ریاضیات معاصر

جلد سوم

ساختمان های ریاضی

مؤلفین

محمد امان نادری
موسسه عالی تربیه معلم

کریستیان ریل
دفتر پیداگوژی فرانسه در کابل

روبنکان
دفتر پیداگوژی

۱۳۵۷

از نشرات دفتر پیداگوژی فرانسه در کابل - سرطان

یادداشت انتشارات شاهمامه

به سلسلهٔ نشر آثار فراموش شدهٔ استاد محمدامان نادری، اینک به انتشار این سلسلهٔ «**ریاضیات معاصر**» میپردازیم تا از یک سو مورد استفادهٔ علاقمندان قرار گیرد و از جانبی دستآورد های علمی این اندیشمند و ریاضیدان کشور که عمری در راه معارف در بدترین وضعیت سیاسی و صحی، قلم زده است، یکبار دیگر روگشایی گردد. بدون شک استاد نادری یکی از انگشت شمارانِ کشور بود که آثار ارزشمند فراوانی در زمینهٔ ریاضیات به یادگار گذاشته است. او در حقیقت نخستین مفسر و معرف ریاضیات مدرن در افغانستان می باشد. اینک جلد سوم این سلسله را جهت ثبت آرشیف «شاهمامه» و دیگر آرشیف های نشراتی آماده ساخته ایم تا نسلهای بعد این خدمات را نادیده نگیرند و سهم اینگونه شخصیت های پویا و کوشا در رشد معارف کشور برازنده و جاودان ماند.

با سپاس،
منیژه نادری
مسؤول بنیاد شاهمامه

شناسنامه

ریاضیات معاصر
جلد سوم
ساختمان های ریاضی
مؤلفان:
محمد امان نادری، دیپارتمنت ریاضیات، موسسهٔ عالی تربیه معلم روشان
ایتیان ژیل، دفتر پیداگوژی فرانسه در کابل
سرطان ۱۳۵۷ خورشیدی
نشر الکتریکی: بنیاد شاهمامه
www.shahmama.com
جولای ۲۰۱۶، هالند

« قوت افرنگ از علم وفن است »
« و زهمین آتش چراغش روشن است »
(اقبال)

پیشگفتار

مسرت داریم از اینکه فرصت یافتیم تا جلد سوم سلسله ریاضیات معاصر را تحت عنوان : ساختمان های ریاضی بعد از سپری کردن دورهٔ تجربتی آن برای بار دوم نشر و بدسترس شایقان علم و معرفت قرار میدهیم . امیدواریم که درینوقت با نشر این اثر پارهٔ از وجیبه مسلکی خویشرا در توسعهٔ و پخش دانش با نجام رسانیم .

محتویات این کتاب مانند دو جلد دیگر این سلسله با مفردات پروگرام موسسات عالی تربیه معلم ، وزارت جلیله تعلیمات عالی وفوق دارد ، بناءً مطالعهٔ آن برای معلمان ریاضی نه تنها مفید بود ه بلکه لازمی پنداشته میشود .

در نگارش این کتاب سعی به عمل آمده است تا مطالب بعبارات ساده و روان بیان شود . ضمناً علایم و اشاراتی که درین اثر بکار برده شده علاماتی اند که بسویه بین المللی مروج اند . بهمین قسم غرض افادهٔ اصطلاحات متداول این اثر لغات و کلماتی بکار برده شده که از یکطرف هر لغت و یا بیانیه معنی یک مفهوم را بصورت واضح افاده نموده و ازجانب دیگر صبغهٔ ملی دارد . علاوتاً اصطلاحات

معمول این کتاب به سه لسان: دری، فرانسوی و انگلیسی بصورت لست تحریر و در قسمت اخیر کتاب گنجانیده شده است . رهنمای حل مسائل و تمرینات مندرجه این رساله در اوراق جداگانه نگاشته شده که بنا بر خواهش خواننده تقدیم خواهد شد .

گرچه مطالعه این کتاب بصورت عموم برای هر طالب علم ریاضیات خالی از فایده نیست اما برای استفادهٔ موثر آن بهتر است تا بعد از مطالعهٔ جلد اول و دوم این سلسله که بالترتیب تحت عناوین:
(۱) ست ها و استعمال آنها (۲) روابط و تطبیقات که توسط دفتر پیداگوژی فرانسه در کابل به نشر رسیده است به مطالعهٔ این اثر اقدام نمایند .

وظیفهٔ خویش میدانیم تا از تمام ذوات محترمیکه ما را به نگارش این سلسله ریاضیات تشویق نموده اند بصورت عام و از همکاری های مزید محترمه خانم ماری ژیل که در زمینه نگاشتن این کتاب از هیچگونه بذل مساعی دریغ نفرموده اند و بهمین قسم از تمام کارکنان دفتر پیداگوژی فرانسه که در نشر آن با ما مساعدت کرده اند بصورت خاص ابراز قدردانی نمائیم .

ما یقین داریم که حین نگارش این اثر یکعده اغلاط و اشتباهات چه در ترکیب عبارات والفاظ وچه در ارائه مفاهیم و مفکوره های علمی بروز یافته اند. فرض جلوگیری از شیوع مکرر همچو اشتباهات از خوانندهٔ عزیز

توقع مینمائیم تا حین مطالعه این اشتباهات را به تنگاه اغماض ندیده و ما را مطلع و ممنون فرمایند .

پوهنمل محمد امان نادری	ایتیان ژیل
استاد ریاضیات مؤسسه عالی	آمر دفتر پیداگوژی فرانسه
تربیه معلم روشان	در کابل و استاد ریاضیات
	لیسه عالی استقلال

کابل ، سرطان ، ۱۳۵۷

فهرست عناوین

عنوان	صفحه
فصل اول : عملیات دوگانه‌ئی ...	۱
۱ ـ ۱. ارائه عملیات دوگانه‌ئی ..	۱
۲ ـ ۱. خواص عملیه داخلی	۸
اول : خاصیت اشتراکی	۸
دوم : موجودیت عنصر بی تاثیر (عینیت)	۱۳
سوم : خاصیت موجودیت عناصر تناظر	۱۷
چهارم : خاصیت تبدیلی	۱۹
تاثیر خاصیت تبدیلی بالای خواص دیگر	۲۱
۳ ـ ۱. جدول عملیات	۲۲
تمرینات	۲۵
فصل دوم : گروه	۳۱
۱ ـ ۲. تعریف	۳۱
۲ ـ ۲. خواص گروه‌ها	۳٤
تمرینات	۳۹
۳ ـ ۲. گروه‌های فرعی ...	۳۹
تمرینات	٤۳
٤ ـ ۲. وکتورهای هندسی	٤۷
a. دونقطه‌ای‌ها	٤۷
b. دونقطه‌ای‌های هماتند	٤۸
c. خواص رابطه همانندی بین دونقطه‌ای‌ها	٤۹
d. وکتور هندسی	٥۱

فصـــل اول

عملیـــــات دوگـــانه‌ای

BINARY OPERATIONS

۱ـ۱ • ارائهٔ عملیات دوگانه‌ای

شما با چندین عملیهٔ ریاضی از قبیل : جمع (+) تفریق (−) ضرب (•) تقسیم (÷) آشنائی دارید، اکنون خواص بعضی ازین عملیات را در ست های مختلف مطالعه مینمائیم •

مثال اول : اگر عملیه جمع درست اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) مدنظر گرفته شود دیده میشود که حاصل جمع هر دو عدد طبیعی یک عدد طبیعی است •

مثلاً : $2+5=7$ میشود • ازینجا بملاحظه میرسد که به دو عدد طبیعی 2 و 5 یک عدد طبیعی 7 مطابقت دارد • ازین نتیجه میشود که عملیه جمع در $\mathbb{N}$ یک رابطه را بوجود می‌آورد طوریکه در آن رابطه تصویر هرآن دو عدد طبیعی یک عدد طبیعی است • ما این رابطه را بشکل :

$$(x,y) \xmapsto{+} x+y$$

که درین جا x و y اعداد طبیعی را افاده میکنند، ارائه مینمائیم •

در مثال فوق چون $2 \in \mathbb{N}$ و هم $5 \in \mathbb{N}$ است .

پس $(2,5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ است .

با استفاده از تعریف تطبیق عملیه جمع را در $\mathbb{N}$ مطابق ذیل

ارائه کرده میتوانیم :

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$$
$$(2,5) \overset{+}{\longmapsto} 7$$
$$(x,y) \overset{+}{\longmapsto} x+y$$

<u>مثال دوم</u> : اگر عملیه تفریق (—) را در $\mathbb{N}$ مدنظر بگیریم بملاحظه میرسد

که در بعضی حالات حاصل تفریق دو عدد طبیعی یکعدد طبیعـــــی

نیست .

مثلاً : $2-5=-3$ میشود . درین مثال اگرچه $2 \in \mathbb{N}$ و هم

$5 \in \mathbb{N}$ بوده ولی فرق آنها یعنی -3 طبیعی نه میباشد .

پس درینصورت میگوئیم که عملیه تفریق در $\mathbb{N}$ یک مطابقت را بوجود نه میآورد .

ازینکه حاصل تفریق هرآن دو عدد طبیعی $(\mathbb{N})$ یکعدد تام $(\mathbb{Z})$

میباشد پس ما میتوانیم بنویسیم :

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{-} \mathbb{Z}$$
$$(2,5) \overset{-}{\longmapsto} -3$$
$$(x,y) \overset{-}{\longmapsto} x-y$$

اگر دقت شود دیده میشود که بنا برعملیه تفریق تصاویر (x,y) و (y,x) از هم متفاوت است . ازین نتیجه میشود که ترتیب مرتبه ها در جوره های : (x,y) و (y,x) حائز اهمیت است.

ازینرو توضیح مفکوره مطابقت فوق را باساس مفکوره جوره مرتب ارائه نمودیم .

مثال سوم : حال اگر اوسط گرفتن (اوسط گیری) حسابی را در N بحیث عملیه مورد مطالعه قرار دهیم دیده میشود که اوسط هر آن دو عدد ست N یک عدد مربوط N نمیباشد .

مثلاً : اوسط دو عدد طبیعی 4 و 5 عبارت از :

$\frac{4+5}{2}=\frac{9}{2}$ میشود که یک عدد طبیعی نیست،

یعنی : $\frac{9}{2}\notin N$ میشود . ازین نتیجه میشود که اوسط گیری در ست N یک مطابقترا بوجود نمیاورد . اما اگر عملیه اوسط گیری در ست اعداد نسبتی (Q) مورد مطالعه قرار دهیم ، دیده میشود که اوسط حسابی هر دو عدد نسبتی یک عدد نسبتی است. یا بعبارت دیگر برای هر دو عدد a و b عنصر Q ، $\frac{a+b}{2}\in Q$ میباشد .

پس ما مینویسیم :

$$Q\times Q \xrightarrow{\text{اوسط گیری}} Q$$

$$(4,5) \xrightarrow{\text{اوسط گیری}} \frac{4+5}{2}$$

$$(x,y) \xrightarrow{\text{اوسط گیری}} \frac{x+y}{2}$$

درین مثال ترتیب جاهای مرتبه ها در داخل جوره مرتب شرط نیست ، چـــرا ؟

مثال چهارم : اگر یک طول در یک عدد حقیقی ضرب شود یک طول حاصل میشود .

مثلاً : اگر یک طول l را در 4 ضرب کنیم یک طول $4l$ حاصل میشود . ازین نتیجه میشود که عملیهٔ ضرب یک طول در ست اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) یک طول مطابقترا تولید مینماید که ما آنرا قرار ذیل نمایـــش داده میتوانیم :

برای هر عدد حقیقی a شامل $\mathbb{R}$ و هر طول l شامل ست طول ها : یعنی $\mathbb{L}$ ما داریم :

$$\mathbb{R}\times\mathbb{L}\xrightarrow{\text{ضرب}}\mathbb{L}$$

$$(a, l)\xmapsto{\text{ضرب}} a\cdot l$$

$$(4, 3\,\text{cm})\xmapsto{\text{ضرب}} 12\ \text{cm}$$

رابطهٔ فوق توضیح مینماید که اگر هر طول به هر عدد حقیقی ضرب شود در نتیجه یک طول حاصل میشود .

درصورتیکه l یک طول مفروض باشد آیا تصویر ($\sqrt{2}$, l) ویا $\sqrt{2}\cdot l$ را بدست آورده میتوانید ؟

مثال پنجم : اگر عملیهٔ ضرب در ست داول ها ($\mathbb{L}$) مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که حاصلضرب دو داول یك داول نبوده بلكه یك مساحت است • مثلاً : $3\ Cm$ ضرب $7\ Cm$ مساوی به $21\ Cm^2$ میشود • درین صورت اگر ست مساحت ها را به $\mathbb{S}$ ارائه نمائیم ما میتوانیم بنویسیم :

$$\mathbb{L} \times \mathbb{L} \xrightarrow{\text{ضرب}} \mathbb{S}$$

$$(a,b) \xmapsto{\text{ضرب}} a \times b$$

$$(3m, 5Cm) \xmapsto{\text{ضرب}} 3m \times 5\,Cm = 300\,Cm \times 5\,Cm = 1500\,Cm^2 .$$

از مطالعهٔ امثال فوق عملیه دوگانه‌ای را قرار ذیل بیان مینمائیم :

تعریف : یك عملیهٔ دوگانه‌ای ($*$) عبارت از یك تطبیق بین یك ست $E \times F$ و یك ست G است • اگر $c \in G$ تصویر $\forall (a,b) \in E \times F$ باشد ، پس درینصورت c به $a * b$ نیز ارائه میشود • ما مینویسیم :

$$E \times F \xrightarrow{*} G$$

$$(a,b) \xmapsto{*} c$$

$$(a,b) \longmapsto a * b \quad \ldots\ldots$$ ویا

عملیهٔ دوگانه ای را بنام قانون ترکیب نیز یاد میکنند •

تعریف ۲ : بناء بر تعریف اول درحالت خاص اگر $E = F = G$ گردد عملیه مذکور بنام عملیهٔ داخلی در E یاد میشود .

ازمطالعهٔ امثال فوق نتیجه میشود که عملیهٔ[1] جمع $(+)$ در $\mathbb{N}$ (درمثال ۱) یک عملیه داخلی بوده ، حالانکه عملیه تفریق در $\mathbb{N}$ (درمثال دوم) یک عملیهٔ داخلی نیست ، ولی عملیه تفریق در $\mathbb{Z}$ یک عملیه داخلی است . همچنان ازمطالعهٔ مثال سوم فهمیده میشود که عملیه اوسط گیری در $\mathbb{N}$ داخلی نبوده ولی در $\mathbb{Q}$ یک عملیهٔ داخلی است . از بررسی مثال چهارم نتیجه میشود که عملیهٔ ضرب در بین عناصر ست های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ یک عملیهٔ داخلی نبوده بلکه یک عملیهٔ خارجی است .

اکنون ما درموقفی قرارداریم تا به تعریف عملیه خارجی طبق ذیل بپردازیم :

---

(۱) بعد ازین غرض اختصار ما بعوض کلمهٔ "عملیه" وکانه‌ای "محض کلمه "عملیه" را بکارمیبریم .

تعریف (۳) : یک عملیه وقتی خارجی گفته میشود که تطابیق

$E \times F \longrightarrow F$ را بوجود آورد ·

در ریاضیات ست E مطابقت فوق را بصورت معمول ست اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) تشکیل میدهد ·

از مطالعهٔ مثال چهارم برمی‌آید که عملیه ضرب اول در عدد حقیقی یک عملیه خارجی است· عملیه ضرب در مثال پنجم و همچنان عملیه تفریق در مثال دوم نه عملیه داخلی است و نه عملیه خارجی ·

مثال ششم : اگر عملیه * را در هندسه، تعین نقطه وسطی دو نقطه تعریف کنیم درینصورت A * B نقطه وسطی A و B را ارائه میکند · چون هر نقطه A و B ست نقاط فضا دارای یک نقطه وسطی است ، بنابران گفته میتوانیم که عملیهٔ * در ست نقاط فضا یک عملیه داخلی است ·

۲ ـ ۱ : خـــــواص عملیه داخلی

خاصیت اول: خاصت اشتراکی (۱) Associativity

تعریف ٤ : یك عملیه داخلی $*$ در یك ست E از خاصیت اشتراکی پیروی میکند در صورتیکه برای تمام a شامل E، برای تمام b شامل E و برای تمام c شامل E

رابطه : $(a*b)*c=a*(b*c)$ دارای حقیقت باشد •

مثال اول : اگر عملیه جمع در ست اعداد $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته شود، دیده میشود که عملیه جمع در $\mathbb{R}$ یک عملیه داخلی بوده و از خاصیت اشتراکی نیز پیروی میکند •

زیرا : برای هرعدد a ، b و c شامل $\mathbb{R}$ رابطه $(a+b)+c=a+(b+c)$ حقیقت دارد •

---

(۱) • خاصیت اشتراکی را بنام خاصیت انجمنی، یا خاصیت اتحادی نیز یاد میکـــنند•

آیا فهمیده میتوانید که عملیه جمع در ست های فرعی $\mathbb{R}$ یعنی در $\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ نیز یک عملیه داخلی بوده و از خاصیت اشتراکی

پیروی میکند ؟

<u>مثال دوم</u> : اگر عملیهٔ تفریق (−) در ست $\mathbb{Z}$ مد نظر گرفته شود ،

دیده میشود که عملیه تفریق در ست $\mathbb{Z}$ داخلی بوده ولی از خاصیت

اشتراکی پیروی نمیکند .

زیرا : برای هر عدد a ، b و c شامل ست $\mathbb{Z}$ رابطه :

$(a-b)-c = a-(b-c)$ همیشه تحقیق پذیر نیست .

راجع به عملیه تفریق در $\mathbb{N}$ چه فکر میکنید ؟

<u>مثال سوم</u> : اگر عملیهٔ ضرب (.) در ست $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته شود ،

به ملاحظه میرسد که عملیه ضرب در $\mathbb{R}$ داخلی بوده و از خاصیت

اشتراکی نیز پیروی مینماید .

زیرا : برای هر عدد a ، b و c شامل $\mathbb{R}$ رابطه :

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ حقیقت دارد .

راجع به عملیهٔ ضرب (.) در ست های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ چه فکر میکنید؟

<u>مثال چهارم</u> : اگر عملیهٔ تقسیم (÷) در $\mathbb{R}$ مورد مطالعه قرار داده

شود بملاحظه میرسد که $(\div)$ در $\mathbb{R}$ یك عملیه داخلی نیست •

چرا ؟

ولی اگر عملیه تقسیم در $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} - \{0\}$ مورد بررسی قرار گیرد ، دیده میشود که عملیهٔ تقسیم $(\div)$ در $\mathbb{R}_*$ یك عملیه داخلی بوده ولی از خاصیت اشتراکی پیروی نمیکند •

زیرا : برای هر عدد a ، b و c شامل $\mathbb{R}_*$ رابطه :

$(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$ همیشه جایز حقیقت نیست •

شما راجع به عملیه تقسیم $(\div)$ در ست های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ چه فکر میکنید ؟

<u>مثال پنجم</u> : اگر عملیه اوسط گیری را به $\oplus$ نشان داده وآنرا در ست $\mathbb{R}$ مورد مطالعه قرار دهیم دیده میشود که $\oplus$ در $\mathbb{R}$ یك عملیه داخلی بوده ولی از خاصیت اشتراکی پیروی نمیکند •

زیرا : برای تمام اعداد a ، b و c شامل $\mathbb{R}$ رابطه :

$\overset{(1)}{(a \oplus b) \oplus c} = a \oplus (b \oplus c)$ همیشه جایز حقیقت

نیست • باورمثال : $(4 \oplus 6) \oplus 8 \neq 4 \oplus (6 \oplus 8)$

بما یپ...

---

(۱) چنین خوانده میشود که a اوسط گیری b سپس نتیجهٔ آن اوسطگیری با c •

زیرا :

$$(4 \oplus 6) \oplus 8 = \left(\frac{4+6}{2}\right) \oplus 8$$
$$= 5 \oplus 8$$
$$= \frac{5+8}{2} = 6,5$$

از طرف دیگر :

$$4 \oplus (6 \oplus 8) = 4 \oplus \left(\frac{6+8}{2}\right)$$
$$= 4 \oplus 7$$
$$= \frac{4+7}{2} = 5,5$$

لــــذا :

$$(4 \oplus 6) \oplus 8 \neq 4 \oplus (6 \oplus 8)$$

<u>مثال ششم</u> : عملیه تقاطع $\cap$ در ست تمام ست های فرعی یك ست E داخلی بوده و از خاصیت اشتراکی نیز پیروی مینماید . ثبوت این حقیقت درصفحه (۷٦) جلد اول کتاب ریاضیات معاصر ارائه شده است .

بهمین قسم درصفحه (٦۲) کتاب مذکور نشان داده شده است که عملیهٔ اتحاد $\cup$ نیز در بین ست های فرعی یك ست یك عملیه داخلی بوده و از خاصیت اشتراکی پیروی میکند .

مثال هفتم : اگر بزرگترین قاسم مشترک دو عدد a و b را به $a \wedge b$ ارائه نمائیم درینصورت به ملاحظه میرسد که عملیه دریافتن بزرگترین قاسم مشترک در $\mathbb{N}$ یک عملیه داخلی بوده و از خاصیت اشتراکی نیز پیروی میکند •

زیرا : میدانیم که ست قاسم های مشترک دو عدد a و b عبارت است از : . . . . $D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$

بطور مثال : بزرگترین قاسم مشترک دو عدد 12 و 18 عبارت از 6 است؛

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$
$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
$$D_{18} \cap D_{12} = \{1, 2, 3, 6\}$$
$$= D_6$$

پس . . . . $D_{18} \cap D_{12} = D_{18 \wedge 12}$

اکنون ثبوت مینمائیم که برای هر عدد a ، b و c شامل $\mathbb{N}$ رابطه : $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ همیشه حائز حقیقت است .

فرض رسیدن باین هدف ست قاسم های $(a \wedge b) \wedge c$ و ست قاسم های $a \wedge (b \wedge c)$ را با هم مقایسه مینمائیم •

ما داریم :

$$D_{(a\wedge b)\wedge c} = D_{(a\wedge b)} \cap D_c$$

$$= (D_a \cap D_b) \cap D_c$$

$$= D_a \cap (D_b \cap D_c) \quad \ldots\ldots \text{قرار مثال ششم}$$

$$= D_a \cap (D_{b\wedge c})$$

$$= D_{a\wedge(b\wedge c)}$$

و یا .... $D_{(a\wedge b)\wedge c} = D_{a\wedge(b\wedge c)}$

پس .... $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$

نشان دهید که عملیه گرفتن کوچکترین مضرب مشترک و عدد a و b

$(a \vee b)$ در ست N یک عملیه داخلی بوده و از خاصیت اشتراکی

نیز پیروی میکند .

__خاصیت دوم : خاصیت موجود یت عنصر بی تاثیر (عینیت) :__

Identity Element

__تعریف ۵__

یك ست E و یك عملیه داخلی * را در E مد نظر گرفته یك عنصر e

شامل E عنصر بی تاثیر (عینیت) نامیده میشود در صورتیکه برای هر

عنصر a شامل E رابطه : $a*e = e*a = a$ حایز حقیقت باشد .

<u>مثال اول</u> : 0 عنصر بی تأثیر عملیه $(+)$ در $\mathbb{Z}$ است.

زیرا برای هر عدد a شامل $\mathbb{Z}$ رابطه : $a+0=0+a=a$
حقیقت دارد.

0 عنصر بی تأثیر عملیه $(-)$ در $\mathbb{Z}$ نیست، چرا؟

<u>مثال دوم</u> : 1 عنصر بی تأثیر عملیه $(\cdot)$ در $\mathbb{Z}$ است.

زیرا : برای هر عدد a شامل $\mathbb{Z}$ رابطه : ...

$a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ حقیقت دارد.

1 عنصر بی تاثیر عملیه $(\div)$ در $\mathbb{Z}$ نمیباشد. چرا؟

<u>مثال سوم</u> : اگر عملیه اوسط گیری $\oplus$ در ست $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته شود، درین صورت یك عنصر ثابت e را در $\mathbb{R}$ پیدا کرده نمیتوانیم که برای هر عدد a شامل $\mathbb{R}$ رابطه :

$a\oplus e = e\oplus a = a$ جایز حقیقت باشد.

بناً برآن کدام یك عنصر بی تاثیر نظر به عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}$ موجود نیست.

<u>مثال چهارم</u> : ست خالی $\emptyset$ عنصر بی تاثیر عملیه $\cup$ در بین ست های فرعی یك ست E است.

زیرا : برای هر ست A ست فرعی E رابطه :

$A \cup \phi = \phi \cup A = A$ دارای حقیقت است .

مثال پنجم : ست E عنصر بی تاثیر عملیه "$\cap$" در بین ست های فرعی خودش است . زیرا برای هر ست B ست فرعی E رابطه :

$B \cap E = E \cap B = B$ حقیقت دارد .

مثال ششم : عنصر بی تاثیر عملیه دریافت بزرگترین قاسم مشترک ($\wedge$) در ست N موجود نیست .

زیرا : ما یک عدد ثابت e شامل N را پیدا کرده نمیتوانیم که برای هر عدد a شامل N رابطه : $a \wedge e = e \wedge a = a$ حقیقت داشته باشد .

اما عدد 1 عنصر بی تاثیر عملیه دریافت کوچکترین مضرب مشترک ($\vee$) در ست N میباشد .

زیرا : برای هر عدد a شامل N رابطه :

$a \vee 1 = 1 \vee a = a$ حقیقت دارد .

موضوع را بررسی کنید .

قضیه : یگانه گی عنصر بی تاثیر :

نظر به یك عملیه داخلی،در یك ست بیشتر از یك عنصر بی تاثیر موجود شده نمیتواند ٠

ثبوت : یك ست E ویك عملیه داخلی * را در E مدنظر میگیریم .

فرضاً نظر به عملیه * دو عنصر بی تاثیر e و e' در E موجود گردند ٠

درینصورت ما داریم : . . . $e * e' = e' * e = e$

زیرا e' عنصر بی تاثیر در E است ٠

همچنان : . . . $e' * e = e * e' = e'$

زیرا : e عنصر بی تاثیراست در E .

بنا برآن $e = e'$.

مساوات اخیر ارائه میکند که دو عنصر بی تاثیر متمایز نظر به یك عملیه داخلی * در E موجود شده نمیتواند ٠

خاصیت سوم : خاصیت موجودیت عناصر تضاد .

تعریف : یک ست E و یک عملیه داخلی * را که حاوی یک عنصر بی تاثیر e در E است مدنظر میگیریم . اگر برای a و عنصر a و a' در E رابطه :

$a * a' = a' * a = e$ موجود گردد a و a' عناصر تضاد یک یار نامیده میشوند که درینصورت a' را تضاد a و a تضاد a' نظر به عملیه * در ست E گفته میشود .

مثال اول : اگر عملیه جمع (+) را در ست $\mathbb{Z}$ مدنظر بگیریم میدانیم که عملیه جمع در $\mathbb{Z}$ داخلی بوده و صفر عنصر بی تاثیر عملیه جمع در $\mathbb{Z}$ میباشد . برای یک عدد تام فرضاً 5 یک عدد 5- در $\mathbb{Z}$ موجود است طوریکه :

$5 + (-5) = (-5) + 5 = 0$ میشود .

درین مثال 5 و (5-) عناصر تضاد یکدیگر نظر به عملیه جمع در $\mathbb{Z}$ گفته میشود . بصورت عموم برای هر عدد a شامل $\mathbb{Z}$ یک عدد $-a$ در $\mathbb{Z}$ موجود است طوریکه رابطه : $a + (-a) = (-a) + a = 0$ را تحقیق کند .

دراین صورت a و $(-a)$ عناصر تضاد یکدیگر نظیر به عملیه جمع گفته میشود . آیا گفته میتوانید که عناصر تضاد صفر در $\mathbb{I}$ کدام است .

مثال دوم : اگر در ست $\mathbb{Q}$ عملیه ضرب (.) را مدنظر گیریم به ملاحظه میرسد که ست $\mathbb{Q}$ دارای عنصر بی تاثیر عملیه ضرب (.) یعنی 1 بوده وضمناً عملیه ضرب در $\mathbb{Q}$ یك عملیه داخلی است. برای یك عدد فرضاً 4 شامل $\mathbb{Q}$ یکعدد $\frac{1}{4}$ در $\mathbb{Q}$ موجود است طوریکه رابطه :

$4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ را صدق میکند،

پس 4 و $\frac{1}{4}$ تضاد (معکوس) یکدیگر نظر به عملیه ضرب (.) در $\mathbb{Q}$ میباشد .

آیا میدانید که برای عنصر صفر شامل $\mathbb{Q}$ نظر به عملیه ضرب (.) عنصر تضاد آن در $\mathbb{Q}$ موجود نیست . چرا؟

مثال سوم : اگر عملیه اوسط گیری ($\oplus$) در ست $\mathbb{R}$ مدنظر گرفته شود، دیده میشود که تحت این عملیه تضاد برای کدام یك عنصر $\mathbb{R}$ موجود نیست . زیرا که برای عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}$ عنصر بی تاثیر وجود ندارد .

مثال چهارم : اگر $E=\{a, b, c, d, e\}$ وعملیه تقاطع در بین ست های فرعی E مدنظر گرفته شود میدانیم که خود ست E عنصر بیتاثیر عملیه تقاطع $(\cap)$ میباشد .

حال میخواهیم تضاد : $A=\{a, b, c\}$ را در بین ست های فرعی جستجو نمائیم ، و آنرا به A' ارائه مینمائیم . درصورت موجود بت A' باید که $A \cap A' = A' \cap A = E$ گردد .

ولی ما کدام ست A' را که ست فرعی E نیز باشد پیدا کرده نمیتوانیم که رابطه فوق را تحقیق کند . بناء" گفته میتوانیم که A دارای تضاد نظر به عملیه $\cap$ در E نمیباشد .

چون رابطه : $E \cap E = E$ همیشه دارای حقیقت است ، دربنصورت گفته میتوانیم که تضاد E نظر به عملیه $\cap$ عبارت از خود E میباشد .

خاصیت چهارم : خاصیت تبدیلی commutativity

تعریف : یک عملیه داخلی $*$ در یک ست E دارای خاصیت تبدیلی گفته میشود درصورتیکه برای هر عنصر a و b شامل E رابطه :

$a * b = b * a$ تحقیق پذیر باشد .

مثال اول : عملیه جمع $(+)$ در $\mathbb{R}$ دارای خاصیت تبدیلی است . همچنان عملیه ضرب $(\cdot)$ در $\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .

مثال دوم : اگر عملیات تفریق $(-)$ و تقسیم $(\div)$ در $\mathbb{R}$ مدنظر گرفته شود دیده میشود که عملیه تفریق در $\mathbb{R}$ و همچنان عملیه تقسیم

در $\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی پیروی نمیاند. چرا ؟

مثال سوم : در صفحه (۶۴) جلد اول ریاضیات معاصر بملاحظه رسید که عملیه اتحاد ($\cup$) در بین ست های فرعی یک ست از خاصیت تبدیلی پیروی میکند . همچنان در صفحه (۷۷) آن کتاب نشان داده شده است که عملیه تقاطع ($\cap$) در بین ست های فرعی یک ست از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .

مثال چهارم : اگر عملیه * در $\mathbb{R}$ طوری تعریف شود که رابطه :

$a * b = a^2 + ab + b^2$ را صدق کند

آیا عملیه * در $\mathbb{R}$ دارای خاصیت تبدیلی میباشد و یا خیر؟

موضوع را برای قیمت های فرضی $a = 5$ و $b = 3$ مطالعه مینمائیم

$$5 * 3 = 5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2 = 49$$
$$3 * 5 = 3^2 + 3 \cdot 5 + 5^2 = 49$$

بنا برآن . . . . $5 * 3 = 3 * 5$ . . . است .

در اینجا ما از حل یک مثال فوق ادعا کرده نمیتوانیم که عملیه * در $\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند زیرا به قیمتهای خصوصی a و b صحت رابطه فوق نشان داده شده است.

برای عمومیت دادن حقیقت فوق ضرور است تا حالت عمومی را مطالعه نمائیم . درینصورت ما داریم :

$$a * b = a^2 + ab + b^2$$

$$b * a = b^2 + ba + a^2$$

چون برای هر قیمت a و b شامل $\mathbb{R}$ رابطهٔ :

$a^2 + ab + b^2 = b^2 + ba + a^2$ دارای حقیقت است .

لذا گفته میتوانیم که عملیه $*$ در $\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .

<u>تاثیر خاصیت تبدیلی بالای خواص دیگر</u>

هرگاه یک عملیه در یک ست دارای خاصیت تبدیلی باشد باساس آن مطالعهٔ وجود عنصر بی تاثیر وهمچنان مطالعه وجود عناصر تضاد در آن ست آسان تر صورتمیگیرد . مثلاً برای مطالعه صفر (0) بحیث عنصر بی تاثیر عملیه جمع در $\mathbb{Z}$ ازینکه عملیه جمع در $\mathbb{Z}$ تبدیلی است، پس کافیست که برای هرعدد a شامل $\mathbb{Z}$ صحت رابطه : . . . . $a + 0 = a$ را ایضاح نمائیم .

بصورت عموم اگر عملیه $*$ در ست E تبدیلی باشد واگر برای هر عنصر a شامل E رابطه : $a * e = a$ موجود گردد درینصورت

e عنصر بی تاثیر عملیه * در E است .

همچنان a و a' شامل E نظر به عملیه * تناظر یکدیگر گفته میشوند ،

در صورتیکه رابطه : . . . . $a * a' = e$ را صدق کند .

1- جدول عملیات

هر عملیه در یک ست که عدهٔ عناصر آن بی‌نهایت نباشد توسط

یک جدول ارائه شده میتواند .

مثال اول: اگر در ست $E = \{-1, 0, 1\}$ عملیه ضرب (.) مدنظر

گرفته شود ، جدول عملیه ضرب در ست E طبق ذیل ارائه شـــده

میتواند :

جدول اول

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

سمت تیر مفهوم را که عملیه از ست عناصر مربوط ستون ، بالای ست

عناصر مربوط سطر اجراء شده است نشان میدهد .

روابط ترتیبی که توسط این علامه ارائه میشود در اجرای عملیات که تبدیلی نیستند حائز اهمیت است .

<u>مثال دوم</u> : اگر در $E=\{-1,0,1\}$ عملیه $*$ طبق ذیل :

$x*y=|x|-|y|$ تعریف شود درینصورت

جدول عملیه $*$ در E ذیلاً حاصل میشود :

جدول دوم

$*$	-1	0	1
-1	0	1	0
0	-1	0	-1
1	0	1	0

<u>مثال سوم</u> : اگر در ست $F=\{1,2,3,4,6,12\}$ عملیه " بدست آوردن بزرگترین قاسم مشترک دو عدد " را به $\wedge$ ارائه نمائیم ، در این صورت نتایج عملیه $\wedge$ در F توسط جدول ذیل توضیح شده میتواند :

جدول سوم یا جدول عملیه $\wedge$ در ست F

$\wedge$	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

مثال چهارم : نتایج عملیه تقاطع $\cap$ در ست های فرضی $A=\{a,b\}$ ،
طبق جدول ذیل ارائه شده میتواند :

جدول چهارم

(د)

$\cap$	$\{a\}$	$\{b\}$	A	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\emptyset$
A	$\{a\}$	$\{b\}$	A	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

اکنون اگر جدول مثال چهارم عمیق شویم، بملاحظه میرسد که نتایج عملیه $\cap$ در جدول نظر به قطر اساسی آن (خط L) متناظراً قرار دارند و این بنا بر دلیلی است که عملیه $\cap$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .

این خاصیت را در مثال اول و هم چنان در مثال دوم و سوم فوق مورد بررسی قرار دهید .

تمرینات

۱. اگر یک عملیه * در یک ست E دارای خاصیت اشتراکی باشد ، ثبوت کنید که یک عنصر a شامل E بیشتر از یک تضاد نمیداشته باشد .

۲. هرگاه مستوی P را بحیث ست نقاط و یک عملیه * در مستوی P مد نظر گرفته شود طوریکه برای هر دو نقطه A و B شامل مستوی P : $A*B$ نقطه وسطی A و B را ارائه کند نشان دهید که این عملیه :

(a) . داخلی است .

(b) . از خاصیت اشتراکی پیروی نمیکند .

(c). از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .

(d). عنصر بی تاثیر عملیه * در P موجود نیست .

3. ست : $E=\{0,1\}$ را با عملیه ضرب (•) در E مد نظار بگیرید ،

(a). آیا عملیه ضرب در E داخلی است ؟ و یا خیر ؟

(b). آیا عملیه (•) در E از خاصیت اشتراکی پیروی میکند ؟

(c). آیا عملیه (•) در E از خاصیت تبدیلی پیروی دارد ؟

(d). آیا هرعنصر ست E دارای تضاد شده میتواند ؟

(e). تضاد صفر نظر به عملیهٔ ضرب در E چیست ؟

(f). جدول عملیه ضرب را در E ترتیب کنید .

4 . (a). آیا عملیه جمع در ست اعداد تام جفت داخلی است ؟
و یا خیـــــــر ؟

(b). خواص اشتراکی ، تبدیلی ، موجودیت عنصر بی تاثیر
و وجود عنصر تضاد هرعنصر این ست را نظر به عملیه
جمع مطالعه کنید .

5. اگر در ست $E=\{2,4,5,6,12\}$ عملیه گرفتن کوچکترین مضرب
مشترك را به V نشان دهیم درینصورت :

(a) . جدول عملیه $\vee$ را تشکیل دهید .

(b) . آیا عملیه $\vee$ در E داخلی است ویا خیر ؟

(c) . اگرعملیه $\vee$ در E داخلی نباشد ، کدام عنصر

ازست E حذف شود تا عملیه $\vee$ در E داخلی گردد؟

6 . — (a) . جدول عملیه اتحاد را در بین ست های فرعی ست :

$A=\{a, b, c\}$ تشکیل دهید .

(b) . باساس جدول بگوئید کـــــه :

(i) . آیا عملیه $\cup$ در بین ست های فرعی A

داخلی است و یا خیر ؟

(ii). عنصر بی تاثیر عملیه $\cup$ کدام است ؟

(iii) . آیا عملیه $\cup$ ازخاصیت تبدیلی پیروی میکند ؟

(iv) . آیا هرعنصر (ست فرعی A) دارای یک

عنصر تضاد شده میتواند ؟

(v) . برای تحقیق خاصیت اشتراکی عملیه $\cup$

بکمک جدول چند مرتبه به جدول مراجعه باید نمود ؟

7 . اگر در ست $\mathbb{R}$ عملیه * توسط افاده :

$a * b = a + b + ab$ تعریف شود ،

(a). آیا عملیه * در $\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند ؟

(b). آیا عملیهٔ * در $\mathbb{R}$ از خاصیت اشتراکی پیروی میکند ؟

(c). عنصر بی تاثیر عملیه * در $\mathbb{R}$ کدام است ؟

(d). تضاد عدد 5 را نظر به * در $\mathbb{R}$ دریافت کنید .

(e). کدام عدد حقیقی دارای عنصر تضاد عملیه * در $\mathbb{R}$ نمیباشد

8. اگر در ست $\mathbb{N}$ عملیه * توسط افاده :

$a*b=(a+2b)b$ تعریف شود ،

(a) - $2*1$ و همچنان $3*2$ مکثا $2*3$ را حساب کنید .

(b). آیا عملیه * در $\mathbb{N}$ داخلی است و یا خیر ؟

(c). آیا عملیه * در $\mathbb{N}$:

(i). از خاصیت تبدیلی پیروی میکند ؟

(ii). از خاصیت اشتراکی پیروی میکند ؟

(iii). دارای عنصر بی تاثیر میباشد و یا خیر ؟

9. اگر ست تطبیقات تقابل (بایجکسیون) از E بطرف E درحالیکه $E=\{a,b\}$ است به B ارائه شده و عملیه ترکیب این تطبیقات را به "o" نشان دهیم درینصورت :

(a). نتایج عملیه ترکیب o را باساس جدول ارائه نمائید .

(b). ایضاح نمائید که آیا عملیه o در B داخلی است یا خیر؟

(c). با درنظرداشت عملیه o خواص :

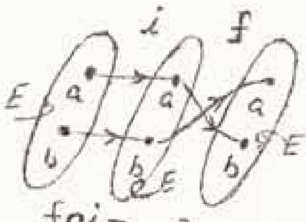
(i). اشتراکی ،

(ii). تبدیلی ،

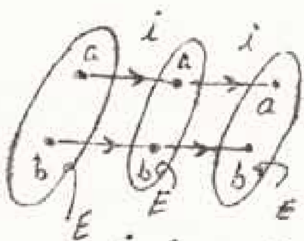
(iii). وجود عنصر بی تاثیر و

(iv). موجودیت عنصر تضاد هر عنصر را بررسی کنید .

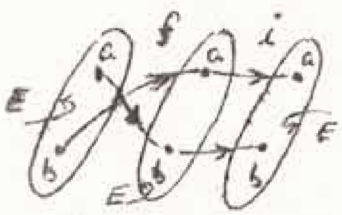
کمک: ست B محض دارای دو عنصر بوده که این دو عنصر طبق اشکال ذیل ترکیب میشود :



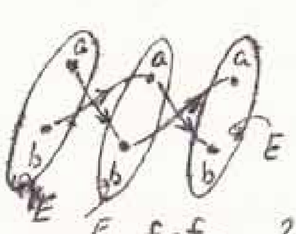
$f \circ i = ?$



$i \circ i = ?$



$i \circ f = ?$



$f \circ f = ?$

۱۵ . اگر عملیه اتحاد $\cup$ در بین ست های فرعی یك ست E مدنظر گرفته شود ، نشان دهید که ϕ عنصر بی تاثیر عملیه $\cup$ است .

حال $A = \{a, b, c\}$ را مدنظر گرفته عنصر تضاد A را در ست های فرعی $E = \{a, b, c, d, e\}$ نظر به عملیه $\cup$ مطالعه نمائید .

علاوه برآن نشان دهید که ϕ تضاد ϕ نظر به عملیه $\cup$ است .

فصـــل دوم

گـــروه GROUP

۱-۲. تعـــریف : یك ست G نظر به یك عملیه * گروه گفته میشود درصورتیکه :

۱. عملیه * در G داخلی باشد .

۲. عملیه * در G از خاصیت اشتراکی پیروی کند .

۳. G نظر به عملیه * دارای یك عنصر بی تاثیر باشد .

۴. هر عنصر G نظر به عملیه * دارای یك عنصر تضاد باشد

تعریف : اگر یك عملیه * در یك گروه G تبدیلی باشد گروه مذکور بنام گروه تبدیلی یا گروه ابیلیـــــن Abelian Group یاد میشود .

مثال اول : ست $\mathbb{N}$ نظر به عملیه جمع (+) یك گروه نیست .

زیرا : خاصیت سوم و چهارم گروه را نقض میکند .

مثال دوم : ست اعداد تام ($\mathbb{Z}$) نظر به عملیه جمع (+) یك گروه تبدیلی است . ولی نظر به عملیه ضرب (.) یك گروه نیست چرا ؟ توضیح دهید .

مثال سوم : ست اعداد نسبتی $\mathbb{Q}$ نظر به عملیه جمع (+) یک گروه تبدیلی است . موضوعرا بررسی نمائید .

مثال چهارم : اگر ساختمان ست $\mathbb{Q}$ را نظر به عملیهٔ ضرب (.) مطالعه نمائیم ، بملاحظه میرسد که عنصر صفر شامل $\mathbb{Q}$ دارای عنصر تضاد (معکوس) عملیه ضرب نیست ، بناءً $\mathbb{Q}$ نظر به عملیه ضرب یک ساختمان گروه را تشکیل نمیکند . ولی اگر عنصر صفر از $\mathbb{Q}$ حذف شود درینصورت $\mathbb{Q}_*$ یعنی $\mathbb{Q}-\{0\}$ نظر به عملیهٔ ضرب یک گروه تبدیلی میشود .

مثال پنجم : ست اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) نظر به عملیه جمع یک گروه تبدیلی است . بهمین قسم ست $\mathbb{R}_*$ یعنی $\mathbb{R}-\{0\}$ نظر به عملیه ضرب یک گروه تبدیلی نیز میشود . موضوعرا بررسی نمائید .

مثال ششم : اگر عملیه ضرب (.) در ست $A=\{-1, 1\}$ مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که A نظر به عملیه ضرب یک گروه تبدیلی است .

زیرا : (1). عملیه ضرب در A داخلی است .

(2). عملیه ضرب در A از خاصیت اشتراکی پیروی میکند .

(3). 1 عنصر بی تاثیر عملیه ضرب در A است .

(4). هر عنصر 1 و -1 ست A دارای تضاد (معکوس) است .

(5). عملیه ضرب در A از خاصیت تبدیلی پیروی میکند .

بنا[۱] ست A نظر به عملیه ضرب (⋅) یک گروه تبدیلی است. اینک غرض سهولت مطالعه خواص فوق ، جدول ضرب در A را ذیلاً مینویسیم :

⋅	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

مثال هفتم : هرگاه یک مثلث متساوی الاضلاع بدور نقطه تقاطع میانه های آن به یک جهت به اندازه :

120° ، 240° و 360° دور داده شود واجرای این عمل دوران توسط افاده : $x \oplus y$ که تاثیر دوران x توسط دوران y تعقیب میشود ارائه گردد ، درینصورت نتیجه دوران مثلث طبق جدول ذیل ارائه میشود :

$\oplus$	120°	240°	360°
120°	240°	360°	120°
240°	360°	120°	240°
360°	120°	240°	360°

ازمطالعه این جدول نتیجه میشود که ست دوران های مثلث مذکور طبق شرایط فوق یک گروه تبدیلی است. موضوعرا بررسی نمائید .

۲-۲. خواص گــــروه هــــا

خاصیت اول : (a).عنصر بی تاثیر د ریك گروه،یگانه است .

(b). هرعنصر کیفی یك گروه محض دارای یك عنصر

تضاد میباشد و بــــس .

ثبوت : جزء (a) را د رصفحهٔ (۱۲) مطالعه نمائید .

(b).فرضا" یك عنصر x شامل گروه G نظر به عملیه $*$

دارای دوعنصر تضاد x' و x'' باشد ، د رینصورت ما داریم :

$$(x' * x) * x'' = x' * (x * x'')$$

و یا . . . .
$$e * x'' = x' * e$$

د رنتیجه : . . . . . .
$$x'' = x'$$

بنا بران هیچکدام یك عنصر x شامل گروه G دارای بیشتراز یــك

تضاد شده نمیتوانـــد .

خاصیت دوم : و یا خاصیت اختصار (ساده ساختن) : برای هــر

عنصر a ، b و c شامل گروه G مساد له : $a * b = a * c$

بشکل : $b = c$ ساده شده میتواند .

ثبوت : چون هر عنصر a شامل گروه G دارای یک عنصر تضاد در G میباشد ، پس اگر تضاد a را در G به a' نشان دهیم درینصورت ما داریم :

چون $a * b = a * c$ . . . . . .

پس . . . $a' * (a * b) = a' * (a * c)$

ویا . . . $(a' * a) * b = (a' * a) * c$ . . . . . . چرا؟

ویا . . . . $e * b = e * c$ . . . . چرا؟

ویا . . . . $b = c$ . . . . چرا؟

درنتیجه : . . . $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ . . . . چرا؟

<u>تطبیق این خاصیت در الجبر :</u>

(1) . باثر این خاصیت گروه افاده های جبری عملیه جمع

مانند : $a + x = a + y$

را بشکل : $x = y$ . . . . . . ساده کرده میتوانیم .

(2) . بنا براین خاصیت گروه افاده های جبری عملیه ضرب را در

$\mathbb{R}_*$ از شکل : $a \cdot x = a \cdot y$

بشکل : . . . $x = y$ . . . . . . ساده نموده میتوانیم .

آیا خاصیت اختصار تحت عملیه ضرب در $\mathbb{R}$ موجود است ؟

خاصیت سوم : معادلات درجه اول (خطی) که شکل عمومی آنها :

$a * x = y$ . . . . است ،

در گروه دارای حل یگانه میباشد .

ثبوت : چون هر عنصر گروه G دارای محض یك تضاد است پس اگر عنصر تضاد a را به a' نمایش دهیم در صورت موجودیت x ما میتوانیم بنویسیم که :

چون . . . . $a * x = b$

پس . . . . . . $a' * (a * x) = a' * b$

ویا . . . . . . $(a' * a) * x = a' * b$ (چرا؟)

ویا . . . . $e * x = a' * b$ (چرا؟)

ویا . . . . $x = a' * b$ (چرا؟)

چون a در G دارای محض یك تضاد a' است پس $a' * b$ یگانه است .

اکنون نشان باید داد که $a' * b$ حل معادله مفروض است .

اگر در معادله فوق $a * x = b$ ، x را به $a' * b$ عوض کنیم ،

$a * (a' * b) = b$ به دست می آید .

و یا . . . . . $(a * a') * b = b$ . . . . چرا ؟

و یا . . . . . $e * b = b$ . . . . چرا ؟

این نشان میدهد که $a' * b$ حل معادله مفروض است .

ازین نتیجه میشود که x به قیمت مساوی به $a' * b$ موجود بوده و $a' * b$ یگانه حل معادله $a * x = b$ اســـت.

تطبیق خاصیت سوم : با استفاده ازین خاصیت گروه معادلات درجه اول (خطی) شکل : $a + x = b$ را در $\mathbb{R}$

بشکل : $x = -a + b$ حل کرده میتوانیم . درینجا $-a$ تضاد a بنابر عملیه جمع در $\mathbb{R}$ است.

بهمین قسم معادله : $a \cdot x = b$ را باثر تطبیق این خاصیت گروه در $\mathbb{R}_*$ به شکل : $x = \frac{1}{a} \cdot b$ حل کرده میتوانیم .

که دراینجا $\frac{1}{a}$ تضاد (معکوس) a بنابر عملیه ضرب در $\mathbb{R}_*$ است.

تبصـــــره : هرگاه یك ست بنا بر یك عملیه دارای ساختمان گروه نباشد درینصورت معادلات درجه اول بشکل : $a * x = b$ در ست مذکور یا دارای هیچ حل نبوده و یا دارای یك ویا چندین حله شده میتواند .

مثال اول : اگر درست $F=\{1,2,3,4,6,12\}$ عملیه (۸)

گرفتن بزرگترین قاسم مشترک دو عدد مورد مطلعه قرار داده شود

در یک صورت :

معادله ٔ : $6 \wedge X = 12$ دارای هیچکدام یک حل نبوده حالانکه

معادله ٔ : $6 \wedge X = 1$ دارای یک حل بوده ،

معادله ٔ : $6 \wedge X = 2$ دارای دو حل ، و همچنان

معادله ٔ : $1 \wedge X = 1$ دارای شش حل میباشد .

برای حل این مثال از جدول شماره (سوم) صفحه (۳۴) استفاده شود .

مثال دوم : اگر عملیه تقاطع ($\cap$) در ست $E=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\phi\}$

مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که E بنا بر عملیه $\cap$ یک گروه نیست .

زیرا : معادله : $\{b\} \cap X = \{a,b\}$ در E دارای حل نبوده

و حالانکه معادله : $\{b\} \cap X = \phi$ دارای دو حل میباشد .

برای تشریح این موضوع از جدول شماره (چهارم) صفحه (۳۴)

استفاده گردد .

تمرینها :

۱ . ثبوت کنید که تضاد یک عنصر در یک گروه خود همان عنصر است .

2 . ثبوت کنید که معادله : $x * a = b$ در یک گروه دارای حل یگانه است .

3-2 . گروه های فرعی . Subgroups

مثال اول : اگر ست اعداد تام جفت را به $E=\{\cdots,-4,-2,0,2,\cdots\}$ نشان دهیم، دیده میشود که ست E بنابر عملیه جمع یک گروه را بوجود می آورد .

زیرا : (1) . حاصل جمع هر جوره اعداد تام جفت یکعدد تام جفت است .

(2) . برای هر عدد تام جفت a ، b و c

رابطهٔ : $(a+b)+c = a+(b+c)$ حقیقت دارد .

صفر (0) عنصر بی تاثیر عملیه جمع در E موجود است .

(4) . برای هر عدد a شامل $\mathbb{E}$ یک عدد $a-$ در $\mathbb{E}$ وجود دارد که رابطهٔ : $(-a)+a = a+(-a) = 0$ را تحقیق میکند .

پس $\mathbb{E}$ نظر به عملیه جمع یک گروه است .

از طرف دیگر ما میدانیم که ست اعداد تام ($\mathbb{I}$) بنا بر عین عملیه جمع نیز یک گروه است . ازینکه $\mathbb{E}$ یک ست فرعی $\mathbb{I}$ است پس میگوئیم که گروه $\mathbb{E}$ گروه فرعی $\mathbb{I}$ بنا بر عملیه جمع است .

تعریف : اگر ست T یک گروه نظر به یک عملیه * باشد، S گروه فرعی T گفته میشود در صورتیکه :

1- S یک ست فرعی T بوده ،

2- S نظر به عین عملیه * یک گروه باشد .

مثال دوم : ست $\mathbb{Q}_*$ یک گروه فرعی ست $\mathbb{R}_*$ نظر به عملیه ضرب میباشد . زیرا :

$\mathbb{R}_*$ نظر به عملیه ضرب یک گروه است .

چون (1) . . . . . $\mathbb{Q}_* \subset \mathbb{R}_*$ است ،

و (2) . . . . . $\mathbb{Q}_*$ نظر به عملیه ضرب یک گروه است

بنا بران . . . $\mathbb{Q}_*$ یک گروه فرعی $\mathbb{R}_*$ است.

مثال سوم : ست مضرب های 5 بنا بر عملیه جمع یک گروه فرعی ست $\mathbb{Z}$ است .

زیرا : ما میدانیم که $\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع یک گروه است .

(1) . ازطرف دیگر $5\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ است .

(2) . اگر ست مضرب های 5 را به $5\mathbb{Z}$ ارائه کنیم ثبوت مینمائیم که $5\mathbb{Z}$ بنا بر عملیه جمع یک گروه است :

— حاصل جمع هرآن دوعدد مضرب های 5 یکعدد مضرب 5 است .

برای هرآن دوعدد a و b شامل $5\mathbb{Z}$ نوشته میتوانیم :

$$a = 5x$$
$$b = 5y$$

درحالیکه x و y شامل $\mathbb{Z}$ اند . ازینجا ما داریم :

$$a + b = 5x + 5y$$
$$= 5(x+y)$$

ازینکه $x+y$ شامل $\mathbb{Z}$ است ، پس $5(x+y)$ شامل $5\mathbb{Z}$ میباشد .

ازین نتیجه میشود که عملیه جمع در $5\mathbb{Z}$ داخلی است .

— برای هرعدد a ، b و c شامل $5\mathbb{Z}$ رابطه :

$(a+b)+c = a+(b+c)$ دارای حقیقت است

زیرا : ازینکه رابطه فوق برای تمام عناصر ست $\mathbb{Z}$ حقیقت پذیر است پس بالضرور برای آن عناصر $\mathbb{Z}$ که مضروب های 5 اند نیز دارای حقیقت میباشد .

— چون صفر (0) مضروب 5 بوده یعنی $5 \cdot 0 = 0$ میشود پس ست $5\mathbb{Z}$ دارای عنصر بی تاثیر عملیه جمع نیز میباشد

— برای هرعدد a شامل $5\mathbb{Z}$ یک عدد $-a$ شامل $5\mathbb{Z}$ موجود است طوریکه صحت رابطه : $a+(-a)=(-a)+a=0$ را تحقیق کند . لذا $5\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع یک گروه است .

بنابران گروه $5\mathbb{Z}$ یک گروه فرعی $\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع است .

<u>تبصره مهمه :</u> اگرست G نظر به عملیه $*$ یک گروه بوده و S ست فرعی G باشد برای ثبوت گروه فرعی بودن S ، در S جستجوی وجود سه خاصیت ذیل لازمی است :

اول — باید که عملیه $*$ در S داخلی باشد .

دوم — باید که عنصر بی تاثیر G شامل S باشد .

سوم — متناظر هرعنصر ست S در خود S موجود گردد .

بنا بر تحقیق سه شرط در فوق این ست فرعی گروه مورد نظر ، یك گروه فرعی آن میباشد .

درینجا ضرور نیست که حقیقت خاصیت اشتراکی در گروه فرعی مورد بررسی قرار داده شود .

زیرا : خاصیت اشتراکی در سر تا سر ستگروه اصلی G تحقیق پذیر بوده ، پس بصورت خود بخودی در ست فرعی آن نیز حکمفرماست .

بهمین قسم ضرور نیست که موجودیت عنصر بی تاثیر و هم چنان وجود عنصر تضاد یك عنصر ست مربوط گروه فرعی بررسی شود ، ولی لازمی است که موقعیت آنها در داخل گروه فرعی S مورد تحقیق قرار داده شود .

تمـــــرینات :

۱ . جدول عملیه * در $A=\{a,b,c\}$ متقابله داده شده است باساس جدول نشان دهید که A بنابر عملیه * یك گروه نیست .

*	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	c	a	b

2. اگر از تأثیر عملیه * در ست $B=\{a,b,e\}$ جدول ذیل نتیجه شود نشان دهید که B نظر به عملیه * یک گروه تبدیلی است . (کمک : غرض سهولت حل مسأله قبول شود که عملیه * در B از خاصیت اشتراکی پیروی میکند .)

*	a	b	e
a	b	e	a
b	e	a	b
e	a	b	e

3. جدول ذیل از تاثیر عملیه ⊙ در $R=\{R_0,R_1,R_2,R_3\}$ تشکیل گردیده است .

⊙	R_0	R_1	R_2	R_3
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2

(a). آیا R نظر به عملیه ⊙ یک گروه میباشد ؟ ویا خیر؟ توضیح نمائید .

(b). ثبوت کنید که $A=\{R_0,R_2\}$ یک گروه فرعی R است .

(c). اگر R_1 دوران به اندازه 90 درجه به اطراف یک نقطه را ارائه کند و ⊙ عملیه ترتیب دوران ها باشد اندازه دوران های R_2 ، R_3 و R_0

را تعیین کنید .

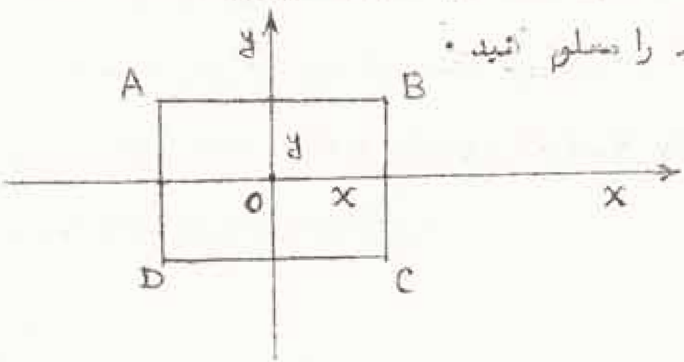
۱۱ . اگر از تاثیر عملیه ⊗ در $F=\{i,j,k,l\}$ جدول ذیل تاسیس شود ، بالفرض عملیه ⊗ در F از خاصیت اشتراکی پیروی کند درینصورت :

⊗	i	j	k	l
i	i	j	k	l
j	j	i	l	k
k	k	l	i	j
l	l	k	j	i

(a) . نشان دهید که جوره F بنا بر عملیه ⊗ یک گروه تبدیلی است.

(b) . آن ست فرعی F را بدست آرید که بنا بر عملیه ⊗ یک گروه فرعی F باشد .

(c) . اگر در مستطیل ABCD مانند شکل ذیل خط $\overleftrightarrow{x}$ و خط $\overleftrightarrow{y}$ محور های تناظر آن باشد ، در صورتیکه تاثیر j تناظر را نظر به محور $\overleftrightarrow{x}$ و تاثیر k تناظر را نظر به محور $\overleftrightarrow{y}$ ارائه کند تاثیر l را معلوم کنید .



(d) ۰ با درنظر داشت جزء (c) درفوق ساختمان جدول را بررسی کنید ۰

۵۰ باساس توضیح مثال سوم (اخیرالذکر) نشان دهید که برای هر عدد n شامل $\mathbb{N}$ ست $n\mathbb{Z}$ یک گروه فرعی $\mathbb{Z}$ نظر به عملیهٔ جمع است ؛

۶۰ آیا ست اعداد تام تاق یک گروه فرعی $\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع میباشد و یا خیر؟ موضوعرا بررسی کنید ۰

۷۰ آیا ست $\mathbb{Z}$ نظر به عملیه ضرب (۰) یک گروه فرعی $\mathbb{Q}_*$ میباشد؟ و یا چطور؟ موضوعرا بررسی کنید ۰

۸۰ آیا ست $\mathbb{R}^+_*$ (ست اعداد حقیقی مثبت بدون صفر) نظر به عملیه ضرب یک گروه فرعی $\mathbb{R}_*$ میباشد ؟ و یا خیر؟ موضوعرا بررسی کنید ۰

۹۰ نشان دهید که $\mathbb{R}^+$ (ست اعداد حقیقی مثبت بشمول صفر) نظر به عملیه جمع یک گروه فرعی $\mathbb{R}$ نمیباشد ۰

۱۰۰ نشان دهید که ست $A=\{x \mid x=10^n, n\in\mathbb{Z}\}$ یک گروه فرعی $\mathbb{R}_*$ نظر به عملیه ضرب میباشد ۰

۱۱. آیا ست $\{-1,1\}$ نظر به عملیهٔ ضرب: (a). یك گروه فرعی

Q_* شده میتواند و یا خیر؟

(b). یك گروه فرعی

$\mathbb{R}$ شده میتواند ویا خیر؟

موضوعرا تحقیق کنید .

۱۲. نشان دهید که $\{0\}$ نظر به عملیه جمع یك گروه فرعی $\mathbb{R}$ است .

۱۳. اگر G یك گروه بوده وعنصر بی تاثیرآن e نامیده شود ،

ثبوت نمائید که $\{e\}$ یك گروه فرعی G میباشد .

2. واکتور های هندسی .

2-4-a. دونقطه ای ها

<u>تعریف</u> : اگر دونقطه A و B درفضاء مدنظر گرفته شود

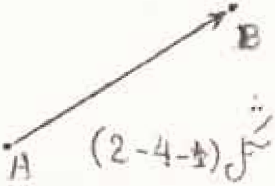
جوره مرتب A و B یعنی (A, B) آرا بنام

دونقطه ای یاد میانیم .

هویداست که اگر $A \neq B$ باشد ،

$(A,B) \neq (B,A)$ میباشد .

برای اینکه ترتیب موقعیت A و B مراعات شود ما دونقطه ای A و B را توسط یک تیر طبق شکل (2-4-1) ارائه مینمائیم ·



شکل (2-4-1)

تذکر باید نمود که تیر از A تا به B فاصله بین دو نقطهٔ A و B را ارائه نکرده بلکه ترتیب موقعیت آنها را نشان میدهد ·

اگر دو نقطه متمائز A و B را در فضا مدنظر بگیریم درینصورت از دو نقطه مذکور چهار جوره مرتب : (A ، A) ، (A ، B) ، (B ، A) و (B ، B) مختلف را تشکیل داده میتوانیم · آیا میدانید که از سه نقطه متمایز A ، B و C فضا چند جوره مرتب تشکیل شده میتواند ؟ همه آنها را بنویسید ·

تعریف : اگر A=B باشد دونقطه ای (A ، B) بنام دونقطه ای صفری یا Null یاد میشود ·

2-4-6 · دونقطه ای های همسان Equipollent

تعریف : دو دونقطه ای (A ، B) و (C ، D) همسان[۱] Equipollent گفته میشوند ، درصورتیکه قطعه خط های $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ مربوط آنها یکدیگر را تنصیف کنند

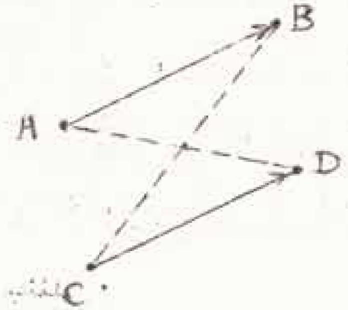
(۱) · در آثار مطبوع ایران «همسنگ» افاده شده است (۴۸)

یا به عبارت دیگر دردونقطه ای (A , B) و (C , D) اگرنقاط

A و D را بحیث طرفین ودونقطهٔ B و C را بحیث وسطین بـ

نظر بگیریم ، دردونقطه ای همسایی همانند قطعه خط های

مربوط نقاط طرفین و وسطین یکدیگر را تنصیف میکند .



حقیقت این موضوع توسط شکل

(2-4-2) توضیح شده میتواند:

همانند بودن دو دونقطه ای

(A , B) و (C , D) را چنین :

$(A, B) /\!/ (C, D)$ ارآئه مینمایند .

شکل (2-4-2)

2-4-C . خواص رابطهٔ همانندی بین دونقطه ای ها ،

اول . خاصیت انعکاسی . هردونقطه ای (A , B)

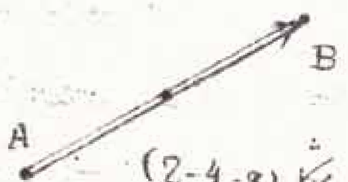
همانند خودش است .

یعنی : ..... $(A , B) /\!/ (A , B)$ ... است

زیـرا : نقطه وسطی قطعه خط

$\overline{AB}$ و نقطه وسطی قطعه خط

$\overline{BA}$ عین نقطه است .

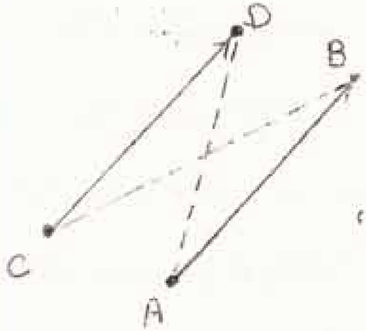


شکل (2-4-3)

دوم • <u>خاصیت تناظری</u> • اگر دونقطه ای (A، B) همانند

دونقطه ای (C، D) باشد، دونقطه ای (C، D) نیز همانند ..

دونقطه ای (A، B) میباشد •



یعنی اگر $(A,B)\nearrow\nearrow(C,D)$ باشد،

پس ... $(C,D)\nearrow\nearrow(A,B)$ میباشد •

زیرا : اگر $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ یکدیگر را تنصیف کنند،

پس $\overline{DA}$ و $\overline{CB}$ یکدیگر را نیز تنصیف

میکنند •

شکل (2-4-4)

سوم <u>خاصیت انتقالی</u> • قبول مینمائیم که دونقطه ای های

همانند خاصیت انتقالی را تعقیب مینمایند •

یعنی اگر : $(A,B)\nearrow\nearrow(C,D)$

و ... $(C,D)\nearrow\nearrow(E,F)$ ...... باشد،

پس ... $(A,B)\nearrow\nearrow(E,F)$ ...... میباشد •

خواننده میتواند که حقیقت این موضوع را توسط رسم یك شکل

مطالعه نمائید •

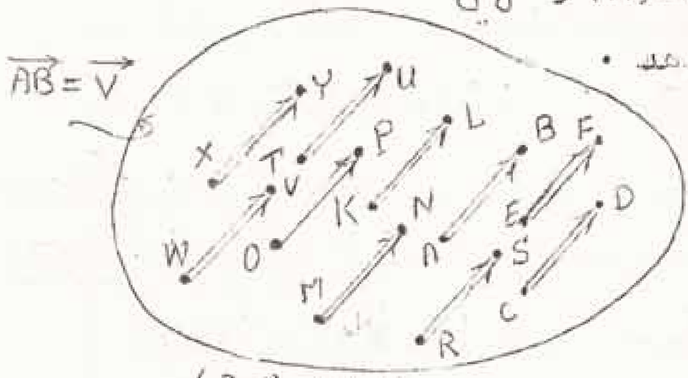
از بررسی هر سه خاصیت فوق نتیجه میشود که رابطه همانندی

درست دونقطه ای ها یك رابطه معادل است •

2-4- وکتور هندسی

تعریف: مجموعه تمام دونقطه ای هائیکه به (A, B) هممانند اند بنام وکتور هندسی دونقطه ای (A, B) یاد میشود وآنرا به $\overrightarrow{AB}$ ارائه مینمایند.
یا به عباره دیگر: وکتور $\overrightarrow{AB}$ عبارت از صنف معادل دونقطه ای (A, B) نظر به رابطهٔ هممانندی است.

صنف معادل وکتورهای هممانند (A, B) را شکل ذیل نشان میدهد.



شکل (2-4-5)

هریک از دونقطه های هممانند (A, B) نماینده صنف معادل $\overrightarrow{AB}$ شده میتوانند وما میتوانیم که آنرا توسط $\overrightarrow{V}$ نیز نشان دهیم.
وکتورهای مربوط دونقطه ای های هممانند عین وکتور است.

در شکل (۵-۴-۲) فوق بمشاهده میرسد که :

ازینکه ...... $(A,B) \nearrow\nearrow (C,D) \nearrow\nearrow (X,Y)$ ...است

پس دربنصورت ...... $\vec{V} = \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{XY}$ میشود .

<u>قضیـــه اول</u> : تمام دونقطه ای های صفری (دونقطه ای هایکه مرکبه اول ودوم آنها با هم مساوی اند) همانند اند .

ثبوت : برای اثبات این حقیقت دونقطه نیفی A و B فضا را مد نظر گرفته ونشان باید داد که (A,A) و (B,B) همانند اند .

چون $\overline{BA}$ و $\overline{AB}$ ..... دارای عین نقطه وسطی است

پس $(B,B) \nearrow\nearrow (A,A)$ ..... میباشد .

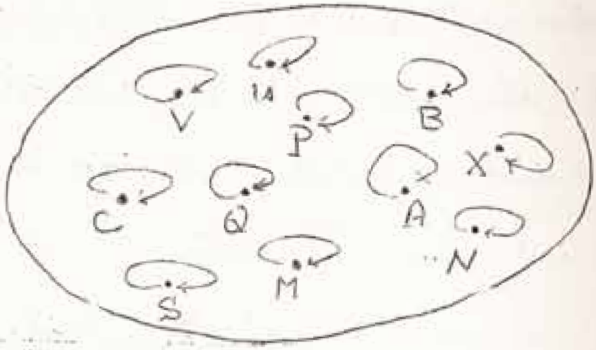
<u>صفـــــروکتور</u> :

<u>تعریف</u> : صنف معادل دونقطه ای های صفری : (A,A)

(B,B) .... (X,X) را بنام صفروکتور یاد نموده وآنرا به $\vec{O}$ ارائه میکنند . یا به الفاظ دیگر :

صنف معادل تمام دونقطه ای هائیکه مرکبه های اول و دوم آنها با هم مساوی اند بنام صفروکتور یاد میشود .

صفر وکتور را طبق شکل (2-4-6) ارائه کرده میتوانیم .



شکل (2-4-6)

ازینکه یك وکتور صنف معادل دو نقطه ای های همانند را ارائه میکند ، پس گفته میتوانیم که به خلاف دو نقطه ای ها وکتور ها دارای مبداء ــ انجام و نقطه وسطی بده نمیتواند . این یکی از خواص مهم وکتور ها بوده و ازین خاصیت وکتور ها در اجرای عملیه جمع وکتوری استفاده مینمائیم .

<u>قضیه نوم</u> و یا قضیه تبدیل وسطین :

اگر .... $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ... . باشد ،

پس .... $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ ... . میباشد .

ثبوت : چون ... . $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ است. ... (قرار مفروض)

پس ... $(A,B)\uparrow\uparrow(C,D)$ است .... (قرار تعریف)

درینصورت $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ یکدیگر را تنصیف میکند .. چرا

و یا اینکه $\overline{AD}$ و $\overline{CB}$ یکدیگر را تنصیف میکند ... چرا ؟

پس گفته میتوانیم که $(A,C)\uparrow\uparrow(B,D)$ است ... چرا؟

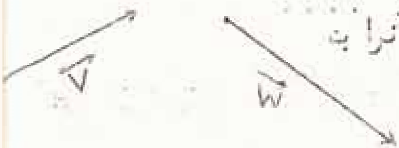
و یا اینکه ... $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ میباشد .

2-5 . جمع وکتورها و خواص آن

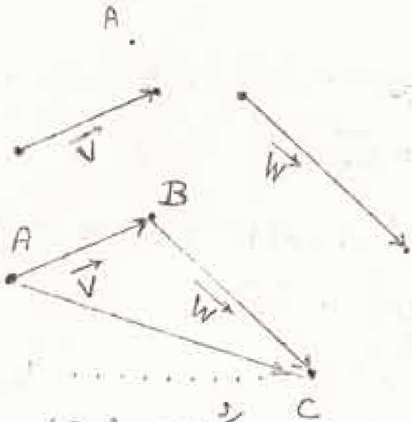
2-5.a . جمع وکتورها

ازینکه دونقطه ای ها در فضا جا های ثابت را اشغال میکنند وما نمیتوانیم که محل آنها را تغیر دهیم درینصورت نمیتوانیم که دونقطه ای را با هم جمع کنیم . ولی ما میتوانیم که دو وکتور را قرار ذیل جمع نمائیم :

دو وکتور $\vec{V}$ و $\vec{W}$ مفروض است ، میخواهیم که حاصل جمع هردو وکتور $\vec{V}$ و $\vec{W}$ را بدست آریم . برای رسیدن باین هدف یک نماینده کیفی وکتور $\vec{V}$ را که عبارت از (A,B) است مدنظر میگیریم . و به همین قسم یک نماینده وکتور $\vec{W}$ را طوری انتخاب مینمائیم که مرکبه اول آن B بوده ، آنرا ب



وآنرا به (B,C) ارائه میکنیم .



شکل (2-4-7)

اینک وکتور $\overrightarrow{AC}$ را حاصل جمع

وکتورهای $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{W}$ مینامیم .

حالا نشان باید داد که تعریف

فوق مربوط بانتخاب نقطه A

نیست .

زیرا اگر بعوض نقطه A کدام نقطه

کیفی A' را انتخاب نموده و به عوض دو نقطه (A,B) یا دو نقطه

های دیگر (A',B') که نماینده دیگر وکتور $\overrightarrow{V}$ باشد انتخاب نمائیم ،

همچنان ما میتوانیم که بعوض (B,C) نماینده دیگر وکتور $\overrightarrow{W}$

یعنی (B',C') را انتخاب نمائیم . حال نشان باید داد که وکتور

های $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{A'C'}$ عین وکتور است . ما داریم :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{V}$$

ازینجا نظر به قضیه تبدیل وسطاین ما نوشته میتوانیم :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

وهمچنان چون . . . . $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{W}$

نظر به قضیه فوق الذکر ما داریم :

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \quad \ldots\ldots (2)$$

از مقایسه روابط (1) و (2) فوق میتوان نوشت :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$$

و یا .... : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ .... (چرا؟)

در نتیجه .... $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ .... (چرا ؟)

ازین ثابت میشود که حاصل جمع دو وکتور $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{W}$ مربوط به انتخاب نقطه A نیست ، بناءً گفته میتوانیم که تعریف فوق حاصل جمع دو وکتور یك تعریف قابل قبول است .

بصورت عموم بنا بر تعریف :

اگر سه نقطه کیفی A ، B و C در فضا مد نظر گرفته شود در ینصورت : $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$ میشود . این مساوات را بنام رابطه شال Chasles یاد می کنند .

2-5-1 . <u>خواص عملیه جمع وکتور ها</u> :

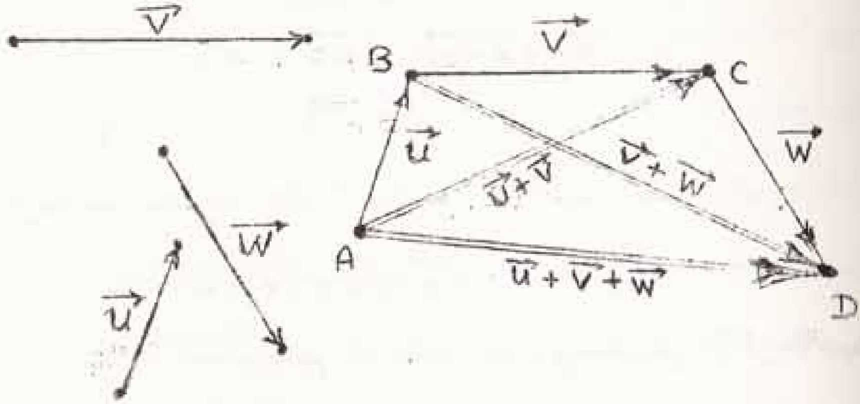
<u>اول : خاصیت داخلی (بسته گی)</u> : عملیه جمع در ست وکتور هایك عملیه داخلی است .

زیرا : قرار تعریف حاصل جمع هر دو وکتور یك وکتور است.

دوم . خاصیت اشتراکی : عملیه جمع در ست وکتور ها اشتراکی است .

ثبوت : سه وکتور کیفی $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ست وکتور ها را مد نظر میگیریم .

اکنون سه نماینده وکتور های : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ را طوری انتخاب مینمائیم که یک یکر را تعقیب نمایند ، مانند شکل (8-4-2) ذیل :



شکل (8-4-2)

حال حاصل جمع ..... $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ را بدست می آوریم.

درینحالت ما داریم :

$$\vec{u}+\vec{v} = \vec{AB}+\vec{BC}$$
$$= \vec{AC}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{AC}+\vec{CD}$$
$$= \vec{AD} \quad \ldots\ldots (1)$$

بهمین قسم حاصل جمع $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ را بدست می‌آوریم .

درین حالت :

$$\vec{v}+\vec{w} = \vec{BC}+\vec{CD}$$
$$= \vec{BD}$$
$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{AB}+\vec{BD}$$
$$= \vec{AD} \quad \ldots\ldots (2)$$

ازمقایسه مساوات های (1) و (2) دیده میشود که :

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

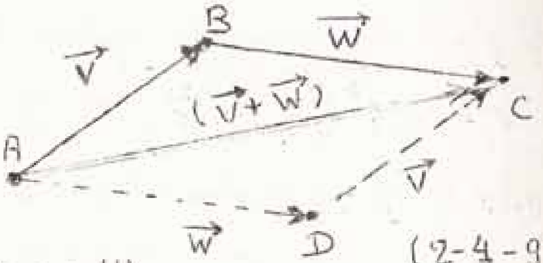
بناءً گفته میتوانیم که عملیه جمع درست وکتور ها ازخاصیت اتحادی

پیروی میکند .

<u>سوم . خاصیت تبدیلی :</u> عملیه جمع درسبت وکتور ها ازخاصیت

تبدیلی پیروی میکند .

اکنون : دو وکتور کیفی $\vec{V}$ و $\vec{W}$ ست وکتورها را مدنظر میگیریم ،
اگر (A,B) نمایندهٔ وکتور $\vec{V}$ و (B,C) نمایندهٔ وکتور $\vec{W}$
مدنظر گرفته شود درینصورت طبق شکل (2-4-9) میتوان نوشت :



$$\vec{V}+\vec{W}=\vec{AB}+\vec{BC}$$
$$=\vec{AC} \cdots\cdots (1)$$

شکل (2-4-9)

اکنون حاصل‌جمع : $\vec{W}+\vec{V}$ را بدست می آوریم .

برای رسیدن باین هدف (A,D) نماینده $\vec{W}$ را طبق شکل (2-4-9) مدنظر میگیریم .

درینصورت ما داریم : .... $\vec{AD}=\vec{BC}=\vec{W}$

نظر به قضیه تغییر وسطین : .... $\vec{AB}=\vec{DC}$ میشود .

ازینجا نتیجه میشود : $\vec{DC}=\vec{V}$

پس .... $\vec{W}+\vec{V}=\vec{AD}+\vec{DC}$
$$=\vec{AC} \cdots\cdots (2)$$

از مقایسه مساوات های (1) و (2) نتیجه میشود که :
$$\vec{V}+\vec{W}=\vec{W}+\vec{V} .$$

بناءً گفته میتوانیم که عملیه جمع درست وکتورها تبدیلی است .

چهارم . خاصیت وجود عنصر بی تاثیر : صفر وکتور عنصر بی تاثیر عملیه جمع درست وکتورها ست .

ثبوت : اگر $\vec{V}$ یك وکتور از کیفی ست وکتورها مد نظر گرفته ،

فرض اثبات : $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$ را بحیث نماینده $\vec{V}$ دو نقطه ای (A,B) و (B,B) را بحیث نماینده $\vec{0}$ انتخاب نمائیم، درینصورت ما داریم :

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{AB} + \vec{BB}$$
$$= \vec{AB}$$
$$= \vec{V}$$

چون عملیه جمع درست وکتورها از خاصیت تبدیلی نیز پیروی میکند ، بناءً میتوان نوشت :

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{V} = \vec{V}$$

پس گفته میتوانیم که صفر وکتور عنصر بی تاثیر عملیه جمع درست وکتور هاست .

پنجم . خاصیت وجود وکتور تضاد یك وکتور : نظر به عملیه جمع ، هر وکتور دارای تضاد درست وکتور هاست .

ثبوت : اگر $\vec{V}$ یک وکتور کیفی ست وکتور ها و (A,B) یک نماینده آن مدنظر گرفته شود دریصورت یک وکتور $\vec{BA}$ درست وکتور ها موجود است که تضاد $\vec{V}$ باشد .

زیرا :
$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$$
$$= \vec{0}$$

بناءً گفته میتوانیم که $\vec{BA}$ تضاد $\vec{AB}$ یعنی $\vec{V}$ است .

معمولاً وکتور تضاد $\vec{V}$ را به $-\vec{V}$ نشان میدهند . ازینجا نتیجه میشود که : $-\vec{AB} = \vec{BA}$ است .

از توضیحات فوق برمی آید که عملیه جمع درست وکتور ها داخلی بوده از خاصیت های اشتراکی و تبدیلی پیروی نموده و ضمناً عنصر بی تاثیر عملیه جمع درست وکتور ها موجود بوده و هر وکتور دارای یک وکتور تضاد نظر به عملیه جمع درست وکتور هاست .

بناءً ادعا مینمائیم که ست وکتور ها بنا برعملیه جمع یک گروه تبدیلی است.

تمـــــــــرینـــــات :

1 . ازچهار نقطه ٔ ثابت فضا ٔ فرضا ً : A ، B ، C و D

چند دو نقطه‌ای بوجود آمده میتواند ؟ آنها را بنویسید .

2 یك ست E را بدست آرید طوریکه وکتور داده شده $\vec{V}$ در آ

موجود بوده وعملیه جمع در E داخلی باشد .

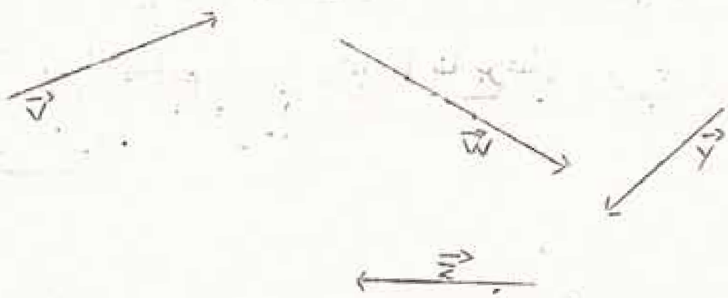
کمك : چون $\vec{V} \in E$ است وهم چنان عملیه جمع درآن

داخلی است .

پـــس $\vec{V}+\vec{V} \in E$ است وعلی‌القیاس . . . .

3. $\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{CB})$ را حساب کنید .

4 . حاصل جمع چهار وکتور اشکال ذیلرا توسط رسم بدست ارید .



5 . اگر صنف معادل دو نقطه‌ای های همانند یک مستوی را بنام وکتور همان مستوی یاد کنیم ، درینصورت نشان دهید که گروه وکتور های مستوی نظر به عملیه جمع یک گروه فرعی وکتور های فضاء است .

6 . اگر دو نقطه‌ای های همانند بالای یک خط مد نظر گرفته شود ، ثبوت کنید که ست وکتور های مربوط این دو نقطه‌ای ها نظر به عملیه جمع یک گروه است .

7 . سه نقطه ثابت A ، B و C یک مستوی را مد نظر بگیرید .
در گروه وکتور های این مستوی معادلات ذیل را برای $\vec{X}$ حل کنید :

$$\vec{AB} + \vec{X} = \vec{AB} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

$$\vec{AB} + \vec{X} = \vec{AC} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

$$\vec{AB} + \vec{X} = \vec{BC} \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

$$\vec{AB} + \vec{X} = \vec{BA} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

$$\vec{AB} + \vec{X} = \vec{O} \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

8 . اگر A و B دو نقطه بوده و I نقطهٔ وسطی آن باشد ، ثبوت نمائید که : $\vec{AI} = \vec{IB}$.

۹ . اگر $\vec{V}$ يك وكتور مفروض ، و $1\times\vec{V}=\vec{V}$

$$2\times\vec{V}=\vec{V}+\vec{V}$$

$$3\times\vec{V}=\vec{V}+\vec{V}+\vec{V}$$

$$\vdots$$

$n\times\vec{V}=\underbrace{\vec{V}+\vec{V}+\vec{V}+\cdots+\vec{V}}_{n \text{ مرتبه}}$ تعريف شود ،

آيا ست $\{n\times\vec{V} \mid n\in\mathbb{N}\}$: نظر به عمليه جمع يك گروه ميشود

و يا خيـــر ؟ حقيقت اين موضوع را بررسى كنيد .

۱۰ . اگر $\vec{V}$ يك وكتور معلوم بوده و $0\times\vec{V}=\vec{0}$

$$-1\times\vec{V}=-\vec{V}$$

$$-2\times\vec{V}=-\vec{V}+(-\vec{V})$$

$$-3\times\vec{V}=-\vec{V}+(-\vec{V})+(-\vec{V})$$

$$\vdots$$

$-n\times\vec{V}=\underbrace{-\vec{V}+(-\vec{V})+(-\vec{V})+(-\vec{V})+\cdots+(-\vec{V})}_{n \text{ مرتبه}}$ (درحاليكه $n\in\mathbb{N}$ است)

تعريف شود ،

ثبوت كنيد كه درين صورت $\{n\times\vec{V} \mid n\in\mathbb{Z}\}$: نظر به عمليه

جمع $(+)$ يك گروه است .

2 - 6 . همشکلـــــــــــی Isomorphism دو گروه و خواص آن

2 - 6 - 6 . همشکلی دو گروه

مثال اول • اگر از تاثیر عملیه ⊕ در $A=\{0,1\}$ جدول I تاسیس گردد از جدول بملاحظه میرسد که A نظر به عملیه ⊕ یك گروه است • همچنان اگر از تاثیر عملیه ضرب (٠) در ست $B=\{-1,1\}$ جدول II تاسیس شود ، از جدول نتیجه میشود که B نظر به عملیه ضرب (•) نیز یك گروه است • از مقایسه این دو جدول نتیجه میشود که اگر بعوض 0 در جدول (I) ، 1 و به عوض 1 آن -1 وضع شود ، جدول II حاصل میشود •

جدول I

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

جدول II

·	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

بااین اساس یك تقابل و یا Bijection f را بین این دو گروه طبق ذیل تعریف میکنیم :

$$A \longrightarrow B$$

$$f:\begin{cases} 0 \longmapsto 1 \\ 1 \longmapsto -1 \end{cases}$$

مبتنی به این مطابقت برای هر عنصر a و b شامل گروه A رابطه

ذیل حقیقت پذیر است : $f(a \oplus b) = f(a) \cdot f(b)$

زیرا : در حالت اول : برای $a = 0$ و $b = 0$

ما داریم :

$$f(a \oplus b) = f(0 \oplus 0)$$
$$= f(0)$$
$$= 1$$
$$\therefore \quad f(a \oplus b) = 1 \cdots\cdots (1)$$

از طرف دیگر: $f(a) \cdot f(b) = f(0) \cdot f(0)$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$
$$\therefore \quad f(a \oplus b) = 1 \cdots\cdots (2)$$

از مقایسه دو مساوات فوق ما داریم :

$$f(a \oplus b) = f(a) \cdot f(b)$$

در حالت دوم ...... فرضاً $a = 1$ و $b = 0$ باشد

درینصورت ما داریم : $f(a \oplus b) = f(1 \oplus 0)$

$$= f(1) = -1$$
$$\therefore \quad f(a \oplus b) = -1 \cdots\cdots (3)$$

از طرف دیگر :

$$f(a)\cdot f(b) = f(0)\cdot f(1)$$
$$= 1\cdot(-1) = -1$$
$$\therefore \quad f(a)\cdot f(b) = -1 \quad \ldots\ldots (4)$$

از مقایسه مساوات های (3) و (4) نتیجه میشود :

$$f(a\oplus b) = f(a)\cdot f(b)$$

حل حالت سوم : ($a=1$ و $b=1$) و همچنان

حل حالت چهارم : ($a=0$ و $b=1$) بحیث تمرین برای خواننده گذاشته شده است .

مثال دوم . اگر عملیه ضرب ($\cdot$) درست $P=\{x \mid x=10^n ,\ n\in \mathbb{I}\}$ مد نظر گرفته شود دیده میشود که $P=\{\cdots,\frac{1}{10^2},\frac{1}{10},1,10,10^2\cdots\}$ نظر به عملیه ضرب یک گروه است . همچنان اگر در $\mathbb{I}$ عملیه جمع (+) مد نظر گرفته شود ، بملاحظه میرسد که $\mathbb{I}$ نظر به عملیه جمع (+) نیز یک گروه است .

اکنون ساختمان ایندو گروه P و $\mathbb{I}$ را طبق ذیل مقایسه میکنیم :

$$\begin{array}{lllllllllll} \mathbb{I}=\{\cdots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ P=\{\cdots, & 10^{-3}, & 10^{-2}, & 10^{-1}, & 10^{0}, & 10^{1}, & 10^{2}, & 10^{3}, & 10^{4}, & \cdots\} \end{array}$$

حال اگر دو عنصر a و b ست $\mathbb{I}$ را باهم جمع نمائیم ، تصویر حاصل جمع آنها 10^{a+b} در P بدست می‌آید . این تصویر عبارت از حاصل ضرب 10^a و 10^b میباشد . ازین نتیجه میشود که بین این دو ست $\mathbb{I}$ و P یك تقابل فرضاً f موجود است که دارای خاصیه ذیل است :

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$$

میگویم که ساختمان $\mathbb{I}$ نظر به عملیه جمع (+) با ساختمان P نظر به عملیه ضرب (•) همشکل اند . این تقابل f بین ست های $\mathbb{I}$ و P را بنام همشکلی Isomorphism یاد میکنند .

تعریف : یك تقابل f از یك گروه G_1 (نظر به یك عملیه *) به یك گروه G_1' (نظر به یك عملیه ⊙) یك همشکلی است درصورتیکه برای هرعنصر a و b شامل G_1 مساوات $f(a*b) = f(a) \odot f(b)$ حقیقت پذیر باشد .

مثال سوم . اگر گروه $\mathbb{R}^+_*$ نظر به عملیه ضرب (•) وگروه $\mathbb{R}$ نظر به عملیه جمع (+) مد نظر گرفته شود اینها دو گروه همشکل اند .

برای اثبات حقیقت فوق ضروری است تا یك تابع فرضاً g را بدست آریم ، طوریکه برای هر عنصر a و b شامل $\mathbb{R}_*^+$ رابطهٔ ذیل موجود گردد

$$g(a \cdot b) = g(a) + g(b)$$

حال اگر مفکوره لوگاریتم $\log$ را در ست اعداد $\mathbb{R}_*^+$ مورد بررسی قرار دهیم درینصورت برای هر عدد a و b ست $\mathbb{R}_*^+$ ما داریم :

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

از رابطهٔ اخیر بوضاحت معلوم میشود که این تابع g مورد نظر عبارت از $\log$ است • درینصورت گفته میتوانیم که $\log$ یك همشکلی را در بین دو گروه $\mathbb{R}_*^+$ و $\mathbb{R}$ بوجود آورده است •

2-6.b . خواص یك همشکلی

خاصیت اول • دریك همشکلی بین دو گروه تصویر عنصر بی تاثیر گروه اول عبارت از عنصر بی تاثیر گروه دوم است•

ثبوت : اگر G نظر به عملیه $*$ یك گروه و e عنصر بی تاثیر عملیه $*$ در G بوده و f یك همشکلی بین دو گروه G و G' باشد ثابت مینمائیم که $f(e)$ عنصر بی تاثیر گروه G' نظر به عملیه $\odot$ میباشد •

زیـــرا : چون f یك تقابل است پس ادعا کرده میتوانیم که برای هرعنصر کیف y شامل G' ، y دارای یك منشأ تصویر فرضاً x در G میباشد • پس ما داریم :

$$f(e) \odot y = f(e) \odot f(x) \quad \ldots\ldots\ldots \text{چرا}$$

$$= f(e * x) \quad \ldots\ldots\ldots \text{چرا ؟}$$

$$= f(x)$$

$$= y$$

بناً بران برای هر y شامل G' ، $f(e) \odot y = y$ گردیده

ازین نتیجه میشود که $f(e)$ عنصر بی تاثیر گروه G' است •

<u>خاصیت دوم</u> • دریك همشکلی تصویر دوعنصر تناد درگروه اول عبارت از دوعنصر تناد درگروه دوم است •

ثبوت : فرضاً a و b دوعنصر تناد یکدیگر درگروه G نظر به عملیه $*$ باشند ، درصورتیکه f یك همشکلی بین دوگروه G و G' باشد ، دربنصورت $f(a)$ و $f(b)$ عناصر تناد یکدیگر درگروه G' بنا برا عملیه مربوط آن فرضاً عملیه $\odot$ میباشد

زیرا : . . . . . $a * b = e$

$$f(a * b) = f(e)$$

$$f(a) \odot f(b) = f(e)$$

چون قرار خاصیت اول f برعنصر بی تاثیر گروه G' نظر به عملیه $\odot$ است

پس $f(a)$ و $f(b)$ تضاد یکدیگر نظر به عملیه $\odot$ میباشند.

خاصیت سوم • اگر f یك همشکلی از گروه G بطرف گروه G'

باشد ، **ایجس** f^{-1} (معکوس f^{-1}) یك همشکلی از

G بطرف G' میباشد •

ثبوت : برای اثبات حقیقت فوق تعقیب دو مرحله ذیل ضروریست :

اول : نشان باید داد که f^{-1} یك تقابل است •

دوم : نشان باید داد که برای هرعنصر a و b شامل G'

مساوات : $f^{-1}(a \odot b) = f^{-1}(a) * f^{-1}(b)$ . . . حقیقت پذیر است.

مرحله اول بنا برحقیقتی که معکوس هرتقابل یك تقابل است ثابت

شده میتواند •

مرحلهٔ دوم طبق ذیل باثبات رسیده میتواند :

چون عناصر a و b شامل گروه G' بوده و f یك تقابل است ،

پس بالضرور دوعنصر x و y در G موجود اند طوریکه :

$$f(x) = a$$

وهمچنان . . . $f(y) = b$ . . . گردد •

ازینجا ما داریم :

$$a \odot b = f(x) \odot f(y)$$
$$= f(x * y)$$

پس ... $f^{-1}(a \odot b) = x * y$

و یا ... $= f^{-1}(a) * f^{-1}(b)$

درنتیجه ... $f^{-1}(a \odot b) = f^{-1}(a) * f^{-1}(b)$ میشود .

تمرینات

1. در سه مثال اول همشکلی ها :

(a). خاصیت اول همشکلی را

(b). خاصیت دوم همشکلی را و

(c). خاصیت سوم همشکلی را مورد بررسی قرار دهید .

2. نشان دهید که بین دوست : $\mathbb{Z}$ و $2\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع $(+)$ یک همشکلی موجود است .

3. نشان دهید که بین $\mathbb{R}^+_*$ نظر به عملیه ضرب و $\mathbb{R}^+_*$ نظر به همین عملیه ضرب مطابقت f طبق ذیل :

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+_* \longrightarrow \mathbb{R}^+_* \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$$

یک همشکلی است .

4 . نشان دهید که مطابقت g بین $\mathbb{R}_*$ و خود $\mathbb{R}_*$ نظر به عملیه ضرب طوریکه :

$$g: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_* \longrightarrow \mathbb{R}_* \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

است ،

یك همشکلی است .

5 . دو جدول ذیل را مدنظر گرفته و بین ساختمان های مربوط این دو جدول یك همشکلی را مطالعه نمائید :

$*$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

$\odot$	1	2
1	1	2
2	2	1

فصل سوم

حلقه ها و ساحه ها

Fields and Rings

3-1. خاصیت توزیعی . Distributive Property

تاکنون (درین کتاب) ما تاثیر و خواص یك عملیه را در یك ست مطالعه نمودیم . حال میخواهیم که تاثیر دو عملیه را همزمان در یك ستمورد بررسی قرار دهیم .

برای توضیح مطلب دو عملیه داخلی $\odot$ و $*$ را در یك ست E مدنظر میگیریم : میگوئیم که عملیه $\odot$ بالای عملیه $*$ از خاصیت توزیعی پیروی میکند درصورتیکه برای تمام عناصر a ، b و c شامل ست E روابط :

$$c\odot(a*b)=(c\odot a)*(c\odot b) \quad \cdots (1)$$

$$(a*b)\odot c=(a\odot c)*(b\odot c) \quad \cdots (2)$$

حقیقت داشته باشد

رابطه (1) فوق را بنام خاصیت توزیعی طرف راست

و رابطه (2) فوق را بنام خاصیت توزیعی طرف چپ یاد میکنند .

اگر عملیه $\odot$ تبدیلی باشد درینصورت اثبات حقیقت یکی از دو مساوات (۱) و (۲) فوق کافی است • زیرا وجود حقیقت یکی ازآنها موجودیت حقیقت دیگرش را تضمین میکند •

مثال اول : اگرعملیه ضرب (•) وعملیه جمع (+) درست اعداد حقیقی مورد نظر گرفته شود ، دیده میشود که برای تمام اعداد حقیقی a ، b و c ،رابطـــه :

$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ حقیقت دارد •

رابطه فوق خاصیت توزیعی طرف راست عملیه ضرب (•) را بالای عملیه جمع (+) توضیح مینمائید •

آیا عملیه ضرب بالای جمع در $\mathbb{R}$ ازخاصیت توزیعی طرف چپ نیز پیروی میکند ؟

مثـــال دوم • اگرعملیات اتحاد ($\cup$) وتقاطع ($\cap$) دربین ست های فرعی یکست مدنظر گرفته شود ، دیده میشود که عملیه اتحاد ($\cup$) بالای تقاطع ($\cap$) ازخاصیت توزیعی پیروی میکند •

همچنان عملیه تقاطع ($\cap$) بالای عملیه اتحاد($\cup$) ازخاصیت توزیعی پیروی میکند •

ثبوت هرد و حقیقت فوق در "جدول حقیقت" مربوط صفحه (۹۳) کتاب : ست ها و استعمال آن ها توضیح یافته است.

تمـــرینات

1 . آیا عملیه ضرب در $\mathbb{R}$ بالای عملیه ($-$) توزیعی است ؟

2 . عملیه تقسیم را در $\mathbb{Q}_*$ بالای عملیه جمع مدنظر گرفته وانضاح دارید :

عملیه تقسیم در Q بالای جمع

(a) . آیا از خاصیت توزیعی طرف چپ پیروی میکند ؟

(b) . آیا عملیه تقسیم بالای جمع در $\mathbb{Q}_*$ از خاصیت توزیعی طرف راست پیروی میکند ؟

3 . در ست پولینوم ها آیا عملیه ضرب بالای عملیه جمع توزیعی است ؟

4 . اگر در $\mathbb{R}_*$ عملیه " به طاقت بلند بردن " را به علامه $\square$ طوریکه $a \square b = a^b$ باشد ارائه نمائیم ، راجع به خاصیت توزیعی طرف چپ و راست این عملیه بالای عملیه ضرب چه گفته میتوانید ؟

5 . اگر A و B دوست بوده و $A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$: تعریف شود ، توسط یک مثال نشان دهید که :

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$. دارای حقیقت است .

راجع به عملیه های ($\cap$) و ($-$) در بین ست ها چه گفته میتوانید ؟

۶ . توسط یک مثال نشان دهید که عملیه ضرب در $\mathbb{N}$ بالای عملیه کوچکترین مضرب مشترک گرفتن ($\vee$) توزیعی است .

آیا این حقیقت را به صورت عموم ثبوت کرده میتوانید ؟

۷ . اگر F ست تمام توابع را از $\mathbb{R}$ به طرف $\mathbb{R}$ که به شکل $\begin{matrix}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto ax\end{matrix}$ باشند ارائه کند ،

ثبوت نمائید که عملیه ترکیب توابع بالای عملیه جمع توزیعی است .

کمک : اگر $f: x\longmapsto ax$

و $g: x\longmapsto bx$

دو عنصر F باشند ، در این صورت ما داریم :

$$f+g : x\longmapsto ax+bx$$

و یا $f+g: x\longmapsto(a+b)x$

از طرف دیگر $f\circ g : x\longmapsto f(g(x))$

طوریکه : $f(g(x))=f(bx)=a\cdot(bx)$

$$=abx$$

بعداً ثبوت باید نمود که

$$f\circ(g+h)=(f\circ g)+(f\circ h)$$

$$(f+g)\circ h=(f\circ h)+(g\circ h)$$

و ...

3-2 . حلقه ها

تعریف : یك ست A نظر بدو عملیه * و ⊙ حلقه گفته میشود درصورتیکه ست A نظر به عملیه * یك گروه تبدیلی بوده و عملیه ⊙ در A : (1) داخلی بوده (2) از خاصیت اشتراکی پیروی کرده و (3) ضمناً عملیه ⊙ بالای عملیه * از خاصیت توزیعی چپ و راست پیروی کند .

مثال اول : اگر عملیه (+) و عملیه ضرب (·) در ست اعداد تام ($\mathbb{Z}$) مد نظر گرفته شود ، بملاحظه میرسد که : اول،ست $\mathbb{Z}$ نظر به عملیه جمع یك گروه تبدیلی است ؛ دوم ، عملیه ضرب در $\mathbb{Z}$ داخلی بوده و از خاصیت اشتراکی نیز پیروی میکند ،چون عملیه ضرب (·) بالای جمع (+) نیز توزیعی است . بنابران $\mathbb{Z}$ نظر بـه (+) و (·) یك حلقه است .

مثال دوم : اگرعملیه جمع (+) وعملیه ضرب (۰) درست پولینوم ها مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که : ست پولینومها نظر به عملیه (+) یك گروه تبدیلی است • ضمناً عملیه ضرب (۰) درست پولینوم ها داخلی بوده واز خاصیت اشتراکی نیز پیروی میکند •
همچنان دیده میشود که عملیه (۰) بالای عملیه (+) درست پولینوم ها ازخاصیت توزیعی چپ و راست پیرووی میکند • بناءً گفته میتوانیم که ست پولینوم ها نظر به عملیات جمع (+) وضرب (۰) یك حلقه است •

خواننده میتواند که حقیقت موضوع فوقرا بحیث تمرین بررسی کند •
کمك : پولینوم صفر عنصر بی تاثیر عملیه (+) درست پولینوم ها اســــــت •

مثال سوم : اگرست پولینوم های درجه دوم و یا کمتر ازدو (به شمول پولینوم صفر) را به P_2 ارائه کنیم ، به ملاحظه میرسد کـــه ست P_2 نظر به عملیه جمع یك گروه تبدیلی بوده ولی نظر بـــه هردو عملیه جمع وضرب یك حلقه نیست •

زیـــرا : (1) عملیه جمع در P_2 داخلی است، یعنی حاصل جمع هردو پولینوم درجه دوم و یا کمتراز دو یک پولینوم درجه دوم و یا کمتراز دو است .

(2). عملیه جمع در P_2 از خاصیت اشتراکی پیروی میکند .

(3). پولینوم صفر که عنصر بی تاثیر عملیه جمع درست پولینوم ها میباشد شامل P_2 است .

(4). برای هر پولینوم درجه دوم ویا کمتراز دو یک پولینوم درجه دوم و یا کمتراز دو در P_2 موجود است که حاصل جمع هر دوی آن ها مساوی صفر میشود .

(5). عملیه جمع در P_2 از خاصیت تبدیلی نیز پیروی میکنـــد .

بموجب پنج خاصیت فوق گفته میتوانیم که P_2 نظر به عملیه جمع یک گروه تبدیلی است .

(6). ازینکه عملیه ضرب در P_2 داخلی نیست، چنانچه حاصلضرب دو پولینوم درجه دوم یک پولینوم درجه چهارم میشود که شامل P_2 نیست، پس درینصورت گفتـــه میتوانیم که P_2 نظر به هردو عملیه جمع و ضرب یک حلقه نمیباشد .

تبصـــره : دوحلقه ای که درمثال اول و دوم فوق توضیح شد ،
دارای عنصر بی تاثیر عملیه دوم نیز میباشند • موجودیت این عنصـر
بی تاثیرعملیه دوم باین دوحلقه ساختمان خصوصی داده و اینگونه
حلقه ها را بنام حلقه‌ای واحدی یاد میکنند •ازینکه درهردو مثال
فوق عملیه دوم ازخاصیت تبدیلی نیز پیروی‌میکنند ، پس اینگونه حلقه
ها را بنام حلقه های تبدیلی نیز یاد میکنند •
ضرور نیست که هرحلقه دارای عنصر بی تاثیر عملیه دوم بوده و یا
اینکه عملیه دوم درآن ازخاصیت تبدیلی پیروی کند •
شما راجع به وجود عنصر بی تاثیر عملیه اول درحلقه ها
چه فکر میکنید ؟

3-3 . خواص حلقـــه هـــا

خاصیت اول • درهرحلقه A اگرعنصر بی تاثیرعملیه اول (*)
را به o ارائه کنیم درینصورت برای هر a شامل A رابطه :
$a \odot o = o$ حقیقت دارد ، که درینجا $\odot$ عملیه دوم را افاده
میکند •

ثبوت : ما داریم : $o = o * o$ (زیرا o عنصر بی تاثیر * است)

پس نوشته کرده میتوانیم: $a \odot 0 = a \odot (0 * 0)$

ویا . . . $a \odot 0 = (a \odot 0) * (a \odot 0)$ (خاصیت توزیعی در حلقه‌ها)

$0 = (a \odot 0)$ (خاصیت اختصار در گروه‌ها)

لـــذا . . . . $a \odot 0 = 0$ . . . میشود .

<u>خاصیـــت دوم</u> . دریک حلقه A اگرتضاد ها نظر به عملیه $*$ به دا-

نشان داده شود دربنصورت برای هرعنصر a و b شامل A

$a \odot (-b) = -(a \odot b)$ میشود .

ثبوت : نظر به تعریف میدانیم که : $-(a \odot b)$ تضاد $(a \odot b)$ است .

یعنی درینصورت :

$(a \odot b) * [-(a \odot b)] = 0$ . . . . (1) میشود .

اکنون ثابت میکنیم که : $a \odot (-b)$ نیز تضاد $(a \odot b)$ است .

زیرا :

$$(a \odot b) * [a \odot (-b)] = a \odot [b * (-b)]$$

$$= a \odot (0)$$

$$= 0 .$$

$$(a \odot b) * [a \odot (-b)] = 0 \quad . . . (2)$$

ازمقایسه روابط (1) و (2) ومتکی به حقیقتی که تضاد یک عنصر در

یک گروه یگانه است ما داریم : $a \odot (-b) = -(a \odot b)$

تمـــرینـــات

1 . اگرعملیات جمع (+) وضرب (·) در $\mathbb{N}$ مدنظر گرفته شود ، آیا $\mathbb{N}$ نظر به این دوعملیه یك حلقه شده میتواند ؟ چـــرا ؟ ؟ موضوعرا بررسی کنید .

2 - دریك حلقه A ثابت کنید که : $0 \odot a = 0$ میشود . درحالیکه 0 عنصر بی تاثیرعملیه * درحلقه A است . (راجع به اینکه آیا عملیه ⊙ در A تبدیلی است ویا خیر ! چیزی نمیدانیم .)

3 . نشان دهید که ست اعداد تام جفت ($2\mathbb{Z}$) نظر به عملیات (+) و (·) یك حلقه ٔ تبدیلی بوده ولی واحدی نیست .

4 . دریك حلقه A نشان دهید که :

$(-a) \odot b = -(a \odot b)$ میشود درحالیکه $-a$ تناظر a نظربه عملیه * است .

5 . خاصیت اول ودوم حلقه را نظر به عملیات جمع (+) وضرب (·) در $\mathbb{Z}$ بررسی کنید .

6 . با استفاده از خواص عملیات جمع (+) وضرب (·) در $\mathbb{R}$ افاده : ...... $(a \circledast b) \odot (c \circledast d)$ را دریك حلقه (A) انکشاف دهید ؛ درحالیکه (⊙) بالای (⊛) توزیعی است .

۰۷ اگر در یک حلقه فرنا "A" علامه گذاری ذیل :

$$a \odot a = a^2$$

و . . . . . $a * a = 2a$ را قبولدار شویم ،

درینصورت : (a) . $(a*b)^2$ را انکشاف دهید .

(b) اگر عملیه $\odot$ در A تبدیلی باشد ،

نشان دهید که :

$(a*b)^2 = a^2 * 2(a \odot b) * b^2$ میشود .

(c) همچنان افاده :

$(a*b) \odot [a*(-b)]$ را انکشاف دهید .

(d) . از بررسی دو جزء (b) و (c) استنتاج نمائید

که در یک حلقه تبدیلی روابط عینیت ها و با مطابقت ها حقیقت

دارد .

۴-۳. <u>حلقه های بورانـــــــی</u>

<u>مثال</u> . ما تمام اعداد تام $\mathbb{Z}$ را نظر به باقیمانده های شان در تقسیم به ۴ به چهار صنف ذیل تصنیف کرده میتوانیم (۱) :

---

(۱) . این چهار ست اعداد عبارت از چهار صنف معادل اند که نظر به رابطهٔ معادل : "مطابق بودن در تقسیم بر ۴" در $\mathbb{Z}$ بدست میآیند . غرض ازدیاد معلومات در جلد دوم این سلسله مراجعه شود .

اول • صنف صفر ($\dot{0}$) : عناصر این صنف را آن اعداد تامی تشکیل میدهند که به 4 پوره تقسیم میشوند ؛ یعنی مضرب های 4 اند • ما این صنف را قرار ذیل ارائه میکنیم :

$$\dot{0}=\{\cdots,-8,-4,0,4,8,12,\cdots\}$$

دوم • صنف یك ($\dot{1}$) : عناصر این صنف را آن اعداد تام تشکیل میدهند که اگر به 4 تقسیم شوند باقیمانده شان 1+ باشد ، ما این صنف را چنین نشان میدهیم :

$$\dot{1}=\{\cdots,-7,-3,1,5,9,13,\cdots\}$$

سوم • صنف دو ($\dot{2}$) : عناصر این صنف را آن اعداد تام تشکیل میدهند که اگر به 4 تقسیم شوند ، درنتیجه 2+ باقی بماند • این صنف عبارت است از :

$$\dot{2}=\{\cdots,-6,-2,2,6,10,14,\cdots\}$$

چهارم • صنف سه ($\dot{3}$) : عناصر این صنفرا آن اعداد تام تشکیل میدهند که اگر به 4 تقسیم شوند باقیمانده شان 3 + گردد • این صنف عبارت است از :

$$\dot{3}=\{\cdots,-5,-1,3,7,11,15,19,\cdots\}$$

اکنون ست E را در صورتیکه : $E = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$ باشد

مد نظر گرفته و در آن عملیه جمع $\oplus$ را طبق ذیل تعریف می‌نمائیم :

حاصل جمع دو صنف مساوی است به صنف حاصل جمع دو عدد کیفی آن

صنف‌ها . بطور مثال :

$$\dot{2} \oplus \dot{3} = \dot{\widehat{6+15}}$$
$$= \dot{9}$$
$$= \dot{1}$$

که درینجا $\dot{9}$ صنفی را ارائه میکند که 9 در آن شامل است .

همچنان :

$$\dot{3} \oplus \dot{3} = \dot{\widehat{7+3}}$$
$$= \dot{10} = \dot{2}$$

بصورت عمومی : $\dot{a} \oplus \dot{b} = \dot{\widehat{a+b}}$

که درینجا $(\dot{\widehat{a+b}})$ صنفی را نشان میدهد که $a+b$ در آن شامل است .

اینک جدول عملیه $\oplus$ را در E طبق ذیل تشکیل میتوان کرد :

$\oplus$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$

اکنون نشان باید داد که $\dot{E}$ نظر به $(\dot{+})$ یک گروه تبدیلی است .

زیرا :ـ عملیه $\oplus$ درست E داخلی است .

ـ عملیه $\oplus$ در E از خاصیت اشتراکی پیروی میکند .

زیرا عملیه جمع (+) در $\mathbb{Z}$ اشتراکی است .

ـ صنف $\dot{0}$ عنصر بی تاثیر عملیه $\oplus$ بوده و در E موجود است .

ـ ازجدول بملاحظه میرسد که تضاد $\dot{0}$ خود $\dot{0}$

تضاد $\dot{1}$ ، $\dot{3}$ ، تضاد $\dot{2}$ خود $\dot{2}$

وتضاد $\dot{3}$ عبارت از $\dot{1}$ میباشد .

ـ چون ساختمان جدول نظر به قطر اساسی آن متناظر

است ، پس $\oplus$ در E از خاصیت تبدیلی نیز پیروی میکند .

اکنون یک عملیه $\odot$ را در E قرار ذیل تعریف میکنیم :
ضرب

حاصل ضرب دو صنف مساویست به صنف حاصل ضرب دو عدد کیفی

آنهـــــا . بطور مثال :

$$\dot{2}\odot\dot{3}=\widehat{(2\cdot 7)}=\dot{14}$$
$$=\dot{2}$$

همچنان : $\dot{0}\odot\dot{2}=\widehat{(-4)\cdot(-6)}=\dot{24}=\dot{0}$

بصورت عموم : $\dot{a}\odot\dot{b}=\dot{(a\cdot b)}$

در اینجا $\dot{(a\cdot b)}$ صنفی را ارائه میکند که $(a\cdot b)$ در آن شامل است

اینک جدول عملیه $\odot$ را در E طبق ذیل ترسیم میتوان کرد :

$\odot$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

به مشاهده میرسد که E نظر به $\odot$ یک گروه نیست .

زیرا : از جدول دیده میشود که عملیه $\odot$ در E داخلی ، اشتراکی و تبدیلی بوده وعلاوه برآن $\dot{1}$ عنصر بی تاثیر عملیه $\odot$ در E است ، ولی $\dot{2}$ در E نظر به $\odot$ تضاد ندارد .

یعنی ما کدام عنصری مانند α را در E پیدا کرده نمیتوانیم که رابطهٔ

$$\dot{2}\odot\alpha=\alpha\odot\dot{2}=\dot{1}$$ را تحقیق کند .

بناءً گفته میتوانیم که E نظر به عملیه $\odot$ یک گروه نیست .

اکنون نشان باید داد که عملیه ⊙ بالای ⊕ از خاصیت توزیعی پیروی میکند • اگر سه عنصر کیفی : $\dot{a}$ ، $\dot{b}$ و $\dot{c}$ ست E را مدنظر بگیریم، (درحالیکه a ، b و c شامل II اند) ، درینصورت میتوان نوشت :

$$\dot{a}\odot(\dot{b}\oplus\dot{c})=\dot{a}\odot(\overset{\cdot}{\overline{b+c}})$$ ... (نظر به تعریف جمع)

$$=\overset{\cdot}{\overline{a\cdot(b+c)}}$$ ... (چـــرا ؟)

$$=\overset{\cdot}{\overline{(a\cdot b)+(a\cdot c)}}$$ ... (چـــرا ؟)

$$=\overset{\cdot}{\overline{(a\cdot b)}}\oplus\overset{\cdot}{\overline{(a\cdot c)}}$$ ... (چـــرا ؟)

$$=(\dot{a}\odot\dot{b})\oplus(\dot{a}\odot\dot{c})$$ ... (چـــرا ؟)

لـــذا $\dot{a}\odot(\dot{b}\oplus\dot{c})=(\dot{a}\odot\dot{b})\oplus(\dot{a}\odot\dot{c})$

چون عملیهٔ ⊙ در E تبدیلی است ، پس ثبوت شد که عملیهٔ ⊙ بالای عملیهٔ ⊕ توزیعی است •

الحال توضیحات فوق را طبق ذیل خلص و نتیجه گیری مینمائیم :

1- E نظر به ⊕ یك گروه تبدیلی است •

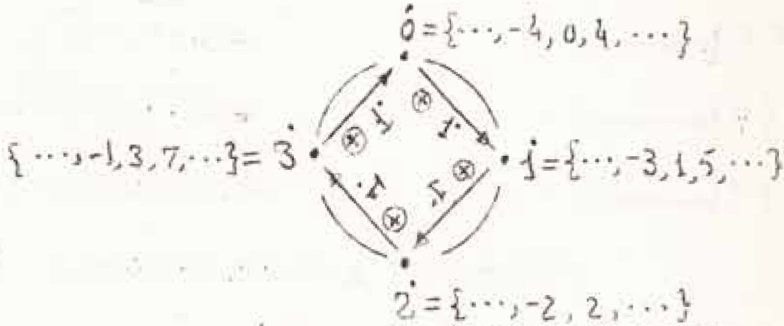
2- عملیه ⊙ در E :

(a) · داخلی است ،
(b) · اشتراکی است ،
(c) · بالای ⊕ توزیعی است •

لذا E نظر به هر دو عملیه $\oplus$ و $\odot$ یک حلقه است .

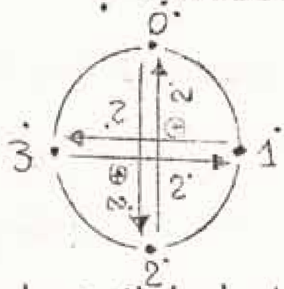
علاوه بر آن چون عملیه $\odot$ در E تبدیلی بوده و $\dot{1}$ عنصر بی تاثیر عملیه $\odot$ در E است ، بناءً گفته میتوانیم که E نظر به هر دو عملیه مذکور یک حلقه تبدیلی واحدی است .

حلقه فوق را توسط اشکال ذیل نمایش میتوان داد :



در شکل فوق تاثیر $\dot{1}\oplus$ نشان داده شده است .

اکنون شکل ذیل را مطالعه کنید :



در شکل فوق تاثیر $\dot{2}\oplus$ ارائه شده است .

بررسی تاثیر $\dot{0}\oplus$ و همچنان تاثیر $\dot{3}\oplus$ را توسط اشکال بحیث تمرین

برای خواننده واگذار میشویم .

متکی بحقیقت مربوط اشکال فوق ما حلقه E را بنام حلقه دورانی مود ولو چهار مینامیم .

تمرینات

1. باساس جدول عملیه $\oplus$ در صفحه (۸٦) معادلات ذیل را در E حل کنید :

$\dot{1} \oplus \dot{x} = \dot{3}$.(a)

$\dot{x} \oplus \dot{3} = \dot{1}$.(b)

$\dot{x} \oplus \dot{2} = \dot{0}$.(c)

$\dot{x} \oplus \dot{x} = \dot{0}$.(d)

$\dot{2} \oplus \dot{x} = \dot{1}$.(e)

(f). .... معادله مربوط (d) چند حله دارد ؟

(g). .... از کجا میدانید که معادلات مربوط (a)،(b)و(c) دارای یک یک حل اند ؟

2. باساس جدول عملیه $\odot$ در فوق صفحه (۸۸) معادلات ذیل را در E حل کنید :

(a). $\dot{1} \odot \dot{x} = \dot{3}$

(b). $\dot{x} \odot \dot{3} = \dot{1}$

(c). $\dot{x} \odot \dot{2} = \dot{0}$

(d). $\dot{x} \odot \dot{x} = \dot{0}$

(e)....... هرکدام از معادلات فوق دارای چند حل میباشند ؟

3. باساس جدول های عملیه $\oplus$ و عملیه $\odot$ در فوق قیمت $\dot{x}$ را در هریک از معادلات ذیل بدست آرید :

(a). $(\dot{2} \odot \dot{x}) \oplus \dot{1} = \dot{0}$

(b). $(\dot{x} \odot \dot{3}) \oplus \dot{2} = \dot{1}$

(c). $(\dot{x} \oplus \dot{1}) \odot \dot{3} = \dot{2}$

(d). $(\dot{x} \oplus \dot{2}) \odot \dot{2} = \dot{2}$

(e)....... تعداد حله هریک از معادلات فوق را بررسی کنید .

4 . کدام عناصر ست E فوق دارای تضاد عملیه ⊙ میباشند ؟

5 . آیا ست $E_* = E - \{\dot{0}\}$ نظر به عملیه ⊙ یک گروه شده میتواند ؟ چرا ؟ موضوع را بررسی کنید .

6 . اگر عملیه تقسیم بر 3 در ست اعداد تام $\mathbb{Z}$ مدنظر گرفته شود ، تمام اعداد تام را باساس باتیماندهٔ آنها (که یا 0 ، یا 1 ، و یا 2 است) به سه صنف دسته بندی کرده میتوانیم . ست صنوف $\dot{0}$ ، $\dot{1}$ و $\dot{2}$ بنام ست اعداد تام دورانی مودولو 3 یاد میشود و آنرا به $\mathbb{Z}/(3)$ نشان میدهند .

(a) . نشان دهید که ست $\mathbb{Z}/(3)$ نظر به عملیه جمع ⊕ و ضرب ⊙ یک حلقه است .

(b) . ست $(\mathbb{Z}/(3))_* = \mathbb{Z}/(3) - \{\dot{0}\}$ نظر به عملیه ضرب کدام ساختمان جبری را تاسیس میکند ؟

(c) . جدول عملیه ⊙ را در $(\mathbb{Z}/(3))_* = \{\dot{1}, \dot{2}\}$ و هم چنان جدول عملیه (·) در $A = \{-1, 1\}$ تاسیس و با هم مقایسه کنید .

5-3 . ساحه ها

مثال اول : اگر عملیه های جمع (+) و ضرب (.) در ست Q مد نظر گرفته شوند، دیده میشود که Q نظر به هردو عملیه جمع (+) و ضرب (.) یک حلقه واحدی است . علاوه برآن اگر عنصر بی تاثیر عملیه جمع (+) یعنی 0 از Q حذف شود، دیده میشود که $Q_1 = Q - \{0\}$ نظر به عملیه ضرب (.) نیز یک گروه است . ساختمان جبری که Q نظر به هردو عملیه جمع (+) و ضرب (.) طبق فوق بوجود آورده است بنام ساحه (Field) یاد میشود .

تعریف : ساختمان جبری ای که نظر به دو عملیه * و ⊙ یک حلقه واحدی بوده و هر عنصر این حلقه بجز از عنصر بی تاثیر عملیه * دارای عنصر تناظر عملیه ⊙ باشد بنام ساحه یاد میشود .

تبصره : معمولاً عملیه اول (*) یک ساحه را عملیه جمع (+) که عنصر بی تاثیر آن صفر است تشکیل داده و بهمین قسم عملیه دوم ⊙ آنرا عملیه ضرب (.) تشکیل میدهد وعنصر بی تاثیر آن 1 نامیده میشود .

تضاد یك عنصر a آنرا نظر به عملیه جمع به $-a$ (منفی a) نشان داده و تضاد این عنصر a را نظر به عملیه ضرب a^{-1} (معکوس a) ارائه میکنند .

لیمــا : در یك ساحه حاصلضرب هرآن دو عدد خلاف صفر یکعدد خلاف صفراست .

ثبوت : اگر دو عدد a و b طوریکه $a \neq 0$ و $b \neq 0$ شامل ساحه F را مدنظر بگیریم ، درینصورت : $a \cdot b \neq 0$ میشود .

زیرا : اگر $a \cdot b = 0$ گردد ، چون F یك ساحه است ، پس در آن a^{-1} موجود است .

درینصورت ما داریم :

$$a \cdot b = 0$$
$$a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0$$
$$1 \cdot b = 0$$
$$b = 0$$

ازینجا .... $b = 0$ میشود ،

حالانکه نتیجه اخیر خلاف فرضیه ما که $b \neq 0$ است میباشد .

بناء بران ...... $a\cdot b \neq 0$ میشود ...

نتیجه : در یك ساحه F اگر $a\cdot b=0$ باشد ، بالضرور $a=0$ و یا $b=0$ و یا هردو یعنی : a و b صفرمیباشد .

قضیـــــه : اگر F نظر به دو عملیه جمع (+) و ضرب (·) یك ساحه باشد درینصورت : $F_* = F-\{0\}$ نظر به عملیه ضرب نیز یك گروه است .

ثبوت : ازینکه F نظر به هردو عملیه جمع (+) و ضرب (·) یك ساحه است ، پس عملیه ضرب (·) در F_* داخلی است .

زیـــرا : حاصلضرب هردو عدد F_* ، خلاف صفر بوده و یك عنصر F_* است و همچنان عملیه ضرب در F_* اشتراکی بوده و 1 عنصر بی‌تاثیر عملیه ضرب در F_* موجود است و برای هرعنصر a شامل F_* یك عنصر a^{-1} معکوس a در F_* موجود است طوریکه رابطه :

$a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$ را صدق میکند .

چون a^{-1} مساوی صفر شده نمیتواند (چرا؟)، پس a^{-1} در F_* شامل است .

بناء بران F_* نظر به عملیه ضرب (·) یك گروه است .

مثـــال دوم : اگرست اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ نظر به دو عملیه جمع و ضرب مدنظر گرفته شود ، دیده میشود. که $\mathbb{R}$ نظر به عملیه جمع یك گروه تبدیلی است . همچنان اگرست $\mathbb{R}$ نظر به عملیه ضرب مورد بررسی قرار داده شود ، به ملاحظه میرسد که :

ـ عملیه ضرب در $\mathbb{R}$ داخلی بوده و از خاصیت اشتراکی پیروی میکند .

ـ عدد 1 عنصر بی تاثیر عملیه ضرب در $\mathbb{R}$ موجود است .

ـ پس $\mathbb{R}$ نظر به هردو عملیه جمع و ضرب یك حلقه واحدی است .

علاوه برآن برای هرعدد a شامل $\mathbb{R}$ (درصورتیکه $a \neq 0$) یکعدد معکوس a یعنی a^{-1} در $\mathbb{R}$ موجود است طوریکه رابطه :

$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ را تحقیق میکند .

بنابرآن $\mathbb{R}$ نظر به هردو عملیه جمع $(+)$ و ضرب $(\cdot)$ یکساحه است .

ازینکه عملیه ضرب $(\cdot)$ در $\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی نیز پیروی میکند ، پس میگوئیم که $\mathbb{R}$ نظر به هردو عملیه جمع و ضرب یك ساحه تبدیلی است .

تبصـــــره : درین کتاب ما ساختمان ساحه های را که تبدیلی میباشند مورد مطالعه قرار میدهیم . ثبوت شده میتواند که هر ساحه منتهی (قابل شمار) تبدیلی است .

ولی ساحه های موجود است که نا منتهی (غیـــــر قابل شمار)

بوده و تبـــدیـــلی نیستند ·

<u>مثـــال سوم</u> · اگر حلقهٔ دورانی مودولو 3 یعنی $A=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2}\}$:

را نظر به عملیات جمع $\oplus$ و ضرب $\odot$ مدنظر بگیریم ، درینصـــورت

A نظر به هردو عملیه $\oplus$ و $\odot$ یك ساحه تبدیلی است ·

زیرا : اگر جدول عملیه ضرب در A طبق شکل ذیل تاسیس شود ،

دیده میشود که $\dot{1}$ عنصر بی تاثیر عملیه ضرب در A موجود است ·

علاوه برآن تضاد $\dot{1}$ نظر به عملیه ضرب $\odot$ در A خود $\dot{1}$ بوده

وهمچنان تضاد $\dot{2}$ نظر به عملیه ضرب $\odot$ در A خود $\dot{2}$ میباشد .

پس گفته میتوانیم که هر عنصر

$\odot$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

ه شامل A بدون $\dot{0}$

دارای یك تضاد میباشد ·

بناءً برآن A نظر به هردو

عملیه جمع $\oplus$ وضرب $\odot$

یك ساحه است·

ازینکه جدول عملیه ضرب در A نظر به قطر اساسی تناظری است ،

بناءً ادعا میتوان کرد که A یك ساحه تبدیلی است·

تمـــــرینات

1 . ثابت کنید که در یک ساحه F تعداد هر عنصر $F_* = F - \{0\}$ نظر به عملیه ضرب (.) خلاف صفر است .

2 . نشان دهید که ساختمان حلقه پولینوم ها نظر به عملیات : جمع و ضرب یک ساحه شده نمیتواند .

3 - ثبوت کنید که ساختمان ست کسور پولینوم ها نظر به عملیات : جمع و ضرب یک ساحه تبدیلی است .

4 . ثابت کنید که ساختمان حلقه دورانی مودولو 4 نظر به عملیات: جمع و ضرب یک ساحه شده نمیتواند .

5 . ثابت کنید که ساختمان حلقه دورانی مودولو 5 نظر به عملیات : جمع و ضرب یک ساحه است .

6 . یک حلقه دورانی مودولو n را نظر به عملیات جمع و ضرب درصورتیکه n یک عدد اولیه نباشد مدنظر بگیرید .

(۸) . ثابت کنید که دو صنف غیر صفر درین حلقه موجود شده میتواند طوریکه حاصلضرب آنها مساوی به صفر گردد .

(b). ازین استنتاج نمائید که ساختمان این حلقه یك ساحه نیســــــت .

کمــــك : چون n یکعدد غیر اولیه است پس $n = p \cdot q$ گردیده که درینصورت p و q خلاف n میباشد .

فصـــل چهـــارم

فضـــــای وکتـــــوری

VECTOR SPACE

۱-۴ . معـــرفـــی فضـــای وکتوری

در فصل دوم ما راجع به ست وکتورهای هندسی صحبت نمودیم . ضمناً در آن فصل عملیه جمع وکتورها را معرفی کردیم و بملاحظه رسید که ساختمان ست وکتورهای هندسی نظر به عملیه جمع وکتوری یک گروه تبدیلی است . ما میدانیم که اگر یک وکتور را در یک عدد حقیقی ضرب کنیم در نتیجه یک وکتور حاصل میشود . ولی این عملیه ضرب در ست وکتورها یک عملیه داخلی نیست . زیرا : این عملیه ضرب در ست وکتورها داخلی گفته میشد درصورتیکه وکتور ضرب در وکتور میگردید . قرار تعریف عملیه ضرب اعداد حقیقی را در یک وکتور بنام عملیه خارجی یاد میکنند .

عملیه ضرب اعداد حقیقی در ست $\mathcal{V}$ وکتورها دارای خواص ذیل اســـت :

خاصیت اول • عدد 1 ضرب یک وکتور $\vec{v}$ عبارت از خود وکتور $\vec{v}$ است •

یعنی برای هر $\vec{v}$ شامل V ما داریم :

$$1 \times \vec{v} = \vec{v}$$

خاصیت دوم • برای هر عدد حقیقی k و k' و هر وکتور $\vec{v}$ مساوات

$(k \cdot k') \times \vec{v} = k \times (k' \times \vec{v})$ حقیقت دارد •

خاصیت سوم • برای هر عدد حقیقی k و k' و هر وکتور $\vec{v}$

مساوات : $(k + k') \times \vec{v} = k \times \vec{v} + k' \times \vec{v}$ حقیقت پذیر است •

خاصیت چهارم • برای هر عدد حقیقی k و هر وکتور $\vec{v}$ و $\vec{w}$

مساوات : $k \times (\vec{v} + \vec{w}) = k \times \vec{v} + k \times \vec{w}$ حقیقت پذیر است •

تعریف : ساختمان هر گروه تبدیلی با عملیه ضرب
در اعداد حقیقی که دارای هر چهار خاصیت فوق
باشد یک فضای وکتوری حقیقی (1) را تاسیس میکند •

مثال اول • اگر درست V وکتورهای هندسی که نظر به عملیه جمع وکتوری یک گروه تبدیلی است ،عملیه ضرب در اعداد حقیقی مد نظر گرفته شود ، ساختمان جدیدی که این گروه وکتورها نظر به عملیه

(1) بعد ازین بعوض اصطلاح "فضای وکتوری حقیقی" ما محض "فضای وکتوری" را استعمال میکنیم •

ضرب در اعداد حقیقی بوجود می‌آورد یک فضای وکتوری است ،
زیرا هر چهار خاصیت فوق در آن حقیقت پذیر است .

مثال دوم . اکنون اگر ساختمان حاصلضرب کارتی $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ یعنی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ را نظر به عملیه $\oplus$ که ذیلاً تعریف میشود مورد بررسی قرار دهیم، در مرحله اول دیده میشود که این ساختمان یک گروه تبدیلی است . در مرحله دوم با در نظر داشت عملیه ضرب این گروه در $\mathbb{R}$ نشان باید داد که این ساختمان یک فضای وکتوری است .

در مرحله اول ، ما میدانیم که :

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$$

اکنون عملیه جمع $\oplus$ را در بین جوره های مرتب یعنی عناصر $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ طبق ذیل تعریف مینمائیم :

$$(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',\ y+y')$$

1- از رابطهٔ فوق نتیجه میشود که عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ داخلی است . زیرا حاصل جمع هر دو جورهٔ مرتب یک جورهٔ مرتب است .

2- عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ از خاصیت اشتراکی پیروی میکند.
یا بعبارت دیگر برای هر جوره مرتب (a,b) :

(c,d) و (x,y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ رابطه :

$$((a,b)\oplus(c,d))\oplus(x,y)=(a,b)\oplus((c,d)\oplus(x,y))$$

حقیقت دارد .

زیرا : حقیقت رابطهٔ فوق از تعقیب خاصیت اشتراکی عملیه جمع $(+)$ در $\mathbb{R}$ بآسانی ثابت شده میتواند .

3 – جورهٔ مرتب $(0,0)$ ، که در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ موجود است ، عنصر بی تاثیر عملیه $\oplus$ میباشد .

زیرا : برای هرجوره مرتب (x,y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ما داریم :

$$(x,y)\oplus(0,0)=(x+0\;,\;y+0)$$
$$=(x,y)$$

و همچنان ..... $(0,0)\oplus(x,y)=(x,y)$

4 – برای هر عنصر (x,y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یك عنصر $(-x,-y)$ نظر به عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ موجود میشود طوریکه رابطه ذیل را تحقیق کند :

$$(x,y)\oplus(-x,-y)=(x+(-x),\;y+(-y))$$
$$=(0,0)$$

5 - عملیه $\oplus$ در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ از خاصیت تبدیلی پیروی میکند.

زیرا: برای هر (a,b) و (x,y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ رابطه:

$(x,y)\oplus(a,b)=(a,b)\oplus(x,y)$ حقیقت پذیر است.

حقیقت رابطهٔ فوق از تعقیب خاصیت تبدیلی عملیهٔ

جمع $(+)$ در ست $\mathbb{R}$ بآسانی ثابت شده میتواند.

بنا بر توضیحات فوق ما ادعا کرده میتوانیم که ساختمان $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ نظر

به عملیه $\oplus$ یك گروه تبدیلی است.

در مرحله دوم ساختمان جدیدی که از ضرب کردن عناصر گروه $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

در اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ بوجود می‌آید طور ذیل مطالعه مینمائیم:

برای هر جورهٔ مرتب (x,y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و هر عدد حقیقی k

عملیه ضرب k در (x,y) را قرار آتی تعریف میکنیم:

$$k\times(x,y)=(k\cdot x\,,\,k\cdot y)$$

درینصورت ما داریم:

اول. برای هر جورهٔ مرتب (x,y):

$$1\times(x,y)=(1\cdot x\,,\,1\cdot y)$$
$$=(x,y)$$

دوم • برای هر عدد k و k' شامل $\mathbb{R}$ و هر (x , y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ،

رابطه: $(k\cdot k')\times(x,y)=k\times(k'\times(x,y))$ حقیقت دار

زیرا: $(k\cdot k')\times(x,y)=(k\cdot k'\cdot x\,,\,k\cdot k'\cdot y)$

$$=k\times(k'\cdot x\,,\,k'\cdot y)$$

$$=k\times(k'\times(x,y))$$

سوم • برای هر عدد k و k' شامل $\mathbb{R}$ و هر جورهٔ مرتب (x , y) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ رابطهٔ :

$(k+k')\times(x,y)=k\times(x,y)+k'\times(x,y)$ حاوی حقیقت است

زیرا :

$$(k+k')\times(x,y)=((k+k')\cdot x\,,\,(k+k')\cdot y)$$

$$=(k\cdot x+k'\cdot x\,,\,k\cdot y+k'\cdot y)$$

$$=(k\cdot x\,,\,k\cdot y)+(k'\cdot x\,,\,k'\cdot y)$$

$$=k\times(x,y)+k'(x,y)$$

چهارم • برای هر عدد حقیقی $\mathbb{R}$ و هر جوره مرتب (x , y) و (a , b) شامل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ رابطهٔ :

$k\times((x,y)+(a,b))=k\times(x,y)+k\times(a,b)$ دارای حقیقت است

زیرا :

$$
\begin{aligned}
k\times((x,y)+(a,b)) &= k\times(x+a,\, y+b) \\
&= (k\cdot(x+a),\, k\cdot(y+b)) \\
&= (k\cdot x+k\cdot a,\, k\cdot y+k\cdot b) \\
&= (k\cdot x,\, k\cdot y)+(k\cdot a,\, k\cdot b) \\
&= k\times(x,y)+k\times(a,b)
\end{aligned}
$$

بنا بر توضیحات فوق نتیجه میشود که ، با درنظرداشت عملیه ضرب عناصر گروه $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ دراعداد حقیقی ساختمان جبری جدیدی که پیدا میشود یك فضای وکتوری است .

مثال سوم . اگرست تمام پولینوم ها را به $\mathbb{P}$ نشان دهیم ما میدانیم که این ست $\mathbb{P}$ نظر به عملیه جمع (+) یك گروه تبدیلی است .
اکنون با درنظرداشت عملیه ضرب (.) عناصر $\mathbb{P}$ دراعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ساختمان جدیدیکه حادث میشود یك فضای وکتوری است .

زیرا :

۱ - برای هر پولینوم p ما داریم :

$$1\times p = p$$

۲ – برای هر پولینوم p و هر عدد حقیقی k و k' ما داریم :

$$(k \cdot k') \times p = k \times (k' \times p)$$

3 – همچنان برای هر پولینوم p و هر عدد حقیقی k و k'

ما داریم : $(k + k') \times p = (k \times p) + (k' \times p)$

۴ – بالاخره برای هر پولینوم p و p' و هر عدد حقیقی k

ما داریم : $k \times (p + p') = (k \times p) + (k \times p')$

در نتیجه گفته میتوانیم که ست پولینوم ها یک فضای وکتوری است .

مثال چهارم . ست تمام ترادف ها را به S ارائه کرده و عملیه جمع

(+) را در ست S قرار ذیل تعریف می‌نمائیم :

حاصل جمع هر دو ترادف عبارت از یک ترادف سومی

است ، طوریکه حد n ام این ترادف از حاصل جمع حد

n ام های هر دو ترادف مفروض حاصل میگردد .

مثلاً : حاصل جمع دو ترادف u و v را قرار ذیل بدست

می‌آریم : اگر ...

$$u = (0, 3, 4, 7, 8, 10, \ldots)$$

و ... با شد

$$v = (1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$$

در اینصورت :

$$u + v = (1, 7, 11, 17, 21, 26, \ldots)$$

پس درینصورت: $u+v = (1,7,11,17,21,26,\dots)$ میشود.

اینك نشان میدهیم که G نظر به عملیه جمع (+) یك گروه تبدیلی است.

زیرا:

1 – حاصل جمع هرآن دو ترادف یك ترادف است.

2 – عملیه جمع درست ترادف ها از خاصیت اشتراکی پیروی میکند.

3 – ترادف که تمام حدود آن از صفر ساخته شده باشد عنصر بی تاثیر عملیه جمع درست ترادف ها است.

4 – برای هر ترادف یك ترادف درست ترادف ها موجود است طوریکه حاصل جمع این دو ترادف عنصر بی تاثیر عملیه جمع ست ترادفها میگردد. این ترادف عبارت از ترادفی است که هر جمله آن تضاد حد متقابل ترادف اولی است.

5 – عملیه جمع درست ترادف ها از خاصیت تبدیلی پیروی میکند.

بنا براین گفته میتوانیم که ساختمان جبری ست S ترادف ها نظر به عملیه جمع یک گروه تبدیلی است •

تبصــــره :ـ از خاصیت عملیه جمع درست اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) هر یک خاصیت فوق باثبات رسیده میتوانـــند •

حال اگر عملیه ضرب S را در $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته و ساختمان جدید که پیدا میشود مورد مطالعه قرار دهیم دیده میشود که این ساختمان جدید جبری یک فضای وکتوری است •

غرض وضاحت موضوع عملیه ضرب عناصر S را در $\mathbb{R}$ قرار ذیل تعریف میکنیـــــم :

اگر تمام جملات یک ترادف را در یک عدد حقیقی k ضرب نمائیم ترادف جدیدی که پیدا میشود عبارت از حاصلضرب ترادف اولی به عدد k است •

بطور مثال : اگر $u = (0, 3, 4, 7, 8, 10, \cdots)$ باشد ،
پس $k \times u = (0, 3k, 4k, 7k, 8k, 10k, \cdots)$ میشود •

عملیه ضرب اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) در عناصر S دارای خواص ذیل است :

اول — برای هر ترادف S شامل $\mathcal{S}$ ما داریم :

$$1 \times S = S$$

دوم — برای هر ترادف S و هر عدد حقیقی k و k' ما داریم :

$$(k \cdot k') \times S = k \times (k' \times S)$$

سوم — همچنان برای هر ترادف S و هر عدد حقیقی k و k'

ما داریم : . . .

$$(k + k') \times S = (k \times S) + (k' \times S)$$

چهارم — بالاخره برای هر ترادف S و S' و هر عدد حقیقی k

ما داریم : . . .

$$k \times (S + S') = (k \times S) + (k \times S')$$

بناءً برآن ادعا میتوان نمود که ساختمان $\mathcal{S}$ فضای وکتوری است .

تبصره :— از مطالعه امثال فوق نتیجه میشود که ساختمان فضای وکتوری یك پایهٔ اساسی ریاضیات را تشکیل داده و در شعب مختلفه ریاضیات : الجبره ، هندسه و انالیز موارد استعمال زیاد دارد .

۲.۴ علامه گذاری در یك فضای وکتوری :

در یك فضای وکتوری V علامه گذاری ذیل معمول است :

۱ — عناصر یك فضای وکتوری V را بنام وکتور یاد میکنند . چنانچه

اگر x عنصر یك فضای وکتوری V باشد آنرا به $\vec{x}$ ارائه نموده و بنام وکتور x یاد مینمایند ·

2- عملیه گروه ای مربوط فضای وکتوری را جمع نامیده و به علامه " + " ارائه میکنند ·

3- اگر وکتور a یعنی $\vec{a}$ یکعنصر فضای وکتوری باشد متضاد آنرا به $-\vec{a}$ در V نشان میدهند ·

4- عنصر (وکتور) بی تاثیر عملیه جمع فضای وکتوری V را صفر وکتور نامیده و به $\vec{O}$ ارائه میکنند ·

5- برای اینکه عملیه ضرب در یك فضای وکتوری V از عملیه ضرب (·) در $\mathbb{R}$ (که داخلی است) تمیز شود درین کتاب ما عملیه ضرب یك عدد حقیقی k را در عناصر فضای وکتوری V توسط علامهٔ " $\times$ " نشان میدهیم ·

مثلاً : برای هر عدد حقیقی k و هر وکتور $\vec{x}$ فضای وکتوری حاصل ضرب $\vec{x}$ در k را به $k \times \vec{x}$ ارائه مینمائیم ·

۳-۴. خواص اولیه فضای وکتوری :

خاصیت اول • برای هر عدد حقیقی k ما داریم :

$$k \times \vec{O} = \vec{O}$$

ثبوت :

$$k \times \vec{O} = k \times (\vec{O} + \vec{O})$$

$$= (k \times \vec{O}) + (k \times \vec{O})$$

چون فضای وکتوری یک گروه بوده و تمام خواص آنرا داراست ،

پس در یک فضای وکتوری ما اختصار کرده میتوانیم .اگر از اطراف مساوات

فوق $k \times \vec{O}$ را طرح کنیم درنتیجه ما داریم :

$$\vec{O} = k \times \vec{O}$$

$$\text{و یا} \cdots\cdots\quad k \times \vec{O} = \vec{O}$$

خاصیت دوم • در یک فضای وکتوری V برای هر وکتور $\vec{x}$ ما داریم :

$$0 \times \vec{x} = \vec{O}$$

ثبوت :

$$0 \times \vec{x} = (0 + 0) \times \vec{x}$$

$$0 \times \vec{x} = (0 \times \vec{x}) + (0 \times \vec{x})$$

پس از اختصار ما داریم :

$$\vec{O} = 0 \times \vec{x}$$

$$\text{و یا} \cdots\cdots\quad 0 \times \vec{x} = \vec{O}$$

خاصیت سوم • در یک فضای وکتوری V اگر $k \times \vec{x} = \vec{0}$ باشد ،

یا $k = 0$ ویا $\vec{x} = \vec{0}$ میباشد •

ثبوت : درصورتیکه $k = 0$ باشد پس موضوع حل است •

اگر $k \neq 0$ باشد درینصورت ما اطراف معادله : $k \times \vec{x} = \vec{0}$

مفروض را به $\frac{1}{k}$ ضرب مینمائیم • درینصورت ما داریم :

$$\frac{1}{k} \cdot (k \times \vec{x}) = \frac{1}{k} \times \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{k} \cdot k\right) \times \vec{x} = \vec{0}$$

$$1 \times \vec{x} = \vec{0}$$

پس . . . . $\vec{x} = \vec{0}$

تبصره :— از بررسی این خواص بملاحظه میرسد که قبولی هر چهار خاصیت ضرب یکعدد حقیقی k درعناصر یک فضای وکتوری V ضروریست ، زیرا اگراز قبولی کدام یک از خواص چهارگانه مذکور ابا ورزیده شود این خواص فضای وکتوری ثابت شده نمیتواند •

خاصیت چهارم • برای هر وکتور $\vec{x}$ یک فضای وکتوری V ما داریم :

$$(-1) \times \vec{x} = -\vec{x}$$

ثبوت : چون $-\vec{x}$ تضاد $\vec{x}$ در V بوده و یگانه است ، درین جا نشان باید داد که $(-1) \times \vec{x}$ نیز تضاد $\vec{x}$ است •

ما داریـــــم :

$$\vec{x} + (-1) \times \vec{x} = 1 \times \vec{x} + (-1) \times \vec{x}$$
$$= (1 + (-1)) \times \vec{x}$$
$$= 0 \times \vec{x} = \vec{0}$$

بنا برآن $(-1) \times \vec{x} = -\vec{x}$

تبصـــــره : ما میدانیم که ساختمان یک فضای وکتوری باساس پنج اصل ساختمان گروه تبدیلی و چهار اصل ضرب عناصر فضای وکتوری در یکعدد حقیقی بناء یافته است ، ولی قابل تذکر است که اصل تبدیلی گروه آن مستقل نبوده ، و از هشت اصل متباقی استخراج شده میتواند .

ثبوت : برای هر وکتور $\vec{x}$ و $\vec{y}$ یک فضای وکتوری V افاده : $(1+1) \times (\vec{x} + \vec{y})$ بدو طریقه ذیل محاسبه شده میتواند :

اول :

$$(1+1) \times (\vec{x} + \vec{y}) = (1+1) \times \vec{x} + (1+1) \times \vec{y}$$
$$= 1 \times \vec{x} + 1 \times \vec{x} + 1 \times \vec{y} + 1 \times \vec{y}$$
$$= \vec{x} + \vec{x} + \vec{y} + \vec{y} \quad \cdots\cdots (1)$$

دوم :

$$(1+1)\times(\vec{x}+\vec{y}) = 1\times(\vec{x}+\vec{y}) + 1\times(\vec{x}+\vec{y})$$
$$= 1\times\vec{x}+1\times\vec{y}+1\times\vec{x}+1\times\vec{y}$$
$$= \vec{x}+\vec{y}+\vec{x}+\vec{y} \quad \cdots\cdots (2)$$

ازمساوات های (1) و (2) ما مینویسیم :

$$\vec{x}+\vec{x}+\vec{y}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{x}+\vec{y}$$

بعد از اختصار : ...... $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

ازمساوات اخیر نتیجه میشود که اصل تبدیلی در یک فضای وکتوری مستقل نبوده و از دیگر اصول آن استحصال شده میتواند •

تمرینــــــات

1. ثابت کنید که ساختمان $\mathbb{R}$ یک فضای وکتوری است •

2. در رابطه : $k\times(k'\times\vec{x})=(k\cdot k')\times\vec{x}$ عملیه "×" از خاصیت اشتراکی پیروی نمیکند • چـــرا ؟

3. جدول : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ را که در آن a ، b ، c و d شامل $\mathbb{R}$ بوده و بنام متریکس یاد میشود مدنظر بگیرید •

(a). اگر عملیه جمع (+) را در ین متریکس قرار ذیل تعریف نمائیم

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$$

ثابت نمائید که ساختمان این ست متریکس‌ها نظر به عملیه (+) یک گروه تبدیلی است.

(b) · اگر حاصل ضرب یک متریکس در یک عدد حقیقی k طبق ذیل تعریف شود:

$$k \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a & k \cdot c \\ k \cdot b & k \cdot d \end{pmatrix}$$

ثابت کنید که ساختمان گروه متریکس‌ها یک فضای وکتوری است.

4 · ثابت کنید که ساختمان ست تمام پولینوم های درجه دوم و کمتر از دو یک فضای وکتوری است.

5 · ست تمام تطبیق ها از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ را به A ارائه کرده و عملیه جمع را در A قرار ذیل تعریف می‌کنیم: برای هر تطبیق f و g شامل A:

$$\begin{aligned} f+g:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x)+g(x) \end{aligned}$$

مثلاً: اگر

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto |x| \end{aligned}$$

باشد ....

در اینصورت :

$$f+g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt[3]{x} + |x|$$ ..... میباشد.

(a). نشان دهید که ست A نظر به این عملیه جمع یك گروه تبدیلی است.

(b). اگر عملیه ضرب هر عدد حقیقی k را در هر تطبیق f شامل A طبق ذیل تعریف کنیم :

$$k \times f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto k \cdot f(x)$$

ثبوت کنید که ساختمان جبری (A) فضای وکتوری است.

6 . ثبوت کنید که در هر فضای وکتوری V برای هر $\vec{a}$ شامل V رابطه : $2 \times \vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$ ..... حقیقت دارد.

7 . ثبوت کنید که در هر فضای وکتوری V حل معادله : $\vec{x} + \vec{x} = \vec{a}$ یگانه است.

8 . آیا حل معادله : $x + x = a$ ... در هر گروه یگانه است؟

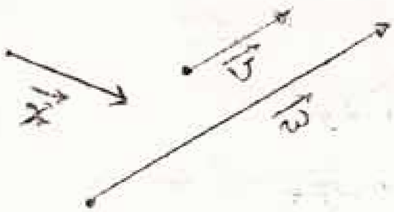
9 . آیا میدانید که خواص فضای وکتوری مربوط کدام خاصیت کدام عملیه در ست $\mathbb{R}$ است؟

۹-۴. ترکیبات خطی

۹-۴-۲. ترکیبات خطی یک وکتور

تعریف : هر وکتوری که بشکل $k \times \vec{a}$ درآورده شده بتواند (درصورتیکه k یکعدد حقیقی است) بنام ترکیب خطی وکتور $\vec{a}$ یاد میشود.

مثال اول. نظر به شکل (۴-۹-۱) در فضای وکتوری وکتور هندسی $\vec{w}$ یک ترکیب خطی $\vec{v}$ بوده و $\vec{O}$ هم یک ترکیب خطی $\vec{v}$ میباشد.



شکل (۴-۹-۱)

زیرا : $\vec{w} = 3 \times \vec{v}$ میشود،

که درینجا $k = 3$ و $\vec{v} = \vec{a}$ است.

وهم $\vec{O} = 0 \times \vec{v}$ است،

که درینجا $k = 0$ میباشد.

در شکل فوق $\vec{w}$ یک ترکیب خطی $\vec{x}$ نیست. چرا؟

در مثال فوق چون $2 \in \mathbb{N}$ وهم $5 \in \mathbb{N}$ است .

پس $(2,5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ است .

با استفاده از تعریف ~~تطبیق~~ عملیه جمع را در $\mathbb{N}$ طبق ذیل

ارائه کرده میتوانیم :

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$$
$$(2,5) \xmapsto{+} 7$$
$$(x,y) \xmapsto{+} x+y$$

مثال دوم : اگر عملیه تفریق (—) را در $\mathbb{N}$ مد نظر بگیریم بملاحظه میرسد

که در بعضی حالات حاصل تفریق دو عدد طبیعی یکعدد طبیعی

نیست .

مثلاً : $2-5=-3$ میشود . درین مثال اگرچه $2 \in \mathbb{N}$ وهم

$5 \in \mathbb{N}$ بوده ولی فرق آنها یعنی -3 ~~طبیعی~~ نه میباشد .

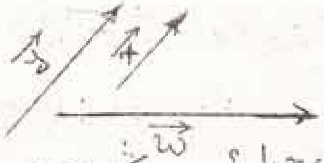
پس درینصورت میگوئیم که عملیه تفریق در $\mathbb{N}$ یک مطابقت را بوجود نه آورد .

ازینکه حاصل تفریق هرآن دو عدد طبیعی ($\mathbb{N}$) یکعدد تام ($\mathbb{Z}$)

میباشد پس ما میتوانیم بنویسیم :

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{-} \mathbb{Z}$$
$$(2,5) \xmapsto{-} -3$$
$$(x,y) \xmapsto{-} x-y$$

که در اینجا $k_1 = 3$ و $k_2 = 2$ میباشد .



شکل (4-4-3)

در شکل (4-4-3) وکتور $\vec{w}$ یك ترکیب خطی دو وکتور موازی $\vec{x}$ و $\vec{y}$ نیست ، چرا ؟

مثال دوم . اگر فضای وکتوری پولینوم درجه دوم وکمتر از دو را به P_2 ارائه کنیم و در آن دو وکتور $\vec{a}$ و $\vec{b}$ شامل P_2 را ، درصورتیکه : $\vec{a} = x^2 - 1$ و $\vec{b} = 2x+3$ باشند ، مد نظر بگیریم پولینوم . . . ، $\vec{v} = 2x^2+6x+7$ یك ترکیب خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است .

زیرا :

$$\begin{aligned}\vec{v} = 2x^2+6x+7 &= (2x^2-2)+(6x+9)\\ &= 2(x^2-1)+3(2x+3)\\ &= 2\times\vec{a}+3\times\vec{b}\end{aligned}$$

پس . . . . . . $\vec{v} = 2\times\vec{a} + 3\times\vec{b}$

همچنان پولینوم $\vec{0}$ ترکیب خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است .

زیرا : $\vec{0} = 0\times(x^2-1)+0\times(2x+3)$ بوده

پس $\vec{0} = 0\times\vec{a} + 0\times\vec{b}$ میشود .

۲-۲-۲ . ترکیب خطی سه وکتور

تعریف : هر وکتور $\vec{v}$ که به شکل :

$$\vec{v} = k_1 \times \vec{a} + k_2 \times \vec{b} + k_3 \times \vec{c}$$

در حالیکه k_1 ، k_2 و k_3 اعداد حقیقی اند ، تجزیه شده بتواند ، بنام ترکیب خطی هر سه وکتور $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ یاد میشود .

مثال اول . اگر ست متریکس ها (جدول ها) دو در دو مدنظر گرفته شود درینصورت متریکس $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ یك ترکیب خطی سه متریکس : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ میباشد .

زیـــرا :

$1 \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ میشود .

اما متریکس : $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ یك ترکیب خطی سه متریکس داده شده نمیباشد . چـــرا ؟ توضیح کنید .

مثال دوم . در فضای وکتوری $\mathbb{R}^3$ اگر $\vec{a} = (1,0,0)$ ، $\vec{b} = (0,1,0)$ و $\vec{c} = (0,0,1)$ مدنظر گرفته شود ، در ینصورت : $\vec{v} = (-3,4,-5)$

یک ترکیب خطی هر سه وکتور $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ است .

زیرا :

$$\vec{v}=(-3,4,-5)=(-3,0,0)+(0,4,0)+(0,0,-5)$$
$$=-3\times(1,0,0)+4\times(0,1,0)+(-5)\times(0,0,1)$$
$$=(-3)\times\vec{a}+4\times\vec{b}+(-5)\times\vec{c}$$

پس $\vec{v}=(-3)\times\vec{a}+4\times\vec{b}+(-5)\times\vec{c}$

آیا هر عنصر کیفی $(x ، y ، z)$ فضای وکتوری $\mathbb{R}^3$ یک ترکیب خطی سه وکتور $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ میباشند ؟ چـــرا ؟

ط - ۴ - ۲ . ترکیـــب خطی n وکتور

تعریف : هر وکتور $\vec{v}$ ای که به شکل :

$$\vec{v}=k_1\times\vec{a}_1+k_2\times\vec{a}_2+k_3\times\vec{a}_3+\cdots+k_{n-1}\times\vec{a}_{n-1}+k_n\times\vec{a}_n$$ ،

در حالیکه k_1 ، k_2 ، .... ، k_{n-1} و k_n اعداد حقیقی اند ، آورده شده بتواند ، بنام ترکیب خطی وکتور های : $\vec{a}_1$ ، $\vec{a}_2$ ، $\vec{a}_3$ ، ... ، $\vec{a}_{n-1}$ و $\vec{a}_n$ یاد میشود .

وکتور $\vec{v}$ را به $\sum_{i=1}^{n} k_i\times\vec{a}_i$ نیز ارائه میکنند .

بطور مثال :

اگر فضای وکتوری پولینوم های درجه n ام و کمتر از n را

به P_n ارائه کنیم درینصورت پولینوم $\vec{X}$:

$$\vec{X} = k_n \times x^n + k_{n-1} \times x^{n-1} + \cdots + k_2 \times x^2 + k_1 \times x^1 + k_0 \times x^0$$

یک ترکیب خطی پولینوم های : $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^1, x^0$

میباشد . درینجا k_n ، k_{n-1} ، k_{n-2} ، ..... و k_0 اعداد

حقیقی را ارائه میکنند .

تمـــرینات

1. ثبوت کنید که $(2, 3)$ در $\mathbb{R}^2$ ترکیب خطی $(1, 0)$ و $(0, 1)$ است

2. آیا یک پولینوم درجه سوم ترکیب خطی دو پولینوم درجه دوم شده

میتواند ؟ ویا خیر؟ چـــرا ؟

3. ثبوت کنید که پولینوم $x+1$ ترکیب خطی پولینوم های :

x^2+x و x^2-1 میباشد .

4. ثبوت کنید که جوره مرتب $(2, 2)$ یک ترکیب خطی $(2, 2)$

در $\mathbb{R}^2$ است .

۵. نشان دهید که متریکس : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ترکیب خطی متریکس های : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ است .

6. نشان دهید که متریکس : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ترکیب خطی متریکس های : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ شده نمیتواند .

۷. ترادف ثابت : $(1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ را با ترادف : $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ مدنظر بگیرید ،

(a) . ثبوت کنید که هر ترادف ثابت $(a, a, a, a, \ldots)$ یك ترکیب خطی ترادف ثابت فوق است .

(b) . نشان دهید که تصاعد حسابی ای که فرق مشترك شان 3 و حد اول آن 2 باشد یك ترکیب خطی هردو ترادف مفروض است .

(c) . ثبوت کنید که هر تصاعد حسابی یك ترکیب خطی هر دو ترادف مفروض است .

4-5. فضای وکتوری فرعی

تعریف : S یک فضای وکتوری فرعی فضای وکتوری V گفته میشود درصورتیکه :
اول $S \subset V$ بوده ودوم تحت عین عملیه V یک فضای وکتوری است S نیز یک فضای وکتوری باشد .

تبصره : برای بررسی شرط دوم ضروریست تا ده اصل فضای وکتوری بالای ست S تحقیق شود ، ولی ازینکه $S \subset V$ است درینصورت آن اصولی که برای تمام عناصر V قابل تصدیق است برای تمام عناصر S نیز قابل تصدیق میباشد .

درینصورت ما از بررسی اصول : اشتراکی ، تبدیلی وچهار اصل ضرب یک عدد حقیقی در وکتورها صرف نظر میتوان نمود . اینک درذیل قضیه ائی را معرفی مینمائیم تا به کمک آن فضای وکتوری فرعی بودن یک ست فرعی یک فضای وکتوری را بصورت آسان مورد مطالعه قرارداده بتوانیم :

قضیه : اگر V یك فضای وکتوری و S یك ست فرعی غیر خالی V باشد برای اینکه S یك فضای وکتوری فرعی V ثابت شود) موجودیت دو حقیقت ذیل کافی است :

اول • عملیه جمع در S داخلی باشد ،

دوم • حاصلضرب هر وکتور کیفی شامل S در هر عدد حقیقی شامل S گردد • (۱)

ثبوت : قرار فرضیه $S \subset V$ است و اکنون ثابت باید کرد که S نیز یك فضای وکتوری نظر به عین عملیه V است •

در مرحله اول : نشان باید داد که S یك گروه تبدیلی است ، و این حقیقت دارد • زیرا :

1 – عملیه جمع در S داخلی است •(قرار فرضیه)

2 – عملیه جمع در S از خاصیت اشتراکی پیروی میکند • (قرار تبصره) •

---

(۱) ــ در این صورت میگویند که S ، نظر به عملیات جمع و ضرب در اعداد ، مستقر است .

3 - چون S یك ست فرعی غیر خالی V است پس اقلاً یك

عنصر $\vec{a}$ در S شامل میباشد و در صورت که این $\vec{a}$

را در عدد حقیقی صفر ضرب کنیم، باساس جزء دوم این

فرضیه ما داریم :

$$0 \times \vec{a} \in S$$

$$\vec{0} \in S \quad \ldots \quad \text{ویا}$$

ازین نتیجه میشود که عنصر بی تاثیر عملیه جمع یعنی $\vec{0}$

شامل S میباشد .

4- برای هر وکتور $\vec{b}$ شامل S نظر به جزء دوم فرضیه میتوان

نوشت که :

$$(-1) \times \vec{b} \in S \quad \ldots \quad \text{بوده}$$

$$\text{اما} \quad (-1) \times \vec{b} = -\vec{b}$$

$$\text{پس} \quad -\vec{b} \in S \quad \ldots \quad \text{است} .$$

ازاین نتیجه میشود که هر عنصر کیفی S دارای یك

تناظر در S میباشد .

٥ - نظر به تبصره عملیه جمع در S تبدیلی است .

بناءً گفته میتوانیم که S نظر به عملیه جمع یك گروه تبدیلی است .

<u>درمرحلهٔ دوم</u> : چون هرعنصر S ضرب هرعدد حقیقی شامل S است ونظر به تبصره این عملیه ضرب عناصر S در اعداد حقیقی هرچهاراصل اخیرفضای وکتوری را تحقیق میکند

بناءًا ادعا میتوان نمود که S یك فضای وکتوری بوده و درنتیجه یك فضای وکتوری فرعی V میباشد .

<u>مثال اول</u> . ست پولینوم های درجه دوم وکمترازدو یك فضای وکتوری فرعی فضای وکتوری پولینوم هاست .

زیرا : ست پولینوم های درجه دوم وکمترازدو یك ست فرعی غیرخالی ست تمام پولینوم هاست .

چون حاصل جمع هردو پولینوم درجه دوم ویا کمتراز دو یك پولینوم درجه دوم ویا کمتراز دواست وهمچنان حاصل ضرب یك پولینوم درجه دوم ویا کمترازدو در یك عدد حقیقی یك پولینوم درجه دوم ویا کمترازدو است ،

بناءً برآن نظر به قضیه فوق ست پولینوم های درجه دوم و کمتر از دو یك فضای وکتوری فرعی فضای وکتوری پولینوم هاست ·

مثال دوم · اگر ست تمام وکتور های که دارای عین استقامت (در هر دو جهت) $\vec{v}$ بوده (قبول میکنیم که صفر وکتور یعنی $\vec{0}$ نیز درآن شامل است) به B ارائه شود درینصورت B یك فضای وکتوری فرعی ست تمام وکتور های که در مستوی $\vec{v}$ واقع اند، میباشد ·

زیرا : اگر ست تمام وکتور های را که در مستوی $\vec{v}$ واقع اند به V نشان دهیم چون V یك فضای وکتوری بوده و B یك ست فرعی غیر خالی V است، پس درینصورت غرض تثبیت فضای وکتوری بودن B بررسی وجود دو حقیقت ذیل کافی است :

اول · نشان باید داد که عملیه جمع در B داخلی است ·

دوم · نشان باید داد که حاصل ضرب هر وکتور کیفی شامل B در هر عدد حقیقی، شامل B است ·

اول · ما میدانیم که حاصل جمع هر دو وکتوری که دارای عین استقامت

باشند عبارت از یك وکتوری است که دارای استقامت وکتور های مفروض میباشد یعنی عملیه جمـــــــع در B داخلی است.

دوم . ما میدانیم که از ضرب کردن یك وکتور در یکعدد حقیقی وکتور حاصله دارای عین استقامت وکتور اولی میباشد . یعنی حاصلضرب هر وکتور کیفی شامل B در یك عدد حقیقی یك وکتور شامل B است . بناءً نظر به قضیه فوق ادعا کرده میتوانیم که B یك فضای وکتوری فرعی V است .

مثال سوم . ست: $D=\{(a,-a)\mid a\in\mathbb{R}\}$ یك فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ است :

زیرا : برای هرعدد حقیقی $a\in\mathbb{R}$ ما داریم :

$D\subset\mathbb{R}^2$ بوده و $D\neq\phi$

چون $\mathbb{R}^2$ یك فضای وکتوری است، پس فرض تثبیت فضای وکتوری بودن D کافی است تا نشان دهیم که :

اول . عملیه جمع در D داخلی است .

دوم . برای هر $(x,-x)$ شامل D و برای هرعدد حقیقی k

$k\times(x,-x)\in D$ میباشد .

یعنی ست D نظر به عملیه ضرب در یکعدد حقیقی مستقر است .

اول . برای هر دو عنصر کیفی $(x,-x)$ و $(y,-y)$ شامل D

ما داریم :
$$(x,-x)+(y,-y)=(x+y,\ -x-y)$$
$$=((x+y),\ -(x+y))$$

ازین نتیجه میشود که عملیه جمع در D داخلی است .

دوم . برای هر $(x,-x)$ شامل D و هر k شامل $\mathbb{R}$

ما داریم :
$$k\times(x,-x)=(k\cdot x,\ k\cdot(-x))$$
$$=(k\cdot x,\ -k\cdot x)$$

ازین نتیجه میشود که $k\times(x,-x)\in D$ است یعنی D نظر به عملیه ضرب مستقر است .

بنا برقضیه فوق ادعا میتوان کرد که D یك فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ است .

<u>مثال چهارم</u> . ست تمام متریکس های بشکل : $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 0 \end{pmatrix}$ یك فضای وکتوری فرعی ست متریکس های دو در دو M_2 است .

زیرا : اگر ستتمام متریکس های شکل : $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 0 \end{pmatrix}$ را به A نشان دهیم ، درینصورت $A\subset M_2$ بوده و $A\neq\emptyset$ است .

اکنون نشان باید داد که :

اول • عملیه جمع در A داخلی است•

دوم • ست A نظر به عملیه ضرب مستقر است•

اول • اگر دو عنصر کیفی : $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 0 \end{pmatrix}$ ست A را

مدنظر بگیریم درینصورت ما داریم :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 0 \end{pmatrix}$$

از رابطه فوق دیده میشود که عملیه جمع در A داخلی است •

دوم • برای هر عنصر کیفی $\begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$ شامل A و هر $k \in \mathbb{R}$ ما داریم :

$$k \times \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot x & k\cdot y \\ 2k\cdot x & 0 \end{pmatrix}$$

از رابطه اخیر بمشاهده میرسد که A نظر به عملیه ضرب در

یکعدد حقیقی کیفی k مستقر است •

بنا برآن گفته میتوانیم که A یک فضای وکتوری فرعی M است•

مثال پنجم • ست تمام حلهای (x_1, y_1) معادله : $2x+3y=0$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ است.

زیرا : اگر این ست حل های مورد نظر را به B نشان دهیم

درینصورت $B \subset \mathbb{R}^2$ است •

چون معادله : $2x+3y=0$ لا اقل دارای یک حل

مثلاً : $(0,0)$ میباشد پس B خالی نیست •

اکنون : اول • نشان میدهیم که عملیه جمع در B داخلی است •

زیرا : اگر (a, b) و (c, d) دو حل کیفی معادله مفروض مدنظر گرفته شود ما داریم :

$$2a + 3b = 0$$
$$2c + 3d = 0$$

از جمع کردن اینده مساوات فوق حاصل میشود که :

$$2a + 3b + 2c + 3d = 0$$

و یا .... $2(a + c) + 3(b + d) = 0$

ازین رابطه اخیر بمشاهده میرسد که $(a + c ; b + d)$ یك حله مساوات مفروض بوده و عملیه جمع در B داخلی است •

دوم • نشان میدهیم که B نظر به عملیه ضرب در یکعدد حقیقی مستقر است •

زیرا : برای هر حل کیفی $(p ، q)$: معادله مفروض و هر عدد حقیقی k ما داریم :

$$2p + 3q = 0$$

و یا .... $k \times (2p + 3q) = 0$

و یا .... $k \cdot 2p + k \cdot 3q = 0$

و یا .... $2(k \cdot p) + 3(k \cdot q) = 0$

ازین نتیجه میشود که $(k.p , k.q)$ نیز یک حل معادله

مفروض بوده و ست B نظر به عملیه ضرب در یکعدد حقیقی مستقر

است .

بنا برآن B یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ است .

<u>مثال ششم</u> . ست $F=\{(a,2a+1) \mid a\in\mathbb{R}\}$: یک فضای

وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ نمیباشد .

زیرا : برای هر a شامل $\mathbb{R}$ ما داریم :

$$(a , 2a+1) \neq (0,0)$$

پس $(0,0) \notin F$

چون عنصر بی تاثیر عملیهٔ جمع در $\mathbb{R}^2$ شامل F

نیست ، بنابران گفته میتوانیم که F

فضای وکتوری نیست .

<u>مثال هفتم</u> . ست حله های معادله : $x^2-y^2=0$ یک فضای

وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ نمیباشد .

زیرا : اگر ست حله های معادله فوق را به A نشان دهیم ،

درینصورت $(1,1)$ و $(-1,1)$ شامل A میباشد ،

اما $(1,-1)+(1,1)$ یعنی $(2,0)$ یك حله

نبوده و A نظر به عملیه ضرب مستقر نیست .

تمرینات

1 - اگر ست پولینوم های درجه سوم وکمتر از سه را به P_3 و از درجه پنجم وکمتر از آن را به P_5 ارائه کنیم ، نشان دهید که P_3 یك فضای وکتوری فرعی P_5 است .

2 . اگر ست تمام توابع را به F نشان داده وقبول کنیم که F نظر به عملیه جمع وضرب دو وجه، حقیقی فضای وکتوری است، نشان دهید که ست تمام توابع مشتق پذیر یك فضای وکتوری فرعی F است .

3 . نشان دهید که ست حله های معادله تفاضلی : $y'-y=0$ یك فضای وکتوری فرعی ست تمام توابع مشتق پذیر است .

4 . ثبوت کنید که ست پولینوم های درجه سوم یك فضای وکتوری فرعی P_3 نیست .

5 . ثبوت کنید که ست تمام آن متریکس های که دیترمنانت (داله Déterminant) شان صفر باشد یك فضاي وکتوری فرعی M_2 نیست .

6 . نشان دهید که ست تمام توابع صعودی یک فضای وکتوری فرعی ست تمام توابع نمیباشد .

7 . ثبوت کنید که ست ترادف های حسابی (ترادفی است که فرق بین دو حد متوالی آن یک عدد ثابت است) یک فضای وکتوری فرعی ست تمام ترادف ها است .

8 . ثبوت کنید که ست حله معادله : $2x + 3y = 1$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ نمیباشد .

9 . ثبوت کنید که ست ترادف های هندسی (ترادفی است که نسبت بین دو حد متوالی آن یک عدد ثابت است) یک فضای وکتوری فرعی ست تمام ترادف ها نیست .

10 . ثبوت کنید که : (a) . $\{(0,0,0)\}$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^3$ است .

همچنان (b) . $\{(0,0)\}$ یک فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}^2$ است .

11 . نشان دهید (a) $\mathbb{R}$ نظر به عملیهٔ جمع و عملیهٔ ضرب در اعداد حقیقی یک فضای وکتوری است .

(b). $\mathbb{R}^+$ یك فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}$ نیست •

همچنان (c). $\mathbb{R}^-$ یك فضای وکتوری فرعی $\mathbb{R}$ نیست •

12• نشان دهید که $\mathbb{R}$ محض دارای دو فضای وکتوری فرعی که آن هم عبارت از خود $\mathbb{R}$ و $\{0\}$ است ، میباشد •

13. اگر V یك فضای وکتوری بوده ، S_1 و S_2 دو فضای وکتوری فرعی V باشند ،

(a). نشان دهید که $S_1 \cap S_2$ نیز یك فضای وکتوری فرعی V است

(b). راجع به $S_1 \cup S_2$ چه گفته میتوانید ؟

4.6. پایـــه و بُعـــد

4-6.a. **تعریف یك پایه** امثال ذیل را مطالعه کنید :

مثال اول • هر جوره مرتب (x, y) شامل $\mathbb{R}^2$ به جوره مرتب : $(0,1)$ و $(1,0)$ بصورت یگانه تجزیه شده میتواند •

یعنی : ... $(x,y) = x \times (1,0) + y \times (0,1)$ •

هر دو جوره مرتب : $(0,1)$ و $(1,0)$ را بنام پایه یا قاعده $\mathbb{R}^2$ (base) مینامند •

مثال دوم • هر سه گانه ای مرتب (x, y, z) شامل $\mathbb{R}^3$ به و

سه گانه ای مرتب : $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ تجزیه شده

نمیتوانند • یعنی برای هر قیمت x ، y و z ما دو عدد حقیقی

k_1 و k_2 را پیدا کرده نمیتوانیم تا بصورت عموم رابطه :

$$(x,y,z)=k_1\times(1,0,0)+k_2\times(0,1,0)$$

حقیقت داشته باشد •

مثلاً :

$(2,3,5)=k_1\times(1,0,0)+k_2\times(0,1,0)$ شده نمیتواند •

دریصورت ما میگوئیم که مجموعه دو سه گانه ای مرتب : $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ پایه $\mathbb{R}^3$ نمیباشد •

ولی اگر سه سه گانه ای مرتب : $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ در $\mathbb{R}^3$ مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که هر عنصر (x,y,z) شامل $\mathbb{R}^3$ به هر سه سه‌گانهٔ مرتب مفروض بصورت یگانه تجزیه پذیر است •

یعنی : $(x,y,z)=x\times(1,0,0)+y\times(0,1,0)+z\times(0,0,1)$ میشود •

دریصورت سه گانه های مرتب : $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ را بنام پایه $\mathbb{R}^3$ یاد مینمائیم •

مثال سوم • جوره های مرتب : $(1,2)$ ، $(2,2)$ و $(2,1)$

در $\mathbb{R}^2$ پایه نیست • زیرا اگر ما یکعنصر کیفی $\mathbb{R}^2$ فرضاً

$(5,5)$ را در نظر بگیریم ، دیده میشود که $(5,5)$ بیش

از یک صورت بالای جوره های مرتب مفروض تجزیه پذیر است•

چنانچه :

$$(5,5) = 1\times(1,2) + 1\times(2,2) + 1\times(2,1)$$

$$(5,5) = 2\times(1,2) + (-\tfrac{1}{2})\times(2,2) + 2\times(2,1)$$

$$(5,5) = 0\times(1,2) + \frac{5}{2}\times(2,2) + 0\times(2,1)$$

وعلى القياس ....

تعریف : یک سیستم n وکتور : $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

شامل فضای وکتوری V پایه V نامیده میشود

درصورتیکه هر عنصر V بالای سیستم مذکور

بصورت یگانه تجزیه پذیر باشد •

مثال چهارم • در فضای وکتوری P_3 (پولینوم های درجه سه یا

کمتر از سه) ، وکتور های : $(x^3, x^2+1, x^2-1, 2x)$

یک پایه است•

زیـــــرا : برای هر پولینوم کیفی y شامل P_3 فرضاً ax^3+bx^2+cx+d

ما باید که اعداد حقیقی k_1 ، k_2 ، k_3 و k_4 را پیدا نمائیم

طوریکه $y=k_1\times(x^3)+k_2\times(x^2+1)+k_3\times(x^2-1)+k_4\times(2x)$ گردد .

$$=k_1\cdot x^3+(k_2+k_3)\cdot x^2+2k_4\cdot x+k_2-k_3$$

ازینجـــا :
$$\left.\begin{aligned} k_1&=a\\ k_2+k_3&=b\\ 2k_4&=c\\ k_2-k_3&=d\end{aligned}\right\}$$

. . . . میشود .

از حل معادلات فوق نتیجه میشود که :

$k_1=a$ ، $k_2=\frac{b+d}{2}$ ، $k_3=\frac{b-d}{2}$ و $k_4=\frac{c}{2}$ میشود .

ازینکه قیمت های : k_1 ، k_2 ، k_3 و k_4 نظر به قیمت های

معین a ، b ، c و d ضرب ها ی پولینوم y یگانه اســت ،

بنائبران ادعا میتوان نمود که پولینوم y بالای وکتور های :

$(x^3, x^2+1, x^2-1, 2x)$ بصورت یگانه قابل تجزیه است . ویا

بعبارت دیگر وکتور های $(x^3, x^2+1, x^2-1, 2x)$

پایه فضای وکتوری P_3 است .

<u>مثال پنجم</u> . در فضای وکتوری $\mathbb{R}^2$ وکتور های : $(3,4)$ و $(6,8)$ یک پایه را تشکیل نمیکنند .

زیرا : اگر یک عنصر فرضاً $(3,5)$ شامل $\mathbb{R}^2$ را مدنظر بگیریم در ینصورت ما دو عدد حقیقی K_1 و K_2 را بدست آورده نمیتوانیم داریم : $(3,5) = K_1 \times (3,4) + K_2 \times (6,8)$

یعنی : $(3,5) = (K_1 + 2K_2) \times (3,4)$ گردد . چیر

بنابران $(3,4)$ و $(6,8)$ پایه فضای وکتوری $\mathbb{R}^2$ شده نمیتواند

6.4 . <u>خاصیت اساسی فضای وکتوری :</u>

<u>قضیه</u> : در یک فضای وکتوری V اگر یک پایه آن دارای

n عنصر باشد پس تمام پایه های آن دارای عین تعداد عناصر یعنی n میباشد . گفته میشود که V دارای n بعد بوده یعنی n بعدی است . (۱)

---

(۱) . حقیقت خاصیت فوق اثبات شده میتواند ولی اثبات آن از سویهٔ این کتاب بالا است .

مثال ششم • اگر $\vec{v}$ یك وکتور هندسی فضا مد نظر گرفته شود ، فضای وکتوری تمام وکتور های هندسی (به شمول $\vec{o}$) کـــه دارای عین استقامت $\vec{v}$ میباشند ، یك بعدی است •

زیــــرا : هر وکتوری که دارای عین استقامت وکتور داده شدهٔ $\vec{v}$ باشد بصورت یگانه بشکل $\mathbb{R}\times\vec{v}$ تجزیه شده میتواند • پس خود وکتور $\vec{v}$ پایهٔ فضای وکتوری مذکور است •

درینصورت ما میگوئیم که ست تمام وکتور های هندسی عین استقامت $\vec{v}$ دارای یك بعد است •

مثال هفتم • از بررسی مثال اول دیده میشود که جوره های مرتب : $(1,0)$ و $(0,1)$ پایهٔ $\mathbb{R}^2$ بوده و چون این پایه حاوی دو عنصر است ، پس ادعا میتوان نمود که هر پایهٔ $\mathbb{R}^2$ دارای دو عنصر بوده و $\mathbb{R}^2$ یك فضای وکتوری دو بعدی است •

مثال هشتم • فضای وکتوری پولینوم های درجه سوم و کمتر از سه ($\mathbb{P}_3$) یك فضای وکتوری چهار بعدی است •

زیــــرا : در مثال چهارم فوق بمشاهده رسید که چهار وکتور : $(x^3, x^2+1, x^2-1, 2x)$ پایه $\mathbb{P}_3$ را تشکیل نموده اند •

ازینکه پایه P_3 دارای چهار عنصر است پس گفته میتوانیم که P_3 یك فضای وکتوری چهار بعدی است.

تبصره :- زمانیکه ما میگوئیم که P_3 یك فضای وکتوری چهار بعد است، این معنی را افاده نمیکند که P_3 یك ساختمان فزیکی است که در آن علاوه بر طول، عرض و ضخامت، یك بعد چهارم نیز توضیح شده باشد. درینجا زمانیکه ما میگوئیم P_3 یك فضای وکتور چهار بعدی است مفهوم جبری آنرا توضیح مینمائیم که هر عنصر ساختمان جبری P_3 بالای چهار وکتور بصورت یگانه تجزیه پذیر است.

مثال نهم . ست تمام تصاعدات حسابی شکل :

$$(a,\ a+k,\ a+2k,\ a+3k,\ \dots\ a+(n-1)k,\ a+nk,\ \dots)$$

یك فضای وکتوری دو بعدی است.

زیرا : ما میدانیم که تصاعدات حسابی یك ست فرعی فضای وکتوری ترادف هاست. از طرف دیگر چون حاصل جمع هر دو تصاعد حسابی یك تصاعد حسابی بوده و

هم هر تصاعد حسابی ضرب یك عدد حقیقی یك تصاعد حسابی

است ، بنا۱۴" ادعا نموده میتوانیم که ست تصاعدات حسابی

یك فضای وکتوری فرعی فضای وکتوری ترادف هاست ۰ اینك پایه

این فضای وکتوری را طبق ذیل دریافت مینمائیم ۰

$$(a, a+k, a+2k, a+3k, \dots, a+(n-1)k, \dots)$$
$$=(a,a,a,\dots,a,\dots)+(0,k,2k,3k,\dots,(n-1)k,\dots)$$
$$= a\times(1,1,1,\dots,1,\dots)+k\times(0,1,2,3,\dots,(n-1),\dots)$$

ازین نتیجه میشود که هر تصاعد حسابی بالای ایند و تصاعد

حسابی :

$(1,1,1,\dots,1,\dots)$

$(0,1,2,3,\dots,(n-1),\dots)$ و

بصورت یگانه تجزیه شده میتواند ۰

پس ایند و تصاعد حسابی :

$(1,1,1,\dots,1,\dots)$

$(0,1,2,3,\dots,(n-1),\dots)$

یك پایه دو عنصری فضای وکتوری تصاعدات حسابی را تشکیل

میدهد ؛ ازینجا گفته میتوانیم که فضای وکتوری تصاعدات حسابی

دو بعدی است ۰

تمـــــرینـــات

۱. اگر ست اعداد مختلط Complex Numbers را به $\mathbb{C}$ ارائه کنیم نشان دهید که $\mathbb{C}$ یك فضای وکتوری دو بعدی است .

۲. ثبوت کنید که سه‌گانه های مرتب : $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ پایه $\mathbb{R}^3$ است .

۳. ثبوت کنید که ست حله های معادله : $2x+5y=0$ یك فضای وکتوری یك بعدی است .

۴. نشان دهید که ست M_2 متریکس ها یك فضای وکتوری چهاربعدی است .

۵. ثبوت کنید که ست متریکس های M_3 یعنی متریکس های سه در سه یك فضای وکتوری نهٔ بعدی است .

۶. ثبوت کنید که پولینوم های : $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ پایه ست تمام پولینوم ها نمیباشد .

۷. اگر $\mathbb{P}_2$ ست فضای وکتوری پولینوم های درجه دوم و کمتر از دو را ارائه کند ، معلوم کنید که $\mathbb{P}_2$ دارای چند بعد بوده و یکپایه آنرا بنویسید .

8. ثبوت کنید که ست حله سه گانه ای های معادله :

$2x + y - 3z = 0$ یك فضای وکتوری دو بعدی است.

کمك : (1). نشان دهید که $(0, 1, \frac{1}{3})$ یك حل معادله مذکور است.

(2). نشان دهید که $(1, 0, \frac{2}{3})$ نیز یك حل معادلهٔ مذکور است.

(3). هر حل معادله مذکور بشکل : $(x, y, \frac{2x+y}{3})$ ارائه شده میتواند.

(4). نشان دهید که هر حل معادله مذکور بصورت یگانه ترکیب خطی دو حل خصوصی $(0, 1, \frac{1}{3})$ و $(1, 0, \frac{2}{3})$ فوق است.

۶ . تطبیق خطی

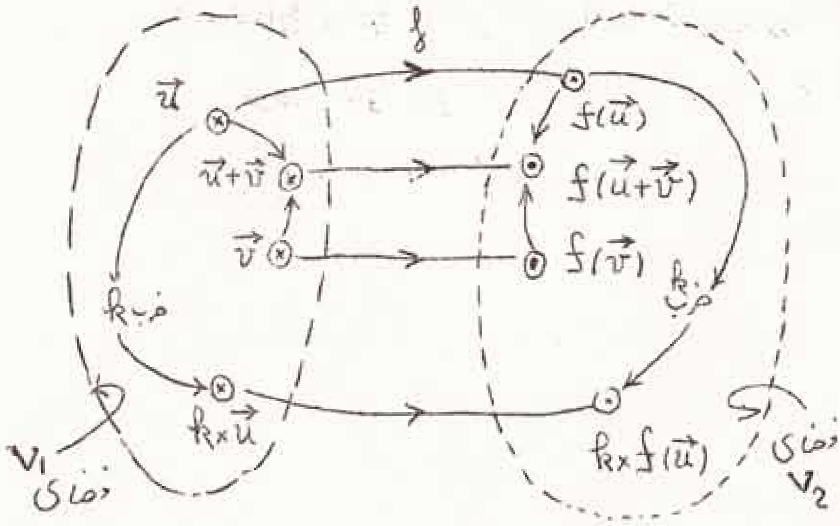
تعریف : یک تطبیق f از یک فضای وکتوری V_1 بطرف یک فضای وکتوری V_2 یک تطبیق خطی گفته میشود درصورتیکه :

اول • برای هر عنصر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شامل V_1

$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ بوده

دوم • برای هر عدد حقیقی k و هر وکتور $\vec{u}$ شامل V_1

$f(k \times \vec{u}) = k\, f(\vec{u})$ باشد .



مثال اول . اگر در فضای وکتوری $\mathbb{R}$ تطبیق : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x$

مدنظر گرفته شود ، در ینصورت ثبوت مینمائیم که f از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ یک تطبیق خطی است .

زیرا : برای هر عنصر x و هر عنصر y شامل $\mathbb{R}$ ما داریم :

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= 3(x+y) \\
&= 3x + 3y \\
&= f(x) + f(y) \quad \ldots (1)
\end{aligned}
$$

و همچنان برای هر $k \in \mathbb{R}$ میتوان نوشت :

$$
\begin{aligned}
f(kx) &= 3 \times kx \\
&= k \times 3x \\
&= k \times f(x) \quad \ldots (2)
\end{aligned}
$$

نظر به هردو رابطه (1) و (2) فوق گفته میتوانیم که f یک تطبیق خطی از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ است .

مثال دوم . اگر g یک تطبیق از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ توسط افاده : $g : (x,y) \mapsto (x,-y)$ ارائه شود ، نشان میدهیم که g یک تطبیق خطی از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ است .

زیرا : چون ما داریم که : $g:(x,y)\longmapsto(x,-y)$

پس در اینصورت برای هر جوره مرتب (x_1,y_1) و (x_2,y_2)

میتوان نوشت :

$$g((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=(x_1+x_2,-y_1-y_2)$$
$$=(x_1,-y_1)+(x_2,-y_2)$$
$$=g(x_1,y_1)+g(x_2,y_2)$$

و همچنان برای هر k شامل $\mathbb{R}$ و هر (x,y) شامل $\mathbb{R}^2$

ما داریم :

$$g(k\times(x,y))=g(kx,ky)=(kx,-ky)$$
$$=k(x,-y)=k\times g(x,y)$$

بناء بران ادعا میتوان نمود که g یك تطبیق خطی از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ میباشد •

مثال سوم • اگر F_1 فضای وکتوری تمام توابع مشتق پذیرد F فضای وکتوری تمام توابع را ارائه کند ، تطبیق "مشتق گرفتن" یك تطبیق خطی از F_1 بطرف F است •

زیرا : اگر تطبیق مشتق گیری را به d ارائه کنیم در اینصورت ما میدانیم که مشتق هر تابع یکتابع است• وآنرا چنین ارائه

میتوان نمــــــود :

$$d: \left| \begin{array}{l} F_1 \longrightarrow F \\ f \longmapsto f' \end{array} \right.$$

از طرف دیگر ما میدانیم که مشتق یك حاصل جمع مساوی به حاصل‌جمع مشتق های اجزای آنستیعنی :

$$d(g+h) = d(g) + d(h) \quad \ldots\ldots (1)$$

وهمچنان برای هر k شامل $\mathbb{R}$ و برای هر f شامل F_1 ما داریم که :

$$d(k \times f) = k \times d(f) \quad \ldots\ldots (2)$$

بنا برحقیقت روابط (1) و (2) فوق ما گفته میتوانیم که مشتق گیری d یك تطبیق خطی از F_1 بطرف F است .

مثال چهارم . اگر تطبیق f از فضای وکتوری $\mathbb{R}^3$ بطرف فضای وکتوری $\mathbb{R}^2$ توسط افاده :

$$f: (x, y, z) \longmapsto (x+y,\ y+z)$$ تعریف شود ،

درینصورت f یك تطبیق خطی از $\mathbb{R}^3$ بطرف $\mathbb{R}^2$ است .

زیرا : اول • برای هر (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2)

شامل $\mathbb{R}^3$ ما داریم :

$$f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

$$=(x_1+x_2+y_1+y_2,\ y_1+y_2+z_1+z_2)$$

$$=(x_1+y_1+x_2+y_2,\ y_1+z_1+y_2+z_2)$$

$$=(x_1+y_1,\ y_1+z_1)+(x_2+y_2,\ y_2+z_2)$$

$$=f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2)\ \cdots\cdots(1)$$

دوم • برای هر عدد k شامل $\mathbb{R}$ و برای هر (x, y, z)

شامل $\mathbb{R}^3$ میتوان نوشت :

$$f(k\times(x,y,z)) = f(kx, ky, kz)$$

$$=(kx+ky,\ ky+kz)$$

$$=k(x+y,\ y+z)$$

$$=k\times f(x,y,z)\ \cdots\cdots(2)$$

از مطالعه مساوات (1) و (2) نتیجه میشود که f یک تطبیق

خطی از $\mathbb{R}^3$ بطرف $\mathbb{R}^2$ است •

مثال پنجم : حال اگر مطابقت g را توسط افاده :

$$g:(x,y,z)\longmapsto(x+y\,,\,y+z+1)$$

تعریف کنیم دیده میشود که g یك تطبیق خطی از $\mathbb{R}^3$ بطرف $\mathbb{R}^2$ نیست .

زیرا : برای هر (x_1, y_1, z_1) و هر (x_2, y_2, z_2) شامل $\mathbb{R}^3$ ما داریم :

$$f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2))=f(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

$$=(x_1+y_1+x_2+y_2,\ y_1+z_1+y_2+z_2+1)\cdots(1)$$

از طرف دیگر :

$$f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2)=(x_1+y_1,y_1+z_1+1)+(x_2+y_2,y_2+z_2+1)$$

$$=(x_1+y_1+x_2+y_2,\ y_1+z_1+y_2+z_2+2)\ ...(2)$$

ازمقایسه مساوات (1) و (2) فوق نتیجه میشود که :

$$f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2))\neq f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2)$$

بناءبران گفته میتوانیم که f یك تطبیق خطی از $\mathbb{R}^3$ بطرف $\mathbb{R}^2$ نیســـــت .

6-2-4 . خواص اولیه تطبیق های خطی :

خاصیت اول ـ اگر f یك تطبیق خطی از یك فضای وکتوری V_1 بطرف فضای وکتوری V_2 باشد ، تصویر وکتور صفر $(\vec{O}_{V_1})$ شامل V_1 وکتور صفر $(\vec{O}_{V_2})$ شامل V_2 است ـ

یعنی : $f(\vec{O}_{V_1}) = \vec{O}_{V_2} \ldots$

زیرا :

$$
\begin{aligned}
f(\vec{O}_{V_1}) &= f(0 \times \vec{O}_{V_1}) \\
&= 0 \times f(\vec{O}_{V_1}) \\
&= \vec{O}_{V_2}
\end{aligned}
$$

لذا : $f(\vec{O}_{V_1}) = \vec{O}_{V_2}$

نتیجه : فهمیدن این خاصیت برای مطالعه خطی بودن یك تطبیق خیلی مهم است ـ زیرا بکمك این خاصیت عدم خطی بودن یك تطبیق را بآسانی فهمیده میتوانیم ـ اگر تصویر وکتور صفر در یك تطبیق وکتور صفر نباشد تطبیق مذکور خطی شده نمیتواند ـ

خاصیت دوم ۰ اگر g یك تطابق خطی از فضای وکتوری V_1 بطرف فضای وکتوری V_2 باشد ، درینصورت برای هر $\vec{x}$ شامل V_1 ما داریم :

$$f(-x) = -f(x)$$

زیرا :
$$f(-x) = f((-1) \times \vec{x})$$
$$= (-1) \times f(\vec{x})$$
$$= -f(\vec{x})$$

لذا :
$$f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$$

خاصیت سوم ۰ در یك تطابق خطی تصویر هر عنصر V_1 را در V_2 شناخته میتوانیم درصورتیکه تصویر هر عنصر یکپایه فضای وکتوری V_1 را بشناسیم ۰ چنانچه اگر V_1 یك فضای وکتوری سه بعدی که یکپایه آن $(\vec{a}_1 ، \vec{a}_2 ، \vec{a}_3)$ بوده مدنظر گرفته شود ، درینصورت برای یك وکتور کیفی $\vec{v}_1$ فضای وکتوری V_1 ما داریم :

$$\vec{v}_1 = k_1 \times \vec{a}_1 + k_2 \times \vec{a}_2 + k_3 \times \vec{a}_3$$

اگر f یك تطابق خطی از V_1 بطرف V_2 باشد ، برای

هر وکتور $\vec{v}_1$ شامل V_1 ما نوشته میتوانیم :

$$f(\vec{v}_1) = f(k_1 \times \vec{a}_1 + k_2 \times \vec{a}_2 + k_3 \times \vec{a}_3)$$
$$= f(k_1 \times \vec{a}_1) + f(k_2 \times \vec{a}_2) + f(k_3 \times \vec{a}_3)$$
$$= k_1 \times f(\vec{a}_1) + k_2 \times f(\vec{a}_2) + k_3 \times f(\vec{a}_3)$$

چون k_1 ، k_2 و k_3 معلوم بوده و ضمناً $f(\vec{a}_1)$ ، $f(\vec{a}_2)$ و $f(\vec{a}_3)$ را میشناسیم ، بنابرآن $f(\vec{v}_1)$ را نیز شناخته میتوانیم

<u>مثال اول</u> • درفضای وکتوری $\mathbb{R}^2$ بابه $(1 ، 0)$ و $(0 ، 1)$ را مدنظر گرفته و یک تطبیق خطی g را از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}$ طبق افاده :

$g(0,1) = 3$ ......

و ...... $g(1,0) = -2$ تعریف مینمائیم •

حال یک جوره مرتب کیفی $(x ، y)$ شامل $\mathbb{R}^2$ را انتخاب نموده و تصویر آنرا ذیلاً مطالعه مینمائیم :

$$g(x,y) = g(x \times (1,0) + y \times (0,1))$$
$$= g(x \times (1,0)) + g(y \times (0,1))$$
$$= x \times g(1,0) + y \times g(0,1)$$
$$= x \times (-2) + y \times (3)$$

$$g(x,y) = x\times(-2) + y\times(3)$$

$$g(x,y) = -2x + 3y$$

باساس مساوات اخیر تصویر هر جوره مرتب (x, y) شناخته شده است .

۸-۶. همشکلی بین دو فضای وکتوری

تعریف : یك همشکلی بین دو فضای وکتوری V_1 و V_2 عبارت از یك تقابل خطی است .

مثال اول . اگر تطبیق g بین دو فضای وکتوری $\mathbb{P}_3$ و $\mathbb{M}_2$ طبق ذیل تعریف شود g یك همشکلی است .

$$g: \left| \begin{array}{l} \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{M}_2 \\ (ax^3+bx^2+cx+d) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

زیرا : اول چون برای هر متریکس دو بر دو فقط و فقط یك پولینوم درجه سوم و یا کمتر از سه عرض وجود گرده میتواند ، که منشاء تصویر متریکس مورد نظر باشد ،

پس د رینصورت گفته میتوانیم که g یك تقابل است ·

دوم · حال نشان میدهیم که g یك تطبیق خطی است ·

زیرا : اگر P_1 و P_2 دو پولینوم شامل $\mathbb{P}_3$ طوریکه :

$$P_1=(a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1)$$

$P_2=(a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2)$ باشند ، مدنظر گرفته

شوند ، د رینصورت ما داریم : $g(P_1)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$

و بهمین قسم : $g(P_2)=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

از طرف دیگر :

$$P_1+P_2=((a_1+a_2)x^3+(b_1+b_2)x^2+(c_1+c_2)x+(d_1+d_2))$$

لهذا :

$$g(P_1+P_2)=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$$

درنتیجه : $g(P_1+P_2)=g(P_1)+g(P_2)$ ... (۱)

اکنون ثابت باید نمود که برای هرعدد حقیقی k و هر P_1

شامل $\mathbb{P}_3$ رابطه : $g(k\times P_1)=k\times g(P_1)$ حقیقت دارد

ما داریم که :

$$k \times p_1 = k \times (a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1)$$
$$= k a_1 x^3 + k b_1 x^2 + k c_1 x + k d_1$$

$$g(k \times p_1) = \begin{pmatrix} k a_1 & k b_1 \\ k c_1 & k d_1 \end{pmatrix}$$
$$= k \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$
$$= k \times g(p_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

با درنظرداشت روابط : (1) و (2) ادعا میتوان نمود که g یك تطبیق خطی بوده و یك همشکلی از $\mathbb{P}_3$ بطرف $\mathbb{M}_2$ میباشد .

مثال دوم . اگرست تمام وکتورهای هندسی فضا را به $\mathbb{V}$ ارائه کنیم ، میدانیم که $\mathbb{V}$ یك فضای وکتوری است . بهمین قسم ما میدانیم که ساختمان جبری $\mathbb{R}^3$ نیز یك فضای وکتوری است . حال یك تابل f بین $\mathbb{V}$ و $\mathbb{R}^3$ را طوری تعریف میفمائیم که هر وکتور $\vec{v}$ شامل

$\mathbb{V}$ را به   مرکبه های آن   نظر بیك سیستم

محورات کمیات وضعه ارتباط دهد . اینك نشان میدهد

که این تقابل f یك همشکلی از فضای وکتوری $\mathbb{V}$ بطرف

فضای وکتوری $\mathbb{R}^3$ است.

زیرا : اگر دو وکتور کیفی $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ ای فضای وکتوری $\mathbb{V}$

مد نظر گرفته شود درینصورت مختصات هر یك از وکتور

های $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ را علی‌الترتیب به سه گانه ای های مرتب

شامل $\mathbb{R}^3$ (x_2, y_2, z_2) و (x_1, y_1, z_1) ارائه کرده

میتوانیم : یعنی :

$$f(\vec{v_1}) = (x_1, y_1, z_1)$$

$$f(\vec{v_2}) = (x_2, y_2, z_2)$$

ما میدانیم که مختصات مجموع وکتورها مساویست به حاصل

جمع مختصات آنها .

بناءً براین میتوانیم بنویسیم :

$$f(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$
$$= f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}) \cdots\cdots (1)$$

از طرف دیگر میدانیم که برای هر عدد حقیقی k و هر وکتور $\vec{v}$ مختصات وکتور $k\times\vec{v}$ مساوی به k چند مختصات وکتور $\vec{v}$ است . بناء براین حقیقت میتوان نوشت :

$$f(k\times\vec{v}_1)=(kx_1,\ ky_1,\ kz_1)$$
$$=k\times(x_1,y_1,z_1)$$
$$=k\times f(\vec{v}_1)\quad\cdots\cdots\ (2)$$

باساس حقیقت روابط : (1) و (2) فوق گفته میتوانیم که تقابل f یک تطبیق خطی بوده و یک همشکلی از فضای وکتوری ست وکتور های فضاء بطرف $\mathbb{R}^3$ است .

<u>مثال سوم</u> : اگر تطبیق $h:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2\\(x,y)\longmapsto(x-y,\ x+y)\end{array}\right.$ مد نظر گرفته شود ، به آسانی دیده شده میتواند که h یک همشکلی است . از طرف دیگر h از $\mathbb{R}^2$ به خود $\mathbb{R}^2$ نیز یک تقابل میباشد پس گفته میتوانیم که h یک خود شکلی $\mathbb{R}^2$ است .

<u>تعریف</u> : یک همشکلی از یک فضای وکتوری V بطرف خود V بنام خود شکلی (automorphism) در V یاد میشود .

تمـــــرینـــات

۱. اگر f یك تطبیق از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}$ تعریف شود طوریکه :

$$f: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{array} \right.$$

باشد ،

ثابت کنید که (a) یك تطبیق خطی است .

(b) یك تقابل نیست .

(c) آیا f یك همشکلی شده میتواند ویا خیر

چــرا ؟

۲. اگر g یك تطبیق از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}^2$ تعریف شود طوریکه :

$$g: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto (x, \frac{x}{2}) \end{array} \right.$$

نشان بدهید که (a): g یك تطبیق خطی است .

(b)- g یك تقابل نیست .

(c) آیا g یك همشکلی از $\mathbb{R}$ بطرف

$\mathbb{R}^2$ شده میتواند ؟

۳ . اگر g یک تطبیق از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ طبق ذیل تعریف شود :

$$g:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x^3, y)\end{array}\right.$$

ثبوت کنید که : (a) . g یک تطبیق خطی نیست .

(b) . g یک تقابل است .

(c) . آیا g یک خود شکلی در $\mathbb{R}^2$ شده میتواند

۴ . اگر h یک تطبیق از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ چنین تعریف شود :

$$h:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (2x, x-y)\end{array}\right.$$

نشان دهید که : (a) . h یک تطبیق خطی است .

(b) . h یک تقابل است .

(c) . راجع به ... خود شکلی بودن h

در $\mathbb{R}^2$ چه فکر میکنید ؟

۵ . اگر d تطبیق مشتق گیری را از $\mathbb{P}_3$ بطرف $\mathbb{P}_2$ ارائه کند ،

(a) . آیا d یک تطبیق خطی است؟

(b) . آیا d یک تقابل است ؟ یا خیر ؟

(c) . آیا d یک همشکلی از $\mathbb{P}_3$ بطرف $\mathbb{P}_2$ میباشد ؟ یا خیر ؟

۶. بفین دو فضای وکتوری $\mathbb{C}$ (ست اعداد مختلط)

و $\mathbb{R}^2$ یك همشکلی را تشکیل دهید.

۷. اگر h یك تطبیق از ست V_2 وکتور های هندسی یك مستوی به V_2 طبق ذیل تعریف شود:

$$h: \left| \begin{array}{l} V_2 \longrightarrow V_2 \\ \vec{v} \longmapsto 3\vec{v} \end{array} \right.$$

نشان دهید که h یك خود شکلی در V_2 است.

۸. اگر r یك تطبیق از $\mathbb{R}^2$ بطرف $\mathbb{R}^2$ چنین تعریف شود:

$$r: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array} \right.$$

نشان دهید که r یك خود شکلی در $\mathbb{R}^2$ است.

۹- اگر V یك فضای وکتوری کیفی مدنظر گرفته شود و تطبیق g در آن طبق ذیل تعریف شود:

$$g: \left| \begin{array}{l} V \longrightarrow V \\ \vec{v} \longmapsto \vec{0} \end{array} \right.$$

(a). نشان دهید که g یك تطبیق خطی است،

(d). در کدام صورت g یک خودشکلی است؟

10. اگر f یک همشکلی از یک فضای وکتوری دو بعدی V_1 بطرف یک فضای وکتوری V_2 باشد،

(a). نشان دهید که تصویر عناصر یکپایه V_1 یک پایه V_2 را تشکیل مینمایند.

(b). راجع به بعد V_2 چه گفته میتوانید؟ یعنی V_2 چند بعدی است؟

11. اگر g یک همشکلی از یک فضای وکتوری V_1 بطرف V_2 باشد، نشان دهید که g^{-1} (تطبیق معکوس g) نیز یک همشکلی از V_1 بطرف V_2 میباشد.

12. اگر i تطبیق عینیت از V به طرف V را ارائه کند، طوریکه:

$$i : V \longrightarrow V$$

$$x \longmapsto x \quad \ldots$$ باشد،

نشان دهید که i یک خود شکلی در V است.

13. یک همشکلی بین دو گروه با یک همشکلی بین دو فضای وکتوری از هم چه فرق دارند؟

۱۲ - اگر f یک تطبیق خطی از یک فضای وکتوری V_1 بطرف یک فضای وکتوری V_2 و g یک تطبیق خطی از V_2 بطرف یک فضای وکتوری V_3 باشند ، ثبوت کنید که $g \circ f$ یک تطبیق خطی از V_1 بطرف V_3 است .

ختم جلد سوم

اصطلاحات

ENGLISH	FRANCAIS	دری
Abelian Group	Groupe Abélien	گروه ابیلین ویا گروه تبدیلی
Application	Application	تطبیق (مطابقت)
Associative	Associatif	اشتراکی (انجمنی ـ شرکت پذیر)
Associativity	Associativité	خاصیت اشتراکی
Automorphism	Automorphisme	خود شکلی
Base	Base	پایه
Binary	Binaire	دوگانه ای
Binary Operation	Opération binaire	عملیهٔ دوگانه ای
Commutative	Commutatif	تبدیلی
Commutativity	Commutativité	خاصیت تبدیلی
Complex Number	Nombre Complexe	عدد مختلط
Determinant	Déterminant	دیترمنانت (داله)
Distributive	Distributif	توزیعی
Distributivity	Distributivité	خاصیت توزیعی
Element	Elément	عنصر
Equipollent	Equipollent	همانند (همسنگ)

ENGLISH	FRANCAIS	دری
Field	Corps	ساحه
Group	Groupe	گروه
Identity Element	Elément neutre	عنصر بی تاثیر (عینیت)
Inverse Element	Elément inverse	عنصر تضاد (معکوس)
Isomorphism	Isomorphisme	همشکلی
Linear	Linéaire	خطی
Linear Application	Application linéaire	تطبیق خطی
Null	Nul	صفری
Null Vector	Vecteur nul	وکتور صفر
Operation	Opération	عملیه
Ordered Pair	Couple	جوره مرتب
Ring	Anneau	حلقه
Subgroup	Sous Groupe	گروه فرعی
Triplet	Triplet	سه گانه ای مرتب
Unitar	Unitaire	واحدی
Vector	Vecteur	وکتور
Vector Space	Espace Vectoriel	فضای وکتوری

مفهوم و طرز استعمال علائم عمده معمول این جلد

مفهوم ارائه شده	چنین تلفظ میشود	علائم
ترکیب x و y در عملیه $*$ z است	z معادی است به x ستاره y	$z = x * y$
علائم عملیه های کیفی (تعیین نشده)	ستاره، ضرب دایره، جمع دایره	$*$ ، $\odot$ ، $\oplus$
ست قائم های a	D ، a	$\mathbb{D}_a$
بزرگترین قائم مشترك a و b		$a \wedge b$
کوچکترین مضرب مشترك a و b		$a \vee b$
ست مضرب های n	I ، n	$n\mathbb{I}$
دو نقطه ای (A, B)	دو نقطه ای A ، B	(A,B)
دو نقطه ای (A,B) و دو نقطه ای (C,D) همانند اند	A ، B همانند به C ، D است	$(A,B)\,\hat{/\!/}\,(C,D)$
وکتور $\overrightarrow{AB}$	وکتور A ، B	$\overrightarrow{AB}$
وکتور $\overrightarrow{V}$	وکتور V	$\overrightarrow{V}$
تضاد وکتور $\overrightarrow{V}$	منفی V	$-\overrightarrow{V}$
وکتور صفر	وکتور صفر	$\overrightarrow{0}$
ست عناصر معادل به a	صنف a	$\dot{a}$
ست صنوف معادل نظر به رابطه همباقی بودن در تقسیم بر 3	$\mathbb{I}$ مود ولو سه	$\mathbb{I}/(3)$
معکوس a	معکوس a	a^{-1}

مفهوم ارائه شده	چنین تلفظ میشود	علائم
ست وکتور های هندسی	V	$\mathbb{V}$
ست پولینوم ها	P	$\mathbb{P}$
ست پولینوم های درجه n ام وکمتر از n	n، P	$\mathbb{P}_n$
ست متریکس های دو در دو	M دو	$\mathbb{M}_2$
ست جوره های مرتب اعداد حقیقی	R دو	$\mathbb{R}^2$
ست سه گانه ای های مرتب اعداد حقیقی	R سه	$\mathbb{R}^3$