}(t)$ یگانه unique نبوده، بنابر آن α^{-1} یک mapping از T به S ______ : (میباشد یا نمیباشد)

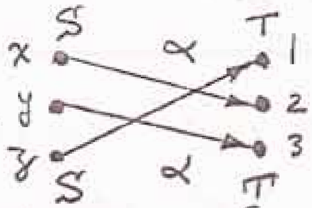
حل : نمیباشد.

1008. مطلوب شکل: از دیاگرام مقابل ملاحظه میشود که α یک mapping از "S onto T" بوده اما "1-1" نیست. اگر ما α^{-1} را به: $\alpha^{-1}: y \to x$ در صورتیکه $\alpha: x \to y$ باشد، تعریف نمائیم: دیده میشود که: $s = \alpha(1)$ و هم $s = \alpha(3)$ بوده پس درینصورت ما داریم: $\alpha^{-1}(s) = 1$ و هم $2 = \alpha^{-1}(r)$ میشود.
بنابرین α^{-1} یک ______ شده نمیتواند.



حل : mapping از T در S

1009. بالفرض α طبق دیاگرام مقابل توضیح شده باشد: درینصورت دیده میشود که α یک mapping "1-1" و هم "onto" از S بر T میباشد. پس α یک reversible Map. میباشد. حال اگر ما α^{-1} را توسط $\alpha^{-1}: y \to x$ در حالیکه $\alpha: x \to y$ است، تعریف کنیم، درینصورت: (1). ___ $= \alpha^{-1}(1)$ بوده
(2). ___ $= \alpha^{-1}(2)$ ،
(3). ___ $= \alpha^{-1}(3)$ میباشد. بنابران
(4). α^{-1} یک ___ از ___ در ___ میباشد.



حل : (1). z ، (2). x ، (3). y ، (4). mapping ، T در S

1010. سؤال که بجواب آن مایلیم اینست: بالفرض $\alpha: S \to T$ بوده و ما میخواهیم که T را در S map. کنیم؛ طوریکه هر

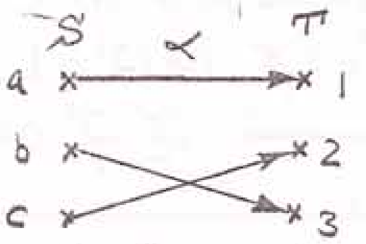
هر عضو t ، $t \in T$ را به محض یک عضو s ، $s \in S$ ، map. کنیم در حالیکه t تصویر s یا image تحت α میباشد، یا بعبارهٔ دیگر $s = \alpha^{-1}(t)$ میگردد.

در صورتیکه: (۱). ———— گردد.

(۲). α چطور یک mapping باشد تا α^{-1} نیز یک mapping را بوجود آورد؟

> حل: (۱). $t = (s)\alpha$ ؛ (۲). α باید یک reversible map. باشد.

۱۰۱۱. بمنظور دیاگرام مقابل:

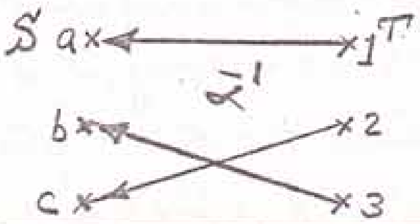


(۱). آیا α یک revers. map. است؟

(۲). دیاگرام α^{-1} را از T در S رسم نمائید. (در حالیکه: $\alpha^{-1}: y \to x$ بوده در صورتیکه: $\alpha: x \to y$ باشد.)

(۳). آیا α^{-1} یک mapping از T در S میباشد؟

(۴). آیا α^{-1} یک reversible mapping شده میتواند؟

> حل: (۱). بلی، (۲). ←
>
> 
>
>
> (۳). بلی،
>
> (۴). بلی،

۱۰۱۲. قضیه:

اگر $\alpha: S \to T$ یک reversible mapping باشد، پس درینصورت $\alpha^{-1}: T \to S$ (در حالیکه: $\alpha^{-1}: y \to x$ در صورتیکه $\alpha: x \to y$ است، باشد.) نیز یک reversible mapping میباشد.

برای اثبات این قضیه نشان باید داد که:

(۱). α^{-1} یک mapping «into» از S در T است،

(۲). α^{-1} یک mapping «onto» از S به T است،

(۳). α^{-1} یک mapping «1-1» است.

این قسمت حل اینجا ب نمکند!

1013. $\alpha: S\to T$ یک reversible mapping داده شده است.

میدانیم: (1). چون α یک mapping است، پس برای هر $s\in S$ یک $t\in T$ موجود است طوریکه: ——— میشود.

(2). چون α یک mapping است، پس درصورتیکه: $t_1=(s)\alpha$ و هم $(s)\alpha=t_2$ باشد، پس: ——— میشود.

(3). α یک «onto» mapping است، پس برای هر $t\in T$ حتمی یک $s\in S$ موجود است طوریکه ——— میباشد.

(4). چون α یک «1-1» mapping بوده، پس اگر: $t=(s_1)\alpha$ و هم $t=(s_2)\alpha$ باشد، پس ——— میشود.

این بیانیه های چهارگانه فوق را همراه جوابات درک و صحیح آن کاپی نمائید که بعداً مورد دستفاده قرار میگیرد.

حل: (1). $(s)\alpha=t$، (2). $t_1=t_2$، (3). $(s)\alpha=t$، (4). $s_1=s_2$

1014. میخواهیم نشان دهیم که α^{-1} یک mapping از T در S میباشد.

(1). اگر $t\in T$ باشد، پس یک $s\in S$ است طوریکه: $t=(s)\alpha$ میگردد، پس بنابر بیانیهٔ (3) فوق قرار تعریف: ——— $=(t)\alpha^{-1}$ میشود.

(2). بالفرض: $s_1=(t)\alpha^{-1}$ و $s_2=(t)\alpha^{-1}$ باشد، درصورتیکه: $t=(s_1)\alpha$ و $t=(s_2)\alpha$ بوده، پس بأساس بیانیهٔ (4) فوق ——— میشود.

بنابر بیانیه های (1) و (2) ثابت گردید که α^{-1} یک ——— میشود.

حل: (1). s، (2). $s_1=s_2$، α^{-1} یک mapping از T در S

1015. α^{-1} یک «onto» mapping از T بر S میباشد.

Proof: بالفرض: $s\in S$ باشد، پس بنابر بیانیهٔ (1). ثابته: 1013 فوق یک $t\in T$ موجود است طوریکه: $t=(s)\alpha$ گردد، پس قرار

قرار تعریف : ــــــ = $\alpha^{-1}(t)$ میشود. لذا گفته میتوانیم که هر $(s)\alpha \in S$ تصویر کدام $t \in T$ تحت α^{-1} میباشد. بنابران α^{-1} یک ــــــــــ است.

حل : $s = \alpha^{-1}(t)$ ، یک mapping از T بر (onto) S است.

1016. α^{-1} یک 1-1 mapping است.

Proof : بالفرض : $s = \alpha^{-1}(t_1)$ و $s = \alpha^{-1}(t_2)$ باشد، پس در نتیجه: $t_1 = (s)\alpha$ وهم $t_2 = (s)\alpha$ میباشد. بنابر بیانیه: (2) شماره 1013 ــــ بوده، بنابران α^{-1} یک ــــــــــ میباشد.

حل : $t_1 = t_2$ ، mapping 1-1

1017. اگر α یک reversible mapping از S بر T طوریکه: $t = (s)\alpha$ است، بوده باشد. درینصورت: $\alpha^{-1}: T \to S$ را که توسط: $s = \alpha^{-1}(t)$ تعریف میشود، بنام معکوس ویا Inverse ، α یاد میکنند.

از مسایل: 1014 الی 1016 ما ثابت نمودیم که α^{-1} یک mapping "1-1" بوده و "S from T onto" میباشد، بنابران α^{-1} یک mapping ــــــ میباشد.

حل : reversible (قابل تحویل)

1018. اگر S، set اعداد تام مثبت و T، set اعداد تام جفت مثبت بوده، و $\alpha: x \to 2x$ باشد. درینصورت: $2 = (1)\alpha$ و ــــ = $(5)\alpha$ میشود. دیده میشود که α یک reversible mapping (قابل تحویل) است.

(یک قسمت ازین mapping را توسط دیاگرام توضیح کنید.) درینصورت α^{-1} طوریکه در فوق تعریف شد یک inverse mapping (معکوس) α از T به S میباشد. پس واضح است که: $\alpha^{-1}(4) = 2$ بوده

در نتیجه گفته $2 = \overset{-1}{\alpha}(4)$ بوده زیرا $(2)\alpha = 4$ میشود.
به همین قسم: ___ $= \overset{-1}{\alpha}(8)$ بوده، زیرا: ___ میشود.

حل: 10 ، 4 ، $(4)\alpha = 8$

1019. تعریف: یک mapping از یک set S در S را بنام انتقال transformation S یاد میکنند.
پس اگر S یک set اعداد تام بوده و $\alpha: x \to x+1$ باشد، درینصورت α، S را در S map نموده و بنام transformation (انتقال) S یاد میشود.

حل اینجا ب میکنید.

1020. فرضاً: S، $\alpha: S \to S$ یک reversible mapping از S بر S باشد، درینصورت ما α را یک انتقال قابل تحویل S reversible Transformation مینامیم. چون $\overset{-1}{\alpha}$ یا معکوس (Inverse) α نیز یک mapping قابل تحویل از S به S میباشد، بنابر آن $\overset{-1}{\alpha}$ نیز بنام ___ ___ یاد میشود.

حل: reversible transformation of S و یا انتقال قابل تحویل S

1021. فرضاً S، set اعداد تام بوده و $\alpha: x \to x+1$ و $\beta: x \to 2x$ دو transform (انتقال) S باشند: درینصورت افاده:
$[(3)\alpha]\beta$ تصویر 3 را تحت α و تصویر نتیجه را تحت β نشان میدهد، چون: $(3)\alpha = 4$ است، پس:
$[(3)\alpha]\beta = [4]\beta$ میشود، مانند یکه: $[4]\beta = 8$ میباشد.
در نتیجه: . . . . . . $[(3)\alpha]\beta = 8$ میشود.
به همین قسم: . . . . . $[(-2)\alpha]\beta = [-1]\beta =$ ___ میشود.

حل: -2

1023. اگر S، ست اعداد تام بوده و $\alpha: x \to x+1$ و همچنان $\beta: x \to 2x$ دو انتقال S، transformations باشند:
درینصورت :-

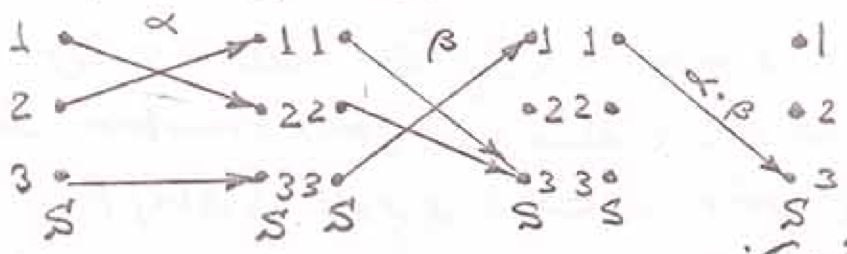
توجه شود:
$[(5)\alpha]\beta = [6]\beta = 12$
$[(5)\beta]\alpha = [\quad]\alpha = \_\_\_$ میشود.

حل: $[10]\alpha = 11$

V. گروه انتقال :- Transformation Group

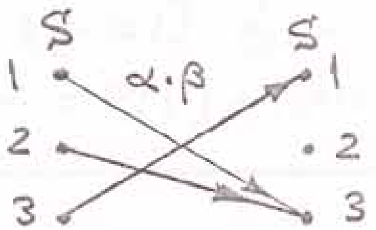
1024. اگر S یک ست غیر خالی بوده، α و β دو انتقال S یعنی S، transformations باشند، درینصورت: $[(x)\alpha]\beta$ یک mapping، که x را تحت α که تصویر آن توسط mapping ،β تعقیب میشود، نشان میدهد. نتیجه آن چنان است: که هر $x \in S$ را بکدام تصویرش map گردد. این نتیجه عبارت از یک انتقال است که به $\alpha\cdot\beta$ نشان داده میشود.

بطور مثال: (1). $(1)\alpha\cdot\beta = [(1)\alpha]\beta = [2]\beta = 3$



جدول را تکمیل کنید:

حل:

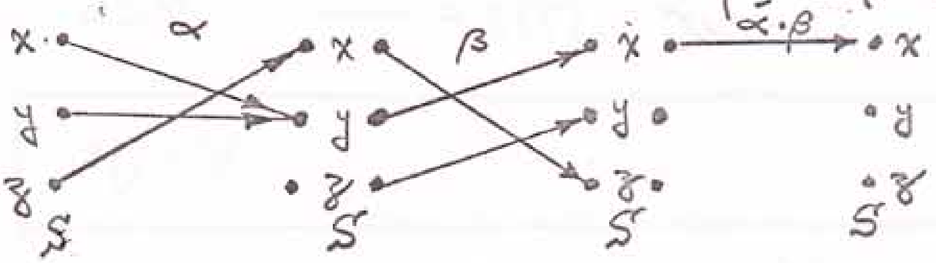


اینست جدول تکمیل شده

1025- اگر S یک ست غیرخالی بوده، α و β دو انتقال S باشند: پس افاده "$\alpha\cdot\beta$" معنی انتقال: $(s)\alpha\cdot\beta=[(s)\alpha]\beta$
را چنین بیان میکند: "که اولاً s تحت —— map. شده
و سپس این نتیجهٔ حاصله (تصویر s) تحت —— map. گردیده
است."

حل: α ، β

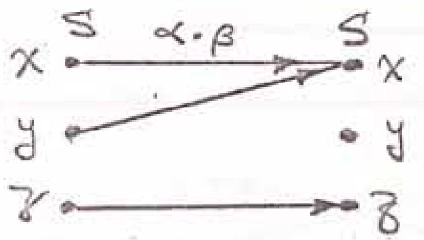
1026- از دیاگرام ذیل داریم:-



$$(x)\,\alpha\cdot\beta=[(x)\alpha]\beta=[y]\beta=x$$
$$\therefore\ (x)\,\alpha\cdot\beta=x$$

جدول را تکمیل کنید.

حل: اینست جدول تکمیل شده:



1027. اگر S یک ست غیرخالی بوده و M_s، ست تمام انتقالات S باشد، پس اگر α و β دو انتقال transform. بوده باشد، درینصورت: $\alpha\cdot\beta$ نیز یک انتقال S میباشد.
چون برای هر یک از عناصر (ordered pairs) جوره‌ای مرتب کمف یک (جوره مرتب) عنصر در M_s موجود است که تحت این عملیه "." "یا اد انتقال α توسط انتقال β تعقیب میشود" با آن تقابل میکند،

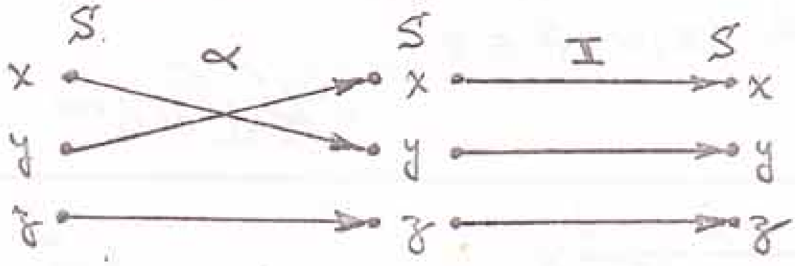
بنابران عملیهٔ «∘» (یا عملیهٔ «تعقیب» میشود» که ما آنرا بنام عملیه ضرب یاد خواهیم کرد.) یک عملیه ______ در Ms میباشد.

حل: binary operation

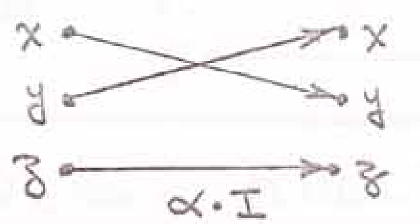
1028. فرضاً S یک ست غیرخالی و $I: S \to S$ بوده طوریکه: $I: x = x$ را برای $\forall x \in S$ تحقیق کند، باشد. بوضاحت دیده میشود که I یک انتقال قابل تحویل است. توجه نمائید! I هریک از عنصر S را به خودش map میکند. پس برای $\gamma \in S$، $(\gamma)I =$ ______ میشود.

حل: γ

1029. انتقال $\alpha \circ I$ را توسط دیاگرام تیری در ذیل تکمیل کنید:

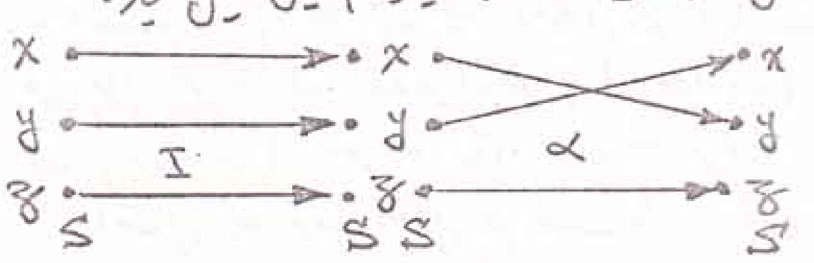


حل:

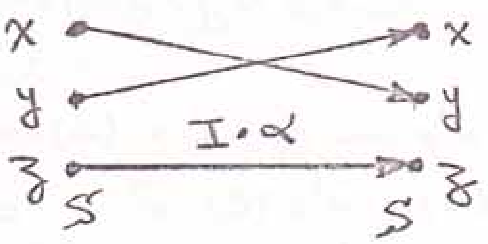


حال α و $\alpha \circ I$ را مقایسه نمائید!

1030. دیاگرام انتقال $I \circ \alpha$ را از دیاگرام ذیل تکمیل کنید:



حل:



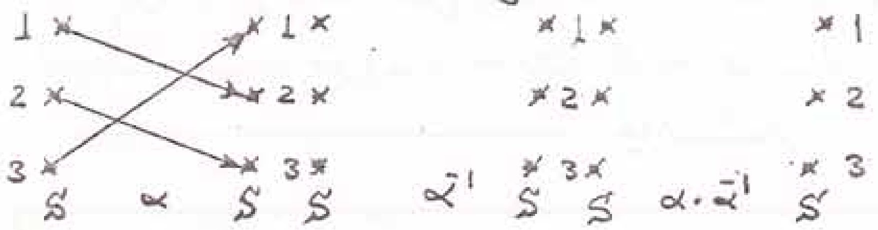
1031. اگر S عبارت از set اعداد تام بوده و $\alpha : x \to x+3$ و $I : a \to a$ دو انتقال S باشند: پس درینصورت:

$$(7)\alpha\cdot I = [(7)\alpha]I$$
$$= [10]I$$
$$= 10$$

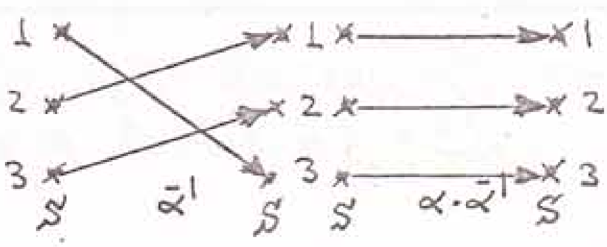
$$(-5)\alpha\cdot I = \underline{\quad(1)\quad}$$
$$= \underline{\quad(2)\quad}$$
$$= \underline{\quad(3)\quad}$$

حل: (1). $[(-5)\alpha]I$ ، (2). $[-2]I$ ، (3). -2

1032. بخاطر خود حفظ داشته باشید درصورتیکه α یک انتقال قابل تحویل reversible tran. باشد، درینصورت α^{-1} موجود بوده و نیز یک انتقال قابل تحویل میباشد. تیرهای با قیاسنامهٔ دیاگرام ذیل را تکمیل کنید.



حل:



نتیجه: $\alpha\cdot\alpha^{-1}$ را با I مقایسه کنید.

1033. اگر α یک انتقال قابل تحویل در S باشد، α^{-1} یک انتقال قابل تحویل در S نیز میباشد.

بالفرض: $(\text{س})\alpha = t$ باشد، پس ___ $= (t)\alpha^{-1}$ میشود،

درینصورت: ... $(\text{س})\alpha\cdot\alpha^{-1} = (t)\alpha^{-1}$ بوده،

حالانکه: ... ___ $= (t)\alpha^{-1}$ است،

لذا: ... ___ $= (\text{س})\alpha\cdot\alpha^{-1}$ میشود،

و هم چنان: ... ___ $= (\text{س})\cdot I$ میباشد.

حل: S ، س ، س ، س

1034. اگر α و β دو انتقال بر یک ست غیرخالی S باشند، پس افاده $\alpha\cdot\beta$ این مفهوم را ارائه میکند: که نتیجهٔ mapping هر عنصر $\text{س}\in S$ به تصویر یگانهٔ مربوطه‌اش فرضاً t تحت α map. شده و سپس t تحت mapping β، به تصویر یگانهٔ مربوطه‌اش فرضاً u، map. میشود. ما این مفهوم را توسط سمبول چنین نشان داده میتوانیم:

$$
\begin{aligned}
(\text{س})\alpha\cdot\beta &= [(\text{س})\alpha]\beta \\
&= [t]\beta \\
&= u
\end{aligned}
$$

چون هر $\text{س}\in S$ محض یک $u\in S$ تحت mapping $\alpha\cdot\beta$، mapped شده میتواند. بنابران $\alpha\cdot\beta$ عبارت از ___ ___ میباشد.

حل: از یک انتقال S، transformation یا mapping از S into S

1035. بطور مثال: اگر S، ست اعداد تام بوده و $\alpha: x\to x^2$ و $\beta: x\to x-2$ دو انتقال در S باشند:

پس درینصورت :
$$(3)\alpha\cdot\beta=[(3)\alpha]\beta$$
$$=[9]\beta$$
$$=7$$
$$\therefore\quad(3)\alpha\cdot\beta=7$$

شما : $(3)\beta\cdot\alpha$ را بدست آرید .

حل :
$$(3)\beta\cdot\alpha=[(3)\beta]\alpha$$
$$=[1]\alpha$$
$$=1$$
$$\therefore\quad(3)\beta\cdot\alpha=1$$

توجه نمائید ! $(3)\beta\cdot\alpha\neq(3)\alpha\cdot\beta$

1036. اگر S ، ست اعداد تام بوده و برای $\forall x\in S$ که $\alpha: x\to x+1$ و $\beta: x\to 2x$ دو انتقال در S باشند، پس $\alpha\cdot\beta$ نیز یک انتقال در S میباشد .

$(3)\alpha\cdot\beta=[(3)\alpha]\beta$,	$(3)\beta\cdot\alpha=$ ______ ,
$=[\_\_\_]\beta$,	$=$ ______ ,
$=$ ______ .	$=$ ______ .

حل :

$(3)\alpha\cdot\beta=[(3)\alpha]\beta$	$(3)\beta\cdot\alpha=[(3)\beta]\alpha$
$=[4]\beta$	$=[6]\alpha$
$=8$	$=7$
$\therefore(3)\alpha\cdot\beta=8$	$\therefore(3)\beta\cdot\alpha=7$

1037 . فرضاً که یک ست غیر خالی بوده و M_s ، ست تمام انتقالات S باشد ، پس برای تمام $\alpha,\beta\in M_s$: اگر $\alpha\cdot\beta: x\to[(x)\alpha]\beta$ فرض شود ، درینصورت $\alpha\cdot\beta$ یک انتقال

یک انتقال بر کد برده و ضمناً یک عنصر M_s میباشد.
بنابرین هر جوره مرتب عناصر M_s یک عنصر یگانه از M_s (که بنام حاصل ضرب دو عنصر اول آن یاد میشود) اجتماع associate میکند. پس میتوان گفت که حاصل ضرب انتقالات عبارت از یک ______ در M_s میباشد.

حل: binary operation (عملیه دوتائی ویا عملیه دوگانه ای)

1038. بطور مثال: اگر S، ست اعداد تام موجبه و برای هر $x \in S$ داشته باشیم:
$\alpha: x \to x+1$ و $\beta: x \to 2x$ و همچنان $\gamma: x \to 2x+2$ را.
پس برای $s \in S$ داریم: $(s)\alpha \cdot \beta = [(s)\alpha]\beta$

$$= [s+1]\beta$$

$$= \underline{\quad (1) \quad}$$

$\therefore (s)\alpha \cdot \beta = \underline{\quad (2) \quad}$

و همچنان: $(s)\gamma = \underline{\quad (3) \quad}$

حل: (1). $2s+2$ ، (2). $2s+2$ ، (3). $2s+2$
توجه نمائید! که درین مثال: $(s)\gamma = (s)\alpha \cdot \beta$ گردیده است.

1039. فرضاً: $f: S \to T$ و $g: S \to T$ بوده باشد و اگر برای هر $x \in S$ - $(x)f = (x)g$ باشد، پس درینصورت بحیث یک subset $S \times T$، $f = g$ میباشد، چنانچه در حرکات شانه 1038 ملاحظه شد که برای هر $s \in S$: $(s)\gamma = (s)\alpha \cdot \beta$ گردیده و درنتیجه: ______ میباشد.

حل: $\alpha \cdot \beta = \gamma$

1040. اگر S، ست اعداد تام بوده و $\alpha: x\to x^2$ و $\beta: x\to x+2$ و $\gamma: x\to x^2+2$ برای $\forall x\in S$ مفروض باشند:

پس برای $s\in S$ داریم:

$$(s)\alpha\cdot\beta = [(s)\alpha]\beta = [s^2]\beta = s^2+2$$

از طرف دیگر برای $\forall s\in S$ داریم: $(s)\gamma = s^2+2$

ازین نتیجه میشود که: $(s)\gamma = (s)\alpha\cdot\beta$

(1). پس گفته میتوانیم که: ___ = ___ است.

(2). $(s)\beta\cdot\alpha$ را بدست آرید.

(3). آیا: $\beta\cdot\alpha = \gamma$ شده میتواند؟

حل: (1). $\alpha\cdot\beta = \gamma$ ، (2). $(s)\beta\cdot\alpha = [(s)\beta]\alpha = [s+2]\alpha = (s+2)^2 = s^2+4s+4$.

(3). نه خیر.

1041. اگر α و β دو mappings از S در T بوده طوریکه: $(s)\alpha = (s)\beta$ برای $\forall s\in S$ باشند؛

پس درینصورت ___ = ___ میباشد.

حل: $\alpha = \beta$

1042. اگر S یک ست غیر خالی و M_s، ست تمام تطابقات S باشد، طوریکه به هر $\alpha, \beta\in M_s$ صرف یک عنصر یگانهٔ M_s که بنام حاصل ضرب α و β یاد میشود و به $\alpha\cdot\beta$ ارائه میگردد تقابل و مطابقت دارد. بنابرآن گفته میتوانیم که عملیه "$\cdot$" یک عملیه ___ در M_s میباشد.

حل: عملیه دوگانه ای ویا binary operation

۱۰۴۳. ما بخصوص یک set که دارای یک رابطهٔ معادل equivalence relation و یک عملیه دوگانه ای binary operation بوده علاقمندیم.
چنانچه ما خواص انتقالات را در یک set، S مطالعه نمودیم و دیده شد (در امثال فوق) که عملیه ضرب "." در انتقالات چنین است که:

$(s)\,\alpha.\beta \neq (s)\,\beta.\alpha$ بوده

و یا دیگر: $\alpha.\beta \neq \beta.\alpha$ میباشد.

پس گفته میتوانیم که عملیه ضرب انتقالات ______ نمیباشد.

حل: Commutative (تبدیلی)

۱۰۴۴. اگر "*" یک عملیه binary در یک set S باشد، "*" را چنین associative میباشد درصورتیکه برای تمام $x, y, z \in S$ رابطهٔ: ______ حقیقت داشته باشد.

حل: $x*(y*z)=(x*y)*z$

۱۰۴۵. حال میخواهیم که این خاصیت Associativity را در انتقالات مطالعه کنیم، و برای این منظور یک مثال خاص را مدنظر میگیریم: فرضاً S عبارت از set اعداد تام مجبه $\alpha: x\to x+1$ و $\beta: x\to 2x$ و $\gamma: x\to 2x-3$ که برای تمام $x\in S$ سه انتقال در S باشند. در نتیجه ما داریم که:

ثبت: $\alpha.(\beta.\gamma)$:

$$(s)\,\alpha.(\beta.\gamma)=[(s)\alpha](\beta.\gamma)$$
$$=[s+1](\beta.\gamma)$$
$$=[(s+1)\beta]\gamma$$
$$=[2s+2]\gamma$$
$$=4s-1$$
$$\therefore (s)\,\alpha.(\beta.\gamma)=4s-1$$

$$(s)(\alpha.\beta)=[(s)\alpha]\beta$$
$$=[s+1]\beta$$
$$=2s+2$$
$$\therefore (s)(\alpha.\beta)=2s+2$$

$$(s)(\alpha.\beta).\gamma=[(s)(\alpha.\beta)]\gamma$$
$$=[2s+2]\gamma$$
$$=4s-1$$
$$\therefore (s)(\alpha.\beta).\gamma=4s-1$$

دوم، $(s)\,\alpha.(\beta.\gamma)=4s-1$

ازینجا نتیجه میشود که: $(s)\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (s)(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ میباشد.
ازین مثال خاص دیده میشود که عملیهٔ «·» در انتقالات دارای خاصیت ______ میباشد.

حل: Associative یا انجمنی

1046. حال میخواهیم که خاصیت عملیهٔ «·» را در M_s بررسی نموده جستجو نمائیم اگر «·» انجمنی associative باشد.
فرضاً α، β و γ انتقالات شامل M_s بوده وبالفرض:
$(s)\alpha = t$ ، $(t)\beta = u$ و $(u)\gamma = v$ باشد، پس ما داریم که:

$$\begin{aligned}(s)\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) &= [(s)\alpha](\beta\cdot\gamma)\\ &= [t](\beta\cdot\gamma)\\ &= [(t)\beta]\gamma\\ &= [u]\gamma\\ &= v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s)(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma &= [(s)(\alpha\cdot\beta)]\gamma\\ &= [[(s)\alpha]\beta]\gamma\\ &= [[t]\beta]\gamma\\ &= [u]\gamma\\ &= v\end{aligned}$$

ازینجا نتیجه میشود که: $\underline{(s)(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = (s)\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)}$.
بنابران: ______ $= \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ بوده در نتیجه گفته میتوانیم که عملیهٔ ______ «·» دارای خواص ______ نیز میباشد.

حل: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ ، binary ، Associative یا انجمنی

1047. فرضاً S یک ست غیرخالی بوده و M_s ست تمام انتقالات S باشد: ما میدانیم که عملیهٔ ضرب «·» انتقالات در M_s یک عملیهٔ binary انجمنی associative بوده اما تبدیلی commutative نیست.
حال میخواهیم که دیگر خواص M_s را تحت عملیهٔ «·» ضرب انتقال مطالعه نمائیم. بخاطر خواهید داشت که اگر یک ست مفروض T تحت یک عملیهٔ binary «*» دارای یک عنصر I باشد،

محدودی که برای : $\forall\, a \in T$ در رابطه : $I*a=a*I=a$ در تحقیق کند ،
پس I بنام ______ set T یاد میشود .

حل : عنصر عینیت identity و یا عنصر وحدت

1048. فرضاً که S یک set غیرخالی بوده و $I: x \to x$ برای $\forall x \in S$ باشد ، پس واضح است که I عبارت از یک انتقال در S است . بعبارت ساده: میگوییم که I هر عنصر S را بخودش map میکند . درحقیقت I یک "1-1" mapping از S به S onto میباشد .
پس ما میگوییم که I یک ______ است .

حل : انتقال قابل تحویل ویا reversible transformation

1049. فرضاً که S یک set غیرخالی و $I: x \to x$ یک انتقال در S باشد:

(1). پس برای هر $s \in S$ ، ___ $= I(s)$ بوده ،

(2). و برای هر $a \in S$ ، ___ $= I(a)$ میشود ، و همچنان :

(3). برای $7 \in S$ ، ___ $= I(7)$ میباشد

حل : (1). s ، (2). a ، (3). 7

1050. اگر S یک set غیرخالی و M_S ، set تمام انتقالات S باشد ، درصورتیکه برای تمام $x \in S$ رابطه : $I: x \to x$ موجود گردد ، درینصورت (ما دیدیم) که I یک انتقال قابل تحویل در S میباشد . یعنی : $I \in M_S$ میباشد . بالفرض: $\alpha \in M_S$ و $s \in S$ باشد ، پس یک $t \in S$ موجود است طوریکه : $t = (s)\alpha$ میشود .
حال دو حاصل ضرب $I \circ \alpha$ و $\alpha \circ I$ را قرار ذیل بررسی میکنیم:

$$(s)I\cdot\alpha = [(s)I]\alpha = [s]\alpha = t$$ و همچنان $$(s)\alpha\cdot I = [(s)\alpha]I = [t]I = t$$

چون $(s)\alpha = (s)\alpha\cdot I$ (s) بوده لذا: $\underline{\quad(1)\quad} = \alpha\cdot I$ میشود.

و به همین قسم چون: $\underline{\quad(2)\quad} = \underline{\quad(3)\quad}$ بوده پس: $\underline{\quad(4)\quad} = \underline{\quad(5)\quad}$ میگردد.

و درنتیجه: $\underline{\quad(6)\quad} = \underline{\quad(7)\quad}$ میباشد.

حل: (1). α ، (2). $(s)I\cdot\alpha$ ، (3). $(s)\alpha$ ، (4). $I\cdot\alpha$ ، (5). α ، (6). $I\cdot\alpha$ ، (7). $\alpha\cdot I$ ،

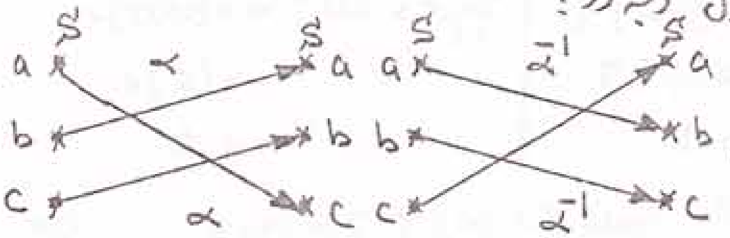
1051. بخاطر بیاورید: فرضاً که یک set که در آن یک عملیه binary "*" و یک عنصر عینیت identity e ثابت باشد. پس برای هر $a\in S$ اگر یک عنصر $a^{-1}\in S$ موجود باشد طوریکه: $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ گردد. درینصورت a^{-1} بنام عنصر ___ ویا ___ a تحت عملیه * یاد میشود.

حل: معکوس ویا inverse

1052. اگر بیاد داشته باشید! ما ثبوت کردیم که اگر α یک mapping قابل تحول reversible از S بر T باشد، درینصورت: $\alpha^{-1}: y\to x$ میشود درصورتیکه اگر واگر $(x)\alpha = y$ یک انتقال قابل تحول reversible باشد. متوجه گردید: اگر $(a)\alpha = b$ باشد، پس: ___ میشود.

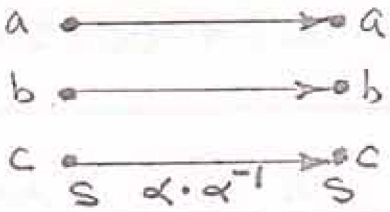
حل: $(b)\alpha^{-1} = a$ میشود.

1053. اگر به دیاگرام های ذیل توجه شود:



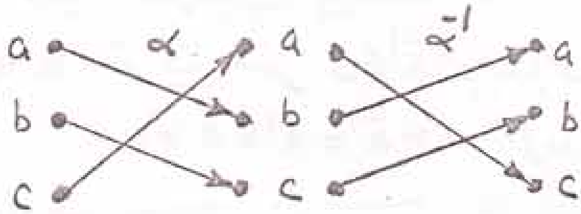
چون α یک انتقال قابل تحویل که میباشد
بنابران α^{-1}
طوریکه قبلاً تعریف شده است موجود میباشد، شما افاده: $\alpha\cdot\alpha^{-1}$ را
توسط دیاگرام نشان بدهید.

حل:- اگر دقت شود
دیده میشود که:

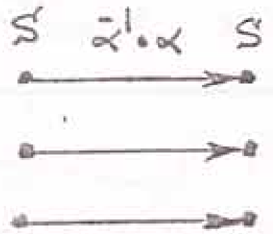


$\alpha\cdot\alpha^{-1} = I$

1054. بنابر دیاگرام های مقابل
دیاگرام: $\alpha^{-1}\cdot\alpha$ را
رسم کنید.



حل: توجه شود:



$\alpha^{-1}\cdot\alpha = I$

1055. سوال چنین مطرح میشود که اگر α یک انتقال قابل تحویل که باشد
آیا " $\alpha\cdot\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\cdot\alpha$ " یک انتقال عینیت ویا
Identity transformation درکه میباشد ویا خیر؟

ما این شکل را چنین بررسی مینمائیم:

باز فرض: $s \in S$ موجود برای یک که $t \in$ موجود میباشد
طوریکه $(s)\alpha = t$ باشد. برای درینصورت:

پس درینصورت: $s = (t)\alpha^{-1}$ میشود.

فرضاً: برای هر $s \in S$: $(s)\alpha\cdot\alpha^{-1} = [(s)\alpha]\alpha^{-1}$

$= [t]\alpha^{-1}$

$= s$

بنابران برای $\forall s \in S$ ما داریم: $(s)\alpha\cdot\alpha^{-1} = s$،

از طرف دیگر برای $\forall s \in S$ ما میدانیم که: $(s)\cdot I = s$.

بنابران: ________ میباشد.

حل: $\alpha\cdot\alpha^{-1} = I$

1056. بالفرض: $s \in S$ و $t = (s)\alpha^{-1}$ باشد،

پس $(t)\alpha = s$ میباشد.

حال ما نوشته میتوانیم: $(s)\alpha^{-1}\cdot\alpha = [(s)\alpha^{-1}]\alpha$

$= [t]\alpha$

$= s$

پس برای $\forall s \in S$ ما داریم: $(s)\alpha^{-1}\cdot\alpha = s$،

و بهمین قسم برای $\forall s \in S$ ما میدانیم که: $(s)I = s$

بنابران: ________ میباشد.

حل: $\alpha^{-1}\cdot\alpha = I$

1057. از مطالعه امثال اخیر فوق نتیجه میشود که برای هر انتقال قابل تحویل α، یک ست غیرخالی که محض یک α^{-1} موجود بوده طوریکه α^{-1} نیز یک انتقال قابل تحویل بوده و در رابطهٔ: ________ $= \alpha^{-1}\cdot\alpha = \alpha\cdot\alpha^{-1}$ را تحقیق میکند.

حل: I

1058. حال ما در موقف قرار داریم که قضیهٔ ذیل را اثبات کنیم:

قضیه: اگر S یک Set غیر خالی بوده و T_S Set تمام انتقالات قابل تحویل reversible transformations S باشد، پس T_S یک گروه Group را تحت عملیهٔ ضرب انتقال «∘» بوجود می آورد.

ثبوت این قضیه را در حرکات شامل: 1059 الی 1070 در ذیل مطالعه مینمائیم.

این مسأله مستوجب جواب نیست.

1059. اگر S یک Set غیرخالی که دارای عملیه binary «*» بوده مفروض گرفته شود، S بنابر عملیهٔ «*» یک Group را تشکیل میدهد در صورتیکه:

(1). برای: $\forall x,y,z \in S$ رابطه: ______ موجود باشد،

(2). یک عنصر خنثی e در S موجود باشد طوریکه برای $\forall x \in S$ رابطه: ______ را تحقیق کند،

(3). برای هر عنصر $a \in S$ یک عنصر $a^{-1} \in S$ موجود گردد، طوریکه رابطه: ______ را تحقیق کند.

حل: (1). $x*(y*z)=(x*y)*z$

(2). $e*x=x*e=x$

(3). $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

1060. اگر S یک Set غیرخالی و M_S Set تمام انتقالات و T_S Set تمام انتقالات قابل تحویل S باشد، پس T_S یک گروه Group را تحت عملیهٔ ضرب انتقال «∘» تشکیل میدهد.

تاکید باید نمود: اگر یک mapping در M_S موجود باشد طوریکه mapping مذکور دارای قابل تحویل نباشد، درینصورت M_S یک گروه Group شده نمیتواند، زیرا: عنصری درآن موجود شده که دارای ______ نمیباشد.

حل: معکوس و (inverse

1061. پس قضیه قایم کرده ما بیان میکند که T_s یک set انتقالات
یا transformations ـــــــ یک set غیرخالی
که بنابر عملیه ضرب ـــــــ « ∘ » میباشد.

حل: قابل تحویل، reversible، انتقال

1062. در مرحله اول ثبوت نشان باید داد که عملیه ضرب انتقال « ∘ » یک
عملیه binary در T_s است، ویا بالفاظ دیگر اگر T_s
set تمام انتقالات قابل تحویل S باشد پس در صورتیکه:
$\alpha, \beta \in T_s$ باشد، ـــــــ نیز میباشد.

حل: $\alpha \circ \beta \in T_s$

1063. در حرکات شماره 1041 و 1042 ما ثابت نمودیم که عملیه ضرب
انتقال « ∘ » یک عملیه binary است. یعنی حاصل ضرب دو انتقال
یک انتقال است. حال ثابت باید نمود که حاصل ضرب دو انتقال قابل تحویل
یک ـــــــ است.

حل: انتقال قابل تحویل reversible transformation

1064. فرضاً α و β دو انتقال قابل تحویل در S باشند، طوریکه قبلاً
دیده شد $\alpha \circ \beta$ نیز یک انتقال قابل تحویل میباشد. علاوه برآن
چون β یک "onto" mapping است، پس یک S مانند $t \in S$
موجود است طوریکه: $(s)\beta = t$ میشود. چون α نیز onto
است، مثلیکه $u \in S$ موجود میباشد طوریکه $(u)\alpha = s$
میشود. بنابرآن، اگر $t \in S$ است، پس یک $u \in S$ برده

طوریکه : $(u)\alpha\cdot\beta = [(u)\alpha]\beta$

$$= [s]\beta$$

$$= t$$

پس برای هر $t \in S$ یک $u \in S$ موجود است طوریکه : $(u)\alpha\cdot\beta = t$ میشود، بنابرآن $\alpha\cdot\beta$ عبارت از یک ______ انتقال ویا ______ میباشد.

حل : onto ، onto transformation

1066- حال میخواهیم ثابت نمائیم که $\alpha\cdot\beta$ یک انتقال 1-1 است.

بالفرض : $(s_1)\alpha\cdot\beta = (s_2)\alpha\cdot\beta$ باشد.

درحقیقت چون β یک انتقال 1-1 است،

پس $(s_1)\alpha = (s_2)\alpha$ میشود.

همچنان چون α یک انتقال 1-1 بوده،

پس $s_1 = s_2$ میباشد.

ازین نتیجه میشود که اگر $(s_1)\alpha\cdot\beta = (s_2)\alpha\cdot\beta$ باشد، پس $s_1 = s_2$ میباشد. بنابرآن گفته میتوانیم که $\alpha\cdot\beta$ عبارت از یک انتقال ______ ویا ______ میباشد.

حل : 1-1 ویا 1-1 transformation

1067- در جوکات شامل 1065 و 1066 ابراز ثابت نمودیم : درصورتیکه α و β دو انتقال قابل تحویل S باشند، پس عملیه ضرب در انتقالات قابل تحویل یک عملیه ______ در ______ میباشد.

حل : binary ، T_S

1068 . اگر T_S ، ست تمام انتقالات قابل تحویل یک ست غیرخالی S باشد پس عملیه ضرب انتقالات "$\cdot$" یک عملیه binary در T_S میباشد. علاوه بر آن ما نشان دادیم که عملیه ضرب انتقالات یک اتحادی است Associative . و ضمناً ما دیدیم که یک انتقال قابل تحویل I در T_S موجود است طوریکه برای $\forall \alpha \in T_S$ صحت رابطهٔ: ________ را تحقیق میکند.

حل: $I \cdot \alpha = \alpha \cdot I = \alpha$

1069 . بالاخره ما دیدیم که اگر $\alpha \in T_S$ باشد، یک انتقال قابل تحویل α^{-1} در T_S موجود شده میتواند طوریکه صحت رابطهٔ: ________ را تحقیق مینماید.

حل: $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = I$

1070 . بحث صدره نشیند: اگر T_S ، ست تمام انتقالات قابل تحویل یک ست S باشد، پس عملیه ضرب انتقالات در T_S یک عملیه binary بوده و علاوه بر آن:

(1) . برای تمام $\alpha, \beta, \gamma \in T_S$ ما داریم: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma =$ ________ ،

(2) . یک انتقال قابل تحویل I در T_S موجود است طوریکه: ________ میشود،

(3) . برای هر یک $\alpha \in T_S$ یک $\alpha^{-1} \in T_S$ موجود است طوریکه: ________ میشود.

(4) . بنابر آن T_S یک ________ را تحت عملیه ضرب انتقالات تشکیل میدهد.

حل: (1) . $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ ، (2) . $\alpha \cdot I = I \cdot \alpha = \alpha$
(3) . $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = I$ ، (4) . Group

1071 . تعاریف: اگر ست G تحت عملیه binary "$*$" یک Group باشد، در صورتیکه عملیه "$*$" تبدیلی Commutative نیز باشد، پس G

پس G بنام گروه تبدیلی Commutative Group ویا گروه آبلین Abelian Group یاد میشود. آیا گروه انتقالات یک ست تبدیلی Commutative میباشد ________ ؟

حل: نخیر! زیرا: ما دیدیم که عملیه ضرب انتقالات «∘» تبدیلی نیست.

1072. اگر S، ست اعداد تام باشد، که تحت عملیه جمع «+» یک Group را تشکیل میدهد، طوریکه: برای $\forall a,b \in S$ رابطه: $a+b=b+a$ همیشه دارای حقیقت است. پس ست تحت عملیه «+» یک گروه ______ ویا ______ را تشکیل میدهد.

حل: تبدیلی (Commutative) ویا Abelian Group

1073. تا به این قسمت پروگرام، ما گروه انتقال یک ست S ای مشخص را مطالعه نموده ایم. اگر به Panel-7 مراجعه شود دیده میشود که: $S=\{1,2,3\}$ بوده و هر پرمیوتیشن (permutation) درجه 4 یک انتقال قابل تحویل در ست است. از طرف دیگر ما ثابت نمودیم که یک ست T_S انتقالات قابل تحویل تحت عملیه ضرب انتقالات «∘» یک Group را میسازد. ازین فوراً نتیجه شده میتواند که تمام ست، پرمیوتیشن های درجه 4 تحت عملیه ضرب پرمیوتیشن ها permutation multiplicat. نیز Group را تشکیل میدهند.

بملاحظه از Panel-7: (1). کدام پرمیوتیشن انتقال عینیت Identity را تحت عملیه ضرب پرمیوتیشن ها بوجود می آورد؟

(2). کدام پرمیوتیشن عبارت از b^{-1} میشود؟

حل: (1). a ، (2). c

VI. امتحان و تکرار قسمت سوم:

Review Test for Part Three

1. اگر تحت عملیه binary "*"، G یک Group بوده در صورتیکه $a, b \in G$ باشد، پس ثابت کنید که معادله: $a * x = b$ دارای یک حل یگانه در G میباشد.

2. اگر G تحت عملیه binary "*" یک Group را تشکیل دهد، در صورتیکه $a, b \in G$ باشد، ثابت کنید که معکوس (inverse) $a * b$ عبارت از: $a^{-1} * b^{-1}$ [ویا: $(a*b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$] میباشد.

3. اگر $T = \{A, B, C, D\}$ بوده در حالیکه $A = \{0, 1\}$ و $B = \{0\}$ و $C = \{1\}$ و $D = \phi$ باشد، (که درینصورت T عبارت از Set کلی تمام subset های $A = \{0, 1\}$ میباشد.) در صورتیکه $R, S \in T$ باشند و $R - S$ را توسط افاده ذیل تعریف کنیم:

$$R - S = \{x \mid x \in R \text{ و } x \notin S\}$$

تصور کنید که عملیه "−" یک عملیه binary در T میباشد، و یا ثابت کنید که عملیه "−"، نظر به T تبدیلی commutative نیست.

4. در یک Group G اگر $x * a = x * b$ باشد، ثابت کنید که $a = b$ است.

5. اگر $S = \{5, 6, 7, 8\}$ بوده و عملیه "⊙" binary مربوطه آن طبق جدول مقابل تعریف شده است.

⊙	5	6	7	8
5	8	5	6	7
6	5	6	7	8
7	6	7	8	5
8	7	8	5	6

(a). فرضاً "⊙" الجبنی associative باشد، آیا G تحت "⊙" یک Group را تشکیل داده میتواند؟ ویا خیر؟

(2). عنصر عینیت identity درین مسأله کدام است؟

(3). عنصر γ^{-1} درین جدول کدام است؟

6. فرضاً N عبارت از ست اعداد تام مثبت باشد، و $\alpha: N\to N$ یک mapping است که قرار ذیل تعریف گردیده است:-

برای تمام $n\in N$، چنینکه $(n)\alpha = 3n$ است.

(1). آیا حقیقتاً α یک mapping از N into N بوده میتواند؟
اگر نمیتواند چرا؟

(2). آیا α یک mapping از N onto N بوده میتواند؟
اگر نمیتواند چرا؟

(3). آیا α یک mapping 1-1 از N به N میباشد؟ اگر نمیباشد چرا؟

7. فرضاً $S=\{1,2,3,4\}$ و $\alpha=\{(1,2),(2,2),(3,4),(4,4)\}$

و $\beta=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$

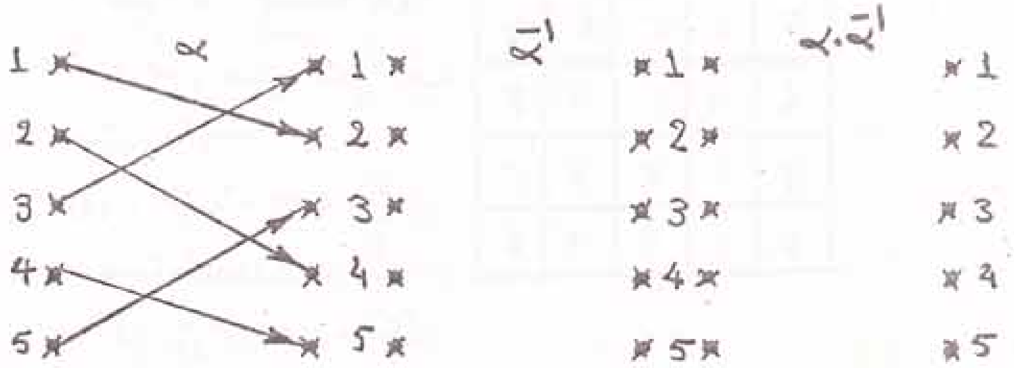
و $\gamma=\{(1,1),(2,3),(3,4),(4,2)\}$

انتقالات S باشند طوریکه mapping آن بشکل جوره مرتب آراسته شده است. بطور مثال: $(3)\gamma = 4$ و $(1)\alpha = 2$ وغیره...

(1). کدام ازین mapping ها قابل تحویل reversible است؟

(2). درصورت موجودیت β^{-1} را تعیین کنید.

8. فرضاً α یک انتقال قابل تحویل reversible transformation باشد پس درینصورت α^{-1} نیز یک انتقال قابل تحویل میباشد. تیرهای را با قیاس دیاگرام ذیل را تکمیل کنید:-



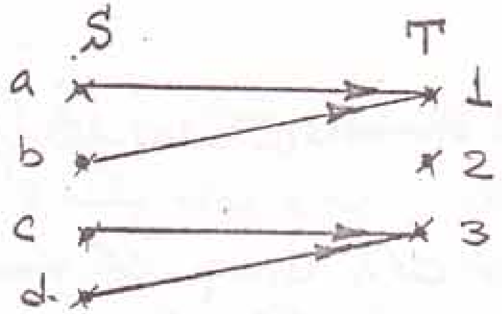
9. فرضاً S، ست اعداد تام بوده و
$\alpha: x \to 2x+3$ و $\beta: x \to x-4$ برای تمام $x \in S$
دو انتقالات S باشند. بالفرض $\alpha \circ \beta$ و $\beta \circ \alpha$ نیز
انتقالات S باشند:

(1). $\alpha \circ \beta (4)$ را بدست آرید.

(2). $\beta \circ \alpha (4)$ را بدست آرید.

(3). با شناس دو جواب دو جزء فوق راجع به عامل ضرب انتقال
چه فکر میکنید؟

10. اگر یک α mapping طبق دیاگرام ذیل تعریف شود:



(1). آیا α یک mapping از S در T میباشد؟
آیا α یک mapping از S بر T میباشد؟

(2). آیا α یک mapping "1-1" شده میتواند؟

(3). آیا α^{-1} یک mapping از S در T شده میتواند؟
اگر شده نمیتواند چرا؟

قسمت چهارم

Part Four

ساحه ها

Fields

ما میدانیم که Set اعداد حقیقی Real Numbers تحت عملیه جمع معمولی
"+" یک Group را تشکیل داده و نیز Set اعداد حقیقی غیر صفر
nonzero real numbers یک Group را تحت عملیه ضرب معمولی "·"
بوجود می آورد. ازین معلوم میشود که Set اعداد حقیقی Reals در
ساختمان جبری خویش نظر به یک Set ای که محض تحت یک عملیه
binary یک Group را میسازد بمراتب غنی تر است. زیرا
Set اعداد حقیقی توأماً تحت دو عملیه binary یک Group را تشکیل
داده میتواند. مطالعه هر کتاب الجبره بسیط واضح میسازد که حل
عده زیاد مسایل استعمال هر دو عملیه را ایجاب میکند. علاوه برآن
شما خواهید دید که در Set اعداد حقیقی Reals دربین این دو عملیه
روابط داخلی internal relations موجود است.

درین قسمت کتاب ما یک ساختمان جبری را که بنام "ساحه"
Field موسوم است مورد مطالعه قرار میدهیم. ساختمان جبری "ساحه"
Field دارای دو عملیه binary بوده و یک Set اصول متعارفه —

axioms را (که اشاتاً مربوط به گروه Group اند) بصورت جداگانه تحت اندد عملیه مربوطش تعقیب نموده و ضمناً یک لصل دیگر (مربوط گروه Group نیست) را که هردو عملیه دران بهم آمیخته، و خواص جبری انرا غنی تر ساخته است، تحقیق میکند.

I. تکرار روابط دوگانه ای وخواص انها :-

Review of Binary Relations And Properties

1074. یک S سِت و یک رابطه binary ، R در که موجود است ،
R انعکاسی reflexive در که میباشد در صورتیکه: ________
________ موجود باشد.

حل: برای تمام $x \in S$ رابطه : xRx و یا $(x,x) \in R$ موجود باشد

1075. الطورمثال اگر رابطه: $x\,R\,y$ در سِت اعداد حقیقی توسط $x \cdot y \geq 0$ ارائه شود (درحالیکه "." عملیه معمولی ضرب را نشان میدهد) نشان دهید که R انعکاسی است.

حل : اگر S، سِت اعداد حقیقی باشد . پس برای کل $\forall x \in S$ رابطه $x \cdot x \geq 0$ دارای حقیقت است ، بنابران : $x\,R\,x$ برای $\forall x \in S$ حقیقت دارد.

1076. یک رابطه binary ، R در یک سِت ، کہ انعکاسی نیست درصورتیکه:
____

حل : اگر صرف یک x در که موجود باشد که برای آن : $x \not R x$ ویا $(x,x) \notin R$ موجود گردد .

1077 . فرضاً: $S=\{a,b,c\}$ و $R=\{(a,b),(a,a),(b,b),(c,b)\}$ باشد:

R انعکاسی (reflexive) نیست زیرا: ________ .

حل: برای $c\in S$ ، $(c,c)\notin R$

1078 . یک set S و یک رابطهٔ binary ، R در S موجود است: R تناظری symmetric در S گفته میشود درصورتیکه: ________ .

حل: اگر $(x,y)\in R$ باشد، پس $(y,x)\in R$ نیز باشد ویا اگر xRy موجود باشد، پس بالمقابل: yRx نیز موجود گردد.

1079 . تطبیقات حل: بالفرض که یک set است که عناصر آن را set های دیگر تشکیل داده اند. رابطهٔ XRY در S موجود میشود درصورتیکه $X\cap Y=\Phi$ باشد. نشان دهید که R تناظری است.

حل: بالفرض $(X,Y)\in R$ است پس $X\cap Y=\Phi$ میباشد اما درصورتیکه $X\cap Y=\Phi$ باشد، پس $Y\cap X=\Phi$ نیز میباشد. لذا: $(Y,X)\in R$ موجود است.

1080 . یک رابطهٔ binary ، R در یک set S تناظری symmetric نیست درصورتیکه: ________ .

حل: محض یک $(x,y)\in R$ موجود باشد که $(y,x)\notin R$ موجود گردد.

1081 . فرضاً: $S=\{1,a,17\}$ و $R=\{(1,1),(a,17),(1,a),(a,1)\}$ باشد:

پس R تناظری در S نیست زیرا: ________ .

حل: $(a,17)\in R$ بوده اما $(17,a)\notin R$.

1082. یک set S دیک رابطه binary R در آن معروض است: R انتقالی Transitive است درصورتیکه اگر: ____________.

حل: اگر xRy و yRz موجود باشد، پس xRz موجود گردد. ویا $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R$ باشد، پس $(x,z)\in R$ نیز گردد.

1083. بطور مثال: اگر S عبارت از set اعداد حقیقی بوده و xRy عبارت از $x<y$ باشد، درینصورت R انتقالی است زیرا: ____________ ____________.

حل: اگر $x<y$ و $y<z$ باشد، پس $x<z$ میباشد، ویا اگر xRy و yRz باشد، پس xRz میباشد.

1084. یک رابطه binary، R در set S، انتقالی symmetric نیست درصورتیکه: ____________.

حل: xRy وهم yRz باشد لاکن $\cancel{xRz}$

1085. فرضاً $S=\{a,b,17,\Delta\}$ بوده وهم چنان: $R=\{(a,a),(a,b),(b,\Delta),(a,\Delta),(\Delta,17),(a,17)\}$ باشد: آیا R انتقالی symmetric است؟ ویا نیست؟ چرا؟

حل: نیست! زیرا: $(b,\Delta)\in R$ و $(\Delta,17)\in R$ بوده آما $(b,17)\notin R$.

1086: یک رابطه binary «=» یک رابطه معادل equivalence relation در S گفته میشود. درصورتیکه برای تمام x، y و z شامل S خواص ذیل ____________ را تحقیق کند.

حل: (1). $x=x$ ، (2). اگر $x=y$ باشد، پس $y=x$ گردد، (3). هرگاه $x=y$ و $y=z$ باشد، پس $x=z$ گردد.

1087. برای هر $x\in S$ ، رابطهٔ $x=x$ خاصیت ______ است.
اگر $(x,y)\in R$ بوده و $(y,x)\in R$ گردد، خاصیت ______ است.
اگر $(x,y)\in R$ و هم $(y,z)\in R$ بوده پس $(x,z)\in R$ باشد،
واین عبارت از خاصیت ______ R میباشد.

حل: (1). انعکاسی، (2). تناظری، (3). انتقالی.

1088. فرضاً S عبارت از ست تمام مثلث ها بوده و در رابطهٔ «$\cong$»
انطباق پذیری congruence را نشان دهد. رابطهٔ «$\cong$»
یک رابطهٔ معادل equivalence relation در S است، زیرا:
(1). برای تمام $x\in S$ ما داریم: ______.
(2). اگر $x\cong y$ باشد، پس ______ میشود.
(3). اگر $x\cong y$ و $y\cong z$ باشد، پس ______ نیز میباشد.

حل: (1). $x\cong x$ ، (2). $y\cong x$ ، (3). $x\cong z$ ،

II. تکرار عملیات دوگانه‌ای و خواص آنها:-

Review of Binery Operations And Properties

1089. اگر S یک ست، و «*» یک mapping: $*:S\times S\to S$ باشد
پس درنتیجه به هر $(x,y)\in S\times S$ تنها یک عنصر یگانهٔ z که

که بنام ——— تحت عملیهٔ * یاد میشود، مطابقت میکند.

پس درصورتیکه: $*:(x,y)\to z$ باشد ما مینویسیم که: ———.

حل: تصویر ویا image، $(x,y)*=z$

1090. یک mapping از $S\times S$ در S بنام عملیهٔ binary در S یاد میشود، درصورتیکه: $(x,y)*=z$ باشد. درینصورت z ——— جوړه مرتب ordered pairs (x,y) را تحت عملیهٔ * تشکیل میدهد. بجای اینکه بنویسیم: $(x,y)*=z$ ما مینویسیم: ———.

حل: image ویا تصویر، $x*y=z$.

1091. یک عملیه binary * در S عبارت از ——— میباشد درصورتیکه اگر یگانه تصویر (a,b) تحت عملیه * عبارت از c باشد. پس بجای اینکه بنویسیم: $(a,b)*=c$، ما مینویسیم: ———.

بالفرض اگر S، set اعداد تام بوده و $(x,y)*=x+2y$ باشد، پس درینصورت: $(2,3)*=8$ میشود، وما از اچنین نشان میدهیم ———.

حل: mapping: $S\times S$ در S، $(a*b)=c$، $2*3=8$

1092. اگر S، set اعداد تام بوده و $x*y=x+(2\cdot y)$ باشد. (درحالیکه عملیات "+" و "·" عبارت از عملیات معمولی جمع وضرب اند.) پس درینصورت: $3*5=3+2\cdot5$ ویا $3*5=13$ میشود - وبهمین ترتیب: $5*3=$ ——— ویا $5*3=$ ——— میشود.

حل: $5*3=5+2\cdot3$ ویا $5*3=11$

1093. اگر * یک عملیه binary در یک set S برای تمام x, y شامل S رابطه: $x*y=y*x$ را تعقیب کند، پس عملیه * مذکور دارای خاصیت ———— در S میباشد.
بطور مثال: اگر T عبارت از set اعداد تام بوده برای تمام $x, y \in T$ رابطه: $x+y=y+x$ حقیقت دارد. بنابران جمع در set اعداد تام یک عملیه ———— است.

حل: Commutative (تبدیلی)، commutative

1094. فرضاً S، set اعداد تام بوده و عملیه "*" توسط رابطه:- $x*y = x+(x \cdot y)$ در S تعریف شود، نشان دهید که عملیه * در S commutative نیست.

حل: ذیلاً یک مثال نقض تبدیلی: $2*3=2+(2\cdot3)$
$2*3 = 2+6 = 8$
$3*2 = 3+(3\cdot2)$
$3* = 3+6 = 9$
$\because 8 \neq 9$
$\therefore 2*3 \neq 3*2$
پس * تبدیلی نیست

1095. اگر S، set اعداد تام بوده و عملیه تفریق "−"، یک عملیه دوگانه ای در S مد نظر گرفته شود: آیا S یک عملیه تبدیلی در S میشود؟ چرا؟

حل: نه خیر! زیرا: $8-3 \neq 3-8$

1096. اگر S، set اعداد تام بوده و $a*b=a^2+ab$ فرض شود: نشان دهید که "*" در S تبدیلی نیست.

حل: یک مثال ضد تبدیلی: $3*4 = 3^2+3\cdot4$

ادامه حل:

$$4*3 = 4^2+(4\cdot 3) = 16+12 \qquad\qquad 3*4 = 9+12 = 21$$

$$4*3 = 28 \qquad\qquad 3*4 = 21$$

$\because$ $21 \neq 28$ لذا: $3*4 \neq 4*3$ بوده

پس " * " تبدیلی commutative نیست.

1097. فرضاً S، set اعداد تام باشد. ثابت کنید که عملیه " * " طوریکه: $a*b=a^2+b^2$ باشد، در S تبدیلی است.

حل: چون $x*y=x^2+y^2$ وهم $y*x=y^2+x^2$ است
پس: $x^2+y^2=y^2+x^2$ زیرا عملیه " + " در set تام تبدیلی است
لذا: $x*y=y*x$ بوده پس " * " تبدیلی است.

1098. فرضاً $S=\{□,△,○\}$ که بوده و دارای عملیه binary " * " که در جدول ذیل تعریف شده است، باشد:

*	□	△	○
□	○	□	△
△	□	△	○
○	△	○	□

از جدول دیده میشود که:

□ * △ = ○

△ * ○ = ○

آیا عملیه " * " یک عملیه binary commutative در S میباشد؟ چرا؟

حل: بلی! زیرا برای $\forall x,y \in S$ ما داریم: $x*y=y*x$
(توجه نمائید! جدول متشکله نظر بخط قطری اش متناظر است.)

1099. فرضاً: $S=\{□,△,○\}$ بوده و دارای عملیه binary " * " که خاصیت آن در جدول آورده شده باشد.

*	△	□	○
△	△	○	□
□	○	□	○
○	□	△	○

آیا عملیه موضوعی * در ست تبدیلی commutative شده میتواند ؟

حل: نه خیر! زیرا: $\bigcirc * \square \neq \square * \bigcirc$

1100. اگر "*" یک عملیه binary در ست S بوده طوریکه برای تمام a، b و c شامل ست S رابطهٔ $a*(b*c)=(a*b)*c$ همیشه حقیقت داشته باشد، درینصورت ما میگوئیم که عملیه * در ست S انجمنی ویا associative در ست است. چنانچه اگر ست، set اعداد تام بطور عملیه جمع شمولی در ست مد نظر گرفته شود، پس درینصورت برای تمام $x, y, z \in S$ ما داریم که: $x+(y+z)=(x+y)+z$.
بنابران گفته میشود که عملیه جمع "+" در ست اعداد تام یک عملیه ——— ویا ——— میباشد.

حل: انجمنی ویا associative

1101. اگر S عبارت از ست اعداد تام و "*" یک عملیه binary در S باشد طوریکه: $a*b=a+2b$ گردد. درینصورت از مثال ذیل ما داریم:

(1) .
$$(3*2)*4=(3+2\cdot2)*4$$
$$=7*4$$
$$=7+2\cdot4$$
$$=15$$

$$\therefore \quad (3*2)*4=15$$

(2) . $3*(2*4)$ را بدست آرید.

(3) . آیا عملیه * انجمنی میباشد ؟

حل: $3*(2*4)=3+2(2*4)=3+2(2+2\cdot4)$
$$=3+2(10)=23$$
نه خیر! انجمنی نیست.

1102. اگر S سِت اعداد تام بوده و $a*b=a^2+b^2$ باشد، ثابت کنید که "*" بنابر شرط مربوطه روش در سِت اعداد تام انجمنی نیست.

حل: یک مثال:

$$2*(3*4)=2*(3^2+4^2)$$
$$=2^2+(25)^2$$
$$=629$$
$$\therefore 2*(3*4)=629$$

$$(2*3)*4=(2^2+3^2)*4$$
$$=(13)^2+4^2$$
$$=185$$
$$\therefore (2*3)*4=185$$

چون $185\neq 629$ است، لذا: $(2*3)*4\neq 2*(3*4)$

Q.E.D.

1103. اگر S، سِت اعداد تام و "*" در آن عبارت از $a*b=2ab$ باشد، نشان دهید که "*" در S، commutative تبدیلی است.

حل: فرضاً $x,y\in S$ باشد، پس $x*y=2xy$ و هم‌چنان: $y*x=2yx$ میشود. چون در سِت تام: $2xy=2yx$ است، لذا: $x*y=y*x$ میباشد.

Q.E.D.

1104. نشان دهید که $x*y=2xy$ در سِت تام S انجمنی است.

حل: بالفرض: $x,y,z\in S$ باشد پس، نوشته میتوانیم:

$$(x*y)*z=(2xy)*z$$
$$=2(2xy)\cdot z=4xyz$$
$$\therefore (x*y)*z=4xyz \quad \ldots\ldots (1)$$

و به همین قسم:

$$x*(y*z)=x*(2yz)$$
$$=2x(2yz)=4xyz$$
$$\therefore x*(y*z)=4xyz \quad \ldots\ldots (2)$$

با استفاده از خاصیت عملیهٔ ضرب در سِت اعداد تام از مقایسهٔ (1) و (2) دیده میشود که "*" انجمنی associative در سِت تام است.

1105. اگر تحت عملیه binary "*" یک عنصر e در سِت S موجود گردد طوریکه برای کل $\forall x \in S$ رابطهٔ: $e * x = x * e = x$ را تعقیب کند، e را بنام عنصر عینیت Identity ویا عنصر ______ تحت عملیه ______ در کد یاد مینمایند، چنانچه اگر T عبارت از سِت اعداد حقیقی Reals بوده و عملیهٔ ضرب "·" دران مد نظر گرفته شود، دیده میشود که ______ عبارت از عنصر ______ ویا عنصر ______ تحت عملیهٔ "·" در T میباشد، زیرا برای تمام $x \in T$ رابطه ______ موجود میشود.

حل: وحدت (unity)، "*"، 1، identity یا unity، $1 * x = x * 1 = x$ ، $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

1106. اگر S، سِت اعداد حقیقی باشد، عملیه معمولی جمع "+" بحیث عملیه binary دران در نظر گرفته شود، درینصورت عنصر عینیت جمع در کد عبارت از ______ بوده زیرا: برای تمام $x \in S$ رابطه ______ موجود میگردد.

حل: 0 ، $0 + x = x + 0 = x$

1107. فرضاً که عبارت از سِت پرموتیشن (permutation) های درجه 3 باشد، درصورتیکه: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \in S$ بوده درحالیکه a، b، c عبارت از اعداد 1، 2 و 3 یک ترتیب را تعقیب میکند، باشد. واگر:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

باشد، پس درینصورت، ______ عبارت از عنصر عینیت تحت عملیه ضرب پرموتیشن ها درجه 3 میباشد.

حل: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1108. فرضاً S کدام set غیرخالی و Ms، set تمام تحولات transformations، S باشد. اگر برای تمام $a \in S$ ، $I : a \to a$ باشد، پس برای $\phi \in S$ ، $I \cdot \phi = \phi \cdot I = \phi$ موجود گردد، پس در صورت I یک عنصر ــــــ را در Ms تحت عملیه ضرب انتقالات " · " بوجود می آورد.

حل : عنصر عینیت یا identity

1109*. اگر : S={○,□,△} بوده عملیه binary در آن "*" که توسط جدول مقابل ترتیب شده است، باشد. پس عنصر ــــــ تحت عملیه "*" در S عبارت از عنصر عینیت identity زیرا: برای $\forall x \in S$ ما داریم :

*	△	□	○
△	□	○	△
□	○	△	□
○	△	□	○

$$\text{——} * x = x * \text{——} = x$$

حل : ○ ، ○ ، ○

1110. فرضاً S عبارت از set اعداد تام بوده و $a * b = 2ab$ باشد : آیا " 1 " تحت عملیه * در S عنصر عینیت identity شده میتواند؟

حل : نه خیر! زیرا :

$$1 * 5 = 2(1)(5)$$

یا

$$1 * 5 = 10$$

پس دیده میشود که $1 * 5 \neq 5$.

1111. اگر S عبارت از set اعداد مثبتی بوده و * در آن توسط رابطه $a * b = 2 \cdot a \cdot b$ تعریف شود، نشان دهید که $\frac{1}{2}$ عنصر عینیت identity در S تحت عملیه * است.

حل: فرضاً که $x \in S$ باشد، پس: $\frac{1}{2}*x = 2(\frac{1}{2})x = x$

و همچنان: $x*\frac{1}{2} = 2x(\frac{1}{2}) = x$

چون برای $\forall x \in S$ داریم: $\frac{1}{2}*x = x*\frac{1}{2} = x$

بنابران $\frac{1}{2}$ عنصر عینیت که set میباشد.

1112. اگر $S=\{A,B,C,D\}$ بوده $A=\{1,2\}$، $B=\{1\}$، $C=\{2\}$ و $D=\Phi$ باشد، اگر عملیه intersection (تقاطع) $\cap$ در S در نظر گرفته شود، آیا S تحت "$\cap$" دارای کدام عنصر عینیت بوده میتواند؟

حل: بلی! A است، زیرا برای تمام $X \in S$ ما داریم:

$A \cap X = X \cap A = X$.

1113. فرضاً S، set اعداد تام جفت بوده و عملیه ضرب معمولی "." را در آن مد نظر گرفته شود، آیا S تحت عملیه ضرب "." دارای عنصر عینیت بوده میتواند؟ چرا؟

حل: نه خیر! زیرا: $1 \notin S$

1114. اگر بخاطر داشته باشید در صورتیکه یک S set دارای یک عنصر عینیت identity "e" بوده، پس "e" یگانه است. یا بالفاظ دیگر فقط یک عنصر S set دارای خاصیت عینیت بوده میتواند و بس. پس e درصورتی یک عنصر عینیت identity، S شده میتواند که برای $x \in S$ ما داشته باشیم: ______.

حل: $e*x = x*e = x$

1115. واضح است که یک set تحت دو عملیه binary دارای بیشتر از

بیشتر از یک عنصر عینیت identity بوده میتواند. طوریکه هرکدام ازین دو عنصر ـ عنصر عینیت عملیهٔ binary مربوطش را تشکیل دهد. بطور مثال، اگر S عبارت از ست اعداد حقیقی Reals باشد، درینصورت:

(1). ـــــ عنصر عینیت identity نظر به عملیه "+" بوده و هم چنان

(2). ـــــ عنصر عینیت S تحت عملیه "." میباشد.

زیرا، برای تمام $x \in S$ ما داریم: ـــــ.

حل: (1). 0 یا zero، (2). 1 ،

$x+0=0+x=x$ و $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

1116. فرضاً S عبارت از یک ست است که دارای عنصر عینیت e تحت عملیهٔ binary "*" میباشد. پس اگر برای هر $x \in S$ یک عنصر $x^{-1} \in S$ موجود گردد، طوریکه رابطه: $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ بوجود آید. پس x^{-1} بنام عنصر ـــــ S تحت عملیه "*" یاد میشود.

بطور مثال، 0 عنصر عینیت عملیهٔ جمع "+" در ست اعداد تام است. اگر عنصر $5 \in S$ را مد نظر بگیرید، دیده میشود که -5 عنصر ـــــ را تحت عملیه "+" تشکیل میدهد. زیرا: ـــــ.

حل: عنصر معکوس (inverse)، معکوس 5 ،

$5+(-5)=(-5)+5=0$ میشود.

1117. در قسمت دوم ما ثابت کردیم که اگر یک عملیهٔ binary "*" دارای خاصیت انجمنی associative در S بوده و ضمناً دارای عنصر عینیت e باشد، در صورتیکه $x \in S$ دارای معکوس x^{-1} باشد پس این عنصر معکوس مذکور یعنی x^{-1} در S ـــــ است. یا بعباره

بعبارۀ دیگر x^{-1} تنها یک عنصریست که دارای خاصیت معکوس x میباشد،
درصورتیکه * انجمنی باشد ما حق داریم که x^{-1} ــــــ x بنامیم.

حل: یگانه (unique)، معکوس دیا inverse

1118. اگر R، ست اعداد تام بوده و عملیه ضرب "·" در R مد نظر گرفته شود:
درینصورت ــــــ عنصر عینیت که تحت عملیه ضرب "·" پیدا شد.
عنصر معکوس 7 تحت عملیه "·"، عبارت از ــــــ است.
زیرا: ــــــــــــ میشود.

حل: 1 ؛ $7\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{7}\cdot 7=1$

1119. فرضاً R که عبارت از ست اعداد نسبتی Rationals بوده و "*"
توسط افاده: $a*b=2ab$ در R تعریف گردد. ما میدانیم
که عنصر عینیت R تحت عملیه "*" عبارت از $\frac{1}{2}$ است. عنصر معکوس
7 را (در صورت موجودیت آن) بدست آرید.
(چون * انجمنی است درصورت موجودیت آن عنصر معکوس 7 یگانه است.)

حل: عنصر معکوس 7 عبارت از $\frac{1}{28}$ است زیرا:

$$7*\frac{1}{28}=2\cdot7\cdot\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{28}*7=2\cdot\frac{1}{28}\cdot7=\frac{1}{2}$$

(حالانکه $\frac{1}{2}$ عنصر عینیت است.)

1120. فرضاً: $S=\{\triangle,\square,\circ\}$ بوده
دارای عملیه binary: "*"
که خواص آن درجدول مقابل
تعریف شده است.
(a) - عنصر عینیت S تحت عملیه "*"

*	△	□	○
△	△	□	○
□	□	○	△
○	○	△	○

تحت عملیه "*" عبارت از ___ است، زیرا: ___

(2) . معکوس عنصر □ تحت * عبارت از ___ بوده زیرا: ___

حل: (1). △ ، برای $\forall x \in S$: $x*\triangle=\triangle*x=x$

(2). ○ ، زیرا: $\square * \bigcirc = \bigcirc * \square = \triangle$

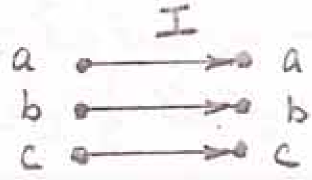
1121. اگر S، سِت پرمیوتیشن‌های درجه 4 تحت عملیه ضرب پرمیوتیشن‌ها باشد.
عنصر عینیت تحت عملیه ضرب پرمیوتیشن‌ها عبارت است از: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$.

. عنصر معکوس inverse، پرمیوتیشن Permutation : $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$ را بدست آرید.

حل: عنصر معکوس مطلوب عبارت از $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$ است، زیرا:

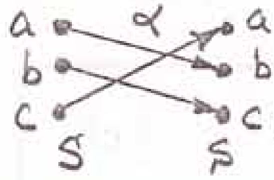
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$ مطلوب.

1122. اگر T، سِت تمام انتقالات قابل تحویل بر: $S=\{a,b,c\}$ کرده باشد، و فرضاً عملیه binary در آن عملیه ضرب انتقال باشد. پس اگر I عنصر عینیت را در T تحت "∘" ارائه کند، درینصورت:

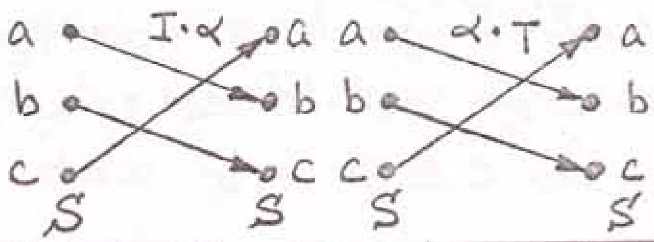


میباشد.

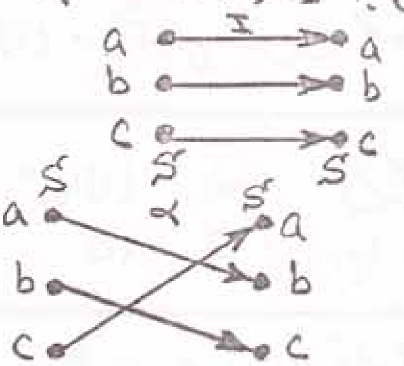
بطور مثال: اگر α کدام انتقال را طبق شکل مقابل نشان دهد؛ شما $I\circ\alpha$ و $\alpha\circ I$ را اثبات آرید:



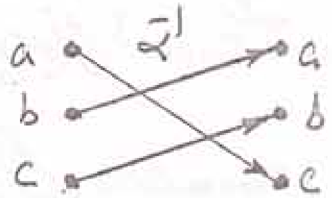
حل:



1123. اگر T_S ، مجموعه انتقالات قابل تحویل بر $S=\{a,b,c\}$ بوده و I عنصر عینیت آن قرار شکل مقابل باشد. فرضاً $\alpha \in T_S$ موجود و انتقال α طبق شکل مقابل داده شده باشد: α^{-1} را بدست آرید.



حل:



توجه نمائید!
$\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\cdot\alpha=I$

1124. اگر ک عبارت از مجموعه نسبتی باشد، پس ___ عنصر عینیت ک را تحت عملیه "+" تشکیل میدهد. معکوس عنصر $\frac{1}{3}$ تحت "+" عبارت از ___ میباشد، زیرا: ___.

حل: 0 ، $-\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}+(-\frac{1}{3})=(-\frac{1}{3})+\frac{1}{3}=0$

1125. اگر ک، مجموعه اعداد نسبتی باشد:

(1). عنصر عینیت تحت عملیه ضرب ___ است.

(2). عنصر معکوس $\frac{1}{3}$ تحت عملیه ضرب در ک عبارت از ___ است، زیرا: ___.

حل: 1 ، 3 ، $\frac{1}{3}\cdot 3=3\cdot\frac{1}{3}=1$

1126. یک عملیه binary "*" را در یک مجموعه S بنابر روابط "خوب تعریف شده" Well-defined میگویند، در صورتیکه اگر: $a=b$ برای $c\in S$ روابط؟

$a*c=b*c$ و $c*a=c*b$ موجود دارا حقیقتاً یک ...

بطور مثال: فرضاً T یک set اعداد تام تحت عملیه جمع باشد. اگر $a=b$ بوده و $c\in T$ باشد، پس ما داریم که:

$a+c=b+c$ و هم چنان: $c+a=c+b$ میباشد.

بنابرین گفته میشود که عملیه جمع "+" در set T یک عملیه binary ——— میباشد.

حل: well-defined (خوب تعریف شده)

1127. یک set S که دارای یک رابطه معادل "=" و یک عملیه binary، well-difined (خوب تعریف شده) * باشد، یک Group را بوجود می آورد در صورتیکه دارای خواص ذیل باشد:

(1). ——— (2). ——— (3). ———.

حل: (1). برای $\forall x,y,z\in S$ باید: $(x*y)*z=x*(y*z)$ باشد،
(2). $\exists\, e\in S,\ni,\forall x\in S:\ x*e=e*x=e$
(3). برای هر x، $\exists\, x^{-1}\in S,\ni:\ x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$ باشد.

1128. اگر یک Group G، خاصیت تبدیلی Commutative را تعقیب کند، و یا به عبارت دیگر برای $\forall x,y\in S$ رابطه: $x*y=y*x$ موجود و دارا حقیقتاً باشد، پس بنام ——— و یا ——— یاد میشود.

حل: Commutative Group و یا Abelian Group

1129. set: $S=\{\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$ را با عملیه جمع "+" در نظر گیرید. جمع یک عملیه binary در S است. زیرا: مجموعه هر دو عنصر S در S موجود است:

(1). برای تمام $\forall x,y,z \in S, \exists : (x+y)+z = x+(y+z)$

(2). $\exists$ یک $0 \in S, \ni, \forall x \in S: x+0 = 0+x = x$

(3). برای هر $x \in S$: $\exists$ یک $x^{-1} \in S, \ni : x+x^{-1} = x^{-1}+x = 0$

بنابران S یک ______ را تحت عملیه "+" تشکیل میدهد.

علاوه برآن چون: ... $\forall x,y \in S : x+y = y+x$ است،

بنابران S یک ______ را تحت عملیه تشکیل بوجود می‌آورد.

حل: Group ، Abelian Group یا Commutative Group .

III. امثال ست‌هاییکه دارای دو عملیهٔ دوگانه‌ای باشند:-

Examples of Sets With Two Binary Operations

1130. فرضاً $S = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ بوده باشد. ما نشان دادیم که S یک گروه تبدیلی Commutative Group تحت عملیه جمع "+" است. آیا S یک Group تحت عملیه ضرب نیست. آیا میدانید چرا؟

حل: S دارای عنصر عینیت Identity تحت عملیه ضرب نیست. و واضح است که دارای عناصر معکوس inverse شده نمیتوانند.

1131. اگر $S = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ باشد. آیا S تحت عملیه ضرب "$\cdot$" یک Group را تشکیل داده میتوانند؟ چرا؟

حل: نه خیر! اگرچه عنصر عینیت ضرب "1" در S موجود بوده و ضمناً عملیه ضرب یک عملیه binary در S است. اما بجز از 1 و -1 دیگر عناصر معکوس ندارند.

1132. set اعداد تام تحت عملیه تفریق «−» یک گروه Group شده میتواند یا خیر؟ چرا؟

حل: زیرا عملیه تفریق در set اعداد تام انجمنی associative نیست.

1133. set اعداد نسبتی تحت عملیه تقسیم «÷» یک Group نیست. چرا؟

حل: زیرا که $\frac{x}{0}$ مشخص نبوده پس عملیه «÷» در set نسبتی یک عملیه binary نیست.

1134. set اعداد نسبتی تحت عملیه ضرب «·» یک Group نمیباشد. چرا؟

حل: زیرا عدد صفر نسبتی بوده دارای معکوس نیست، یعنی کدام عدد x در set اعداد نسبتی موجود نیست که $0 \cdot x = 1$ گردد.

1135. set اعداد نسبتی غیر صفر تحت عملیه ضرب یک Group است. آیا این Group تبدیلی Commutative میباشد؟ ویا خیر؟

حل: بلی! زیرا: برای $S^{(1)}$ $\forall x, y \in S$ ما داریم: $x \cdot y = y \cdot x$.

1136. set اعداد نسبتی تحت عملیه جمع «+» یک Group میشود. آیا این Group تبدیلی یا Abelian Group شده میتواند؟ ویا خیر؟

حل: بلی! زیرا برای $\forall x, y \in S$ ما داریم: $x + y = y + x$.

1137. تا حال دیده شد که set اعداد نسبتی یک Group تبدیلی تحت عملیه جمع «+» بوده که عنصر عینیت identity در آن صفر بوده و عنصر معکوس x عبارت از $-x$ میباشد.

(1) در اینجا S set مربوطهٔ سوال را ارائه میکند.

وهم چنان ست اعداد نسبتی غیرصفر تحت عملیه ضرب "." یک گروه تبدیلی Commutative Group میباشد، که عنصر عینیت درآن ___ وعنصر معکوسش x عبارت از ___ میباشد.

حل: 1 ، $\frac{1}{x}$

1138. حال کمی ست دیگری که دارای شکل جزی فوق باشد نظر اندازی کنیم، ما میدانیم که:

$$(3-2\sqrt{2})+(5+8\sqrt{2})=(3+5)+(-2+8)\sqrt{2}$$
$$=8+6\sqrt{2}$$

درهمین قسم:

$(2+4\sqrt{2})+(-3+5\sqrt{2})=$ ___

حل: $-1+9\sqrt{2}$

1139. $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=$ ___

حل: $(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$

1140. $(5+3\sqrt{2})+(0-5\sqrt{2})=$ ___ .(1)

$(0-5\sqrt{2})+(5+3\sqrt{2})=$ ___ .(2)

حل: (1). $5+(-2)\sqrt{2}$ ، (2). $5+(-2)\sqrt{2}$

1141. $(3-2\sqrt{2})+[(2+5\sqrt{2})+(-3+\sqrt{2})]=$ ___ (1)

$[(3-2\sqrt{2})+(2+5\sqrt{2})]+(-3+\sqrt{2})=$ ___ .(2)

حل: (1). $(3-2\sqrt{2})+(-1+6\sqrt{2}) = 2+4\sqrt{2}$
(2). $(5+3\sqrt{2})+(2+5\sqrt{2}) = 2+4\sqrt{2}$

.1142 (1). $(3+5\sqrt{2})+(0+0\sqrt{2}) =$ ـــــــــــ

(2). $(0+0\sqrt{2})+(3+5\sqrt{2}) =$ ـــــــــــ

حل: (1). $3+5\sqrt{2}$ ، (2). $3+5\sqrt{2}$

.1143 (1). $(a+b\sqrt{2})+(0+0\sqrt{2}) =$ ـــــــــــ

(2). $(0+0\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2}) =$ ـــــــــــ

حل: (1). $a+b\sqrt{2}$ ، (2). $a+b\sqrt{2}$

.1144 $(-3+5\sqrt{2})+(3-5\sqrt{2}) =$ ـــــــــــ

حل: $0+0\sqrt{2}$

.1145 $(5+7\sqrt{2})+($ ـــــــ $) = 0+0\sqrt{2}$

حل: $-5+(-7)\sqrt{2}$

.1146 $(a+b\sqrt{2})+($ ـــــــ $) = 0+0\sqrt{2}$

حل: $-a+(-b)\sqrt{2}$

.1147 اگر a و b اعداد نسبتی باشند پس a+b یک عدد ـــــــ است.

حل: نسبتی rational

1148. اگر S یک set اعداد مثبتی باشد، که تحت عملیهٔ جمع یک گروه تبدیلی Commutative Group را تشکیل میدهد طوریکه برای تمام x، y و z شامل که بوده و دارای صفات ذیل باشد:

(1). قانون تبدیلی Commutative را میپذیرد یعنی: ______.

(2). قانون زنجیری associative را تعقیب کند یعنی: ______.

(3). دارای عنصر عینیت 0 باشد طوریکه: ______.

(4). برای هر $x \in S$ یک عنصر معکوس $-x \in S$ موجود باشد، طوریکه رابطهٔ: ______ صحیح موجود گشته و دارای حقیقت باشد.

حل: (1). $x+y=y+x$ باشد. (2). $(x+y)+z=x+(y+z)$ باشد.
(3). $x+0=0+x=x$ باشد. (4). $x+(-x)=-x+x=0$.

1149. فرضاً که S، set تمام اعدادیکه شکل $x+y\sqrt{2}$ بوده در حالیکه x و y اعداد مثبتی اند، باشد. پس اگر $(a+b\sqrt{2}) \in S$ و $(c+d\sqrt{2}) \in S$ بوده و ما عملیهٔ جمع را در S توسط افاده: $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$ تعریف کنیم. چون اعداد $(a+c)$ و $(b+d)$ مثبتی اند، بنابران ______ $\left((a+c)+(b+d)\sqrt{2}\right)$ میشود. و در نتیجه گفته میتوانیم که عملیهٔ جمع "+" یک عملیهٔ ______ در S پیدا شد.

حل: $\in S$ ، binary

1150. بطور مثال: اگر $(3+\frac{5}{3}\sqrt{2}) \in S$ و $(-\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\sqrt{2}) \in S$ باشند پس $(3+\frac{5}{3}\sqrt{2})+(-\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\sqrt{2}) =$ ______ $\in S$ پیدا شد.

حل: $\left(\frac{19}{8}+\frac{19}{6}\sqrt{2}\right) \in S$

1151. فرضاً S، set اعدادیکه بشکل $x+y\sqrt{2}$ اند بوده ودرحالیکه x و y اعداد نسبتی اند، باشد. پس درصورتیکه $(a+b\sqrt{2})\in S$ و $(c+d\sqrt{2})\in S$ باشد، درنتیجه:

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$(c+d\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2})=(c+a)+(d+b)\sqrt{2}$$ میباشد.

حالانکه a، b، c و d اعداد نسبتی اند و ما میدانیم که "+" در set اعداد نسبتی commutative است، یعنی: $a+c=c+a$

وهم چنان: $b+d=d+b$ بوده، بنابران ما نوشته میتوانیم:-

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(c+d\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2}).$$

ازینجا گفته میتوانیم که عملیه جمع در S set ______ است.

حل: تبدیلی (commutative)

1152. بطور مثال: $(-3+\frac{5}{8}\sqrt{2})+(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\sqrt{2})=$ ______ و

وهم چنان: $(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\sqrt{2})+(-3+\frac{5}{8}\sqrt{2})=$ ______ میباشد.

حل: $-\frac{7}{3}+(-\frac{7}{8})\sqrt{2}$ ، $-\frac{7}{3}+(-\frac{7}{8})\sqrt{2}$

1153. فرضاً S، set اعدادیکه بشکل $x+y\sqrt{2}$ اند بوده ودرحالیکه x و y اعداد نسبتی اند. درصورتیکه $a+b\sqrt{2}$ و $c+d\sqrt{2}$ و $e+f\sqrt{2}$ همه شامل S باشند، پس درنتیجه:

$$[(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})]+(e+f\sqrt{2})$$
$$=[(a+c)+(b+d)\sqrt{2}]+(e+f\sqrt{2})$$
$$=[(a+c)+e]+[(b+d)+e]\sqrt{2}$$

وبهمین قسم:

$$(a+b\sqrt{2})+[(c+d\sqrt{2})+(e+f\sqrt{2})]$$
$$=(a+b\sqrt{2})+[(c+e)+(d+f)\sqrt{2}]$$
$$=\text{______}.$$

اما از اینکه a، b، c، d، e و f همه اعداد نسبتی اند، پس درین صورت:

$(a+c)+e = a+(c+e)$ بوده،

وهم چنان $(b+d)+f = b+(d+f)$ میباشد.

لذا: $[(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})]+(e+f\sqrt{2})$

$= (a+b\sqrt{2})+[(c+d\sqrt{2})+(e+f\sqrt{2})]$.

بنابران گفته میتوانیم که عملیه جمع "+" در S یک عملیه binary ______ میباشد.

حل: $a+(c+e)+[b+(d+f)]\sqrt{2} = \ldots$ ، انجمنی .

1154. فرضاً S، Set اعداد یکه بشکل: $a+b\sqrt{2}$ بوده باشد. درحالیکه a و b اعداد نسبتی اند. که $(0+0\sqrt{2})\in S$ بوده و برای $(a+b\sqrt{2})\in S$

ما داریم: $(a+b\sqrt{2})+(0+0\sqrt{2}) = (a+0)+(b+0)\sqrt{2}$

(1) . . . . . . $=$ ______

(2) . $(0+0\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2}) = (0+a)+(0+b)\sqrt{2}$

$=$ ______ .

(3) . بنابران $(0+0\sqrt{2})$ عنصر ______ S تحت عملیه جمع "+" میباشد.

حل: $a+b\sqrt{2}$ ، $a+b\sqrt{2}$ ، عینیت، identity

1155. بطور مکمل: $(3+5\sqrt{2})+(0+0\sqrt{2}) =$ ______

$(0+0\sqrt{2})+(3+5\sqrt{2}) =$ ______

حل: $3+5\sqrt{2}$ ، $3+5\sqrt{2}$

1156. فرضاً S، Set اعداد یکه بشکل: $x+y\sqrt{2}$ اند، بوده باشد.

درحالیکه x و y اعداد نسبتی اند. بالفرض که $(a+b\sqrt{2}) \in S$،
پس درینصورت اعداد $-a$ و $-b$ در set اعداد نسبتی موجود شده میتوانند.
طوریکه: (1). $(a+b\sqrt{2})+(-a-b\sqrt{2}) =$ ______ بوده
(2). بهمین قسم: $(-a-b\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2}) =$ ______ میشود
(3). بنابران برای هر $(x+y\sqrt{2}) \in S$ یک ______ آن بنابر عملیه جمع "+" در set S موجود است.

حل: (1). $0+0\sqrt{2}$ ، (2). $0+0\sqrt{2}$ ، (3) معکوس inverse

1157. بطور مثال عنصر معکوس $2\sqrt{2}+\frac{5}{8}-\frac{7}{3}$ تحت عملیه جمع "+" عبارت از ______ میباشد.

حل: $7/3-\frac{5}{8}\sqrt{2}$ ، زیرا:
$$\left(-\frac{7}{3}+\frac{5}{8}\sqrt{2}\right)+\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{8}\sqrt{2}\right)=\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{8}\sqrt{2}\right)+\left(-\frac{7}{3}+\frac{5}{8}\sqrt{2}\right)=0+0\sqrt{2}$$ میشود.

1158. در امثال 1149 الی 1157 فوق دیدیم که set S دارای اعدادیکه بشکل $a+b\sqrt{2}$ اند (درحالیکه a و b اعداد نسبتی میباشند). دارای یک عملیه binary که بنام جمع "+" یاد میشود بوده طوریکه:
(1). عملیه جمع "+" در set S تبدیلی commutative است.
(2). عملیه جمع "+" در set S اتحادی associative است.
(3). set S دارای عنصر عینیت identity: $(0+0\sqrt{2})$ تحت عملیه جمع است.
(4). برای هر عنصر آن یک عنصر معکوس تحت عملیه موجود است.
بنابران set S تحت عملیه جمع "+" یک ______ ویا ______ را تشکیل میدهد.

حل: Commutative Group ، Abelian Group

$(3+5\sqrt{2})(2+4\sqrt{2}) = (3\cdot2+5\cdot4\cdot2)+(2\cdot4+3\cdot4)\sqrt{2}$ .1159
$= 46+22\sqrt{2}$

به همین ترتیب: $(2-3\sqrt{2})(4+\sqrt{2}) =$ ______

حل: $2-10\sqrt{2}$

$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}$ .1160*
$(3-2\sqrt{2})(7+3\sqrt{2}) =$ ______

حل: $(3\cdot7-2\cdot3\cdot2)+(-2\cdot7+3\cdot3)\sqrt{2} = 9-5\sqrt{2}$

$(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{3}{4}-\frac{5}{3}\sqrt{2}) =$ ______ .1161

حل: $-\frac{7}{6}-\frac{53}{72}\sqrt{2}$

.1162 (1) $(2+3\sqrt{2})(1+0\sqrt{2}) =$ ______
(2) $(1+0\sqrt{2})(2+3\sqrt{2}) =$ ______

حل: (1) $2+3\sqrt{2}$ ، (2) $2+3\sqrt{2}$

$(2+3\sqrt{2})(-\frac{1}{7}+\frac{3}{14}\sqrt{2}) =$ ______ .1163

حل: $1+0\sqrt{2}$

$(-\frac{1}{7}+\frac{3}{14}\sqrt{2})(2+3\sqrt{2}) =$ ______ .1164*

حل: $1+0\sqrt{2}$

$(-\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{2})(1+2\sqrt{2}) =$ ______ .1165

حل: $1+0\sqrt{2}$

$(2-3\sqrt{2})(5+2\sqrt{2}) =$ ______ .(1) .1166

$(5+2\sqrt{2})(2-3\sqrt{2}) =$ ______ .(2)

حل: (1). $2-11\sqrt{2}$ ، (2). $2-11\sqrt{2}$

$[(3+2\sqrt{2})(2-5\sqrt{2})](1-3\sqrt{2})=[-14-11\sqrt{2}](1-3\sqrt{2})$ .1167

$=52+31\sqrt{2}$

$(3+2\sqrt{2})[(2-5\sqrt{2})(1-3\sqrt{2})]=$ ______

بنابران قانون ______ در شکل هذه صدق میکند.

حل: $52+31\sqrt{2}$ ، اتحادی associative

.1168 فرضاً S، Set اعداد که بفارم $x+y\sqrt{2}$ بوده درحالیکه x و y اعداد نسبتی اند، باشد. پس اگر هر $(a+b\sqrt{2})\in S$ و $(c+d\sqrt{2})\in S$ باشند، درینصورت ما داریم:

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a\cdot c+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}\ .$$

حالانکه: ac ، 2bd ، bc و ad همه اعداد نسبتی اند.
پس همهٔ اعداد داخل دو قوسین نیز نسبتی میباشند بنابران $((a\cdot c+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2})\in S$ میشود. پس گفته میتوانیم که عملیه ضرب در یک Set یک عملیه ______ میباشد.

حل: binary

۱۱۶۹- فرضاً S، ساحه اعداد یکه بشکل: $x+y\sqrt{2}$ اند یا نشان داده شده که x و y اعداد ناطق میباشد. اگر $(a+b\sqrt{2})\in S$ و $(c+d\sqrt{2})\in S$ باشند، پس درینصورت:

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}$$

$$(c+d\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})=(ca+2db)+(cb+da)\sqrt{2}$$ است.

چون a، b، c و d اعداد ناطق اند، پس داریم:

$$ac+2bd=ca+2db$$

$$bc+ad=cb+da$$

$$\therefore (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(c+d\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})$$

بنابران گفته میتوانیم که عملیه ضرب یک عملیه binary ——— در S شده میباشد.

حل: Commutative (تبدیلی)

۱۱۷۰- اگر S، ساحه اعداد یکه بشکل: $x+y\sqrt{2}$ اند بوده در حالیکه x و y اعداد ناطق میباشند. اگر $(a+b\sqrt{2})\in S$، $(c+d\sqrt{2})\in S$ و $(e+f\sqrt{2})\in S$ باشد، این ثابت شده میتواند که:

$$[(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})]+(e+f\sqrt{2})=(a+b\sqrt{2})+[(c+d\sqrt{2})+(e+f\sqrt{2})]$$

یا بعبارت دیگر عملیه ضرب در ساحه S ——— میباشد.

حل: Associative (اتحادی)

۱۱۷۱- فرضاً که ساحه S مثال 1170 باشد، پس برای $(1+0\sqrt{2})\in S$ و $(a+b\sqrt{2})\in S$ داریم:

$$(1+0\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})= \text{———} \cdot (1)$$

$$(a+b\sqrt{2})(1+0\sqrt{2})= \text{———} \cdot (2)$$

(3)- بنابران: $1+0\sqrt{2}$ عبارت از عنصر ——— ضرب در S میباشد.

حل: (1)، $a+b\sqrt{2}$، (2)، $a+b\sqrt{2}$، عینیت

1172. فرضاً S، set مفروض شامل 1170 و 1171 باشد، اگر $(a+b\sqrt{2})\in S$ باشد درحالیکه a و b خلاف صفر اند، درینصورت $\left(\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right)\in S$ توجه کنید ما داریم:

$$(a+b\sqrt{2})\left(\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right)= \text{\_\_\_\_\_\_} .(1)$$

$$\left(\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right)(a+b\sqrt{2})= \text{\_\_\_\_\_\_} .(2)$$

بنابران بجز از عنصر $(0+0\sqrt{2})$ دیگر تمام عناصر S که set یک یک معکوس inverse را تحت عملیه ضرب دارا میباشند.

حل: (1). $1+0\sqrt{2}$ ، (2). $1+0\sqrt{2}$

1173. فرضاً S، set اعداد یکه بشکل: $x+y\sqrt{2}$ اند باشد درحالیکه x و y اعداد نسبتی اند. در حرکات شامل 1168 الی 1172 دیدیم که عملیه ضرب یک عملیه binary در S بوده و دارای خواص ذیل میباشد:

(1). عملیه ضرب در S، تبدیلی و نیز اتحادی است،

(2). یک عنصر عینیت: $(1+0\sqrt{2})$ در S تحت عملیه ضرب موجود است،

(3). تمام عناصر S بجز از: $(0+0\sqrt{2})$ تحت عملیه ضرب دارای معکوس اند.

بنابران S، set که بشکل: $x+y\sqrt{2}$ است درحالیکه x و y خلاف صفر باشند، تحت عملیه ضرب یک ______ را تشکیل میدهد.

حل: Commutative Group، و یا Ablian Group

1174. دیدیم که set، S یعنی set اعداد یکه بشکل: $x+y\sqrt{2}$ اند یک Group تبدیلی را تحت عملیه جمع بوجود می آورد. درحالیکه عنصر عینیت این Group تحت عملیه جمع عبارت از $0+0\sqrt{2}$ و عنصر معکوس یک عنصر $a+b\sqrt{2}$ عبارت از

ــــــ(1)ــــــ میباشد . علاوه بر آن درصورتیکه عنصر $0+0\sqrt{2}$ از S كم كشیده شود ، درینصورت S یک Commut. Group را تحت عملیه ضرب بوجود می آورد ، که عنصر عینیت این Group تحت عملیه ضرب عبارت از ــــ(2)ــــ بوده و عنصر معکوس یک عنصر $(a+b\sqrt{2})$ عبارت از $\left(\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right)$ میباشد .

حل : (1) . $-a-b\sqrt{2}$ ، $1+0\sqrt{2}$

1175 . فرضاً $S=\{0,1,2\}$ بوده و $\oplus$ یک عملیه binary باشد که آنرا در ذیل تعریف شده است ، باشد : درصورتیکه $a,b\in S$ باشد ، افاده : $a\oplus b$ عبارت از باقیمانده عملیه تقسیم ؛ $a+b$ بر 3 میباشد .

مثلاً : اگر بخواهیم ما افاده ؛ $1\oplus 2$ را بررسی کنیم چنین میشود :

چون $a+b=1+2$ مساوی 3 بوده درحالیکه باقیمانده عملیه تقسیم 3 بر 3 عبارت از صفر (0) است ، پس نوشته میتوانیم :

$$1\oplus 2=0$$

بهمین قسم : $0\oplus 2=2$ میشود . زیرا باقیمانده عملیه تقسیم $0+2$ بر 3 عبارت از 2 میباشد .

(1) . ــــ $=1\oplus 1$ میشود . زیرا : باقیمانده عملیه تقسیم ؛ $1+1$ بر 3 عبارت از ــــ است .

(2) . ــــ $=2\oplus 2$ بوده ، زیرا : باقیمانده عملیه تقسیم ؛ $2+2$ بر 3 عبارت از ــــ میشود .

حل : (1) . 2 ، 2 ، (2) . 1 ، 1 .

1176 . جدول عملیه $\oplus$ مربوط حرکات مسأله 1175 درمقابل بصورت قسماً ناتکمیل داده شده آنرا تکمیل کنید .

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1		
2	2		

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

حل : تکمیل جدول حرکات

مسئله : 1176

1177. با شاش جدول تکمیل شده گفته میتوانید که آیا $\oplus$ یک عملیه binary در S میباشد ویا خیر؟

حل : بلی ! برای $\forall x, y \in S$ ، $x \oplus y \in S$ میباشد.

1178. آیا عملیه $\oplus$ بنابر جدول فوق از خاصیت تبادلی پیروی میکند؟

حل : بلی ! زیرا برای $\forall x, y \in S$ داریم : $x \oplus y = y \oplus x$

توجه ! جدول به اساس خط قطر خود متناظر است.

1179. آیا کدام یک عنصر عینیت تحت عملیه $\oplus$ در جدول موجود است؟ وکدام است؟

حل : بلی ! صفر است زیرا : $\forall x \in S :\ x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$

1180. بملاحظه از جدول : آیا هر عنصر جدول دارای یک معکوس inverse بوده میتواند؟ در صورت موجودیت عنصر معکوس عنصر 2 کدام است؟

حل : بلی ! عنصر معکوس 2 تحت عملیه $\oplus$ عبارت از 1 است

زیرا : $2 \oplus 1 = 1 \oplus 2 = 0$

1181. در حرکات مسایل 1179 و 1180 توضیح شده که عملیه $\oplus$ در کد

یک عملیه binary بوده و ضمناً دارای خواص تبدیلی Commutative انجمنی associative و عنصر عینیت identity elem نیز میباشد. و علاوه برآن هر عنصر که تحت عملیه $\oplus$ دارای یک عنصر معکوس inverse است، بنابر آن گفته میتوانیم که S تحت عملیه $\oplus$ یک ——— و یا ——— را تشکیل میدهد.

حل: گروه تبدیلی Commutative Group و یا گروه ابلین Abelian Group

1182. فرضاً $S=\{0,1,2\}$ بوده و عملیه $\circledast$ را که طبق افاده ذیل در آن تعریف شده مدنظر بگیرید: افاده $a \circledast b$ باقیمانده عملیه تقسیم حاصلضرب $a \cdot b$ را بر 3 ارائه میکند. (واضح است که a و b عناصر کدام set S میباشند)

بطور مثال: $1 \circledast 2 = 2$ میشود. زیرا باقیمانده عملیه تقسیم بر 3 حاصلضرب 1 و 2 عبارت از 2 است.

بهمین قسم: $2 \circledast 2 = 1$ زیرا باقیمانده عملیه تقسیم ——— بر ——— عبارت از 1 میشود.

حل: $2 \cdot 2$ ، 3

1183. جدول عملیه $\circledast$ را (که در جریان مثال 1182 تعریف شده) در مقابل تا مکمل داده شده از آن تکمیل کنید.

$\circledast$	0	1	2
0	0	0	0
1	0		
2	0		

حل:

$\circledast$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\circledast$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

1184. بملاحظهٔ از جدول تکمیل شده: آیا عملیه $\circledast$ یک عملیهٔ binary در S شده میتواند دیا خیر؟

حل: بلی! زیرا: $\forall x,y \in S: \ x \circledast y \in S$

1185. بنابر جدول گفته میتوانید که آیا عملیه $\circledast$ تبدیلی است؟

حل: بلی! زیرا $\forall x,y \in S: \ x \circledast y = y \circledast x$
توجه! جدول به رشاش خط قطری خود متناظر است.

1186. آیا تحت عملیهٔ $\circledast$ کدام عنصر عینیت در جدول موجود است؟ کدام است؟

حل: بلی! 1 است زیرا: $\forall x \in S: \ x \circledast 1 = 1 \circledast x = x$

1187. آیا تمام عنصر که $x \in S$ تحت عملیهٔ $\circledast$ دارای معکوس میباشند؟

حل: نه خیر! زیرا صفر (0) معکوس ندارد. دیگر کدام $x \in S$ موجود نیست که: $x \circledast 0 = 0 \circledast x = 1$ شود

1188. بجز از صفر دیگر تمام عناصر که تحت عملیهٔ $\circledast$ دارای معکوس میباشند بطور مثال، معکوس 2 تحت $\circledast$ عبارت از ___ است.
زیرا: $2 \circledast \_\_\_ = 1$ میشود.

حل: 2، 2

۱۱۸۹. از مطالعه جوابات سوال: 1186 الی 1188 فهمیده میشود که عملیه ⊛ در $S=\{0,1,2\}$ یک عملیه binary بوده وضمناً دارای خواص: انجمنی، تبدیلی، و عنصر عینیت میباشد. علاوه بر آن بجز از عنصر "0"، دیگر تمام عناصر سَت تحت عملیه ⊛ دارای یک یک عنصر معکوس میباشند. واز این نتیجه میشود که سَت S غیر صفر: $S-\{0\}$ تحت عملیه ⊛ یک ——— را تشکیل میدهد.

حل: Commutative Group (گروه تبدیلی)

1190. تاکنون ما در چهار مثال یک ساختمان متشابه جبری را مطالعه نمودیم و دیدیم که در آن که یک سَت داده شده تحت یک binary یک گروه تبدیلی را بوجود آورده و در صورت کشیدن عنصر عینیت عملیه binary اول - سَت باقیمانده تحت یک عملیه binary دومی نیز یک Commutative Group (گروه تبدیلی) را تشکیل مینمائید.

بطور مثال: سَت اعداد یکه بشکل: $x+y\sqrt{2}$ اند یک Group تبدیلی را تحت عملیه "+" تشکیل میداد. حالانکه در صورت کشیدن صفر $(0+0\sqrt{2})$ (یعنی عنصر عملیه جمع در سَت) از سَت، سَت مذکور تحت عملیه ضرب نیز یک Group تبدیلی بوجود می آورد. بخاطر خواهید داشت که ما عنصر $0+0\sqrt{2}$ را از سَت خارج نمائیم زیرا عنصر مذکور تحت ——— .

حل: عملیه ضرب در سَت دارای عنصر معکوس inverse بوده نمیتوانست.

1191 • بهمین قسم set اعداد مثبتی تحت عملیهٔ "+" جمع یک Group تبدیلی را بوجود می آورد، در صورت کشیدن عنصر عینیت جمع از set مذکور - set اعداد مثبتی بدون صفر یک Group تبدیلی را تحت عملیهٔ ضرب تشکیل میدهد • آیا میدانید که چرا عنصر صفر را تحت عملیه ضرب از set مثبتی خارج میمائیم ؟

حل : ٥ تحت عملیه ضرب "•" معکوس ندارد •

IV. ساحه ها (یا ساحات) :- Fields

بی فائده نخواهد بود که یک set ای را که دارای دو عملیه binary وضمناً خواص مشخصه Group را دارا باشد مورد مطالعه قرار دهیم • از نتیجه این مطالعه ما به تشکیل یک سیستم کامل تر جبری نایل خواهیم شد • اکنون در موقف قرار داریم که باتحاد بخشیدن یکعده مفاهیم ضرورت داریم که بکلیه سیستم هائی که اکثراً عرضه به نظر رسند قابل تطبیق اند •

1192 • حال اگر ما یک set ای را که دارای دو عملیه binary بوده طوریکه تحت هر کدام آن یک Group را تشکیل کند مورد بحث قرار دهیم در خصوص ما کدام سیستم عالی تر جبری را که بیشتر از شکل دو ———— باشد پیدا کرده نتوانسته ایم • برای اینکه این سیستم جبری شکل کامل تر را بخود بگیرد ما باید راهی را جستجو داریم تا بتوانیم این دو عملیه binary مربوط set موضوع را با هم ترکیب نمائیم • مانند یکه در sets اعداد حقیقی ما میدانیم که $a \cdot (b+c) =$ ———— میباشد •

حل: Group ، $(a \cdot b)+(a \cdot c)$

1193 • در ست اعداد حقیقی Reals دو عملیه معمولی ضرب و جمع خاصیت ذیل: $a \cdot (b+c) =$ ______ را تعقیب میکنند، که این خاصیت بنام قانون توزیعی عملیه ضرب بالای عملیه جمع distributive law of multiplication over addition یاد میشود. آیا این قانون کدام رابطه مشخص را بین هر دو عملیه خاطر نشان میکند؟

حل: $(a \cdot b)+(a \cdot c)$ ، بلی

1194 • اگر قانون توزیعی را از طرف چپ (عکس توضیح فوق) بنویسیم و آن به شکل: $(x \cdot y)+(x \cdot z) =$ ______ افاده میشود. که در حقیقت ما یک قانون دیگر ریاضی که شناسائی آن "ضریب مشترک" و یا "factoring out" در نظر گرفته میشود صدق میکند.

حل: $x(y+z)$

1195 • حال ما در موقف قرار داریم که یک سِت را که دارای دو عملیه binary: ⊕ و * مطالعه نمائیم طوریکه ست یک Group تبدیلی را تحت عملیه اولی ⊕ و یک Group تبدیلی را تحت عملیه دومی * تشکیل دهد، و علاوه بر آن ست قانون توزیعی عملیه دوم * را بالای عملیه اول ⊕ تعقیب کند. یعنی در صورتیکه $a, b, c \in S$ باشند پس: $a*(b \oplus c) =$ ______ باشد.

حل: $(a*b) \oplus (a*c)$

1196. حال میخواهیم که یک سیستم علامه گذاری notation را برای توضیح این ساختمان بمیان آوریم. بخاطر داشته باشید که ما بیک ساختمان جبری می پردازیم که یکدسته اشکال ریاضی در قالب این ساختمان افتیده اند. بعبارت ساده اگر ما یک set غیرخالی S را که دارای دو عملیه binary ⊕ و * بوده باشد درنظر بگیریم، طوریکه S sets تحت عملیه ⊕ یک Group تبدیلی بوده و بهمین قسم تحت عملیه * یک Group تبدیلی را تشکیل کند، علاوه برآن ازینکه ساختمان S محکم تر و جامع تر وغنی تر از دو گروه Group بودن باشد درینصورت ما می حقیقه قانون توزیعی عملیه * را بالای عملیه ⊕ قبول میکنیم.

یا بالفاظ دیگر درصورتیکه $a,b,c \in S$ باشد، پس: ________ میشود.

پس: $a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$.

1197. اگر S یک set غیرخالی باشد، S تحت ⊕ یک Group را میسازد درصورتیکه:

(1). S بالضرور دارای یک رابطه معادل "=" بوده و عملیه binary ⊕ در S شامل رابطهٔ "=" باشد. (یعنی درصورتیکه $a,b,x \in S$ بوده (و اگر $a=b$ باشد،

پس: $a\oplus x=b\oplus x$ و هم: $x\oplus a=x\oplus b$ گردد)

(2). عملیه ⊕ در S قانون تبدیلی Commutativity را تعقیب کند، یعنی اگر: $a,b \in S$ باشد، پس ________ گردد.

(3). عملیه ⊕ در S قانون انجمنی associativity را پیروی کند، یعنی: ________ : $\forall a,b,c \in S$

(4). S تحت عملیه ⊕ باید دارای یک عنصر ______ باشد.

(5). هر عنصر $x \in S$ تحت عملیه ⊕ باید دارای یک عنصر ______ باشد.

حل: (1). "well-defined" یا "خوب تعریف شده"
(2). $a \oplus b = b \oplus a$ ، (3). $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
(4). عنصر عینیت identity ، (5). معکوس inverse

1199. در قسمت دوم این کتاب ثابت نمودیم که یک set که تحت یک عملیه binary بیشتر از یک عنصر عینیت را دارا بوده نمی‌تواند. بنابراین حقیقت ما گفته میتوانیم که z تنها عنصر عینیت کدام set تحت عملیه $\oplus$ است، پس درینصورت ما میتوانیم بنویسیم:

$x \oplus z =$ ___ و هم چنان:

$z \oplus x =$ ___ . از این به بعد z عبارت از عنصر عینیت فرض میشود.

حل: x ، x ،

1200. اگر $a, b \in S$ باشند، پس ___ $= (a \oplus b) \oplus z$ میشود، درصورتیکه z عنصر عینیت عملیه ___ $\oplus$ در ___ باشد.

حل: $a \oplus b$ ، binary ، S

1201. اگر z عنصر عینیت ___ باشد، پس برای $a, b \in S$ ما داریم: $z \oplus (a \oplus b) =$ ___ .

حل: عملیه binary $\oplus$ در S ، $a \oplus b$

1202. بخاطر خود بسپارید که عنصر معکوس یک عنصر تحت یک عملیه binary عبارت از یک عنصر است که اگر با عنصر اولی تحت عملیه موضوع قرار گیرد از نتیجه آن عنصر عینیت حاصل میشود. بطور مثال، در set اعداد حقیقی عنصر معکوس $2/3$ تحت عملیه ضرب "..."

عبارت از $3/2$ میباشد. زیرا $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$ گردد،
درحالیکه 1 عنصر عینیت identity تحت عملیه ضرب است. حالانکه
عنصر معکوس $2/3$ بنابر عملیه جمع عبارت از ____ است، زیرا
________ میشود، درحالیکه ____ عنصر عینیت تحت
جمع "+" میباشد.

حل : $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}+(-\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$ ، 0

1203. اگر z عنصر عینیت set S تحت عملیه $\oplus$ فرض شود، و
اگر b عنصر معکوس عنصر a set S. بنابر عملیه $\oplus$ باشد،
پس درینصورت : $a\oplus b=b\oplus a=$ ____

حل : z

1204. حال ما به عبارهٔ گذاری که توسط آن معکوس یک عنصر S set را تحت
عملیه $\oplus$ ارائه کرده بتوانیم ضرورت داریم. بطور مثال اگر درنظر گیریم
set غیر خالی T عملیه binary بدون جمع معمولی "+" مدنظر گرفته
شود، درینصورت عنصر معکوس یک عنصر x، T set
را تحت عملیه "+" به "$-x$" نشان میدهیم. و بهمین قسم
اگر عملیه binary در T عملیه معمولی ضرب مدنظر گرفته شود،
درینصورت عنصر معکوس x را (درصورتیکه $x\neq 0$ باشد)
به x^{-1} ارائه میکردیم. حال اگر ما میخواهیم که در set S
عنصر معکوس یک $x\in S$ را تحت عملیه binary، $\oplus$ به $\overline{x}$ نشان
دهیم، پس درینصورت ما میتوانیم بنویسیم:

________________ $=z$

حل: $x\oplus\overline{x}=\overline{x}\oplus x=z$

1205. بخاطر خواهید داشت که در قسمت دوم این کتاب ثابت نمودیم که اگر یک set تحت یک عملیه binary الجبری که دارای عنصر عینیت باشد پس (در صورت موجودیت آن) یک عنصر آن set تحت عملیه داده شده بیشتر از یک عنصر معکوس را دارا ـــــ .

پس اگر $\oplus$ یک عملیه binary و الجبری associative در set باشد در صورتیکه e عنصر عینیت set تحت $\oplus$ باشد، در اینصورت ما گفته میتوانیم که تنها نه عنصر معکوس x تحت عملیه $\oplus$ عبارت از یک عنصر $\bar{x}$ (در صورتیکه موجود باشد.) در set است، طوریکه؛ $x \oplus \bar{x} =$ ـــــ بوده و هم چنان؛ $\bar{x} \oplus x =$ ـــــ گردد.

حل: شده نمیتواند، e، e

1206. اگر در یک set هر عنصر آن دارای یک عنصر معکوس تحت عملیه $\oplus$ باشد، ما میدانیم که عنصر معکوس هر عنصر ـــــ است. پس اگر $a \in S$ باشد. و عنصر معکوس a به $\bar{a}$ ارائه شود پس در اینصورت $a \oplus \bar{a} = \bar{a} \oplus a =$ ـــــ میشود.

حل: تنها نه، e

1207. در set S دراین چند مسأله مورد بحث خویش ما e را بحیث عنصر عینیت عملیه $\oplus$ قبول دار شده ایم. پس در اینصورت برای هر $x \in S$ ما داریم: $x \oplus e =$ ـــــ و هم؛ $e \oplus x =$ ـــــ .

علاوه بر آن اگر هر $x \in S$ دارای یک معکوس در set تحت عملیه $\oplus$ باشند، فرضاً $c \in S$ و عنصر معکوسش را به $\bar{c}$ ارائه کنیم در اینصورت: $c \oplus \bar{c} = \bar{c} \oplus c =$ ـــــ میشود.

حل: x ، x ، z

1208. با استفاده از علامه گذاری در notation فوق ما نوشته کرده میتوانیم:

(1). عنصر عینیت که تحت عملیه $\oplus$ عبارت از ___ است،
طوریکه برای هر $x \in S$: $x = x \oplus$ ___ $=$ ___ $\oplus x$ باشد.

(2). اگر $x \in S$ دارای یک عنصر معکوس تحت عملیه $\oplus$ باشد آن عبارت از ___ میباشد، طوریکه: ___ $= x \oplus$ ___ $=$ ___ $\oplus x$ گردد.

حل: (1). z ، z ، z ، (2). $\bar{x}$ ، $\bar{x}$ ، $\bar{x}$ ،

1209. در کدام S مورد بحث ما z عبارت از سمبول خاص است که برای ارائه ___ نایر عملیه $\oplus$ بکار برده شده است. پس اگر $a, b \in S$ باشد، در اینصورت $(a \oplus b) \oplus z =$ ___ میشود.

حل: عنصر عینیت ، $a \oplus b$

1210. اگر $a, b \in S$ باشد پس ___ $= (a \oplus b) \oplus z$ است.

حل: $a \oplus b$

1211. در S کدام، علامه گذاری $\bar{a}$ ___ a را تحت عملیه $\oplus$ افاده میکند، که در اینصورت $a \oplus \bar{a} =$ ___ ؛
$\bar{a} \oplus a =$ ___ میشود.

حل: عنصر معکوس inverse ، z ، z ،

1212. اگر " * " یک عملیه binary در کدام سِت باشد، پس در صورت $a*b$ یک عنصر گروه و عنصر معکوس $a*b$ تحت عملیه $\oplus$ عبارت از : $(\overline{a*b})$ میباشد.

بنابران ما میتوانیم بنویسیم : $(a*b)\oplus(\overline{a*b}) =$ ——

حل : z

1213. به تشابهات ذیل توجه فرمائید:

(1). در set T اعداد مثبتی که "0" ، عنصر عینیت عملیه "+" است، برای هر $x \in T$ ما داریم : $x = \quad + \quad = \quad +$

(2). در کدام sets موردبحث که z عنصر عینیت عملیه $\oplus$ است، برای هر کدام $x \in S$ ما داریم: $x = \quad \oplus \quad = \quad \oplus$

حل : (1). x ، 0 ، 0 ، x . (2). x ، z ، z ، x

1214. به تشابهات توجه فرمائید:

(1). در set T (اعداد مثبتی) اگر $x-$ معکوس x تحت عملیه + باشد، پس ما داریم : $0 = \quad + \quad = \quad +$

(2) در کدام sets (مورد بحث) اگر $\bar{x}$ معکوس x تحت عملیه $\oplus$ باشد، پس ما داریم : $z = \quad \oplus \quad = \quad \oplus$

حل : (1) x ، $-x$ ، $-x$ ، x . (2) x ، $\bar{x}$ ، $\bar{x}$ ، x

1215. اگر کدام $x \in S$ باشد پس $x \oplus z =$ —— و $z \oplus x =$ —— میشود.

حل : x ، x

1216. اگر S ، $a, b \in S$ باشد، پس $(a*b)$ ـــــ میشود.

حل: $(a*b) \in S$

1217. در یک گروپ ما داریم: $a \oplus \bar{a} =$ ـــــ .

حل: z

1218. در یک گروپ ما داریم: $\bar{x} \oplus x =$ ـــــ .

حل: z

1219. اگر S ، $a, b \in S$ باشد، پس $(a*b) \oplus \overline{(a*b)} =$ ـــــ میشود.

حل: z

1220. تا حال ما یک گروپ خاص S را که دارای یک عملیهٔ binary $\oplus$ بوده و تحت این عملیه یک Commutative Group را بوجود می‌آورد مطالعه نموده ایم. عنصر عینیت این Group را تحت عملیه $\oplus$: ـــــ ارائه نموده و همچنین عنصر معکوس هر عنصر $x \in S$ را بنابر عملیهٔ $\oplus$ به ـــــ نشان داده ایم.

حل: z ، $\bar{x}$

1221. علاوه از موجودیت عنصر عینیت و عنصر معکوس هر عنصر برای دیگر یک Group تبدیلی را تحت عملیه $\oplus$ بوجود بیاورد پس ضرورت است که گروپ مذکور دارای خاصیت تبدیلی بنا بر عملیه $\oplus$

نتیجه، یعنی: برای $\forall x,y \in S$ باید (1) ________ موجود گردد.
و هم چنان ضروریست که S تحت عملیه $\oplus$ از خاصیت انجمنی پیروی کند، یعنی: در S $\forall x,y,z \in S$ رابطهٔ: (2) ________ حقیقت داشته باشد.

حل: (1). $x\oplus y = y \oplus x$، (2). $(x\oplus y)\oplus z = x\oplus(y\oplus z)$

1222. چون S تحت عملیه $\oplus$ یک Abelian Group است، پس $x\oplus y = y\oplus x$ در S موجود است زیرا S (1) ________ را تعقیب میکند.
و همین قسم: $a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$ در S موجود است، زیرا: S از قانون (2) ________ پیروی میکند.

حل: (1) تبدیلی Commutative، (2) انجمنی Associative

1223. اگر رابطهٔ معادل "=" را در S مورد بررسی قرار دهیم، رابطهٔ "=" در S خواص ذیل را تعقیب میکند:
(1). خاصیت انعکاسی Reflexive را یعنی: ________.
(2). خاصیت متناظری Symmeteric را یعنی: ________.
(3). خاصیت انتقالی Transitive را یعنی: ________.

حل: (1). برای $\forall x \in S$: $x=x$ است.
(2). برای $\forall x,y \in S$: اگر $x=y$ باشد، پس $y=x$ میشود.
(3). برای $\forall x,y,z \in S$: اگر $x=y$ و $y=z$ باشد، پس $x=z$ میشود.

1224. حال ما در موقف قرار گرفته ایم که به اثبات بعضی قضایای ابتدائی در S اقدام نمایم - دلیل هر مرحلهٔ اثبات را اقامه کنید. ممکن بعضی ازین قضایا در قسمت سوم در مبحث Groups با اثبات رسیده باشند که شما به آن ها آشنائی خواهید داشت،

غرض ما از تکرار این قضایا درینجا عبارت از روشن ساختن موضوع بوده و دشتن و تمرین علایم بیشتر استعمال علایم است.

مفروض: در صورت که $a, b, c \in S$ باشند.

مطلوب: ثابت کنید که $(\bar{a} \oplus b) \oplus a = b$ است.

Proof:

1. $\because (\bar{a} \oplus b) \oplus a = (b \oplus \bar{a}) \oplus a$ . . . . ——
2. دیگر خاصیت $= b \oplus (\bar{a} \oplus a)$ . . . . ——
3. دیا $= b \oplus z$ . . . . . ——
4. دیا $= b$ . . . . ——
5. $\therefore (\bar{a} \oplus b) \oplus a = b$ . . . . ——

Q.E.D

حل: (1) تبدیلی، (2) انجمنی، (3) تعریف عنصر معکوس در گر، (4) تعریف عنصر عینیت در گر، (5) تطبیق یا شمول خاصیت انتقالی.

1225. اگر $a, b, c \in S$ بوده و $a \oplus b = a \oplus c$ باشد،

مطلوب: ثبوت کنید که $b = c$ میباشد.

Proof:

1. $\because a \oplus b = a \oplus c$ . . . . . . Hypothesis
2. $\because a \in S, \exists \bar{a} \in S \ni : a \oplus \bar{a} = \bar{a} \oplus a = z$ وجود عنصر معکوس
3. پس $\bar{a} \oplus (a \oplus b) = \bar{a} \oplus (a \oplus c)$ . . . Well-defined = اطلاق
4. پس $(\bar{a} \oplus a) \oplus b = (\bar{a} \oplus a) \oplus c$ . . . ——
5. دیا $z \oplus b = z \oplus c$ . . . ——
6. $\therefore b = c$ . . . . . ——

Q.E.D.

حل: (4) انجمنی، (5) خاصیت عنصر معکوس، (6) خاصیت عنصر عینیت

1226 . برای استدلال مراحل ثبوت قضایا بهتر است که تمام خواص مربوطه set S بصورت خلص بیرون نویس شوند. قبل از انکه برای این کار اقدام نمایم ضروریست که خود را با شناخت بیشتر علایم مربوطه به عملیه "*" آشنا سازیم. درصورتیکه S یک Group تبدیلی تحت عملیه binary "*" باشد درینصورت باید که S حائز صفات آتی باشد:

(1) . عملیه "*" توسط ________ در S باشد.

(2) . S بنا بر عملیه "*" خاصیت تبدیلی را بپذیرد یعنی برای $a, b \in S$ باید که ________ باشد.

(3) . ضروریست که S بنا بر عملیه "*" خاصیت انجمنی را تعقیب کند یعنی: $\forall a,b,c \in S$ رابطه: ________ در S موجود باشد.

(4) . موجودیت عنصر ______ در S لازمی است.

(5) . هر عنصر $x \in S$ باید که دارای یک عنصر ______ در S باشد.

حل: (1) . "رابطه" = "خوب تعریف شده باشد" well-defined

(2) . $a*b=b*a$ ، (3) . $a*(b*c)=(a*b)*c$

(4) . عینیت identity ، (5) . معکوس inverse

1227 . حال ما به سمبول که عنصر عینیت S را تحت عملیه $*$ ارائه کند نیاز داریم. برای این مطلب "u" را بحیث سمبول عنصر عینیت S تحت عملیه $*$ قبول میکنیم. بنابران برای هر $\forall x \in S$ ما میتوانیم بنویسیم:

$$x*u=u*x= \_\_\_$$

حل: x

1228 . عنصر عینیت set S بنا بر عملیه $\oplus$ عبارت از z است طوریکه برای $\forall x \in S$ ما داریم: $x \oplus z = z \oplus x = \underset{(1)}{\_\_\_\_}$. و بهمین قسم

عنصر عینیت S تحت عملیه "*" عبارت از u است طوریکه برای تمام $x \in S$ رابطه: $x * u = u * x = \underline{(2)}$ موجود و حقیقت باشد.

حل: (1) x ، (2) x ،

1229 . عنصر عینیت S بنابر عملیه "$\oplus$" عبارت از ــــــ است.

حل: z

1230 . عنصر عینیت S identity تحت عملیه: "*" عبارت از ــــــ است.

حل: u

1231 . در S: ــــــ $= z \oplus u$ میشود، زیرا: z ــــــ است.

حل: عنصر عینیت S تحت عملیه "$\oplus$" است.

1232 . در S: ــــــ $= z * u$ میشود، زیرا: u ــــــ است.

حل: عنصر عینیت S identity تحت عملیه "*" است.

1233 . درصورتیکه $x \in S$ باشد، پس: ــــــ $= x \oplus z$ میشود.

حل: x

1234 . درصورتیکه $x \in S$ باشد، پس: ــــــ $= x * u$ میشود.

حل: x

1235 • در صورتیکه $x \in S$ باشد، پس: $x \oplus \bar{x} = \_\_\_$ میشود.

حل: z

1236 •. برای افاده عنصر معکوس یک عنصر $x \in S$ تحت عملیه "*" ما ضرورت بیک سمبول داریم، دربنی ما عنصر معکوس $x \in S$ را تحت عملیه "*" به x^{-1} نشان میدهیم.

بنابرین ما نوشته میتوانیم: $x * x^{-1} = \underline{\ (1)\ }$

وهم چنان: $x^{-1} * x = \underline{\ (2)\ }$

زیرا: u عنصر عینیت عملیه "*" در S میباشد.

حل: (1) u ، (2) u ،

1237 • علایم وسمبولهای قرار دادی ها طبق ذیل مورد استعمال دارند:

اول: برای عملیه "$\oplus$":

(1). عنصر عینیت S identity بنابر عملیه $\oplus$ عبارت از ___ است.

(2). برای هر $x \in S$ ما داریم: ______.

(3). هر $x \in S$ تحت عملیه $\oplus$ دارای یک عنصر معکوس inverse بوده که به ___ ارائه میشود، طوریکه ______ میباشد.

دوم: برای عملیه "*":

(4). عنصر عینیت S identity بنابر عملیه "*" عبارت از ___ است.

(5). برای هر $x \in S$ ما داریم: ______.

(6). هر $x \in S$ تحت عملیه * دارای یک عنصر معکوس inverse بوده که به ___ ارائه میشود، طوریکه ______ میباشد.

حل: (1) - z ، (2) - $x \oplus z = z \oplus x = x$ ، (3) - $\bar{x}$ ، $x \oplus \bar{x} = \bar{x} \oplus x = z$

(4) - u ، (5) - $x * u = u * x = x$ ، (6) - x^{-1} ، $x * x^{-1} = x^{-1} * x = u$

1238 . برای هر $x \in S$ داریم: $x \oplus z = \text{—}$ و $z \oplus x = \text{—}$

حل: x ، x

1239 . برای هر $x \in S, \exists \bar{x} \in S, \ni$: $x \oplus \bar{x} = \text{—}$ و $\bar{x} \oplus x = \text{—}$

حل: z ، z

1240 . برای $\forall x \in S$ داریم: $x * u = \text{—}$ و $u * x = \text{—}$

حل: x ، x

1241 . برای هر $x \in S, \exists \bar{x}^{1} \in S, \ni$: $x * \bar{x}^{1} = \text{—}$ و $\bar{x}^{1} * x = \text{—}$

حل: u ، u

1242 . برای هر $x \in S$ در حالت خاص: $z \oplus z = \text{—}$

حل: z

1243 . برای هر $x \in S$ در حالت خاص: $u * u = \text{—}$

حل: u

1244 . برای هر $x \in S$ ، $x \oplus z = x$ و $z \oplus x = x$

و در حالت خاص: $u \oplus z = \text{—}$ و $z \oplus u = \text{—}$

حل: u ، u

1245 . برای هر $x \in S$ داریم : $x * u = x$ و $u * x = x$

در حالت خاص : ___ $= z * u$ و ___ $= u * z$ میشود .

حل : z ، z

1246 . در S : $u * [a \oplus (b * c)] = a \oplus (b * c)$ میشود؛

زیرا : ___ عنصر عینیت عملیه : " " شت .

حل : u ، $*$

1247 . درصورتیکه از استعمال قوس ها استفاده نشود لحاظ باید گرفت که اولتر عملیه " $*$ " را اجرا نموده وسپس به اجرای عملیه : $\oplus$ می پردازیم .

چنانچه افاده : $a \oplus b * c$ معنی افاده : $a \oplus (b * c)$ را افاده میکند . (دارد .) بهمین قسم افاده : " $a * b \oplus c$ " معنی : " ___ " را افاده میکند .

حل : $(a * b) \oplus c$

1248 . اگر $a, b, c \in S$ باشد ، اگر ما بخواهیم که a با $(b \oplus c)$ عملیه : " $*$ " را اجرا کند از شکل ذیل مینویسیم : $a * (b \oplus c)$. اگر ما بخواهیم که : $a * b$ با c عملیه : " $\oplus$ " را اجرا کند درینصورت از شکل : ___ نوشته میکنیم .

حل : $a * b \oplus c$

1249. اگر $a, b, c \in S$ باشند و ما بخواهیم که $a*b$ بالای عملیهٔ «$\oplus$» را اجرا نمائید درینصورت ما انرا بشکل: ________ مینویسیم. ما میتوانیم که انرا به شکل: $(a*b)\oplus c$ بنویسیم، لیکن از نتیجه ما میدانیم که ارزش عملیه "$*$" دارا فادهٔ مذکور اول اجرا گردیده و سپس عملیه $\oplus$ اجرا میشود، درینصورت ضرورت به استعمال قوسین دیگر نمیشود.

حل: $a*b \oplus c$

1250. بالفرض فرضاً S دارای تمام خواص یک دو Group داشته دو عملیه binary: "$\oplus$ و $*$" بوجود اورده میتوانند باشد. درینصورت ما قانون توزیعی عملیهٔ "$*$" را بالای عملیه $\oplus$ قرار ذیل تعریف میکنیم:

برای تمام: $a, b, c \in S$: $a*(b\oplus c) = a*b\oplus a*c$

ترتیب معکوس افادهٔ فوق را بررسی نمائید:

$a*b \oplus a*c =$ ________ .

بنابرین (یا افاده) حاصل کرده خود را با بیانیه (افادهٔ) ذیل مقایسه کنید:

$a*(b\oplus c) = a*b \oplus a*c$.

درنتیجه: $a*b \oplus a*c =$ ________ .

حل: $a*(b\oplus c)$ ، $a*(b\oplus c)$

1251. ازنتیجه قانون توزیعی distributive laws عملیهٔ "$*$" بالای عملیهٔ $\oplus$ برای $\forall a, b, c \in S$ تحقیق پذیرفت، پس میتوانیم بنویسیم:

$a*(b\oplus c) =$ ________ .

حل: $a*b \oplus a*c$

1252 . اگر بخاطر داشته باشید در اشکال سابق ما مطالعه نمودیم که عنصر عینیت Identity عملیه "+" یعنی "0" تحت عملیه ضرب "." دارای معکوس Inverse نبود . حالانکه ما در یک set مورد بحث خود شکل آخر فوق دو عنصر عینیت را قبولدار شدیم :

(1) . عنصر z را بنابر عملیه: "(1)" و

(2) . عنصر u را بنابر عملیه: "(2)" بحیث عنصر عینیت قبول نمودیم .

حال میخواهیم که درین موضوع یک اندازه بیشتر روشنی افگنده و آنرا بدقت بررسی نماییم .

ما فرض کردیم که برای هر عنصر $x \in S$ یک عنصر معکوس بنابر عملیه "*" موجود بوده و در حالت خاص عنصر معکوس z را به "3" تحت عملیه * ارائه نمودیم . درصورتیکه این فرضیه دارای حقیقت باشد، پس درینصورت: $\_\_\_ = z * z^{-1} = z^{-1} * z$ میشود .

حل : (1) . $\oplus$ ، (2) . * ، (3) . z^{-1} ، (4) . u ،

1253 . درینجا سوالی پیدا میشود که: "آیا u و z متمایز اند ویا عین عنصر میباشند ؟ " یا بعبارت دیگر : "آیا میتواند که یک عنصر در یک set عنصر ——— هردو عملیه $\oplus$ و * را تشکیل دهد ؟ " سوال هذا در حرکات شماره 1254 در ذیل بررسی میشود .

حل : عینیت ویا Identity

1254 . بالفرض : $u = z$ باشد . برای هر $x \in S$ افاده : $x*(u \oplus u)$ را مد نظر بگیرید :

(1) . چون $z = u$ است : پس درینصورت

ما داریم :

(1) . چون $z = u$ است ؛ $x*(u \oplus u) = x*(z \oplus z)$

(2) . z عنصر عینیت $\oplus$ است ؛ $= x*z$

(3) . چون $z = u$ است ؛ $= x*u$

$= x$

(4) با استفاده از استعمال قانون توزیعی عملیهٔ " * " بالای عملیهٔ $\oplus$ ما نوشته میتوانیم :

$$x*(u \oplus u) = x*u \oplus x*u$$

(5) زیرا u عنصر عینیت $*$ است ؛ $= x \oplus x$

از دو افاده های (1) و (5) بحث هرده پرسشد که برای تمام $x \in S$ ما داریم : $x = x \oplus x$.

حالانکه ما میدانیم که محض یک عنصر در S موجود است که خاصیت رابطهٔ اخیرالذکر را دارد . یا بعبارهٔ دیگر معادلهٔ : $x \oplus \underline{\ (1)\ } = x$ دارای محض یک حل بوده که آن عبارت از $\underline{\ (2)\ }$ میباشد . پس بالعموم : $x = \underline{\ (3)\ }$ است .

حل : (1) . z ، (2) . z ، (3) . z ،

1255 . حل مسألهٔ 1254 : ما را بیک نتیجهٔ شگفت آوری (حیرت انگیزی) هدایت میکند . یعنی در صورتیکه : $z = u$ باشد پس هر عنصر S مورد بحث ما عبارت از z میباشد . یا بعبارت دیگر S در این صورت دارای محض یک عنصر بوده که آن عبارت از عنصر $\underline{\ 1\ }$ و یا $\underline{\ 2\ }$ میباشد . پس در نتیجه ما نوشته میتوانیم : $z \oplus z = \underline{\ 5\ }$ و $z*z = \underline{\ 4\ }$ و $z*(z \oplus z) = \underline{\ 3\ }$ و علی القیاس . . .

واضح است که درین حل $x = z$ (در مسألهٔ 1254) ساختمان جبری مورد نظر ما را از ارزش می افگند .

حل : (1) . عینیت ، (2) . z ، (3) . z ، (4) . z ، (5) . z .

1256. حال ما به نتیجه رسیده ایم که اگر $z=u$ باشد، درآنصورت ست S دارای بیشتر از یک عنصر یعنی z شده نمیتواند. برای اینکه امکانات "trivial" از بین برده شود ما حالتی را فرض میکنیم که: $z \neq u$ باشد. حاله ما متیقین هستیم که ست S لااقل دارای دو عنصر: ___ ، ___ شده میتواند.

حل: u ، z

1257. بنابر فرض اخیر: $z \neq u$ ، ست S دارای لااقل دو عنصر بوده و دارای دو عملیه binary: $\oplus$ و $*$ میباشد. طوریکه: (1). ست S یک گروه تبدیلی Commutative Group بنابر عملیه $\oplus$ بوده که عنصر عینیت آن تحت عملیه $\oplus$ عبارت از z است و هم برای هر $x \in S$ یک عنصر معکوس $\underline{\quad}^{(1)}$ تحت عملیه $\oplus$ در ست موجود میشود.

(2). ست S یک گروه تبدیلی Commutative Group را تحت عملیه $*$، تشکیل میدهد، که عنصر عینیت آن عبارت از u (در حالیکه $z \neq u$ است.) بوده و برای هر $x \in S$ یک عنصر معکوس $\underline{\quad}^{(2)}$ بنابر عملیه "$*$" در ست موجود میباشد.

(3). برای $\forall a,b,c \in S$ قانون توزیعی distributive Law عملیه $*$ بالای عملیه $\oplus$ تحقیق میکند. طوریکه: $a*(b\oplus c) =$ ______ میشود.

حل: (1). $\bar{x}$ ، (2). x^{-1} ، (3). $a*b \oplus a*c$ ،

1258. توضیحات چوکات مسأله 1257 فوق، با کمی تفاوت تمام نمونه ها و پاترن اشکال فوق را قبول میکند، این تفاوت فرق عبارت از این است که تنها یک عنصر آن دارای عنصر معکوس بوده نمیتواند.

بطور مثال: اگر G عبارت از Set اعداد مثبتی باشد، صفر "0" عنصر عینیت جمع "+" را در Set مثبتی نشان میدهد، حالانکه صفر "0" بنابر عملیه ضرب "·" دارای ______ نمیباشد.

حل: عنصر معکوس

1259. همین قسم: اعداد یکه بفارم و شکل: $a+b\sqrt{2}$ اند (درحالیکه a و b اعداد مثبتی میباشند) یک Commutative Group را تحت عملیه جمع "+" تشکیل میدهد. عنصر عینیت عملیه جمع "+" درین Set عبارت از: $0+0\sqrt{2}$ میباشد. اگر از Set مذکور عنصر عینیت جمع "+" را از آن کشیده شود، Set باقیمانده یک گروه تبدیلی را تحت عملیه ضرب "·" تشکیل میدهد. عنصر عینیت عملیه جمع "+" را بنابر دلیل که تحت عملیه ضرب دارای کدام ______ نیست از آن خارج میکنیم.

حل: عنصر معکوس

1260. برای اینکه G یک Set مدنظر ما دارای عین شرایط امثال فوق باشد درینصورت ما از G عنصر e را حذف میکنیم. پس درینصورت گفته میتوانیم که برای تمام عناصر G $x \in G$ در حالیکه $x \neq e$ باشد یک عنصر معکوس x که به x^{-1} نشان داده میشود تحت عملیه "*" موجود است طوریکه: ______ میشود. حضور ما متیقن نشستیم که آیا امکان وجود e در G موجود است ویا خیر؟ علل وجود این امکان را ذیلاً جستجو مینمائیم.

حل: $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 4$

1261 . ممکن بخاطر خواهید داشت ! اگر G ، یک Group بوده پس قانون اختصار طرف چپ left-hand Cancelation Law دران تحقیق پذیر است.
یا به الفاظ دیگر : اگر $x \cdot a = x \cdot b$ باشد . پس : ——— میشود .
بهمین قسم چون S یک Group میباشد ، بنابران قانون اختصار دران تحقیق پذیر بوده پس اگر : $x \oplus a = x \oplus b$ باشد
درینصورت : ——— میشود .

حل : $a = b$ ، $a = b$

1262 . ذیلاً یک قضیه را راجع به که اثبات میکنیم :
برای $\forall a \in S$: $a * z = z$ و $(z * a = z)$ میشود .

Proof:

$a * z \oplus z = a * z \ldots$ چون z عنصر عینیت $\oplus$ است پس :
$= a * (z \oplus z) \ldots$ چون $z \oplus z = z$ است :
$= a * z \oplus a * z \ldots$ اشتمال قانون توزیعی :
$a * z \oplus z = a * z \oplus a * z \ldots$ بنابران
$z = a * z \ldots$ بنابر قانون اختصار :
$z = z * a$: چون عملیه "$*$" دارای خاصیت ——— است :
$z * a = z \ldots$ ویا
Q.E.D.

حل : تبدیلی (Commutative)

1263 . از حرکات مسأله : 1262 نتیجه میشود که :
$\forall a \in S$ ما داریم : $a * z = z$
$z * a = $ ——— .
مقایسه درین مسأله با Set اعداد حقیقی تحت عملیه ضرب که بهبینید

مشابهت با: $x \cdot 0 = 0$

$0 \cdot x = 0$ را دارد.

حل: z .

1264. صحت موضوع ذیل را توجه نمائید:

(1). درصورت موجودیت z^{-1} در G ما داریم:

$$z * z^{-1} = u$$

ما قبلاً ثابت نموده ایم که برای هر $x \in S$:

$$z * x = z$$ میشود.

(2). درحالت خاص: $z * z^{-1} = z$ ثابت.

از مقایسه (1) و (2) نتیجه میشود:

$$z * z^{-1} = u$$

و از بیانیه (2) حاصل میشود که: $z = z^{-1} * z$ ثابت

که درنتیجه: $z = u$ میشود. حالانکه این عاری از حقیقت است.

Q.E.D.

V. اثبات بعضی قضایای مربوط ساحه:-

Proofs of Some Theorems of Fields

حال ما در set S تحری را که هر عنصر $x \in S$ بجز از $x = z$ تحت عملیه "*" دارای یک عنصر معکوس ثابت وارد بنمائیم. درصورتیکه ما عنصر z را ازین مستثنی نسازیم ما به مشکلات که: $u = z$ گردیده موجه میشویم. حالانکه ما میدانیم درصورتیکه $z = u$ گردد

درینصورت هر عنصر $x \in S$ عبارت از x میشود، یعنی set ما دارای محض یک عنصر میباشد که آن عبارت x است.

در مسائل پیشتر ما دیدیم در صورتیکه $u \neq x$ باشد عنصر u در set موجود شده نمیتوانند. دور ازین مباحثه ممکن بمطلب رسیده باشید: که تشکل یک ساختمان ریاضی محض با تماس یک set عناصر - وضع چند فرضیه راجع بر روابط بین عناصر set - و عملیات binary در set صورت گرفته نمیتوانند. عدم ثبات inconsistency که در یک set موجود است به آسانی درک کرده نمیشود؛ ما دیدیم که در یک set تمام خواص، که آن را بحیث یک زیر بنای تشکل یک ساختمان لست کرده بودیم، موجود نیست. (مگر اینکه حاضر شویم تا جواب های متفاوت یک مسئله را که از دو طریق مختلف بدست می آید بحیث صحیح قبولدار شویم.)

حال ما در موقف قرار داریم تا با یک ساختمان دیگر جبری که بنام ساحه ویا Field یاد میشود آشنا گردیم. ما یک Field را بجای اینکه به یک ارائه نمائیم انرا به F نشان میدهیم. یک set دارای تمام خواص اولیه که قبلاً ذکر شده اند بوده اما F یک تشکل ~~یافته~~ داشت که بران تغییرات لازمی وارد شده است.

خواص یک Field در Panel-12 درج گردیده است و بدقت انرا مطالعه نمائید.

1265 . به Panel-12 مراجعه شود، توجه کنید! خواص چندرچه آن حاوی دو صفت است که ما قبلاً راجع بان بحث نمودیم ولی

وآنعبارت اند از :

1. M_2 بیان میکند که : ———— . زیرا اگر $z = u$ باشد ، درینصورت F محض دارای ———— عنصر خواهد بود .

2. M_3 بیان میکند که ———— دارای عنصر معکوس تحت عملیه * ———— شده نمیتوانند .

حل : (1) . $u \neq z$ ، یک ، (2) . z

1266 . بمدِ نظرِ از Panel-12 درصورتیکه عملیه ⊕ از جمع معمولی "+" و عملیه * از ضرب معمولی "." نماینده گی کنند ، آیا درینصورت ست اعداد نسبتی بنابر عملیات جمع و ضرب یک Field را تشکیل داده میتوانند ویا خیر ؟

حل : بلی !

1267 . ما میدانیم که ست اعداد نسبتی که تمام خواص Field بودن را (بنابر Panel-12) تحت عملیات معمولی جمع و ضرب تحقیق میکنند . عنصر Field اعداد نسبتی (عنصر z) که خاصیت A_2 را تعقیب میکند عبارت از ———— میباشد .

حل : zero "0"

1268 . خاصیت A_3 ، Panel-12 بیان میکند : " برای هر یک $a \in F$ یک $\bar{a}$ که مال F موجود است طوریکه : $a \oplus \bar{a} = \bar{a} \oplus a = z$ میشود ". در Field اعداد نسبتی z عبارت از صفر "0" ، پس عنصر $\bar{5}$ کدام است ؟

حل :- -5

1269. در Field اعداد نسبتی عنصر u که توسط M_2 در Panel-12 تعریف شده کدام است؟

حل: 1 یا یک.

1270. در Panel-12، M_3 بیان میکند: "برای هر $a \neq 0$ یک a^{-1} در F موجود است طوریکه: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = u$ گردد." ازینکه در Field اعداد نسبتی 0 عبارت از $\underline{\quad}^{(1)}$ و u عبارت از $\underline{\quad}^{(2)}$ میباشند، توجه نمائید که 0^{-1} موجود نیست.

حل: (1). 0، (2). 1

1271. باساس خاصیت M_3، Panel-12، عنصر $(\frac{1}{3})^{-1}$ در اعداد نسبتی Field عبارت از ___ میباشد، زیرا:
u یا $1 = \_\_\_ \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \_\_\_$ میشود،

حل: 3، 3، 3

1272. S ست که شکل عمومی آن عبارت از $x+y\sqrt{2}$ است (درحالیکه x و y اعداد نسبتی اند) تحت عملیات: "+" و "*" تمام خواص یک Field را تحقیق میکند، اگر عملیه $\oplus$ از جمع معمولی "+" و عملیه "*" از ضرب معمولی نمایندگی کند، پس عنصر عینیت identity جمع که توسط A_2 تعریف شده عبارت از $0+0\sqrt{2}$ میباشد. اگر $a=3-2\sqrt{2}$ باشد، عنصر $\bar{a}$ را بدست آرید.

حل: $\bar{a} = -3+2\sqrt{2}$

1273. در حل مسایل مربوط به Group ما یک عناصر را توسط عنصر معادل آن (بدون اینکه یک سلسله عملیات دوام دار مربوط E_3 را اجرا کنیم) تعویض مینمودیم. مثال این سلسله عملیات مربوط E_3 را در ذیل ملاحظه میکنیم:

درین شاخه: F، $b*(b^{-1}*a)=a$ ثابت باشد.

Proof:

1. ∵ $b*(b^{-1}*a)=(b*b^{-1})*a$ . . . M_1 قرار
2. ∵ $(b*b^{-1})*a = u*a$ . . . . M_3 قرار
3. پس $b*(b^{-1}*a) = u*a$ . . . از (1) و (2) فوق
4. اما $u*a = a$ . . . . . M_2 قرار
5. ∴ $b*(b^{-1}*a) = a$ . . . . . از (4) و (3) فوق

Q.E.D

ما میتوانیم که ثبوت فوق را طور ذیل خلاصه کنیم:

1. ∵ $b*(b^{-1}*a)=(b*b^{-1})*a$ . . . M_1
2. پس $b*(b^{-1}*a) = u*a$ . . . M_3
3. ∴ $b*(b^{-1}*a) = a$ . . . . . $\underline{(1)}$

Q.E.D.

در مرحله (2) ما $(b*b^{-1})$ را به u یعنی $\underline{(2)}$ آن تعویض کردیم و ضمناً دلیل از اینکه $b*b^{-1}=u$ است بیان کردیم.

حل: (1) M_2، (2) معادل آن

1274. همینطور از Panel-12 دیده میشود که خاصیت B_1 به ما اجازه میدهد که به طرف چپ هر دو عضوی یک معادله عملیه ⊕ را با تدلیل عین عضو اجرا کنیم. یا بعبارت دیگر:

اگر: $a=b$ و $x \in F$ باشد، بنابر خاصیت B_1 ما توانیم بنویسیم: $x \oplus a = x \oplus b$ . . . (1)

حال ثبوت مینمایم که در Field F ، عنصر x در رابطهٔ (1) بطرف راست هر دو عضو معادله فوق (بدون آنکه کدام نقصی در سیستم وارد کند) ظاهر گردد. یا با الفاظ دیگر در یک Field F اگر $a=b$ بوده و $x \in F$ باشد ما ثبوت نمایم که $a \oplus x = b \oplus x$ میشود.

Proof:

1.	$\because$	$a=b$	Hypothesis
2.	و	$x \in F$	—
3.	و	$x \oplus a = x \oplus b$	—
4.	$\therefore$	$a \oplus x = b \oplus x$	4

Q.E.D.

حل: (2). Hypothesis ، (3). B_1

1275. B_2 بیان میکند (در Panel-12) که اگر $a=b$ باشد پس برای هر $x \in F$: $x * a = x * b$ میشود.

حال ثبوت مینمایم که اگر $a=b$ بوده و $x \in F$ باشد، پس: $a * x = b * x$ نیز حقیقت دارد.

Proof:

1.	$\because$	$a=b$, $x \in F$ . . .	—
2.	پس	$x * a = x * b$	B_2
3.	$\therefore$	$a * x = b * x$ . . .	—

Q.E.D.

حل: (1). فرضیه، (3). M_4

اگر : $a=b$ و $x \in F$ باشد، بنابر خاصیت B_1 میتوانیم بنویسیم :
$$x \oplus a = x \oplus b \quad \ldots \quad (1)$$

حال ثبوت مینمایم که در Field F ، عنصر x در رابطهٔ (1) بطرف راست هردو عضو معادله فوق (بدون آنکه کدام نقصی در شیئتم وارد کند) ظاهر گردد. یا با الفاظ دیگر در یک Field F اگر $a=b$ بوده و $x \in F$ باشد ما ثبوت مینمایم که $a \oplus x = b \oplus x$ میشود.

Proof:

1.	∴	$a=b$	Hypothesis
2.	و	$x \in F$	——
3.	و	$x \oplus a = x \oplus b$	——
4.	∴	$a \oplus x = b \oplus x$	4

Q.E.D.

حل : (2). Hypothesis ، (3). B_1

1275. B_2 بیان میکند (در Panel-12) که اگر $a=b$ باشد پس برای هر $x \in F$: $x * a = x * b$ میشود.

حال ثبوت مینمایم که اگر $a=b$ بوده و $x \in F$ باشد، پس ؛ $a * x = b * x$ نیز حقیقت دارد.

Proof:

1.	∵	$a=b$ و $x \in F$	——
2.	پس	$x * a = x * b$	B_2
3.	∴	$a * x = b * x$	——

Q.E.D.

حل : (1). فرضیه ، (3). M_4

1276. در حل مسائل مانند فوق انقدر که ما به تعقیب قوانین ترتیب ordered در گروه Group مقید بودیم در یک حد Field F انقدر به پیروی قوانین ترتیب نشستیم. چه در Groups گروه‌ها بجز از حالت خاصی که در ____ و یا ____ عملیه binary رابطه آن تبدیلی Commutative بوده در دیگر Groups گروه‌ها. به هر دو طرف چپ و راست اعضای یک معادله اجرای عملیه مجاز نیست. و یا بالفاظ ساده در گروه‌ای Groups بصورت عمومی ما افاده: $a \odot (b \odot \bar{a}^1)$ را به شکل: b ساده کرده نمیتوانیم. زیرا راه دو طرفه‌ای موجود نیست که صفر a و $\bar{a}$ را بهم نزدیک کرده و یکجا سازیم. حالانکه در حرکات مسأله 1274 خواهیم که جواب ده افاده: $a*(b*\bar{a}^1)$ عبارت از ____ میباشد.

حل: Commutative Group و یا Abelian Group، b

1277. در یک Field F ثابت بسازیم که $a*(b*\bar{a}^1) = b$ میشود.

Proof:

1. چه: $a*(b*\bar{a}^1) = a*(\bar{a}^1*b)$ . . . M_4
2. چرا: . . . . $= (a*\bar{a}^1)*b$ . . . M_1
3. چرا . . . . $= u*b$ . . . . ____
4. چرا . . . . $= b$ . . . . . . ____

$\therefore a*(b*\bar{a}^1) = b$

Q.E.D.

حل: (3). M_3 ، (4). M_2 ،

1278. ثابت کنید که در یک Field F: $a \oplus (b \oplus \bar{a}) = b$ است.

Proof:

1. ∵ $a\oplus(b\oplus\bar{a}) = a\oplus(\bar{a}\oplus b)$ . . . . A_4

2. ∵ $= (a\oplus\bar{a})\oplus b$ . . . . A_1

3. ∵ $= z\oplus b$ . . . . A_3

4. ∵ $= b$ . . . . A_2

$\therefore a\oplus(b\oplus\bar{a}) = b$

Q.E.D.

1279. در Panel-12، A_4 قانون تبدیلی Commutative law "را قرار ذیل بیان میکند: "برای $a, b \in F$ رابطهٔ: $a\oplus b = b\oplus a$ حقیقت دارد."

حل: چون $\oplus$ یک عملیه binary در F است پس برای $x, y \in F$ پس $(x\oplus y) \in F$ میشود.

پس باساس خاصیت A_4 ما میتوانیم بنویسیم: $(x\oplus y)\oplus z = z\oplus(x\oplus y)$

بهمین قسم بنابر خاصیت —— حقیقت روابط: $(x\oplus y)*z = z*(x\oplus y)$ صدق میشوند.

حل: $\underline{M_4}$

1280. در Panel-12، D بنام قانون توزیعی دست چپ عملیه $*$ بالای عملیه $\oplus$ یاد میشود، زیرا a بطرف چپ افاده مربوطش قرار دارد. یک قانون توزیعی دست راست نیز قرار ذیل افاده شده میتواند: ——————

حل: $(b\oplus c)*a = b*a \oplus c*a$

ثبوت این قضیه را در حرکات 1281 مطالعه نمائید.

1281. در یک Field F :- $(b\oplus c)*a = b*a \oplus c*a$ میشود.

قضیه اول:

در یک Field F: $(b\oplus c)*a = b*a \oplus c*a$ میباشد.

Proof:

1. $\because (b\oplus c) \in F$ C

2. و $(b\oplus c)*a = a*(b\oplus c)$ . . M_4

3. پس $= a*b \oplus a*c$ . . ———

4. و $= b*a \oplus c*a$ . . ———

$\therefore (b\oplus c)*a = b*a \oplus c*a$

Q. E. D.

حل: (3)، D، (4)، M_4

1282. بسیاری از دانشجویان به داشتن ثبوت به مشکلات مواجه میشوند علت مهم آن در اینجا است که آن ها به حقیقت عمومیت خواص که در Panel-12 لیست گردیده است پی نبرده اند. بطور مثال اصل A_4 بیان میکند:

« درصورتیکه $a, b \in F$ باشد پس: $a\oplus b = b\oplus a$ میباشد. »

توجه نمائید! که a و یا b هر عنصر Field را نشان میدهد. بعضی از دانشجویان وقتی که به افاده مانند: $(x*y)\oplus w$ درحالیکه $x, y, w \in S$ اند، مقابل میشوند، نمیدانند که آیا همین افاده A_4 مورد تطبیق قرار گرفته میتوانند و یا خیر؟! مشکلات در اینجا است که ایشان به عمق حقیقت موضوع که "$*$" یک عملیه binary در F است پی نبرده اند.

از اینکه $(x*y)$ یک عنصر F است، همان رول ای را که a در A_4 میبازد عین همان رول را $(x*y)$ در افاده فوق بازی میکند.

پس با استفاده از اصل A_4 چون $(x*y), w \in F$ است، پس ما میتوانیم بنویسیم:

$(x*y)\oplus w = w \oplus$ ——— .

حل: $(x*y)$

1283. در Panel-12 ، A_3 را داده میگیریم:

«اگر $a \in F$ باشد، پس $a \oplus \bar{a} = z$ میشود.»

حال درصورتیکه $x, y \in F$ باشد، پس $(x \oplus y)$ میشود. زیرا $\oplus$ یک عملیه binary در F است. چون $x \oplus y$ یک عنصر F است پس معکوس آن بنابر عملیهٔ $\oplus$ عبارت از $(\overline{x \oplus y})$ میباشد، درینصورت با شامل نمودن A_3 ما نوشته میتوانیم که:

$$(x \oplus y) \oplus (\overline{x \oplus y}) = \_\_\_$$

حل: z

1284*. در یک Field F ثابت کنید که $a \oplus (b \oplus \bar{a}) = b$ میشود.

زیر دو ثبوت این مسأله داده میشود:

Proof -1:

1. ∵ $a \oplus (b \oplus \bar{a}) = a \oplus (\bar{a} \oplus b)$ . . . A_4
2. ویا . . . $= (a \oplus \bar{a}) \oplus b$ . . . A_1
3. ویا . . . $= z \oplus b$ . . . A_3
4. ویا . . . $= b$ . . . A_2

$\therefore a \oplus (b \oplus \bar{a}) = b$

Q.E.D.

Proof 2:

1. ∵ $a \oplus (b \oplus \bar{a}) = (b \oplus \bar{a}) \oplus a$ . . . A_4
2. or $= b \oplus (\bar{a} \oplus a)$ . . . A_1
3. or $= b \oplus z$ . . . A_3
4. or $= b$ . . . A_2

$\therefore a \oplus (b \oplus \bar{a}) = b$

Q.E.D.

1285. ثابت کنید که در یک Field F : $(a\oplus b)\oplus(\bar a\oplus \bar b) = z$ میباشد.

حل این مسأله را از یک جا کردن a و $\bar a$ و همچنان b و $\bar b$ جستجو نمایم و ضمناً از اشتمال اصل A_1 و A_4 طبق ذیل مستفید خواهیم شد:

Proof:—

1.	$\because (a\oplus b)+(\bar a\oplus \bar b)$	$=(a\oplus b)\oplus(\bar b\oplus \bar a)$	—
2.	or	$=[(a\oplus b)\oplus \bar b]\oplus \bar a$	A_1
3.	or	$=[a\oplus(b\oplus \bar b)]\oplus \bar a$	A_1
4.	or	$=[a\oplus z]\oplus \bar a$	—
5.	or	$=a\oplus \bar a$	—
6.	or	$=z$	—

$$\therefore (a\oplus b)\oplus(\bar a\oplus \bar b)=z$$

Q.E.D.

حل: (1)·A_4 ، (4)·A_3 ، (5)·A_2 ، (6)·A_3

1286. در یک ساحه Field F ثابت کنید که: $(a*b)*(a^{-1}*b^{-1})=u$ میشود.

حل: برای ثبوت این قضیه از یک جا ساختن a و a^{-1} (آنها را پهلوی هم قرار دادن) و همچنان و از یک جا کردن b و b^{-1}، واستفاده از اشتمال اصل M_1 و M_4 طبق ذیل مستفید میشویم:

Proof:

1.	$\because (a*b)*(a^{-1}*b^{-1})$	$=(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})$	M_4
2.	or	$=[(a*b)*b^{-1}]*a^{-1}$	M_1
3.	or	$=[a*(b*b^{-1})]*a^{-1}$	M_1
4.	or	$=[a*u]*a^{-1}$	M_3
5.	or	$=a*a^{-1}$	M_2
6.	or	$=u$	M_3

$$\therefore (a*b)*(a^{-1}*b^{-1})=u$$

*1287. در یک Field F ثابت کنید که: $(a*b)*b^{-1}=a$ میشود.

Proof:

1. $\because (a*b)*b^{-1} = a*(b*b^{-1}) \quad \dots\dots M_1$
2. or $\dots\dots = a*u \quad \dots\dots M_3$
3. or $\dots\dots = a \quad \dots\dots M_2$

$\therefore (a*b)*b^{-1}=a$

Q.E.D.

*1288. در یک Field F ثابت کنید که: $(a\oplus b)\oplus\bar{b} = a$ میشود.

Proof:

1. $\because (a\oplus b)\oplus\bar{b} = a\oplus(b\oplus\bar{b}) \quad \dots\dots A_1$
2. or $\dots\dots = a\oplus u \quad \dots\dots A_3$
3. or $\dots\dots = a \quad \dots\dots A_2$

$\therefore (a\oplus b)\oplus\bar{b}=a$

Q.E.D.

1289. ثابت کنید که در یک Field F: $(a\oplus b)\oplus\bar{a} = b$ است.

Proof:

1. $\because (a\oplus b)\oplus\bar{a} = (b\oplus a)\oplus\bar{a} \quad \dots\dots A_4$
2. or $\dots\dots = b\oplus(a\oplus\bar{a}) \quad \dots\dots A_1$
3. or $\dots\dots = b\oplus u \quad \dots\dots A_3$
4. or $\dots\dots = b \quad \dots\dots A_2$

$\therefore (a\oplus b)\oplus\bar{a}=b$

Q.E.D.

1290. تذکر باید داد که بعضی قضایای بالا (قضایای ثبت شده مربوط گروه Groups (قسمت دوم)) مشکل است. چنانچه با ثبوت معلوم
در صورتیکه G یک Group باشد، و اگر $a, b, x \in G$ باشد،
در صورت وجود: $x \cdot a = x \cdot b$، رابطهٔ $a = b$ موجود میشود.
(«⋅» عملیه binary گرده است.) حال اگر ما به نشان دادن حقیقت
دیگر "F تحت عملیهٔ $\oplus$ یک Group را تشکیل میدهد" قادر گردیم،
پس درینصورت نتیجهٔ مسأله فوق الذکر در ______ F مستقیماً مورد
تطبیق واقع میشود. بهمین قسم در یک Group G اگر $a \cdot x = b$
باشد، پس $a = a^{-1} \cdot x$ میشود. این مسأله با در نظر گرفتن
تغیرات علایم در F شکل ذیل را بخود میگیرد:

اگر: $a \oplus x = b$ بوده

پس $x =$ ______ میشود.

توجه شود! که ما F را درینجا بحیث یک Group مورد مطالعه قرار دادیم
نه بحیث یک Field.

حل: $x = \bar{a} \oplus b$.

1291. ؟: Panel-12 مراجعه کرده نوت (NOTE-3) را ملاحظه کنید. دیده میشود
که اصل B_1 خاصیت جمع کردن عین عنصر را بطرف چپ هردو طرف یک معادله
مجاز میسازد. یعنی اگر: $a = b$ باشد، پس برای $x \in F$:
$x \oplus a = x \oplus b$ میشود. این حقیقت بحیث تعویض شدن
b .. در افاده: $x \oplus a$ بجای a تصور شده میتواند.
که در نتیجهٔ آن $x \oplus b$ حاصل میشود. بهمین صورت ما به
فرض نمودن Assumption حقیقت: «اگر $a = b$ باشد، پس
$a \oplus x = b \oplus x$ میشود.» ضرورت نداریم. ما این حقیقت
را بنا بر مشتق اصل A_4 طبق ذیل حاصل کرده میتوانیم:

Proof:

1. ∵ $a=b,\ x\in F$ . . . . Hypothesis
2. پس $x\oplus a = x\oplus b$ . . . . . ——
3. یا $a\oplus x = b\oplus x$ . . . . . ——

Q. E. D.

حل: (2) ، B_1 ، (3) ، A_4

1292. تطبیق اصل B_2 در یک Field طبق ذیل صورت گرفته میتواند:
در یک Field F اگر $a=b$ بوده و $x\in F$ باشد، ثابت کنید که $a*x = b*x$ میشود.

Proof:

1. ∵ $a=b,\ x\in F$ . . . . Hypothesis
2. پس $x*a = x*b$ . . . . . ——
3. یا $a*x = b*x$ . . . . . ——

حل: (2) ، B_2 ، (3) ، M_4

1293. ما میخواهیم که حالت عمومی B_1 و B_2 را مطالعه نمائیم. یعنی اگر در یک ساحه F در صورتیکه: $a=b$ و $c=d$ باشد
میخواهیم ثابت نمائیم که: $a\oplus c = b\oplus d$ بوده
و نشان دهیم: $a*c = b*d$ میشود.
بوضاحت دیده میشود که برای اثبات حقایق فوق مجبوریم که یکی از دو اصل B_1 و B_2 را دو مرتبه تطبیق نمائیم: اگر $a=b$ و $c=d$ باشد، با استفاده از تطبیق اصل B_1 حقیقت: $a\oplus c =$ ____ را در حرکات ثلاثه ذیل ثابت میکنیم.

حل: $b\oplus d$

1294- در یک Field F اگر $a=b$ و $c=d$ باشد، ثابت کنید که: $a \oplus c = b \oplus d$ میشود.

Proof:

1.	∵	$a=b$	Hypothesis
2.	پس	$c \oplus a = c \oplus b$ . . .	B_1
3.	∵	$c=d$	Hypothesis
4.	پس	$b \oplus c = b \oplus d$ . . .	—
5.	یا	$c \oplus b = b \oplus d$ . . .	—
6.	∴	$c \oplus a = b \oplus d$ . . .	با استفاده از 2 و 5 در E_3
7.	∴	$a \oplus c = b \oplus d$ . .	—

Q.E.D.

حل: (3)، Hyp، (4)، B_1، (5)، A_4، (7)، A_4

1295. قضیهٔ دوم: در یک Field F اگر $a=b$ و $c=d$ باشد، پس $a * c = b * d$ میشود.

Proof:

1.	∵	$a=b$	Hypothesis
2.	So	$c*a = c*b$	—
3.	∵	$c=d$	Hypoth.
4.	So	$b*c = b*d$	—
5.	مگر	$c*b = b*d$	M_5
6.	So	$c*a = b*d$	—
7.	∴	$a*c = b*d$	M_4

Q.E.D.

حل: (2)، B_2، (4)، B_2، (6)، E_3

1296 . قضیه ❀ ششم : در یک Field F موجودیت قانون اختصار برای $\oplus$ در صورتیکه $x\oplus a = x\oplus b$ ؛ نشان بدهید $a=b$ میباشد.

Proof:

1.	$\because$	$x\oplus a = x\oplus b \cdots\cdots$	Hypothesis
2.	$\exists$	$\bar{x}\in F,\ \ni\ \bar{x}\oplus x = x\oplus\bar{x} = z \cdots$	A_3
3.	پس	$\bar{x}\oplus(x\oplus a) = \bar{x}\oplus(x\oplus b) \cdots\cdots$	B_1
4.	پس	$(\bar{x}\oplus x)\oplus a = (\bar{x}\oplus x)\oplus b \cdots\cdots$	A_1
5.	پس	$z\oplus a = z\oplus b \cdots\cdots$	A_2
6.	$\therefore$	$a = b \cdots\cdots$	A_2

Q.E.D.

1297 . قضیه ❀ چهارم : ثابت کنید که در یک ساحه Field F
$a*z=z$ است .

Proof:

1. $(a*z)\oplus z = a*z \cdots\cdots$ A_2
2. $(a*z)\oplus z = a*(z\oplus z) \cdots\cdots$ A_2
3. $(a*z)\oplus z = (a*z)\oplus(a*z) \cdots\cdots$ ———
4. $z = a*z \cdots\cdots$ قضیه نوم
5. $\therefore\ a*z = z \cdots\cdots$ E_2

Q.E.D.

حل : (3) قانون توزیعی $*$ بالای $\oplus$

1298 . قضیه ❀ پنجم : در یک Field F اگر $a\oplus x = z$ باشد
پس $a=\bar{x}$ میشود .

Proof:

1. $\because\ a\oplus x = z \cdots\cdots$ Hypothesis

2. $\therefore \quad a \oplus \bar{a} = z$ . . . . . . —

3. also $\quad z = a \oplus \bar{a}$ . . . . . . E_2

4. $\therefore \quad a \oplus x = a \oplus \bar{a}$ . . . . . . E_3

5. $\therefore \quad x = \bar{a}$ . . . . . —

Q. E. D.

حل: (2)، A_3، (5)، قضیه نوم،

1299 اگر دقت شود دیده میشود که قضیهٔ مسأله فوق یگانه گی عنصر معکوس را ثابت میکند. پس اگر ما بخواهیم نشان دهیم که بعضی $x \in F$ $a \in F$ نظر به عملیه $\oplus$ عنصر معکوس $y \in F$ میباشد، در منصوص نشان باید دید که $y \oplus x = z$ میشود. بنابر حکم قضیهٔ نتیجه ثابت میشود که ——— میباشد.

حل: $\bar{y} = x$ ویا $x = \bar{y}$ میباشد.

1300. نشان دهید که در یک Field F: $(\bar{\bar{a}}) = a$ میشود.
یا بعبارت ساده: "a عنصر معکوس عنصر معکوس خودش نظر به $\oplus$ است."

حل: ما میدانیم: $\quad a \oplus \bar{a} = z$

وهم: $\quad (\bar{a}) \oplus (\bar{\bar{a}}) = z \qquad$ چرا؟

ویا $\quad a \oplus \bar{a} = \bar{a} \oplus (\bar{\bar{a}}) \qquad$ چرا؟

ویا $\quad a \oplus \bar{a} = (\bar{\bar{a}}) \oplus \bar{a} \qquad$ چرا؟

درنتیجه: $\quad a = (\bar{\bar{a}}) \qquad$ چرا؟

Q. E. D.

ویا اینکه Proof: (1). $\bar{a} \oplus a = z$ . . . A_3

(2). $\therefore \quad a = (\bar{\bar{a}})$ . . —

Q. E. D.

حل: (2)، قضیه 5.

1301. قضیه ششم :- در یک Field F ثابت میکنیم که: $\overline{(x*y)} = x*\bar{y}$ میباشد. (برای اینکه نشان دهیم که $x*\bar{y}$ معکوس $(x*y)$ نظر به عملیه $\oplus$ میباشد باید نشان دهیم که: $(x*\bar{y})\oplus(x*y)=z$ است.

Proof:

1. $\because (x*y)\oplus(x*\bar{y}) = x*(y\oplus\bar{y})$ . . . D
2. پس $(x*y)\oplus(x*\bar{y}) = x*z$ . . . . . . A_3
3. پس $(x*y)\oplus(x*\bar{y}) = z$ . . . . . . ـــ
4. $\therefore$ . . . $x*\bar{y} = \overline{(x*y)}$ . . . . ـــ

Q.E.D.

حل: (3)، قضیه 4، (4)، قضیه 5

1302. ثابت کنید که در یک Field F، $\overline{(x*y)} = \bar{x}*y$ است.

Proof:

1. $\because$ $(x*y)\oplus(\bar{x}*y) = (x\oplus\bar{x})*y$ قضیه اول
2. و . . . . . . $= z*y$ . . . A_3
3. و . . . . . . $= z$ . . . قضیه چارم
4. $\therefore$ . . . $\bar{x}*y = \overline{(x*y)}$ . . . قضیه پنجم

Q.E.D.

1303. یک شکل مخصوص را که Field اعداد حقیقی است تحت دو عملیه جمع معمولی "+" و ضرب معمولی "." بوجود می آورد، در صورتیکه $\oplus$ به "+" و $*$ به "." تعویض گردد. در صورت هر عدد "a" را نشان داده و $\bar{a}$ عنصر $(-a)$ ارائه میکند. حال قضایا را ثابت شده

ثابت شدهٔ فوق را در نظر بگیرید: بطور مثال، قضیه چهارم بیان میکند:- "اگر $a \in F$ باشد، پس $a * z = z$ میشود." اگر این قضیه را در set اعداد حقیقی Reals (با در نظر گرفتن عملیات جمع و ضرب طوریکه قبلاً بآن اشاره شده) تطبیق نمائیم، چنین افاده شده میتوانند: "اگر a یک عدد حقیقی باشد پس درینصورت: $a \cdot 0 =$ ___ میشود."

حل: ٠

1304 • قضیه پنجم مربوط Fields وضاحت میکند: "اگر $a \oplus x = z$ باشد پس $x = \bar{a}$ میشود." حالانکه تطبیق این قضیه در set اعداد حقیقی Reals چنین میشود: "اگر x یک عدد حقیقی Real باشد و درصورتیکه: $a + x = 0$ باشد، پس $x =$ ___ میباشد."

حل: $-a$

1305 . ما در یک Field F ثابت نمودیم که $\bar{(\bar{a})} = a$ است. معادل این حقیقت در set اعداد حقیقی $-(-a) =$ ___ میباشد.

حل: a.

1306 . در یک ساحه F (Field) حقیقت که: $\bar{(x * y)} = \bar{x} * y$ را ثابت نمودیم. حالانکه تعبیر این حقیقت در set اعداد حقیقی عبارت از $-(x \cdot y) =$ ___ میباشد.

حل: $(-x) \cdot y$

تبصره : ما درحقیقت یکعده خواص اعداد حقیقی Real Numbers را که حقیقی بودن این خواص تا حال بدون ثبوت قبول کرده بودیم ثابت نمودیم. با همچنین که یکعده حقایق دیگر مانند فوق را با اثبات برسانیم. بخاطر باید داشت که قضایای ثابت شده فوق الذکر به هر سټ ای که خواص دسته ضمایم یک ساحه Field را دارا باشد قابل تطبیق و قابل تحقیق اند. یعنی هر سټ ای که تمام خواص مربوطه Panel-12 را تعقیب کند قضایای فوق بآن سټ تطبیق شده میتوانند.

1307 . قضیهٔ هفتم : قانون اختصار (ربطی) "*".

در یک Field F اگر $x*a=x*b$ باشد درصورتیکه $x \neq z$ باشد، پس $a=b$ است.

Proof:

1. $\because$ $x \neq z$ . . . Hypothesis
2. لهذا $\exists\ x^{-1} \in F$ . . . M_3
3. $\because$ $x*a=x*b$ . . . Hypoth.
4. پس $x^{-1}*(x*a)=x^{-1}*(x*b)$ . . . ——
5. دیا $(x^{-1}*x)*a=(x^{-1}*x)*b$ . . . ——
6. or $u*a=u*b$ . . . ——
7. $\therefore$ $a=b$ . . . ——

Q.E.D.

حل : (3). B_2 ، (4). M_1 ، (5). M_3 ، (6). M_2

1308 . قضیهٔ هشتم : در یک ساحه (Field) F اگر $a*x=u$ باشد، درصورتیکه $x \neq z$ بوده باشد، پس $x=a^{-1}$ میباشد.

Proof:

1. $\because \; a*x = u$ . . . . مفروض
2. $\exists \; a^{-1} \in F$ . . . . M_3
3. $\therefore \; a^{-1}*(a*x) = a^{-1}*u$ . . . ——
4. $\therefore \; (a^{-1}*a)*x = a^{-1}*u$ . . . ——
5. $\therefore \; u*x = a^{-1}*u$ . . . ——
6. $\therefore \; x = a^{-1}$ . . . . . ——

Q.E.D.

حل: (3) B_2 ، (4) M_1 ، (5) M_3 ، (6) M_2

1309 . قضیه هشتم فوق یگانه گی Uniqueness عنصر معکوس را یک عنصر $a \in F$ را تحت عملیه «*» inverse ثابت میکند. پس اگر ما بخواهیم که برای بعضی x رابطه: $x = y^{-1}$ را ثابت نمائیم، در اینصورت ما فقط به ثابت دادن رابطه: $y*x = u$ ضرورت داریم، و بنابر نتیجه قضیه هشتم فوق $x =$ —— میباشد.

حل: y^{-1}

1310 . در یک Field F درصورتیکه $x \neq z$ باشد ثابت کنید که: $(x^{-1})^{-1} = x$ میشود.

Proof:

1. $\because \; x \neq z$ . . . . . . مفروض
2. $\therefore \; x*x^{-1} = u$ . . . . M_3
3. چگونه $x^{-1}*x = u$ . . . M_4
4. $\therefore \; x = (x^{-1})^{-1}$ . . . . قضیه هشتم

1311. قضیه هشتم: در یک Field F درصورتیکه $x \neq z$ بوده و $x * y = z$ باشد، پس $y = z$ میباشد.

Proof:

1.	$\because$	$x*y = z$	Hypoth.
2.	$\because$	$x \neq z$	Hypoth.
3.	so	$\exists\ x^{-1} \in F$	M_3
4.	so	$x^{-1}*(x*y) = x^{-1}*z$ . .	B_2
5.	or	$(x^{-1}*x)*y = x^{-1}*z$ . .	—
6.	so	$u*y = x^{-1}*z$ . .	—
7.	or	$y = x^{-1}*z$ . . .	—
8.	$\therefore$	$y = z$	—

Q.E.D.

حل: (5)، M_1، (6)، M_3، (7)، M_2، (8) قضیه هفتم.

1312. نتیجه قضیه نهم: "در یک Field F اگر $x*y = z$ باشد پس یا $x = z$ و یا $y = z$ میباشد." با در اعداد حقیقی Reals درصورتیکه عملیه "*" از Field F از ضرب و عنصر z در آن از 0 (zero) نماینده گی کند طبق ذیل تطبیق شده میتواند: درصورتیکه $x \cdot y = 0$ باشد یا — = — بوده و یا: — = — میباشد.

حل: $x = 0$ ، $y = 0$

1313. قضیه دهم: در یک ساحه F:
$\bar{u} * \bar{u} = u$ میشود.

Proof:

1. $\because \quad \bar{u} * (z) = z$ . . . . . قضیهٔ نهم
2. $\bar{u} * (u \oplus \bar{u}) = z$ . . . . A_3
3. $\bar{u} * u \oplus \bar{u} * \bar{u} = z$ . . . . —
4. $\bar{u} \oplus \bar{u} * \bar{u} = z$ . . . . —
5. $u \oplus (\bar{u} \oplus \bar{u} * \bar{u}) = u \oplus z$ . . . —
6. $(u \oplus \bar{u}) \oplus \bar{u} * \bar{u} = u \oplus z$ . . A_1
7. $z \oplus \bar{u} * \bar{u} = u + z$ . . . . A_3
8. $z \oplus \bar{u} * \bar{u} = z + u$ . . A_4
9. $\therefore \quad \bar{u} * \bar{u} = u$ . . A_2 و 3 قضیه

Q.E.D.

حل: (3). D، (4). M_2، (5). B_1 :

1314. بطبیق قضیه فوق (دهم) در Field اعداد حقیقی درصورتیکه «*» عملیه ضرب معمولی «·» را و $\bar{u}$ عدد 1- و u عدد 1 را ارائه کنند، عبارت از ــــــ میباشد.

حل: $(-1)\cdot(-1)=1$ میباشد

1315. قضیه یازدهم: در یک Field F:

$a * \bar{u} = \bar{a}$ میباشد.

Proof:

1. $\because \; a \oplus a * \bar{u} = a * u \oplus a * \bar{u}$ . . . M_2
2. $a \oplus a * \bar{u} = a * (u \oplus \bar{u})$ . . . D
3. $a \oplus a * \bar{u} = a * z$ . . . . —
4. $a \oplus a * \bar{u} = z$ . . . . . —
5. $\therefore \; a * \bar{u} = \bar{a}$ . . . . . —

حل: (3)، A_3، (4)، قضیه سوم، (5)، قضیه پنجم

1316. بنا بر تطبیق قضیه یازدهم در Field اعداد حقیقی ما داریم:

حل: در Field اعداد حقیقی: $a \cdot (-1) = -a$ میشود.

1317. قضیه دوازدهم: در یک Field: $\bar{x} * \bar{y} = x * y$ میباشد.

Proof:

1. $\because \bar{x} = x * \bar{u}, \quad \bar{y} = y * \bar{u}$	...	قضیه 11
2. $\bar{x} * \bar{y} = (x * \bar{u}) * (y * \bar{u})$	...	قضیه 2
3. $\bar{x} * \bar{y} = (x * \bar{u}) * (\bar{u} * y)$	...	—
4. $\bar{x} * \bar{y} = x * (\bar{u} * \bar{u}) * y$	...	—
5. $\bar{x} * \bar{y} = x * u * y$	...	—
6. $\therefore \bar{x} * \bar{y} = x * y$	...	—

Q.E.D.

حل: (3)، M_4، (4)، M_1، (5)، قضیه 10، (6)، M_2

1318. تطبیق قضیه 12 در Field اعداد حقیقی عبارت است از:

حل: $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

1319. ما میخواهیم حقیقی را که: $a * x \oplus b = z$ در Field اعداد حقیقی دارای یک حل: $x = \bar{a}^{1} * \bar{b}$ است (در صورتیکه $a \neq z$ است) ثابت کنیم. برای حل این مسئله ما باید دو چیز را باثبات برسانیم:

(1). اگر: $a*x\oplus b=z$ بوده درحالیکه $a\neq z$ باشد، پس $x=a^{-1}*\bar{b}$ میگردد.

(2). اگر $x=a^{-1}*\bar{b}$ حل درست معادله باشد، پس معادله مذکور عبارت از: ______ میباشد، یعنی حل معادله مذکور تنها و unique است.

حل: $a*x\oplus b=z$

1320. قضیه سیزدهم: در یک ساحه Field F: معادله: $a*x\oplus b=z$ درحالیکه $a\neq z$ است، دارای یک حل تنها: $x=a^{-1}*\bar{b}$ میباشد.

Proof (Part A):

در قسمت A: اگر $a*x\oplus b=z$ درحالیکه $a\neq z$ باشد، ثابت نمایم که، $x=a^{-1}*\bar{b}$ میباشد.

1. $\because a*x\oplus b=z$ . . . . . . مفروض
2. $b\oplus a*x=z$ . . . . . . ____
3. $b\in F$ . . . . ____
4. $\bar{b}\oplus(b\oplus a*x)=\bar{b}\oplus z$ . . ____
5. $(\bar{b}\oplus b)\oplus a*x=\bar{b}\oplus z$ . . ____
6. $z\oplus a*x=\bar{b}\oplus z$ . . ____
7. $a*x=\bar{b}$ . . . . ____
8. $\because a\neq z$ . . . . Hypothesis
9. $\therefore a^{-1}\in F$ . . . . ____
10. $a^{-1}*(a*x)=a^{-1}*\bar{b}$ . . ____
11. $(a^{-1}*a)*x=a^{-1}*\bar{b}$ . . ____
12. $u*x=a^{-1}*\bar{b}$ . . ____
13. $\therefore x=a^{-1}*\bar{b}$ . . . . ____

Q.E.D.

حل: (2) A_4، (3) A_3، (4) B_1، (5) A_1، (6) A_3، (7) A_2

ادامه حل: $M_3(9)$ ، $B_2(10)$ ، $M_1(11)$ ، $M_3(12)$ ، $M_2(13)$

پس ما در یک Field ثابت نمودیم حقیقی را که اگر معادله: $a*x\oplus b=z$

در حالیکه $a\neq z$ باشد دارای کدام حل باشد عبارت از $x=\bar{a}^1*\bar{b}$ میباشد.

1321. قضیه سیزده قسمت (B)

در یک Field F حل معادله: $a*x\oplus b=z$ در حالیکه $a\neq z$ است.

معادله مذکور دارای حل یگانه unique : $x=\bar{a}^1*\bar{b}$ میباشد.

در قسمت B ثابت میسازیم اگر $a\neq z$ بوده و $x=\bar{a}^1*\bar{b}$ باشد، پس $a*x\oplus b=z$ میباشد.

Proof:

1. $\because\ x=\bar{a}^1*\bar{b}$ . . . . . . Hypothesis
2. $a*x=a*(\bar{a}^1*\bar{b})$ . . . . . . —
3. $a*x=(a*\bar{a}^1)*\bar{b}$ . . . . . . —
4. $a*x=u*\bar{b}$ . . . . . . —
5. $a*x=\bar{b}$ . . . . . . —
6. $b\oplus(a*x)=\bar{b}\oplus b$ . . . . . . —
7. $(a*x)\oplus b=b\oplus\bar{b}$ . . . . . . —
8. $\therefore\ a*x\oplus b=z$ . . . . . . —

لذا معادله: $a*x\oplus b=z$ تحت سوال یک

حل: $x=\bar{a}^1*\bar{b}$ میباشد.

Q.E.D.

حل: $B_2(2)$ $M_1(3)$ $M_3(4)$ $M_2(5)$

$B_1(6)$ $A_4(7)$ $A_3(8)$

VI: امتحان و تکرار قسمت چهارم

Review Test for Part Four

۱. ثابت کنید که در یک Field: $(a*b)*(a^{-1}*b^{-1}) = u$.

2. شرایط را که تحت آن یک رابطهٔ binary، R یک رابطهٔ متعادل equivalence rel. شده میتوانند نام بگیرید.

3. فرضاً R یک set پرمیوتیشن های permutations درجه 5 باشد، اگر: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$ عنصر عینیت set R تحت عملیهٔ ضرب پرمیوتیشن ها permutation multiplication باشد، عنصر معکوس پرمیوتیشن: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$ را بدست آرید.

4. مقررات که یک set N را یک Field وانمود میکند بیان کنید.

5. اگر یک set S تحت عملیهٔ "*" یک Commutative Group را بوجود بیاورد، پس درینصورت ضرور است که قانون تبدیلی Commutative law را تعقیب کند یا بعبارت دیگر برای $\forall a,b \in S$ باید ______ باشد. به همین قسم باید که set S تحت عملیهٔ * قانون اتحادی یعنی Associative law را تعقیب نماید. یا بالفاظ دیگر برای $\forall a,b,c \in S$ باید که رابطهٔ: ______ وجود حقیقت داشته باشد.

6. قانون توزیعی distributive Law عملیهٔ ضرب "·" بالای عملیهٔ جمع "+" در یک set S (اعداد حقیقی) چنین توضیح شده میتواند که برای $\forall x,y,z \in S$ باید داشته باشیم که: ______ .

7. در یک Field F در حالیکه "·" عملیهٔ ضرب و "+" عملیهٔ جمع را نشان دهد ثابت کنید که: $\overline{(x\cdot y)} = y\cdot\bar{x}$ میباشد.

8. اگر F یک Field که دارای رابطهٔ معادل و یا equivalence relation ؛ "=" بوده و ضمناً دارای دو عملیه binary : جمع "+" و ضرب "•" باشد، علاوه بران 0 عنصر عینیت F و $-x$ عنصر معکوس یک عنصر x، که در set تحت عملیه "+" باشد، درصورتیکه عنصر عینیت identity عملیه ضرب "•" عبارت از 1 و عنصر معکوس یک $x \in$ تحت عملیه ضرب "•" عبارت از x^{-1} باشد، ثابت کنید درصورتیکه اگر $x+y = x+z$ باشد، پس $y = z$ میباشد.

9. فرضاً S عبارت از set rationals مثبتی باشد، دو عملیه binary را در S با نشان:
$a \oplus b = a^2 + b^2$
و $a * b = ab + 4a^2 + 4b^2$ تعریف کنید.
آیا S یک Field را با شامل نمودن عملیه ⊕ و * تشکیل داده میتوانند؟ چرا؟ ثابت کنید.

10. فرضاً S عبارت از set rationals مثبتی بوده دو عملیهٔ ⊕ و * را در S طوری binary :
$a \oplus b = a + b + 5$
$a * b = ab + 3a + 3b + b$ تعریف کنید،
(1). ثابت کنید که عملیهٔ ⊕ تبدیلی commutative است.
(2). ثابت کنید که عملیهٔ * تبدیلی commutative است.

ضمیمه A: یک رابطهٔ معادل دلخواه

Appendix A AN ARBITRARY EQUIVALENCE RELATION

یک مثال یک رابطهٔ معادل equivalence relation دلخواه عبارت از یک عملیهٔ binary ای که در یک دوره (دیا سرکت Circuit) که خوب تعریف well defined نباشد، میباشد.

. A1 فرضاً $S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ دار اجتماع $(a,b)*(c,d)$ جوره (a,c) حاصل شود، یا بعبارهٔ دیگر، (a,c) عبارت از اجتماع : $(a,b)*(c,d)$ باشد. جدول ضرب عملیه "*" قرار ذیل است:

*	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)
(1,2)				
(2,1)				
(2,2)				

جدول فوق را تکمیل کنید. آیا * یک عملیهٔ binary در S میباشد؟

حل: برای جواب به Panel-5 مراجعه شود، بلی.

. A2 به Panel-5 مشاهده کنید. یک رابطهٔ binary در S تعین

طبق حقایق صورت شده است: $(a,b)R(c,d)$ میشود، در صورتیکه اگر و اگر $a\cdot d=b\cdot c$ باشد، بطور مثال $(1,1)R(2,2)$ است زیرا $1\cdot 2=2\cdot 1$ میشود. لذا $(1,1)\not R(1,2)$ میباشد، زیراکه: $1\cdot 2\neq 1\cdot 1$ است. آیا گفته میتوانید که کدام خاصیت R در ماده اول (item-1) Panel-5 ثابت شده است؟

حل: انعکاسی ویا Reflexive.

A3 • کدام خاصیت R در ماده دوم Panel-5 به اثبات رسیده است؟

A4 • کدام خاصیت R در ماده سوم Panel-5 باثبات رسیده است؟

حل: A3 تناظری symmetric، A4 انتقالی transitive

A5 • چون R دارای خواص انعکاسی، تناظری وانتقالی است، پس ——— میباشد.

حل: یک رابطهٔ معادل equivalence relation

A6 • صنوف معادل equivalence classes، S را برای رابطهٔ معادل R تعیین کنید.

حل: $S_1=\{(1,1),(2,2)\}$, $S_2=\{(1,2)\}$, $S_3=\{(2,1)\}$

A7 • قرار تعریف R، رابطهٔ $(1,1)R(2,2)$ را با شامل علامه رابطهٔ متعادل: $(2,2)$ به $(1,1)$ ارائه کرده میتوانیم، که این افادهٔ "$(1,1)$ معادل به $(2,2)$ است" را بیان میکند. بجدول ضرب عملیه * نگاه کنید:

$(1,1)*(2,1)=(1,2)$

$(2,2)*(2,1)=(2,2)$

لذا: $(1,2)$ معادل به $(2,2)$ نمیباشد.

به این قسمت جواب داده نمیشود.

ضمیمه B : بعضی خواص مهمی عملیات اتحاد و تقاطع بر سِت ها

Appendix B: Some Important Properties of The Union & Intersection Operations on Sets

اگر A ، B ، C ، A' و B' ست های که عناصر را ارائه کنند، درنتیجه عملیات اتحاد "∪" و تقاطع "∩" در ست های مذکور دارای خواص ذیل اند:

Commutative:

1. $A \cup B = B \cup A$ . . . . . خاصیت تبدیلی "∪" Commutativity
2. $A \cap B = B \cap A$ . . . . . خاصیت تبدیلی "∩" Commutativity

Associative:

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ . . . . خاصیت انجمنی "∪" Associativity
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ . . . . خاصیت انجمنی "∩" Associativity

Distributives:

5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . . . توزیعی عملیه ∩ بالای عملیه ∪ .
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . . . توزیعی عملیه ∪ بالای عملیه ∩ .

De Morgan's Laws:

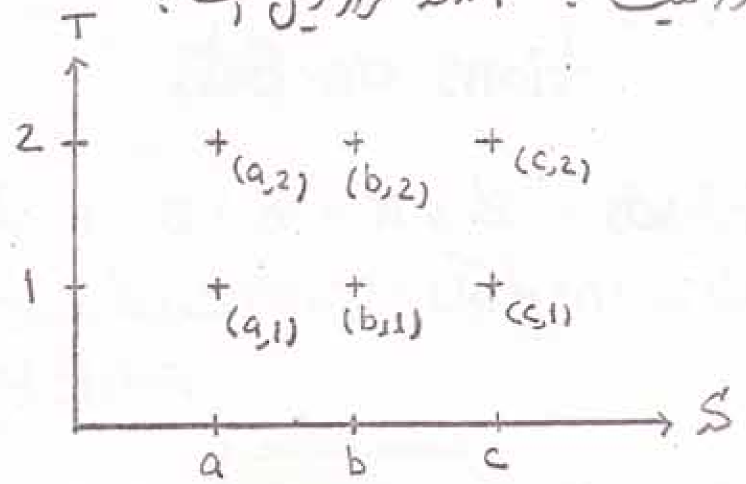
7. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
8. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

قوانین دیمورگن De Morgan's Laws

جدول مندرجات : PANELS

جدول مندرجه اوّل : Panel - 1

فرضاً $S=\{a,b,c\}$ و $T=\{1,2\}$ باشد،
پس $S\times T=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$ میشود.
ارائه گرافیک $S\times T$ قرار ذیل است :



هر یک از subset های $S\times T$ یک رابطهٔ binary در S است. بنابران 2^6 یا 64 روابط متمایز binary در S موجود شده میتوانند که بعضی ان ها قرار ذیل است :

$R_1=\varphi$

$R_2=\{(a,2)\}$

$R_3=\{(a,1),(b,2)\}$

$R_4=\{(a,1),(a,2),(c,1)\}$

$R_5=\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$

$R_6=\{(b,2)\}$

$R_7=\{(a,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

$R_8=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}=S\times T$

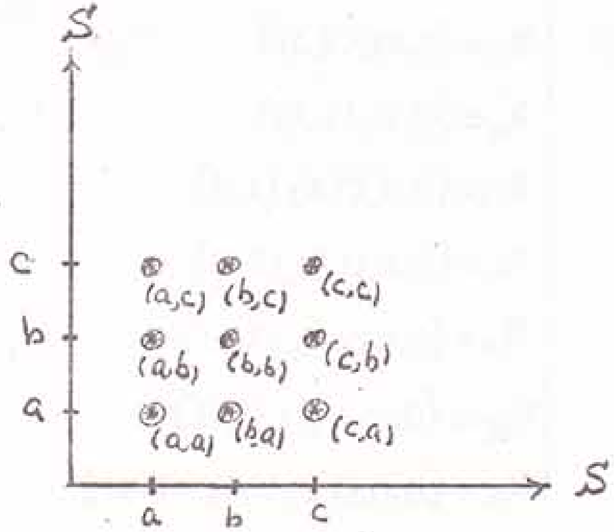
$R_9=\{(a,1),(b,1),(b,2),(c,1)\}$

Panel _ 2　　　جدول مندرجه دوم :

فرضاً $S=\{a, b, c\}$ باشد، پس :

$$S\times S=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

شکل گرافیک آن :



هرکدام subset . $S\times S$ یک رابطه دوگانه ای یا binary relation را در S تشکیل میدهد . ودرینصورت 2^9 روابط binary متمایز در S موجود شده میتوانند ، که بعضی ازانها قرار ذیل است :

$R_1=\{(b,c),(c,b),(b,b),(c,c)\}$

$R_2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$

$R_3=\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,a),(c,c)\}$

$R_4=\{(a,a),(a,c),(b,b),(c,b),(c,c)\}$

$R_5=\{(a,b),(b,a)\}$

$R_6=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$

$R_7=\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,a),(b,c),(c,c),(c,b)\}$

$R_8=\{(a,b),(b,c),(c,c)\}$

Penel - 3

جدول مندرجه سوم

فضا $S=\{1,2\}$ باشد پس: $S\times S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

هرکدام یک از subset، $S\times S$ یک رابطهٔ binary را در S بوجود می آورد.
درینصورت شانزده روابط binary متمایز در S طبق ذیل بوجود می آیند:

$R_1 = \Phi$

$R_2 = \{(1,1)\}$

$R_3 = \{(1,2)\}$

$R_4 = \{(2,1)\}$

$R_5 = \{(2,2)\}$

$R_6 = \{(1,1),(1,2)\}$

$R_7 = \{(1,1),(2,1)\}$

$R_8 = \{(1,1),(2,2)\}$

$R_9 = \{(1,2),(2,1)\}$

$R_{10} = \{(1,2),(2,2)\}$

$R_{11} = \{(2,1),(2,2)\}$

$R_{12} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

$R_{13} = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

$R_{14} = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$

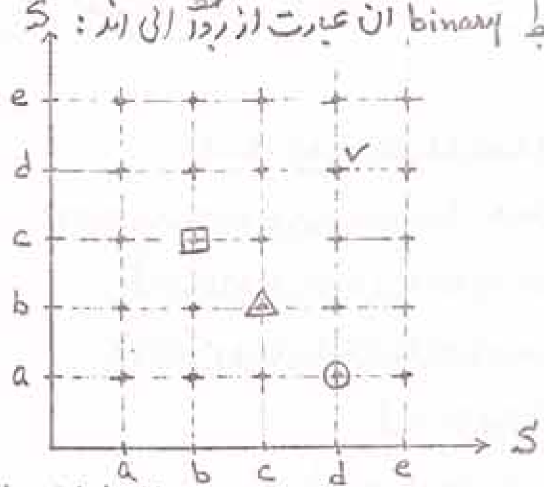
$R_{15} = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$R_{16} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

Penel - 4

جدول مندرجه چهارم

اگر: $S=\{a,b,c,d\}$ باشد، شکل گرافیک آن قرار ذیل بوده
وبعضی از روابط binary آن عبارت از روابط آتی اند:



$R_1 = \Phi$

$R_2 = S\times S$

$R_3 = \{(b,c),(c,b),(d,a),(d,d),$

$R_4 = \{(a,a),(c,d)\}$

$R_5 = \{(a,a),(a,d),(d,a),(d,d)\}$

$R_6 = \{(a,a),(b,b),(b,e),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d),(e,b),(e,e)\}$

$R_7 = \{(a,b),(b,b),(c,a),(d,e),(e,a)\}$

جدول مندرجهٔ پنجم: Panel-5

فرضاً: $S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ که باشد،

*	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)
(1,2)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)
(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)
(2,2)	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)

رابطهٔ $(a,b)R(c,d)$ موجود میشود

درصورتیکه اگر و اگر $ad=bc$ باشد.

1. اگر $(a,b)\in S$ باشد،

پس $(a,b)R(a,b)$ میشود،

زیرا $ab=ba$ است.

2. اگر $(a,b)R(c,d)$ باشد، پس: $ad=bc$ بوده، لهذا $bc=ad$ گردیده

وبهمین قسم: $cb=da$ گردیده و درنتیجه :- $(c,d)\ R(a,b)$ موجود میشود.

3. اگر $(a,b)R(c,d)$ و $(c,d)R(e,f)$ باشد.

پس: $ac=bd$ و $cf=de$ میشود،

بنابران: $(ad)f=(bc)f$ وهمچنان: $b(cf)=b(de)$:

یا: $adf=bde$ و $af=be$ گردیده،

ودرنتیجه: $(a,b)R(e,f)$ میشود.

جدول مندرجهٔ ششم: Panel-6

اگر set $S=\{1,2,3,4\}$ که باشد، درینصورت بیست وچهار پرمیوتیشن های مربوط آن قرار ذیل اند:

$R_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$, $R_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$,

$R_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$, $R_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$, $R_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$,

$R_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$, $R_8=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$, $R_9=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$,

$R_{10}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$, $R_{11}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$, $R_{12}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$,

$R_{13}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$, $R_{14}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$, $R_{15}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$,

$R_{16}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$, $R_{17}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$, $R_{18}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$,

$R_{19}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, $R_{20}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$, $R_{21}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$,

$R_{22}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$, $R_{23}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$, $R_{24}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$.

جدول مندرجه، هفتم : Panel-7

فرضاً :- $S=\{1,2,3\}$ باشد ، در نصورت شش پرمیوتیشن های S ، permutations S عبارت اند از :

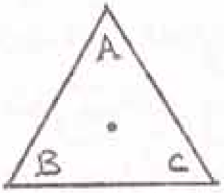
$$a=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\quad c=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$d=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\quad e=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\quad f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

جدول ضرب این پرمیوتیشن های که قرار ذیل است :

$\cdot$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	e	f	d
c	c	a	b	f	d	e
d	d	f	e	a	c	b
e	e	d	f	b	a	c
f	f	e	d	c	b	a

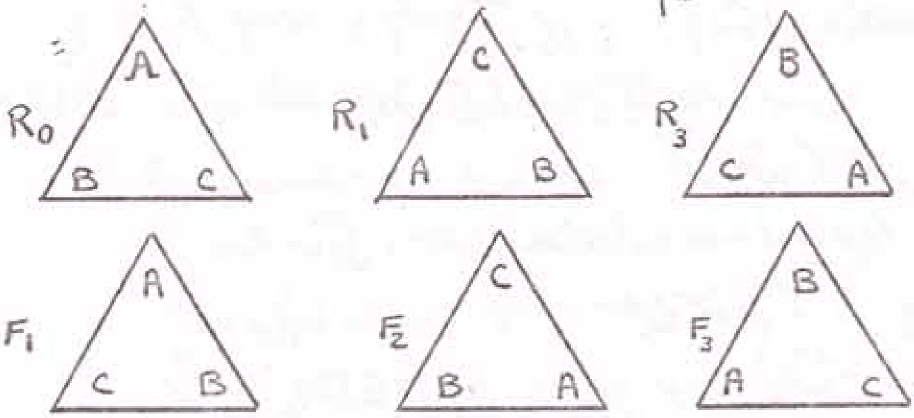
جدول مندرجهٔ هشتم : Panel - 8



اگر در مثلث متساوی الاضلاع ABC مفروض :
اگر :

R_0 = یک دوران خلاف گردش ساعت به اندازهٔ : 0° ،
R_1 = یک دوران خلاف گردش ساعت به اندازهٔ : 120° ،
R_2 = یک دوران خلاف گردش ساعت به اندازهٔ : 240° ،
F_1 = یک چپه شدن به اطراف ارتفاع رأس فوقانی مثلث ،
F_2 = یک چپه شدن به اطراف ارتفاع رأس تحتانی طرف چپ آن ،
F_3 = یک چپه شدن به اطراف ارتفاع رأس تحتانی طرف راست آن ،

باشند ، پس درینصورت ما داریم :



جدول مندرجهٔ نهم : Panel - 9

•	R_0	R_1	R_2	F_1	F_2	F_3
R_0	R_0	R_1	R_2	F_1	F_2	F_3
R_1	R_1	R_2	R_0	F_2	F_3	F_1
R_2	R_2	R_0	R_1	F_3	F_1	F_2
F_1	F_1	F_3	F_2	R_0	R_2	R_1
F_2	F_2	F_1	F_3	R_1	R_0	R_2
F_3	F_3	F_2	F_1	R_2	R_1	R_0

Panel-10   جدول مندرجهٔ دهم

اگر G یک set ای که دارای رابطهٔ معادل : "=" خوب تعریف شده Well-defined و دارای یک عملیهٔ binary : "*" باشد طوریکه :

G1 : برای $\forall x,y,z\in G$ رابطهٔ : $(x*y)*z=x*(y*z)$ در G حقیقت داشته باشد ،

G2 : یک عنصر عینیت identity : "e" تحت عملیهٔ "*" در G موجود باشد ،

G3 : هر عنصر $x\in G$ دارای یک عنصر معکوس $x^{-1}\in G$ تحت عملیهٔ "*" باشد ،

پس درینصورت G یک Group را تحت عملیهٔ "*" تشکیل میدهد .

Note-1 : یک رابطهٔ معادل (که به : = ارائه گردیده) بر یک set S دارای سه خاصیت ذیل میباشد :

E_1 : برای $\forall x\in S$: $x=x$ (Reflexive انعکاسی) میباشد .

E_2 : اگر $x=y$ باشد، پس $y=x$ (Symmetric تناظری) میباشد .

E_3 : اگر $x=y$ و $y=z$ باشند، پس $x=z$ (Transitive انتقالی) میباشد .

Note-2 : در یک set مفروض S که دارای یک رابطهٔ معادل "=" و یک عملیهٔ binary : "*" بوده باشد، گفته میشود که عملیهٔ "*" برکد بنابر رابطهٔ معادل : "=" equivalence relation : خوب تعریف شده "Well-defined" است، به این مفهوم که اگر $x=y$ باشد پس برای $\forall a\in S,(G)$ روابط ذیل موجود وحقیقت باشند :

$$a*x=a*y \quad : B_1$$
$$x*a=y*a \quad : B_2$$

توجه نمائید اجرای ترتیب درینجا مهم است . باید که اجرای عملیه یا به هردو طرف چپ اعضای مساوات - ویا به هردو طرف راست اعضای معادله صورت بگیرد .

تعریف 1 : یک عملیهٔ binary : "*" در یک set S مفروض داده شده ، e عنصر عینیت identity . set S را تحت عملیهٔ "*" بوجود می آورد درصورتیکه :

$x*e=e*x=x$ ، $\forall x\in S$ موجود گردد .

تعریف 2 : یک عملیهٔ binary "*" و یک عنصر عینیت e بنابر "*" در یک set S مفروض است ، عنصر معکوس یک عنصر $x\in S$ عبارت از عنصر $x^{-1}\in S$ است درصورتیکه رابطه : $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$ در S موجود گردد .

Panel - 11 جدول مندرجه یازدهم :

Theorem-1: قضیه اول :

دریک Group اگر $a=b$ و $c=d$ باشد،
پس : $a*c=b*d$ میباشد.

Theorem-2: قضیه دوم :

قانون اختصار طرف چپ در Group "Left Cancelation Law"

دریک Group اگر $x*y=x*z$ باشد،
پس $y=z$ میباشد.

Theorem-3: قضیه سوم :

قانون اختصار طرف راست "Right Cancelation law"

دریک Group اگر: $y*x=z*x$ باشد،
پس $y=z$ میباشد.

Theorem-4: قضیه چهارم :

دریک Group اگر $a=b$ باشد،
پس $a^{-1}=b^{-1}$ میباشد.

Theorem-5: قضیه پنجم :

دریک Group معادله : $a*x=b$ دارای یک حل یگانه
بوده و آن عبارت از: $x=a^{-1}*b$ میباشد.

Theorem-6: قضیه ششم :

دریک Group معادله : $y*a=b$ دارای یک حل یگانه
بوده و آن عبارت از: $y=b*a^{-1}$ میباشد.

جدول مندرجه دوازدهم: Panel - 12

یک Field F عبارت از یک set عناصر است که دارای یک رابطهٔ معادل ("=") و دارای دو عملیه binary خوب تعریف شده: ⊕ و * باشد، پس در صورتیکه $a, b, c \in F$ باشند، ما داریم:

تحت ⊕ F یک Group تبدیلی است

A_1: (انجمنی)

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$

A_2: (وجود عنصر عینیت)

$$\exists\, z \in F, \ni \forall a \in F: \quad a \oplus z = z \oplus a = a$$

A_3: (عنصر معکوس)

$$\forall a \in F, \exists\, \bar{a} \in F \ni: \quad a \oplus \bar{a} = \bar{a} \oplus a = z$$

A_4: (تبدیلی):

$$a \oplus b = b \oplus a$$

تحت * بجز از z، F یک گروه تبدیلی است.

M_1: (Associativ)

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

M_2: (Identity Element)

$$\exists\, u \in F, \ni \forall a \in F: \quad a * u = u * a = a$$

M_3: (Inverse Element)

$$\forall a \in F, \exists\, \bar{a}^{1} \in F, \ni: \quad a * \bar{a}^{1} = \bar{a}^{1} * a = u$$

M_4: (Commutative)

$$a * b = b * a$$

D: Distributive of * over ⊕ — D: قانون توزیعی عملیه * بالای عملیه ⊕

D: $a * (b \oplus c) = a * b \oplus a * c$:D

Note-1: از اینکه "=" یک رابطه معادل است، پس برای تمام $a, b, c \in F$ ما داریم:

E_1: $a = a$.

E_2: اگر $a = b$ باشد، پس $b = a$ میباشد.

E_3: اگر $a = b$ و $b = c$ باشد، پس $a = c$ میباشد.

Note-2: C: چون ⊕ و * عملیات binary در F اند پس $a \oplus b$ و $a * b$ عناصر F میباشند.

Note-3: از اینکه ⊕ و * خوب تعریف شده در F اند، پس ما داریم:

B_1: اگر $a = b$ و $x \in F$ باشد، پس $x \oplus a = x \oplus b$ است.

B_2: اگر $a = b$ و $x \in F$ باشد، پس $x * a = x * b$ میباشد.

Panel - 13   جدول مندرجه سیزدهم :

در یک Field F :

قضیهٔ اول :- $(b\oplus c)*a = b*a \oplus c*a$.

قضیهٔ دوم :- اگر $a=b$ و $c=d$ باشد، $a*c=b*d$ میشود.

قضیهٔ سوم :- اگر $x\oplus a=x\oplus b$ باشد، پس $a=b$ است.

قضیهٔ چهارم :- اگر $a\in F$ باشد، $a*z=z$ میشود.

قضیهٔ پنجم :- اگر $z=a\oplus x$ باشد، پس $x=\bar{a}$ میباشد.

قضیهٔ ششم :- $(\overline{x*y}) = x*\bar{y}$

قضیهٔ هفتم :- اگر $x*a=x*b$ بوده و $x\neq z$ باشد، پس $a=b$ میباشد.

قضیهٔ هشتم :- اگر $a*x=u$ و $a\neq z$، پس $x=a^{-1}$ میشود.

قضیهٔ نهم :- اگر $x*y=z$ ، $x\neq z$ است، پس: $y=z$ میباشد.

قضیهٔ دهم :- $\bar{u}*\bar{u}=u$.

قضیهٔ یازدهم : $a*\bar{u}=\bar{a}$

قضیهٔ دوازدهم : $\bar{x}*\bar{y}=x*y$

قضیهٔ سیزدهم : در یک Field F :

معادله : $a*x\oplus b=z$ در آن یک حل یگانه بوده و آن عبارت از : $x=a^{-1}*\bar{b}$.

Answers to Test Questions : جوابات

Test I : (صفحه 36) : امتحان اول

1. جوره مرتب ordered pairs
2. کاردینیت اول First coordinate،
کاردینیت دوم Second coordinate
3. $a = c$ و $b = d$.
درصورتیکه هریک از سؤالات فوق را بصورت درست جواب داده نتوانید، حرکات شامل : 20 - 1 را دوران کنید.
4. (1). حاصل ضرب دکارتی (یا Cartesia product) S و T .
(2). $\{(x,y) \mid x \in S \text{ and } y \in T\}$
درصورت ضعف احرکات شامل : 40-28 تکرار شود.
5. $S \times T = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$
6. $A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$
درصورت ضعف به حل شامل : 5 و 6 ، حرکات شامل : 39 الی 42
تکرار شود.

Test II : (صفحه 68) : امتحان دوم

1. (1) - - - $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$
(2) . . . . $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,2)\}$
(3). رابطه binary در S

درصورتیکه کل (1). ضعیف باشید شامل : 26 الی 31
درصورتیکه کل (2) ضعیف باشید شامل : 68 الی 84
درصورتیکه کل (3) ضعیف باشید شامل : 95 الی 99 تکرار شود.

ادامه جوابات :

2. یک رابطه binary در SxT عبارت است از یک subset SxT.
(یا بالفاظ دیگر R یک رابطه binary در SxT میشود، درصورتیکه R یک subset SxT باشد.)
درصورتیکه بحل این سؤال مشکلات داشته باشید شامل : 95-99 تکرار شود.

3. xRy : عبارت: "x رابطه به y دارد." خوانده میشود.
اگر جواب شما درست نباشد، شامل : 149 الی 152 تکرار شود.

امتحان سوم : (صفحه 92) Test III

1. جوره های ترتیبی، ordered pairs، کاردینیت اول، کاردینیت دوم
درصورت ضعف شامل : 5 الی 13 تکرار شود.

2. اگر (a,b) و (c,d) جوره های ترتیب باشند، پس $(a,b)=(c,d)$ میشود درصورتیکه : $a=c$ و $b=d$ باشند.
درصورت ضعف شامل : 15 الی 21 تکرار شود.

3. (1) حاصل ضرب دیکارتی SxS، Cartesian product
$S\times S=\{(x,y)\mid x\in S, \text{ and } y\in S\}$ . . . (2)
درصورت ضعف شامل : 44 الی 47 تکرار شود.

4. $S\times T=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$
درصورت ضعف شامل : 26 الی 31 تکرار شود.

5. R یک subset SxS میباشد.
درصورت ضعف شامل : 85 الی 95 تکرار شود.

6. یک رابطه binary در یک set S، انعکاسی reflexive است
درصورتیکه برای هر $x\in S$ رابطه $(x,x)\in R$ حقیقت داشته باشد.
درصورت ضعف شامل : 177 الی 181 تکرار شود.

7. بلی، $x\leq x$ برای هر $x\in S$ حقیقت دارد.
درصورت ضعف شامل : 184 الی 187 تکرار شود.

ادامهٔ جوابات :-

۹. نه خیر! $b \in S$ بوده لیکن $(b,b) \notin R$.

جوابات : امتحان و تکرار قسمت اول (صفحه 143)

VII. Review Test, Part One: (Page 143)

1. $S \times S$ و یا R_2
2. (d,a)
3. جوره مرتب ordered pair
4. نه خیر.
5. کاردینیت اول (First Coordinate)، کاردینیت دوم (2nd Coord.)
6. R یک subset از $S \times S$ میباشد.
7. رابطه binary در S،
8. (1) $T \times T = \{(x,y) \mid x \in T, y \in T\}$
   (2) حاصل ضرب دکارتی T و T Cartesian products of T
9. برای هر $x \in S$ ، $(x,x) \in R$
10. R_2 ، R_6
11. هرگاه $(x,y) \in R$ باشد، پس $(y,x) \in R$ گردد.
12. هرگاه $(x,y) \in R$ ، $(y,z) \in R$ بوده پس $(x,z) \in R$ میباشد.
13. R_1 ، R_2 ، R_4 ، R_5 ، R_6 .
14. یک رابطه معادل equivalence relation عبارت از یک رابطه binary است که دارای سه خاصیت: انعکاسی reflexive، تناظری symmetric و انتقالی transitive باشد.
15. R_2 ، R_6
16. انقسام و یا partition، صنوف متعادل equivalence Classes

ادامه جوابات :

17. $S_1=\{a\}$ ، $S_2=\{b,c\}$ ، $S_3=\{c,d\}$

18. $\{a,b,c,d,e\}$

19. (1). بلی

(2). دو صنف معادل موجود است: S_1 در set اعداد تام منفی و S_2 در set اعداد تام مثبت.

20. (1). بلی

(2). دو صنف معادل موجود اند: S_1 در set اعداد جفت تام و S_2 در set اعداد تاق تام.

21. $S_1=\{0,4,8\}$ ، $S_2=\{1,5,9\}$ ، $S_3=\{2,6,10\}$ و $S_4=\{3,7\}$

22. (1). S ، (2). xRy را به $[x\approx y]$ و یا $[(x,y)\in R]$:

(3). $x\not R y$ را به $[x\not\approx y]$ و یا $[(x,y)\notin R]$

23. $(a,a),(d,d),(a,d),(d,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b),(e,e)$

24. $(0,0),(2,2),(0,2),(2,0),(1,1),(3,3)$

25. جوره مرتب (Ordered pair)

26. کاردنیت اول (First Coordinate)، کاردنیت دوم (Second cord.)

27. $a=c$ و $b=d$

28. (1). $\{(x,y)\mid x\in S \text{ and } y\in S\}$

(2). حاصل ضرب دکارتی $S\times S$ (Cartesian products of S)

29. $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

30. رابطه Binary

31. $\{a,2,1,b,5\}$

32. برای هر $x\in S$ ، $(x,x)\in R$

33. هرگاه $(x,y)\in R$ مربوط پس $(y,x)\in R$ باشد.

34. هرگاه $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R$ باشد، پس $(x,z)\in R$ میباشد.

ادامه جوابات امتحان:

امتحان پنجم : (صفحه 237) : Test - V

1. mapping (یا تابع) از $S\times S$ به S است

درصورت ضعف جواب، شامل 589 الی 597 تکرار شود.

2. برای $\forall x,y\in S$: $x*y=y*x$

درصورت ضعف جواب، شامل 623 الی 632 تکرار شود.

3. برای $\forall x,y,z\in S$: $(x*y)*z=x*(y*z)$

درصورت ضعف جواب، شامل 659 الی 664 تکرار شود.

4. برای $\forall x\in S$: $e*x=x*e=x$

درصورت ضعف جواب، شامل 685 الی 689 تکرار شود.

5. (1) است، (2) است، (3) است، (4) بلی! 0

6. (1) بلی، (2) بلی، (3) بلی، (4) بلی! 1

7. نه خیر! بطور مثال: (3,2) تحت "÷" دارای کدام تصویر در set اعداد تام شده نمی‌توانند.

8. نه خیر! بطور مثال: (2,0) تحت عملیه "÷" دارای کدام تصویر در set نسبتی نباشد، زیرا تقسیم بر صفر غیر معین است.

9. (1). بلی، بنابر عملیه "+" حاصل جمع دو عدد منفی یک عدد منفی یگانه است.

(2). نه خیر! $0\notin S$

10. (1). بلی! اتحاد دو subset، subset یگانه S است.

(2). بلی برای هر set ای: A و B: $A\cup B=B\cup A$ است.

(3). بلی! برای هر set ای: A، B و C: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ است.

(4). بلی، Φ، برای هر set A: $A\cup\Phi=\Phi\cup A=A$

ادامهٔ جوابات امتحان :-

امتحان و تکرار قسمت دوم : (صفحه 250)

Review Test, Part Two: (page 250)

1. $N*P = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}$ or $N*P = N$

2. (1). شما میتوانید که جدول ازا مانند ذیل ترتیب دهید ویا هرجوره را بدون تشکیل جدول حک کنید.

*	M	N	P	Q
M	M	N	P	Q
N	N	M	P	Q
P	P	Q	P	Q
Q	Q	P	P	Q

(2). شما میتوانید که توسط محض یک مثال عدم ازا ثابت نموده میتوانید.

بطور مثال :- $N*Q \neq Q*N$ ویا: $P*N \neq N*P$

3. (1). بلی، M
(2). M معکوس خود (M) است وهمچنان N معکوس خود است.

4. (1). بلی، (2). بلی، (3). بلی، 0 (zero)
(4). بلی! معکوس هر عدد x تمام متکوید $-x$ است.

5. نه خیر! بطور مثال: $B \cdot C \neq C \cdot B$ ، زیرا: $B \cdot C = D$ و $C \cdot B = E$ است. امثال دیگر ضد تبدیلی نیز موجود است.

6. (1). بلی (2). بلی A (3). بلی

7. (1). بلی (2). بلی

8. (1). بلی، ⊕
(2). نه خیر! هیچکدام بجز از ⊕ دارای معکوس نیست. مگر رنگه ⊕ ، که معکوس آن نیز ⊕ است.

ادامهٔ جوابات :

۰۹ چون $e*x = x*e = x$ است، بنابران e عنصر عینیت identity است، و چون $e*e_1 = e_1*e$ است، حال $e*e_1 = e_1$ است،
چون e_1 عنصر عینیت identity است، پس: $e*e_1 = e$ میشود
درنتیجه : $e = e_1$ میباشد.

۰10 ۰(1) $a*b = 5 \cdot a \cdot b$

$b*a = 5 \cdot b \cdot a$

تا در ضرب : $5 \cdot a \cdot b = 5 \cdot b \cdot a$ است.

$\therefore \; a*b = b*a$

۰(2)

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (5 \cdot a \cdot b)*c\\ &= 5(5 \cdot a \cdot b) \cdot c\\ &= 25\, a \cdot b \cdot c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a*(b*c) &= a*(5 \cdot b \cdot c)\\ &= 5a \cdot (5 \cdot b \cdot c)\\ &= 25\, a \cdot b \cdot c\end{aligned}$$

$\therefore \; (a*b)*c = a*(b*c)$

۰(3)

$$\begin{aligned}a*\tfrac{1}{5} &= 5\left(a \cdot \tfrac{1}{5}\right)\\ &= a\end{aligned}$$

همچنان : $\frac{1}{5}*a = 5\left(\frac{1}{5} \cdot a\right) = a$

۰(4) $\frac{1}{15} * \frac{3}{5} =$ عنصر عینیت identity $= \frac{1}{5}$

$\frac{1}{15} * \frac{3}{5} = 5\left(\frac{1}{15} \cdot \frac{3}{5}\right)$

بنابران $\frac{1}{15}$ معکوس $\frac{3}{5}$ میباشد.

Q.E.D.

ادامۀ جوابات امتحان :

امتحان ششم : (صفحه 304) Test VI :

1. یک ربط binary در $S \times T$
2. یک ربط binary : from S into T
3. یک تابع ویا mapping : from S into T
4. تصویر ویا image ، $f(x)$ ویا $(x)f$
5. (1). S ، (2). $y \in T$ ، (3). ثابت ، (4). 2
6. تابع function : from S onto T

امتحان وتکرار قسمت سوم (صفحه 375) :

Review Test, Part Three, (page 375)

شماره سوالات :

1. قسمت اول :

Proof:

1. $a * x = b$ . . . . Hypothesis
2. $\exists \; a^{-1} \in G$ . . . . . . G_3
3. $a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$ . . B_1
4. $(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$ . . G_1
5. $e * x = a^{-1} * b$ . . تعریف 2
6. $\therefore \quad x = a^{-1} * b$ . . تعریف 1

Q.E.D.

قسمت دوم :

حال ثبوت باید کرد که اگر $x = a^{-1} * b$ باشد، پس $a * x = b$ میباشد یعنی نشان بدهیم که $x = a^{-1} * b$ یگانه حل معادله $a * x = b$ است.

7. اگر $x = a^{-1} * b$ است

پس $a * x = a * (a^{-1} * b)$ . . . . . . B_1

8. $a * x = (a * a^{-1}) * b$ . . . . . G_1

9. $a * x = e * b$ . . . . . . تعریف 2

10. $a * x = b$ . . . . تعریف 1

Q.E.D.

2. نشان باید داد که $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) = e$ میشود، درحالیکه e عنصر عینیت Identity عملیه $*$ است.

Proof.

1. $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) = a*(b*b^{-1})*a^{-1}$ . . G_1

2. $= a*e*a^{-1}$ . . تعریف 2

3. $= a*a^{-1}$ . . . تعریف 1

4. $\therefore (a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) = e$

5. $\therefore (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

Q.E.D.

3. برای اینکه ثابت نمائیم که عملیه "−" خاصیت تبدیلی را در T تعقیب نمیکند ما محض ضرورت به نشان دادن یک مثال مانند: $R-S \neq S-R$ داریم. برای: $R = A$ و $S = B$ داریم:

$$A - B = \{0, 1\} - \{0\}$$
$$= \{1\}$$
$$= C$$

$$B - A = \{0\} - \{0, 1\}$$
$$= \Phi$$
$$= D$$

چون $C \neq D$

لذا $\therefore A - B \neq B - A$

Proof: . 4

1. $x*a = a*b$ . . . . . . Hypothesis

2. $\exists\ x^{-1}\in G$ . . . . G_3

3. $x^{-1}*(x*a) = x^{-1}*(x*b)$ . . B_1

4. $(x^{-1}*x)*a = (x^{-1}*x)*b$ . . G_1

5. $e*a = e*b$ . . . تعریف2

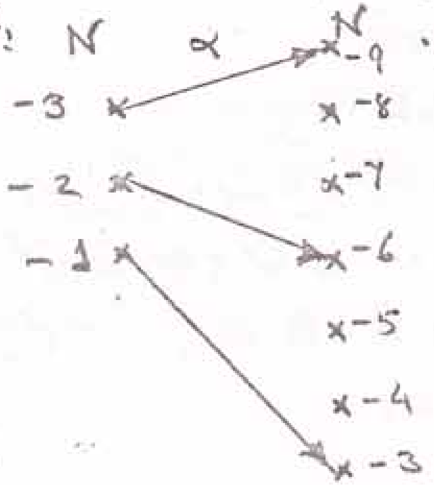
6. $a = b$ تعریف1

Q.E.D.

5. (1) . بلی ؛ (2) 6 ، چون $6\cdot x = x\cdot 6 = x$

(3) آری ، چون $7\cdot 5 = 5\cdot 7 = 6$

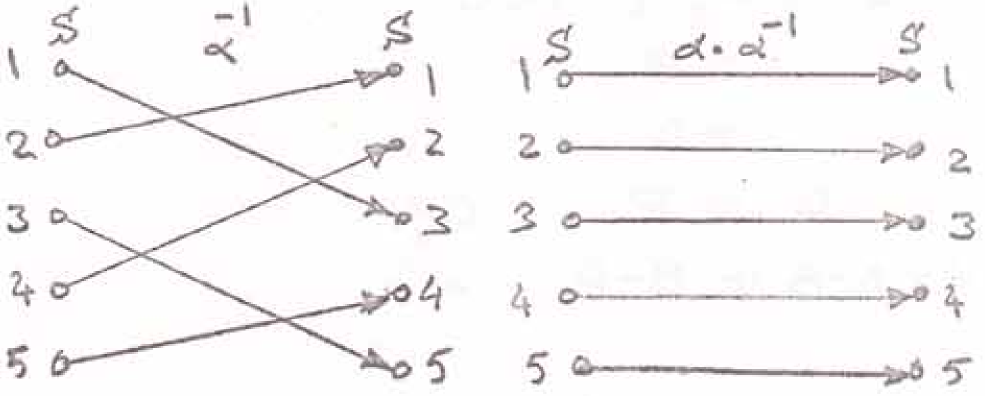
6. (1) . بلی ، (2) . نه خیر ؛ زیرا: تمام اعداد تام N تصاویر images
بعضی اعداد تام شده نمیتوانند . مثال:



(3) . بلی

7. (1) . β ، (2) $\beta^{-1} = \beta$

8.



.9 (1) . 7 ، (2) . 3

(3) . عملیه ضرب انتقال یک عملیه binary تبدیلی نیست .

.10 (1) بلی ، نه خیر ، (2) . نه خیر ،

(3) . نه خیر ! زیرا : $(3)a^{-1} = d$ و $(3)a^{-1} = c$

$(2)a^{-1} = b$ و $(2)a^{-1} = a$

٣٠٠

امتحان و تکرار قسمت چهارم: (صفحه 461)

Review Test, Part Four: (page 461)

.1 Proof:

1.	$(a*b)*(a^{-1}*b^{-1}) = (a*b)*(b^{-1}*a^{-1})$	M_4
2.	$= [(a*b)*b^{-1}]*a^{-1}$	M_1
3.	$= [a*(b*b^{-1})]*a^{-1}$	M_1
4.	$= [a*u]*a^{-1}$	M_3
5.	$= a*a^{-1}$	M_2
6.	$= u$	M_3

Q.E.D.

.2 درصورتیکه اگر R دارای خواص : انعکاسی ، تناظری و انتقالی باشد .

.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

.4

(1) دارای یک رابطه معادل در عملیه binary خوب تعریف شده

Well-defined : * و ⊕ باشد .

ادامه جوابات امتحان :

4. (2)

(2). دارای خاصیت انجمنی Associative و خاصیت تبدیلی Commutative تحت عملیه ⊕ میباشد.

(3). دارای عنصر عینیت تحت عملیه ⊕ بوده دارای هر عنصر دارای یک عنصر معکوس تحت ⊕ باشد.

(4). دارای خوص انجمنی وتبدیلی تحت عملیه "*" میباشد.

(5). دارای عنصر عینیت identity وبجز از عنصر عینیت عملیه ⊕ دیگر هر عنصر دن تحت عملیه * دارای عنصر معکوس میباشند.

(6). قانون توزیعی عملیه * بالای عملیه ⊕ تعقیب میشود.

5.
$$a*b=b*a$$
$$a*(b*c)=(a*b)*c$$

6.
$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

7.

Proof:

(1). $(x\cdot y)+(\bar{x}\cdot y)=(x+\bar{x})y$ . . . قضیه اول

(2). $=0\cdot y$ . . . A_3

$=0$ . . . قضیه چهارم

(3). $\therefore (\bar{x}\cdot y)=\overline{x\cdot y}$ . . . . . قضیه پنجم

دیا :

1. $x+\bar{x}=0$ . . . . A_3

2. $(x+\bar{x})\cdot y=0\cdot y$ . . . . . . B_2 و M_4

3. $x\cdot y+\bar{x}\cdot y=0$ . . . . . قضایای (1) و (4)

4. $\overline{x\cdot y}+(x\cdot y+\bar{x}\cdot y)=\overline{x\cdot y}+0$ . . B_1

5. $(\overline{x\cdot y}+x\cdot y)+\bar{x}\cdot y=\overline{x\cdot y}$ . . . A_2 و A_1

6. $0+\bar{x}\cdot y=\overline{x\cdot y}$ . . . A_3

7. $\therefore \bar{x}\cdot y=\overline{x\cdot y}$ . . . A_2

Q.E.D.

.8

1. $x+y=x+z$ . . . . Hypothesis
2. $\exists\ \bar{x}\in F$ . . . . A_3
3. $\bar{x}+(x+y)=\bar{x}+(x+z)$ . . . . . B_1
4. $(\bar{x}+x)+y=(\bar{x}+x)+z$ . . . . . A_1
5. $0+y=0+z$ . . . . . . A_3
6. $\therefore\ y=z$ . . . . . A_2

Q.E.D.

.9 نه خیر! قانون اتحادی Associative صدق نمیکند. بطور مثال:

$$a\oplus(b\oplus c)=a\oplus(b^2+c^2)$$
$$=a^2+[b^2+c^2]^2$$

اما: $(a\oplus b)\oplus c=(a^2+b^2)\oplus c$

$$=(a^2+b^2)^2+c^2$$

به همین ترتیب یک مثال برای قانون اتحادی تحت * ارائه شده میتواند.

.10 (1). (1). $a\oplus b=a+b+5$

$=b+a+5$ . . (خاصیت تبدیلی "+")

و همچنان: $b\oplus a=b+a+5$

$\therefore\ a\oplus b=b\oplus a$

(2) $a*b=ab+3a+3b+3$

$b*a=ba+3b+3a+3$ (قرار تعریف)

$=ab+3b+3a+3$ (خاصیت تبدیلی ضرب.)

$=ab+3a+3a+3$ (خاصیت تبدیلی جمع +)

$\therefore\ a*b=b*a$

Q.E.D.

References مآخذها:

1. Adler, Irving: The New Methematics, The John Day Company, Inc., New York, 1958.

2. Allendoerfer, C. B., and C. O. Oakly: Principles of Mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.

3. Andree, R. V.: Selections from Modern Abstract Algebra, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1958.

4. Baumlag, B., and B. Chandler: Theory And Problems of Group Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1968.

5. Earl, B., J. William Moore, and W. I. Smith: Groups And Fields A Programmed Unit in Modern Mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.

6. Eves, Howard, and C. V. New Som: An Introduction to The Foundations And Fundamental Concepts of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1958.

ادامه ماخذها:

7. Felix, Lucien: The Modern Aspects of Mathematics, Basic Books, Inc., New York, 1960.

8. School Mathematics Study Group: Mathematics for High School: Intermediate Mathematics Part II, rev. ed. Yale University Press, New Haven, Conn., 1961.

9. Stoll, R. R.: Sets, Logic, and Axiomatic Theories, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1961.

10. Weiss, Marie: Higher Algebra for the Undergraduate, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

Additional References for Some of The Major Applications of Theory of Groups And Fields

مأخذهای :- تطبیقات مهم گروه‌ها در فیزیک

A. CRYSTALLOGRAPHY AND SOLID STATE PHYSICS:

Crystals are classified according to their symmetries which are properly described in the language of Group Theory. Groups relevant to crystallography (point groups) are discrete.

References:

1. Lax, Melvin: Symmetry Principles in Solid State Physics, (Revised ed.), Murray Hill, Bell-Telephone, Labs. Inc., New Jersey, 1967.

2. Hammermesh, Morton: Group Theory And Its Application to Physical Problems, Addison-Wesley, Reading Mass, 1962.

3. Murnaghan: Theory of Group Representations, Dover, New York, 1963.

4. Weyl, Hermenn: Symmetry, University Press, New Jersey, 1952.

B. MECHANICS AND RELATIVITY:

The fundamental principle of Relativity is formulated in terms of the Lorentz and the Poincaré groups.

References:

1. Aharoni, J.: The Special Theory of Relativity, Clarendon Press, Oxford, 1959.

2. De Witt, Bryce: Relativity, Groups, And Topology, Gordon & Breach, New York, 1964.

3. Gel'Fand, Minlos, and Z. Ya Shapiro: Representation of Rotation And Lorentz Groups And Their Applications Pergamon, Oxford, 1963.

4. Naimark, M.: Linear Representations of The Lorentz Group, Pergamon, London, 1964.

C. QUANTUM MECHANICS & SPECTROSCOPY:

An invariance principle in Quantum Mechanics demands that the physical states should transform according to the irreducible representations of the corresponding transformation group. So the Group Theory is essential in classifying the states and spectroscopic energy levels.

References:

1. Eyring, Walter, and Kimball: Quantum Chemistry, Wiley, New York, 1963.

2. Mackey, G. W.: Induced Representations of Groups And Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1968.

3. Tinkham, Michael: Group Theory And Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1964.

4. Weyl, Hermann: The Theory of Groups & Quantum Mechanics, Dover, New York, 1950.

5. Wigner, E. P.: Group Theory And Its Application to The Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press, New York, 1959.

6. Ziman, J. F.: Elements of Advanced Quantum Theory, The University Press, Cambridge, 1969.

D. PARTICLE PHYSICS:

The higher symmetry approach can be formulated only through theory of groups. The most successful application is the SU(3) theory. Use of higher groups has followed.

" Group theory has found extremely important applications in modern physics. In the Theory of Relativity the Lorentz group and the Poincaré group have played the fundamental role. Most recently attempts have been made to study the General Theory of Relativity as a gauge invariant field theory bringing out the SL(2C) Gauge invariance as earlier shown by Weyl and generalising it to invariance under SL(6C). In this way through group theoretic Studies the language of General Relativity has been made familiar to particle physicists."*

* Professor Abdus Salam, IC/73/28

References:

1. Barut, A. O.: The Theory of The Scattering Matrix, The Macmillan Company, New York, 1967.

2. Dyson, F. J.: Symmetry Groups in Nuclear & Particle Physics, Benjamin, New York, 1966.

3. Gell-Mann, M., and Y. Neeman: The Eightfold Way, Benjamin, New York, 1964.

E. FOR APPLICATIONS OF THE THEORY OF ALGEBRS & FIELDS:

References:

1. Emch: The Algebraic Methods in statistical Mechanics And Quantum Theory, Intersciences, (Wiley) New York, 1972.

2. Mackey, G. W.: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1963.

3. Varadarajan, V.: The Geometry of Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1963.

4. Wigner, Eugene: The Application of Group Theory to The Special Functions of Mathematical Physics, Princeton University, New Jersey, 1955.

5. Leech, J.W., and D.J. Newman: How to use Groups, Methuen and Co LTD, London, 1969.