ریاضیات معاصر

جلد دهم

روابط و تطبیقات

مؤلفین

دفتر پیداگوژی
ایشان ثیل
لیسه عالی استقلال

و

دیپارتمنت ریاضیات
محمد امان
نادری
موسسه عالی تربیه معلم روشان

 قوس ۱۳۶۰

یادداشت انتشارات شاهمامه

به سلسلهٔ نشر آثار فراموش شدهٔ استاد محمدامان نادری، اینک به انتشار «**سلسلهٔ ریاضیات معاصر**» میپردازیم تا از یک سو مورد استفادهٔ علاقمندان قرار گیرد و از جانبی دستآورد های علمی این متفکر ریاضیات که عمری در راه معارف در بدترین وضعیت سیاسی و صحی، قلم زده است، یکبار دیگر روگشایی گردد. بدون شک استاد نادری یکی از انگشت شمارانِ کشور بود که آثار ارزشمند فراوانی در زمینهٔ ریاضیات به یادگار گذاشته است. او در حقیقت نخستین مفسر و معرف ریاضیات مدرن در افغانستان می باشد.

سه جلد این سلسله به دسترس ما قرار دارد که میکوشیم ثبت آرشیف «شاهمامه» و دیگر آرشیف های نشراتی گردد تا نسلهای بعد این خدمات را نادیده نگیرند و سهم اینگونه شخصیت های پویا و کوشا در رشد معارف کشور برازنده و جاودان ماند.

با سپاس،

منیژه نادری

مسؤول بنیاد شاهمامه

شناسنامه

ریاضیات معاصر

جلد دوم

روابط و تطبیقات

مؤلفان:

ایتیان ژیل، دفتر پیداکوژی، لیسهٔ استقلال

محمدامان نادری، دیپارتمنت ریاضیات، موسسهٔ عالی تربیه معلم روشان

قوس ۱۳۵٦ خورشیدی

نشر الکتریکی: بنیاد شاهمامه

www.shahmama.com

جون ۲۰۱٦، هالند

فهرست عناوین

عنوان | صفحه

عنوان | صفحه

فصـــــل اول

روابط

RELATIONS

۱ـ۱۰ مقـــــــدمه

کلمهٔ رابطه در هر زبان معمول ومروج است ولی این کلمه در ریاضیات غرض تعریف دقیق یك مفهوم بکاربرده میشود. برای توضیح این مطلب چهار بیانیهٔ که بعبارت ریاضی افاده و بیان شده‌اند ، مد نظر بگیرید :

$$x = y \cdots\cdots (۱) \text{،}$$

$$5 < 7 \cdots\cdots (۲) \text{،}$$

$$a \notin A \cdots\cdots (۳) \text{،}$$

$$B \subset C \qquad (٤) \text{،}$$

هر یك از افاده های فوق ریاضی یك جملهٔ معمـول دری است ، که در آن دو اسم توسط یك کلمهٔ ای که آنرا ((فعل))

نامیده میتوانیم ، باهم اتصال یافته‌انـــد .

بطور مثال،

(۱) . x مساویست به y .

(۲) . 5 کوچکتر است از 7 .

(۳) . a نیست یک عنصر ست A .

(۴) . ست B است یک ست فرعی ست C . *

تمام کلماتی که درفوق زیرآنها خط کشیده شده یک رابطه Relation را ارائه میکنند . تنها این چهار بیانیه های فوق‌الذکر یگانـــه جملاتی نیستند که رابطه را ارائه میدارند بلکه تعداد همچو جمـــلات وعباراتیکه روابط Relations را افاده میکنند بیشتر از آنســـت که ما فکر میکنیم . زیرا اشیای مشابه وغیر مشابه را بنا بر یک قانون مطابقت باهم ربط میتوان داد . چنانچه اگر جملات معمولی حیا ت روزمره ماننـــــد :

احمـــد درست محمود اســـــت .

(*) . برای استقرار در توضیح مطلب موضوع : "B یک ست فرعـــی ست C است ." بعبارت غـــیر روان در فـــوق افاده شــــده .

مورد بررسی قرار داده شود ، دیده میشود که بین انها یك رابطه Relation موجود است ، که در جملهٔ فوق ((دوست بودن)) مذکوره رابطه بین احمد ومحمود را ارائه میکند . بهمین قسم در اکثر بیانیه ها وعبارات هر زبان کهخواه بشکل نظم باشد و یا نثر، مذکورهٔ روابط موجود شده میتواند .
چنانچه در مثال ذیل فرد دری اد رنظر بگیرید :
مثـــال:

((دشمن خاك را چو میخ خیمه میخواهم ذلیـــل))
((سنگ برسر، خاك بر تن، ریسمان بر گرد تـــنش))

مثال اگر تمنای شاعر(خواستن) درفرد بالا مدنظر گرفته شود دیده میشود که بین دوست[1] اشیا که یکی آن عبارت از اعضای بدن دشمن خاك (وطن) : { سر، تن، گردن } وست دیگرآن که متشکل از اشیا :
{ سنگ، خاك ، ریسمـــان } میباشد ،
یك رابطه موجود است . این رابطه عبارت از حوالـــهٔ :

سنگ بـــر سر
خاك بـــر تن

---

(۱) ۰ اگرچه دربعضی اثار دری کلمات: مجموعه ومجموع نیز برای ارائه مفکورهٔ ست Set بکاربرده شده مانده ، اما بنا برملاحظه که کلمات مذکور باحاصل جمع ایهام میتمایند وضمناً کلمهٔ ست در دری نیز مروج ومعمول است پس دراینجا نیز بکار برده شده است .

ریسمان بر گردن دشمن وطن میباشد .

حال باد رنظر داشت امثال فوق تمرینات ذیل را طوریکه خاطرنشان شده حل نمائید .

تمرینـــــات .

در سوالات ذیل زیرهان قسمت جملات که روابط را افاده میکنند خط بکشـــید :

1 . 24 قابل قسمت است بـر 3 .

2 . $\overleftrightarrow{AB}$ موازیست بـــــه $\overleftrightarrow{CD}$.

3 . $\overline{EF}$ عمـــود اســت بـه $\overline{PR}$.

4 . $7 \in \{$اعداد اولیـــه$\}$.

5 . $\widehat{ABC}$ متممه اســت به $\widehat{DEF}$.

6 . احمد برادر محمود اســت .

7 . امین بزرگتــراست از فریـد .

8 . کابل پایتخت افغانستان است .

9 . ۲۶ سرطان ۱۳۵۲ مبدا تاریخ رژیم جمهوری افغانستان است .

10 . راحت شر زحمت است

۱-۲. ارائه و افادهٔ رابـــطه

طوریکه هر مفکوره مهم مانند مفکورهٔ عدد مثلاً پنج توســـط علایم را شکال مختلفه افاده شده میتواند، بهمین قسم مفکوره رابطه نیز بنابر استعمال علایم وسمبول های مختلفه ارائه شده میتواند که ذیلاً به توضیح آنها می پردازیم.

۱-۲-۵. ارائه روابط توسط دیاگرام تیری

مثال اول. اگر تمنای وخواهش شاعر در فرد:

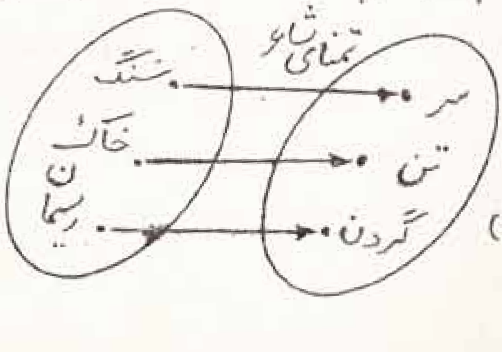
"دشمن خاک را چو میخ خیمه میخواهم ذلیل"

"سنگ بر سر، خاک بر تن، ریسمان برگردنش"

بحیث قانون مطابقت مورد نظر قرار داده شود، درینصورت رابطه بین ست اعضای بدن دشمن خاک، یعنی:

{سر، تن، گردن} وست اشیا یعنی: {سنگ، خاک، ریسمان}

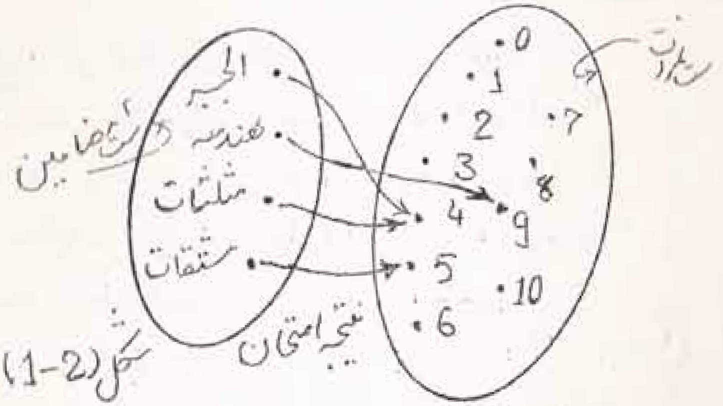
را باساس رسم دیاگرام تیری طبق ذیل ارائه کرده میتوانیم:



شکل (۱-۱)

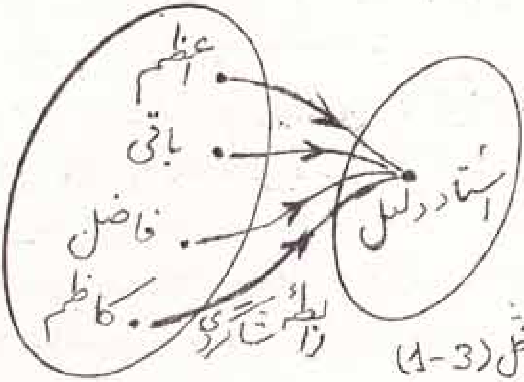
مثال دوم · هر شاگرد میتواند که در امتحان در هر یک از مضامین : الجبر ، هندسه ، مشتقات و مثلثات یکی از نمرات بین صفر و ده (0 الی 10) را حایز گردد ·

مثلاً اگر کریم در امتحان مضمون الجبره نمره 4 و در هندسه نمره 9 و در مثلثات نمره 4 و در مشتقات نمره 5 را اخذ نمائید ، درینصورت رابطهٔ نتیجهٔ امتحان کریم را باساس دیاگرام تیری طبق ذیل نما یش داده میتوانیم :



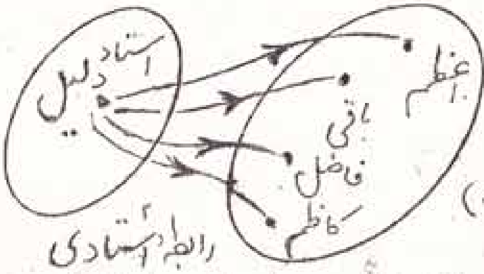
شکل (1-2)

مثال سوم · اگر اعظم ، باقی ، فاضل و کاظم شاگرد واستاد دلیل مسلم شان باشد، درینصورت رابطه از اعظم ، باقی ، فاضل و کاظم بطرف استاد دلیل عبارت از شاگردی بوده وآنرا توسط دیاگرام تیری قرار شکل ذیل نشان میتوان داد :



شکل (1-3)

بالعکس، اگر رابطه از طرف استاد دلیل بطرف سمت شاگردان مورد مطالعه قرار داده شود واضح است که این رابطه استادی بوده وتوسط رسم دیاگرام تیری قرار شکل ذیل ارائه شده میتواند :



شکل (1-4)

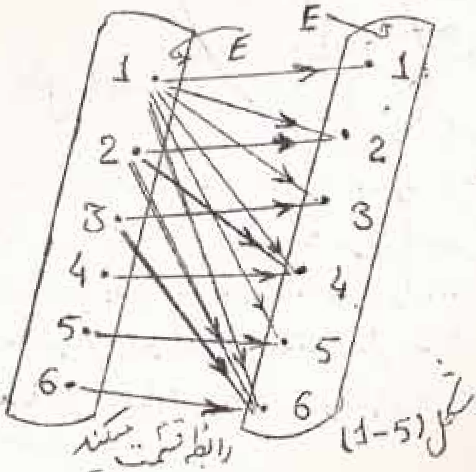
از مطالعه امثال فوق نتیجه میشود که : رابطه از عناصر و یاعنصر یک سمت اولی منشاء گرفته وبه عناصر و یاعنصر یک سمت دومی ختم میشود . برای اینکه بین این دو سمت فرق وامتیازی موجود گردد سمت اولی ویا سمتیکه از عناصر آن تیر نشاءت میکند بنام منشاء ویا منبع ؛ سمت دومی را که بعناصر (ویاعنصر) آن تیر اصابت میکند بنام هدف یاد میکنند .

در مثال اول، ست: {سنگ، خاک، ریسمان}
ست منشاء (منبع) وست: {سر، تن، گردن} ست هدف
رابطهٔ تمنای شاعر را تشکیل میدهد.

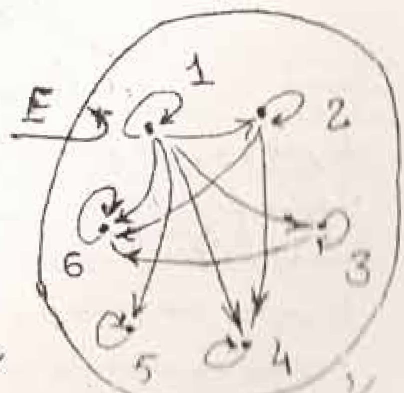
به همین قسم در مثال دوم، مضامین عناصر ست[۲] منشاء را اعداد
تام بین 0 الی 10 بشمول صفر ردهٔ عناصر ست هدف
را تشکیل میدهند.

در مثال سوم: ، اعظم، باقی، فاضل وناظم در توضیح
رابطهٔ شاگردی عناصر ست منشاء (منبع) واستاد دلیل عنصر
ست هدف را ارائه میکنند.

مثال چهارم. اگر ست $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ مفروض
بوده ودرآن رابطهٔ x قاسم y است برای تمام عناصر x و y
شامل E مد نظر گرفته شود، درینصورت رابطه مذکور از E
به طرف E برحسب دیاگرام تیری طبق شکل (1 - 5)
وشکل (1 - 6) درذیل ارائه شده میتواند:



شکل (1-5)



شکل (1-6)

بخاطر باید داشت که یك رابطه مانند شکل (6-1) درصورتی ارائه شد میتواند که ست منبع وست هدف عین ست باشد والا ناممکن است.

1-2.b. جوره های مرتب وحاصلضرب دکارتی دو ست

ما میدانیم که در یك ست ترتیب عناصر ضروری نیست ، حال اگر مطلب ما ارائه یك مفکوره ریاضی که در آن مراعات ترتیب لازمی است باشد ، درینصورت ما از استعمال چند گانه ای های مرتب استفاده مینمایم . بطور مثال اگر مطلب ما ارائه چند گانه‌ای که دارای سه مرکبه است باشد ، ما انرا به شکل (a، b، c) نشان میدهیم . واضح است که شکل ساده‌ترین چند گانه ای های مرتب دارای دو عنصر(مرکبه) میباشد که آنرا بنام جوره مرتب (ordered pair) یاد مینمایم . یك جوره مرتب a و b بشکل (a, b) ارائه میشود . در جوره مرتب (a, b)، a عبارت از مرکبه اول و b عبارت از مرکبه دوم آن میباشد . همچنان یك سه گانه مرتب (triplet) بشکل (a, b, c) نشان داده میشود ، که a، b و c علی الترتیب مرکبه های اول ، دوم وسوم آنرا تشکیل میدهند .

از توضیحات فوق نتیجه میشود که : $(a,b) \neq (b,a)$ بوده، اما $\{a,b\}=\{b,a\}$ میباشد.

در توضیح اکثر موضوعات ریاضی تطبیق مراعات ترتیب شرط لازمی است . چنانچه توزیع جوایز در مسابقات باسی

مفکوره چند گانه ای های مرتب صورت میگیرد نه باساس مفکوره ست ، زیرا د رینموضوع مراعات ترتیب لازمی است .

د ر یک رابطه غرض تشخیص عناصر ست منبع وعناصر ست هدف ما از استعمال مفکوره جوره مرتب طور یکه مرکبه اول آن مربوط ست منبع ومرکبه دوم آن مربوط ست هدف است استفاده مینمایـــم .

تعریف : حاصلضرب دکارتی دوست A و B عبارت از ست تمام جوره های مرتب (a, b) است که در آن a شامل A و b شامل B میباشد. وآنرا به $A \times B$ ارائه مینمایم .

پس درینصورتما داریم :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A , b \in B\}$$

تمرینـــــات

1 ـ اگرسه عنصر a ، b و c داشته باشیم : (a) چند سه گانه ای مرتب ازان ساخته شده میتواند ؟

(b) چند ست سه عنصره ازان تشکیل شد میتواند ؟

2 ـ اگر $(a, b) = (b, a)$ باشد راجع به a و b چه فکر میکنید ؟

3 ـ اگرست $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{a, b\}$ مفروض باشد ،

(a) . . . . . $A \times B$ را د ریافت کنید .

(b) . . . . . . $B \times A$ را بدست ارید .

(c) $A \times B$ و $B \times A$ را باهم مقایسه کنید .

4 ــ اگر $E=\{b, c, d\}$ مفروض باشد ، $E \times E$ راد ریافت کنید .

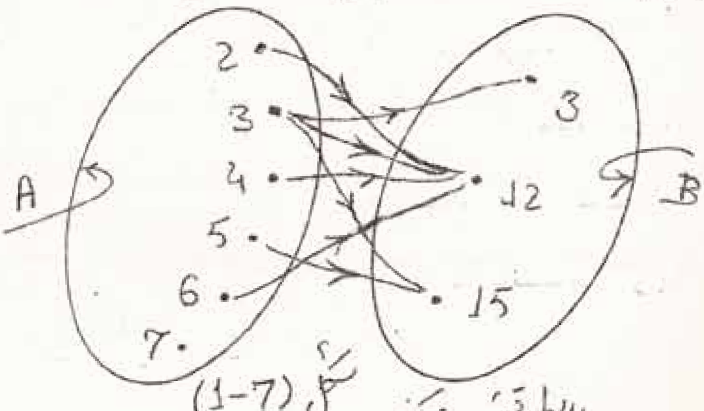
5 ــ اگر A عبارت از یک ست (5) عنصره و B عبارت از یک ست (4) عنصره باشد ، $A \times B$ چند عنصر دارد ؟

6 ــ اگر A یک ست m عنصره و B یک ست n عنصره مفروض باشد ، تعداد عناصر ست $A \times B$ را معلوم کنید .

2 - 1 . ارائه روابط باساس مفکوره جوره مرتب .

یک رابطه را بنا بر استعمال مفکوره جوره مرتب نیز ارائه میتوان کرد .

مثال اول . اگر ست $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$ و ست $B=\{3, 12, 15\}$ رامد نظر گرفته ودرآن رابطهٔ تقسمت میکند از A بطرف B مطلوب باشد ،



شکل (1-7)

رابطه تقسیم میکند

دراینصورت ما رابطهٔ مذکور را باساس دیاگرام تیری طبق شکل (7-1) ارائه مینماییم.

این رابطه قسمت میکند از A بطرف B را باستفاده از مکجوره جوره مرتب طبق ذیل نشان داده میتوانیم:

$$\{(2,12),(3,3),(3,12),(3,15),(4,12),(5,15),(6,12)\}$$

ست جوره های مرتب بنام گرف ویا شکل روستر رابطه قسمت میکند از A بطرف B نامیده میشود.

گرف رابطه قسمت میکند عبارت ازست تمام آن جوره های مرتبی است که مرکبه اول آنها مربوط ست A (منبع) واز دوم آنها مربوط ست B (هدف) است، میباشد. وضمناً مرکبه اولی هرجوره مرتب قسمت میکند مرکبه دومی همان جوره را.

مثال دوم • هرگاه بین دو ست $A=\{0,1,2,3,4,5\}$: و $B=\{0,1,3,5,7,9,10\}$

ارائه رابطه : $y=2x-1$ درحالیکه $x\in A$ و $y\in B$ اند مطلوب باشد، درینصورت ما دوچند هرعنصر (عدد) ست A را گرفته وازآن یك (1) را طرح نموده وجواب خود را در بین عناصر (عدد) ست B جستجو مینمایم :

بطور نمونه: اگر ارائه رابطه فوق ، باساس عنصر 2 ای ست A مطلوب باشد ، درینصورت 2 را بعوض x در رابطهٔ :

$$y=2x-1$$

قرار میدهیم ، واضح است که جواب ان :

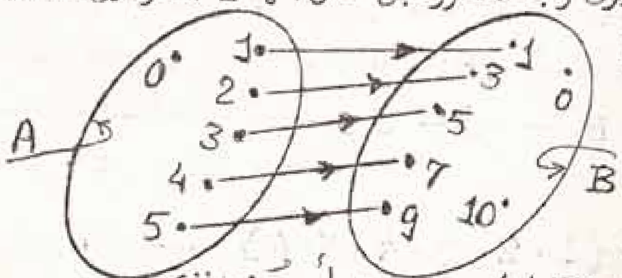
$y=3$ در B میباشد .

پس یکی از عناصر ست روستر و یا گرف رابطهٔ مذکور عبارت از جوره مرتب $(2,3)$ است .

بهمین قسم تمام عناصر گرف رابطهٔ مذکور را باساس تذکوره جوره های مرتب بدست آورده وآنرا طبق ذیل ارائه مینمایم :

$$G=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9)\}.$$

ارائهٔ دیاگرام تیری رابطهٔ مذکور طبق شکل (8-1) درذیل اناده شده میتواند :



شکل (1-8) رابطهٔ دوچند منفی یك

$R: y=2x-1$

دارد یا گرام ویری شکل (۸-۱) بمشاهده میرسد که تحت قانون مطابقت عناصر: 1، 2، 3، 4 و 5 ست منبع (A) علی الترتیب با عناصر: 1، 3، 5، 7 و 9 ست هدف (B) ربط دارد، درینجا 1 تصویر 1 و 3 تصویر 2 و بهمین قسم ... 9 تصویر 5 گفته میشود، وبالعکس 1 منشاء تصویر 1 و 2 منشاء تصویر 3 وبهمین قسم ... 5 منشاء تصویر 9 نامید میشود.

تعریف: اگر یک رابطه R از یک ست A بطرف یک ست B مفروض باشد، طوریکه یک عنصر x شامل ست A تحت رابطه R با یک عنصر y سامل ست B ارتباط می یابد، درینصورت y تصویر (image) x و x منشاء تصویر (pre-image) y نامیده میشود.

چون عنصر (0) صفر ست A، مثال دوم، دارای کدام تصویر در B نیست، پس باساس تعریف فوق گفته میشود که عنصر 0 شامل ست A عنصر ست منبع بوده ولی منشاء تصویر نیست.

بهمین قسم عنصر 0 شامل ست هدف (B) در تشکیل رابطه بحیث تصویر سهم نگرفته است، پس عنصر 0 شامل ست B عنصر هدف بوده ولی تصویر نیست.

مثال سوم، اگر ست $A = \{1، 2، 3، 4، 5، 6\}$

و ست $B = \{10، 12، 14، 16، 18، 20\}$

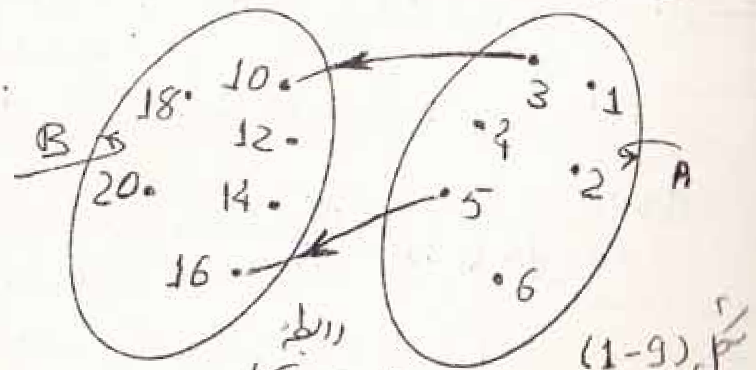
و شرایط رابطه بین ست های A و B بنا بر عبارت: درحالیکه $x \in A$ و $y \in B$
" y مساوی به سه چند x جمع یک " مفروض باشند،

(a). رابطه بین A و B را باساس مفکوره جوره های مرتب تعیین نمود و
(b). این رابطه مذکور را توسط دیاگرام تیری ارائه کرده و ضمناً
(c). عناصر منشاء تصاویر و تصاویر را دران تعیین کنید.

حل: عبارت شرط مطابقت رابطه بین A و B رابنابر افاده:
$y = 3x+1$ درحالیکه $x \in A$ و $y \in B$ اند بیان میتوان کرد.
اکنون بجای x عناصر ست A را درافاده مذکور قرارداده و
تصاویر آنها یعنی قیمت های y را از ست B بدست می‌آوریم.
پس اگر شکل رو ستر و یا گرف رابطهٔ مذکور به G نشان داده شود، درینصورت جواب جز(a) مثال مذکور طبق ذیل ارائه شده میتواند:

$$G = \{(3,10),(5,16)\}$$

(b). نظر به ارائه گرفی رابطه مذکور نمایش آن باساس دیاگرام تیری طبق ذیل افاده شده میتواند:



رابطه
سه چند جمع یک

شکل (1-9)

(c) بو ضاحت دیده میشود که محض دو عنصر 3 و 5 درست A بحیث منشاء تصاویر (pre-image) موجود گردیده و بهمین قسم دو عنصر 10 و 16 درست B بحیث تصاویر (image) در تشکیل رابطهٔ مذکور سهم گرفته ، طوریکه 10 تصویر 3 و 16 تصویر 5 میباشند.

مثال چهارم. اگر ست $A=\{1,2,3,4\}$

و ست $C=\{10,12,14,16\}$

شرط رابطه بنابر عبارت: « y بزرگتر از سه چند x جمع یک است » مفروض باشند (در حالیکه x عناصر ست A و y عناصر ست C اند).

(a) . رابطه بین A و C را باساس جوره های مرتب نشان دهید.

(b) . رابطهٔ مذکور را بنابر رسم دیاگرام تیری ارائه کنید.

(c) . عناصر منشاء تصاویر و تصاویر این رابطه را تعیین کنید.

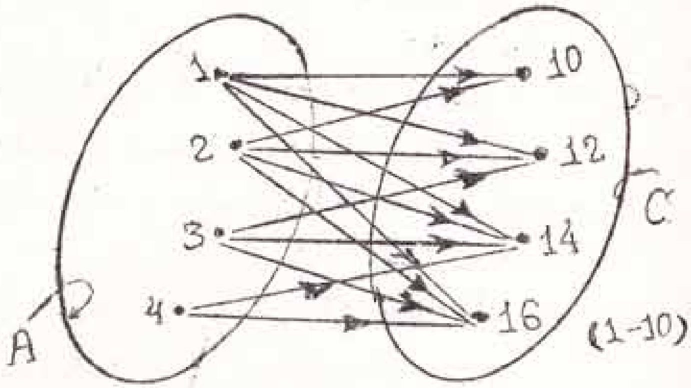
حل: افادهٔ ریاضی شرط مطابقت رابطه بین A و C را به افاده: $y > 3x+1$ درحالیکه $x \in A$ و $y \in B$ اند، ارائه میتوان کرد.

(a) . پس درینصورت گرف رابطهٔ مذکور عبارت از:

$$G=\{(1,10),(1,12),(1,14),(1,16),(2,10),(2,12),(4,14),$$
$$(2,14),(2,16),(3,12),(3,14),(3,16),(4,16)\}$$

میباشد.

(b) • بادرنظرداشت شرط فوق ارائه دیاگرام تیری رابطه مذکوررا طبق آتی نشان میتوان داد :



شکل (1-10)

(c) • ازحل دوجز(a) و(b) فوق بآسانی دیده میشود که تمام عناصر ست A بحیث منشاء تصاویر وتمام عناصر ست C بحیث تصاویر واقع گردیده اند •

اما دیده میشود که 1 و 2 هرکدام دارای 4 و 4 تصویر بوده وهم چنان 3 دارای 3 تصویر و 4 محض دارای دو تصویر میباشند •

مثال پنجم • بادرنظرداشت ست های A و C مثال چهارم درصورتیکه شرط مطابقت بین ست های مذکور باساس افاده : $y < x + 1$ درحالیکه $x \in A$ و $y \in C$ اند ، مفروض باشد ، درینصورت :

(a) • رابطه بین A و C را باساس جوره های مرتب وهمچنان (b)، باساس رسم دیاگرام تیری ارائه نمود موضعاً:

(c) • عناصر منشاء تصاویر وعناصر تصاویر را تعیین کنید •

حل: بملاحظه میرسد که اگر بعوض x در رابطـــــهٔ :

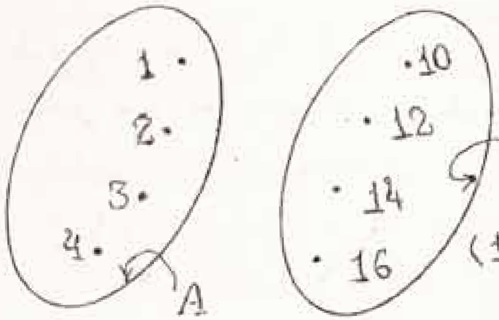
$$y < x + 1$$

هر یك از عناصر ستA را بگذاریم کدام عنصر y در ست C موجود نیست که رابطه مذکور را صدق کند • پس در ینصورت :

(a) • ارائه رابطهٔ مذکور باساس جوره مرتب عبارت از:

$G = \{\ \} = \phi$ میباشد •

(b) • رسم دیاگرام تیری آن بدون ارائه کدام تیر طبق ذیل ارائه شده میتوانـد :



شکل (1-11)

(c) چون ست حله رابطهٔ مذکور خالی است پس هیچکـــدام یك از عنـــاصر هردوســـت نـــه بحیث منشاء تصـــویر ونه بحیث تصویر واقع شده میتوانـد •

1-2-د. ارائه رابطه باستفاده ازاستعمال مفکوره محورات کمیات وضعیه

حاصلضرب دکارتی دو ست فرضاً E و F را بطریق ذیل ارائه کرده میتوانیم .

اولاً ، باساس ترسیم دیاگرام تیری ،

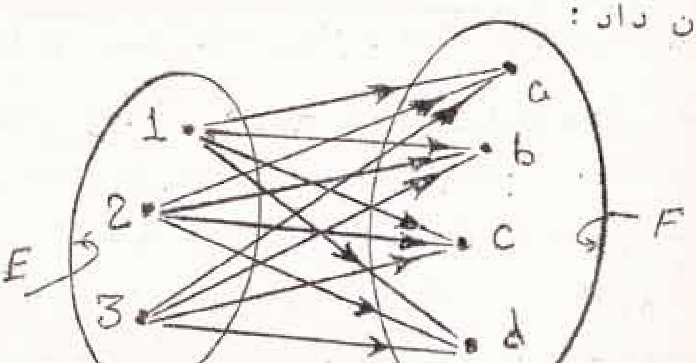
ثانیاً ، باساس مفکوره جوره های مرتب ،

ثالثاً ، باستفاده ازاستعمال مفکوره محورات کمیات وضعیه .

<u>مثال اول</u> . اگر ست $E = \{1, 2, 3\}$.

و ست $F = \{a, b, c, d\}$ مفروض باشند ،

دراینصورت اولاً . ترسیم دیاگرام تیری $E \times F$ را طبق ذیل (1-12) نشان میتوان داد :

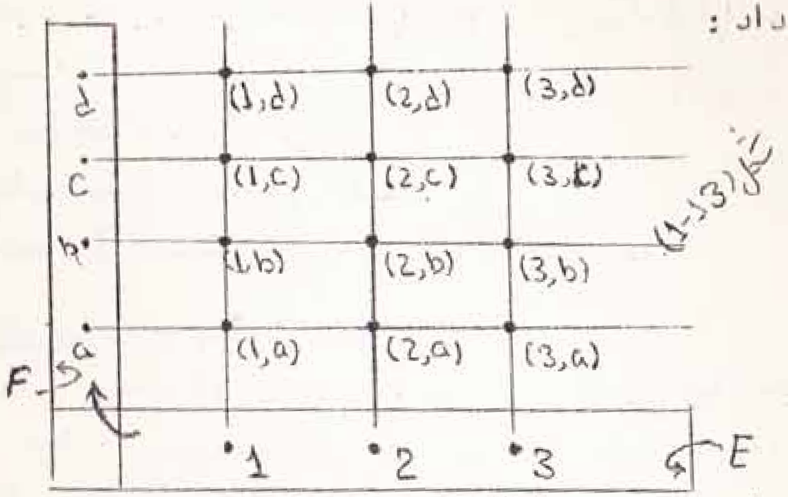


شکل (1-12)

ثانیاً ، ست مربوط جوره های مرتب $E \times F$ راقرار ذیل ارائه میتوان کرد :

$$E \times F = \{(1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (3,a), (3,b), (3,c), (3,d)\}.$$

ثالثاً ، باستفاده از استعمال مفروره محورات سیستم تمیات وضعیه رسم حاصلضرب دکارتی $E \times F$ را طبق شکل ذیل نشان میتوان داد :



درابنجا تیر سمت ارتباطات را از E بطرف F تعیین میکند .

مثال دوم ، اگر $A=\{1,2,3,4\}$ مفروض باشد ، و رابطهٔ R از A بطرف A بنابر عبارت: "... تاسم ۰۰۰ است" در نظر گرفته شود درینصورت گرف G_R رابطهٔ R یک ست فرعی $A \times A$ است . ضمناً جوره هاي مرتب گرف G رابطه R را باساس سیستم حاصلضرب دکارتی ارائه کرده میتوانیم .

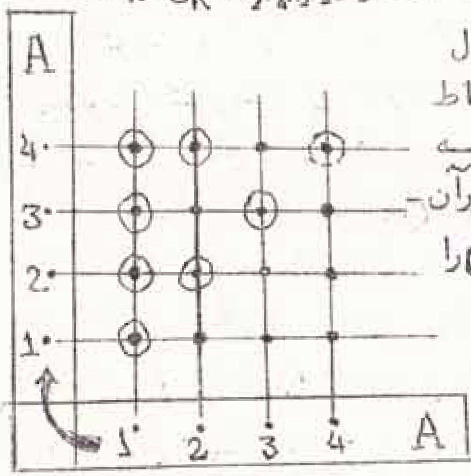
شکل رو ستر $A \times A$ را طبق نیل بدست آورده میتوانیم :

$$A \times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}.$$

اکنون برای بدست آوردن گرف G_R رابطه: « ... تاسم ... است. »
آن جوره های مرتب $A \times A$ را کەمرکبهٔ اول آنها قاسم مرکبهٔ دوم شان است انتخاب مینمایم. بطور مثال از جملهٔ جوره های مرتب $A \times A$ جوره مرتب $(1, 3)$ چون 1 تاسم 3 است در گرف G_R بوده حالانکه جوره مرتب $(2,3)$ چون 2 تاسم 3 نیست شامل گرف G_R شده نمیتواند. بنابران بانظرداشت شرط: « ... تاسم ... است. »
گرف رابطه R را قرار ذیل ارائه کرده میتوانیم:

$$G_R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}.$$

اگر دقت شود دیده میشود کەمرکبه اول هرعنصر سبت G_R تاسم مرکبه دوم همان عنصر میباشند. بنابرآن تمام عناصرگرف افاده: « ... قاسم ... ست.» را تحقیق میکند. از طرف دیگر از مطالعه شکل $(1-14)$ بمشاهده میرسد که تمام عناصرگرف G_R رابطهٔ R شامل ست $A \times A$ بوده، بنابرآن $G_R \subset A \times A$ میباشند.



ارائه رسم حاصلضرب دکارتی مثال فوق که در آن تمام 16 عدد نقاط چلیپاه شده عناصر $A \times A$ را ارائه نموده واز آن جمله نقاطی که دوران ها حلقه شده عناصر G_R را نشان میدهند.

شکل $(1-14)$

مثال سوم:

اگر $A=\{0,2,4,6,8,9,11\}$ و $B=\{1,2,3,4,5\}$

و رابطهٔ R از A بطرف B بنا بر عبارت:

«x مضرب y است.» در حالیکه $x\in A$ و $y\in B$ اند

تعریف شده باشد،

(a). اولاً گرف رابطه R را بدست آرید.

(b). ثانیاً $A\times B$ را حاصل کنید.

(c). ثالثاً جوابات مرد و جزا (a) و (b) را روی رسم حاصلضرب

دکارتی افاده کنید.

(d). نشان دهید که گرف G_R رابطهٔ R یک ست فرعی $A\times B$ است.

حل:

(a). با در نظر داشت شرط مساله یعنی عبارت:

«x مضرب y است.» ما آن عناصر ست A و ست B را

علی الترتیب به حیث مرکبه های اول و دوم جوره مرتب انتخاب

مینمایم که عنصر ست A مضرب عنصر ست B باشد. بطور مثال

ما میدانیم که 0 شامل A مضرب 2 شامل B است، پس جوره مرتب

$(0,2)$ شامل گرف G_R رابطهٔ R میباشد.

به همین قسم چون 8 شامل A مضرب 4 شامل B است، بنا بران

جوره مرتب $(8,4)$ شامل G_R میباشد.

حالانکه 11 شامل A مضرب 2 شامل B نبوده، پس $(11,2)$

شامل G_R نمیباشد.

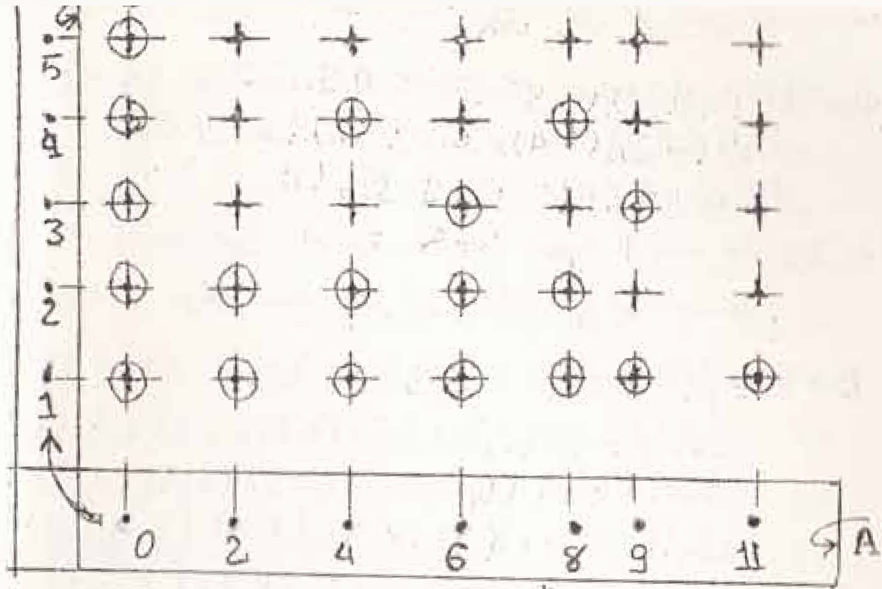
بنابر همین روش تمام عناصر ست G_R را قرار آتی تعیین کرد میتوانیم :

$$G_R=\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(2,1),(2,2),(4,1),(4,2),(4,4),(6,1),(6,2),(6,3),(8,1),(8,2),(8,4),(9,1),(9,3),(11,1)\}.$$

(b). ست جوره های مرتب $A\times B$ عبارت از ست تمام 35 دانه جوره های مرتب است که در ذیل ارائه گردیده است :

$$A\times B=\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(8,1),(8,2),(8,3),(8,4),(8,5),(9,1),(9,2),(9,3),(9,4),(9,5),(11,1),(11,2),(11,3),(11,4),(11,5)\}.$$

(c). رسم حاصلضرب دکارتی $A\times B$ توسط تمام نقاط چلیپا شده " + " در شکل (1-15) صفحهٔ بعدی ارائه شده که ازانجمله نقاط چلیپا حلقه‌ٔ شده "⊕" گرف رابطهٔ G_R را ارائه مینمایند .



شکل (1-15)

(d) . ازارائه شکل (1-15) رسم حاصلضرب دکارتی $A\times B$ و گرف G_R رابطه R درفوق ، وهمچنان ازمقایسه شکل روستر $A\times B$ و G_R درجز (a) و (b) بآسانی دید میشود که تمام عناصر ست G_R شامل ست $A\times B$ است .

بنابرآن $G_R \subset A\times B$ میباشد .

بصورت عموم چون گرف هررابطهٔ R از A بطرف B ست فرعی $A\times B$ است پس هررابطه R را بشکل رسم دکارتی ست فرعی $A\times B$ نشان داده میتوانیم . درینصورت شکل ارائه شده را بنام رسم دکارتی رابطهٔ R مینامیم ، و بهمین قسم شکل جبری رابطه R را قرار ذیل نوشته‌میتوانیم :

$$G_R = \{(x,y) \mid x\in A,\ y\in B,\ xRy\}$$

تمـــــرینـــــات

هریك ازمسایل ذیل را طوریکه خاطرنشان شده حل نمائید :

1 — دردونرد ذیل کلمه «داری» را بحیث قانون مطابقت رابطه R مد نظر بگیرید :

(a) • ست منشاء وست هدف رابطه را تعیین کنید •

(b) • عناصر منشاء تصاویر وعناصر تصاویررامعیین سازید •

(c) • ارائه این رابطه (فرضاء R) را

(i). باساس دیاگرام تیری ،

(ii). باساس گرف افاده کنیـد •

«ای پریچهره که آهنگ کلیسا داری

طـره مریـم وسیمای مسیحاداری

حسن یوسف ، لب عیسی ، ید بیضاداری

آنچه خوبان همه دارند تو تنهاداری»

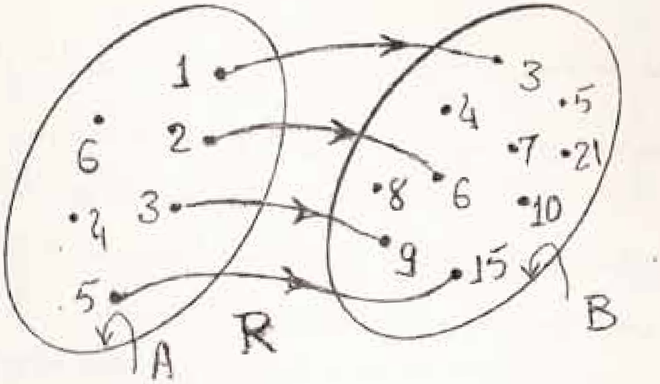
2 — دردفرد ذیل کلمه «آمد» را بحیث قانون مطابقت درنظرگرفته آنرا مانند سوال اول تحلیل و بررسی کنیـد •

« خون بدل ، خاك بسر ، آه بلب ، اشك بچشم »

« بی جمال تو چهار برمن مسکین آمـــد »

(بیـدل)

3- دیاگرام تیری شکل ذیل را مد نظر گرفته وبسوالات پاسخ دهید:



(a) • در شکل فوق ست منشاء وست هدف را تعیین کنید •

(b) • سه عنصر ست منشاء را که بحیث منشاء تصاویر قرار گرفته باشند نشان دهید •

(c) • سه عنصر ست هدف را که رول تصاویر را در تشکیل رابطه بازی نموده اند نشان دهید •

(d) • شکل جبری رابطهٔ R را مشخص سازید •

(e) • راجع به:

(i) عنصر 4 در ست A وعنصر 4 در ست B چه فکر میکنید ؟

(ii) عنصر 6 در ست A وعنصر 21 در ست B چه فکر میکنید ؟

(iii) آیا عنصر 9 بحیث منشاء تصویر ویا تصویر واقع شده است؟

4- اگر جوره های مرتب ست G_1 یک رابطه R_1 را قرار ذیل ارائه کند:

$G_1=\{(♠,\triangle),(♦,☆),(♣,\triangle),(♦,♠),(♣,\Psi),(♠,♣)\}$

در اینصورت: (a) • ست منبع مربوط رابطهٔ R_1 را که دارای کمترین تعداد عناصر باشد بنویسید •

(b) • ست هدف رابطه R_1 را که حاوی کمترین عده عناصر باشد بنویسید

(c) • باستفاده از حل جزء (a) و (b) ست تمام جوره های مرتب که بین عناصر ست منبع (فرضاً A) و ست هدف (فرضاً B) موجود شده بتواند بنویسید. ارائه این ست توسط کدام علامه گذاری ممکن است ؟ تعداد عناصر این ست چند میباشد ؟ آیا جوره‌های مرتب: (▲ و ▲) و (♠ و ♠) شامل این ست میباشد؟

(d) • ست آن جوره های مرتب $A \times B$ را که در G_1 شامل نمی باشد ، بنویسید .

(e) • رسم دکارتی رابطه R_1 را نشان دهید .

5 - دو ست: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 3, 6, 9\}$ را با رابطه R طوریکه: xRy رابطهٔ: $x < y$ را برای تمام عناصر x شامل A و y شامل B افاده میکند ، مدنظر بگیرید.

(a) • دیاگرام تیری رابطهٔ R را رسم کنید.

(b) • رسم دکارتی رابطهٔ R را نشان دهید .

(c) • آیا تمام عناصر ست A منشاء تصویر یک و یا چند عنصر ست B میشود ؟

(d) • آیا کدام عنصری در ست B موجود است که تصویر هیچکدام یک از عنصر ست A نشود ؟

6 - بنابر خاصیت وتعریف ست های مساوی ما میدانیم که افاده:

$\{♠, ♦\} = \{♦, ♠\}$ حایز حقیقت است.

آیا: (a) • اناده: $(♠,♦) = (♦,♠)$ نیز حقیقت دارد؟
چرا؟
(b) • بکدام قیمت های x مساوات های ذیل حایز حقیقت میشود؟

(i) • $(x,3) = (-5,3)$ ،
(ii) • $(x,a) = (\frac{1}{2},a)$ ،
(iii) • $(2x,2) = (x,2)$ ،
(iv) • $(x,5) = (5,x)$ ،
(v) • $(x,3) = (1,x)$ •

7 – اگر یك رابطه R از A بطرف B باساس تعریف: $\{(a,m),(☆,3),(5,5)\}$ تعریف شده باشد،
ایا ممکن است که:

(a) • • • $B = \{a,5,★,8\}$ باشد؟ چرا؟
(b) • • • $A = \{5,m,7\}$ باشد؟ چرا؟

8 – دو ست: $C = \{0,2,3,5\}$ و $D = \{0,1,3,4,5,6\}$ را با رابطه $y = 2x-3$ طوریکه $x \in C$ و $y \in D$ مد نظر بگیرید،

(a) • دیاگرام تیری رابطه مفروض را رسم کنید •
(b) • آیا 5 شامل C منشاء تصویر کدام عنصر ست D میباشد؟
(c) • آیا 2 شامل C منشاء تصویر کدام عنصر ست D میباشد؟
(d) • آن عناصر ست C راکه دارای تصویر نمیباشند نشان دهید •
(e) • آن عناصر ست D که تصویر نمیشوند کدام اند؟
(f) • گراف رابطهٔ مفروض را بنویسید •

9 ــ اگر جوره های مرتب: $(3,5)$ و $(-2,7)$ شامل $A\times B$ بوده ، یا بعبارت ریاضی: $(3,5)\in A\times B$
وهم $(-2,7)\in A\times B$ باشند ،

(a) ، اگر ست A محض دارای دو عنصر باشد انها کدام اند؟

(b) ، اگر ست B دارای چهار عنصر که دو انها عبارت از 4 و 9 اند بوده باشد ، دو عنصر دیگر آن کدام اند ؟

10 ــ درصورتیکه $\{(5,2),(m,2),(2,6)\}\subset A\times B$ باشد آیا

(a) ، $5\in A$ ؟ (b) ، $2\in A$ ؟

(c) ، $a\notin B$ ؟ (d) ، $2\in A\cap B$ ؟

(e) ، $6\in A\cup B$ ؟ (f) ، $7\in B$ ؟

هریك از جواب خویش را استدلال کنید ؟

11 ــ با درنظر داشت افاده: $\{(2,4),(3,5)\}\subset E\times E$ کمترین عدد عناصر راکه ست E دارا شده میتواند چند بوده وآن عناصر کدام اند ؟

پس از تعیین ست E افاده $E\times E$ را بدست آرید .

وضمناً توضیح نمائید که آیا :

(a) ، $(2,2)\in E\times E$ ؟ (b) ، $(3,2)\in E\times E$ ؟

(c) ، $(0,4)\in E\times E$ ؟ (d) ، $(1,4)\in E\times E$ ؟

(e) ، آیا افاده: $G_1=\{(2,4),(4,3),(3,5),(5,2)\}\subset E\times E$

حایز حقیقت میباشد ؟ توضیح فرمائید .

(f) ، ایا افاده:

$G_2=\{(2,2),(4,4),(3,3),(5,5)\}\subset E\times E$

حایز حقیقت میباشد ؟ توضیح دارید .

(g) . آیا اناده:

$$G_3 = \{(4,2),(3,4),(5,3),(2,5)\} \subset E \times E$$

دارای حقیقت میباشد ؟ چرا ؟

(h) . ست های مکملهٔ :

(i) . G_1 ، (ii) . G_2 (همچنان مکملهٔ ست)

(iii) . G_3 را نظر به $E \times E$ حاصل نمائید .

1-3 . تعریف رابطه دوگانه‌ای (دوتائی)

از امثال قبل بملاحظه رسید که یک رابطه توسط دو ست A و B (بصورت خصوص $A=B$) وست فرعی $A \times B$ تعیین میشود که ست A منبع همان رابطه و ست B هدف همان رابطه و ست فرعی $A \times B$ گرفشمان رابطه را تشکیل میدهد . این رابطه را بنام رابطهٔ دوگانه‌ای (Binary Relation) یاد میکنند .

تعریف: هر ست فرعی ست $A \times B$ یک رابطه دوگانه‌ای از A بطرف B را بوجود میآورد .

تبصره : اکثر روابطی که در ریاضیات بآن ها سروکار داریم دوگانه ای اند . چنانچه تمام روابطی که قبلاً مطالعه شد دوگانه‌ای میباشند . ولی بعضی روابطی موجود است که دوگانه‌ای نبوده بلکه چند گانه ای میباشند .

مثلاً اگر تقسیم اوقات یکروز هفته (فرضاً شنبه) صنوف هفتم یک مکتب را با مضامینی که درین روز در صنوف هفتم تدریس میشوند که در جدول ذیل ارائه شده مد نظر بگیریم درینصورت دیده میشود که رابطه مربوطه این جدول یکرابطه دوگانه ای نبوده بلکه

یکرابطهٔ سه گانه ای را بین ست ساعات، ست صنوف، وست مضامین که درین روز (شنبه) تدریس میشوند بوجود می آورد.

جدول تقسیم اوقات روز شنبه صنوف هفتم.

ساعات / صنوف	1	2	3	4	5	6
7A	دینیات	تاریخ	ریاضی	جغرافیا	فزیک	پښتو
7B	پښتو	بیولوژی	کیمیا	ریاضی	دینیات	دری
7C	ریاضی	جغرافیا	فزیک	بیولوژی	دری	تاریخ
7D	دری	ریاضی	تربیت بدنی	کیمیا	پښتو	فزیک

اگر تقسیم اوقات هفته وار یک مکتب با درنظرداشت ست روزهای هفته، ست ساعات، ست مضامین، ست صنوف وست معلمان مد نظر گرفته شود، درین صورت رابطه مربوطه آن یک رابطهٔ پنج گانه ای است.

ازینکه استعمال رابطه سه گانه ای، چهار گانه ای وغیره در ریاضیات

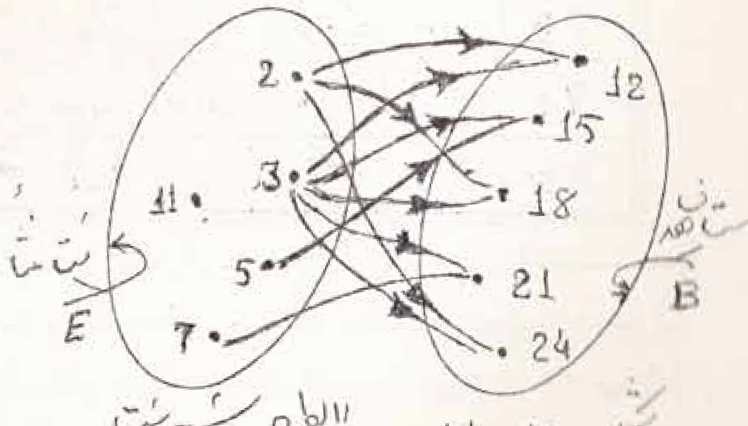
بیشتر معمول است و بصورت عموم سروکار ما با روابط دوگانه ای
است . ازین به بعد ما بعوض کلمهٔ رابطهٔ دوگانه ای مختصر
کلمهٔ مختصر آن یعنی رابطه را استعمال مینمایم .

1-4 . رابطهٔ معکوس (Inverse Relation)

مثال اول . اگر رابطه β در بین دو ست :

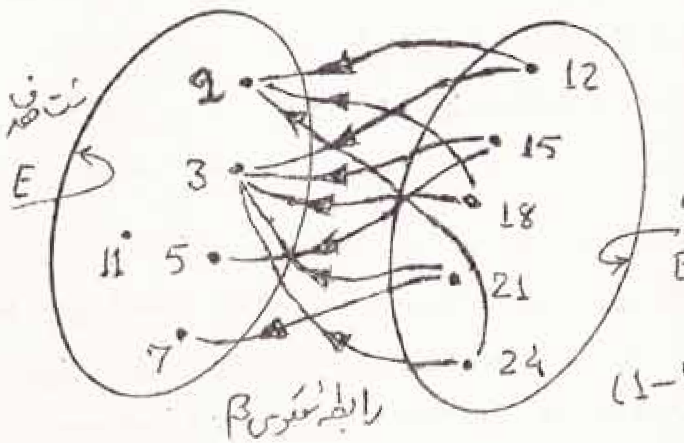
$$E=\{2, 3, 5, 7, 11\}$$

و $B=\{12, 15, 18, 21, 24\}$ یعنی $x\in E$ ، $y\in B$
توسط عبارت : " x تاسم y است . " تعریف شده ،
مد نظر گرفته شود ؛ درینصورت :
(ه) . رسم دیاگرام تیری رابطهٔ β قرار ذیل ارائه شده میتواند:



شکل (1-16)

(b) ۰ در صورت تغییر دادن جهت تیرهای شکل دیاگرام تیری فوق، دیاگرام تیری ذیل حاصل شده میتواند :



شکل (۱-۱۷)

بملاحظه میرسد که از تغییر دادن جهت تیرهای دیاگرام تیری رابطهٔ β ماهیت رابطه مذکور نیز تغییر میخورد ۰ زیرا :
12 قاسم 2 نبوده وهم چنان 15 قاسم 3 نمیباشد ۰

(c) ۰ درصورتیکه گرف رابطهٔ «... قاسم ... است» را به G_β ارائه نمایم درینصورت G_β عبارت است از:

$$G_\beta = \{(2,12),(2,18),(2,24),(3,12),(3,15),(3,18),(3,21),(3,24),(5,15),(7,21)\}$$

اکنون اگر گرف رابطهٔ ایکه از تغییر دادن جهت تیرهای دیاگرام تیری رابطهٔ β حادث میشود به $G_{\beta^{-1}}$ ارائه گردد درینصورت $G_{\beta^{-1}}$ عبارت است از:

$$G_{\beta^{-1}} = \{(12,2),(18,2),(24,2),(12,3),(15,3),(18,3),(21,3),(24,3),(15,5),(21,7)\}$$

از مقایسه دو دیاگرام تیری شکل (16 - 1) وشکل (17 - 1)
بملاحظه میرسد که:

(i) • دردیاگرام تیری شکل (16 - 1) وگرف G ست E بحیث منشاء وست B بحیث هدف واقع گردیده ، حالانکه دردیاگرام تیری شکل (17 - 1) وگرف $G_{\beta^{-1}}$ ست E بحیث هدف وست B بحیث منبع واقع گردیده اند •

(ii) • علاوه برآن هرمرتبه اول جوره های مرتب عناصر گرف G_β تاسم مرکبه دوم آنست ، حالانکه هرمرتبه اول جوره های مرتب عناصر گرف $G_{\beta^{-1}}$ مضرب مرکبه دوم آن میباشد •

تعریف: آندو رابطه که منشاء اولی آن هدف دومی بوده وبالعکس هدف اولی منشاء دوم آن باشد معکوس یکدیگر گفته میشوند ، در صورتیکه برای هرجوره مرتب (x, y) شامل گرف رابطه اولی ، یک جوره مرتب (y, x) درگرف دومی آن وهمچنان برای جوره مرتب (a, b) شامل گرف دوم یک جوره مرتب (b, a) درگرف رابطه اولی موجود گـــــردد •

باعبارت دیگر: اگر G_R گرف یک رابطه R از A بطرف B باشد یکرابطه R_1 از B بطرف A که گرف آن بـه G_{R_1} ارائـــه میشـــود

معکوس رابطه R گفته میشود درصورتیکه : $G_{R_1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in G_R\}$ باشد .   رابطه معکوس R را به R^{-1} ارائه مینمایند .

<u>مثال دوم</u> . هرگاه : $S = \{1, 3, 5, 7\}$

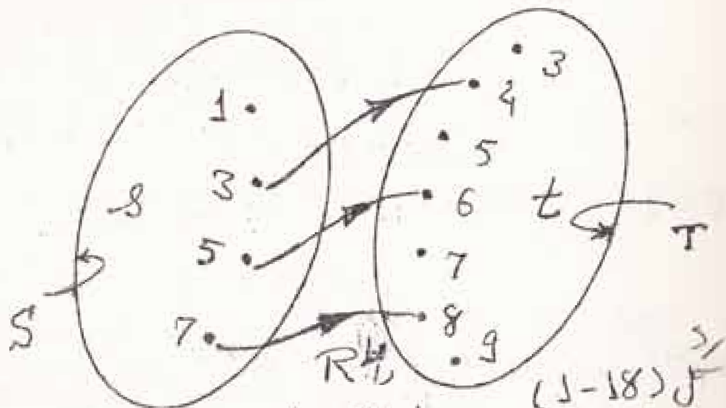
مفروض $T = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

بوده ورابطهٔ R از S بطرف T برای $s \in S$ ، $t \in T$

توسط افادهٔ : $t = s + 1$ توضیح شده باشد ،

رسم دیاگرام تیری رابطه R طبق شکل (18-1) ذیل

توضیح شده میتواند :



$t = s + 1$

شکل (18-1)

اگر رابطه معکوس R را به R^{-1} ارائه نمایم درینصورت R^{-1} طبق

شکل (19-1) در ذیل ارائه کرده

میتوانـــــد :

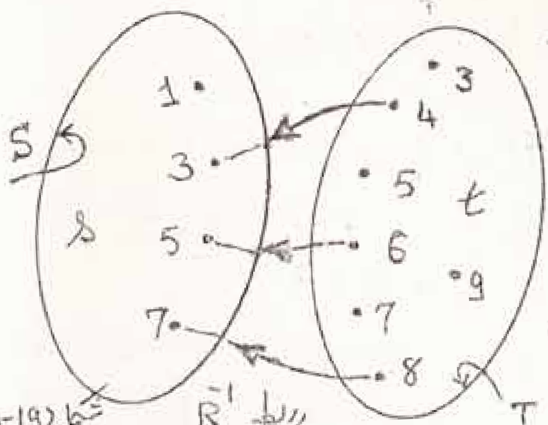
پس دستور است بملاحظه میرسد که رابطه R^{-1} از T بطرف S توسط

امّا ده : $s = t-1$

برای $s \in S$

و $t \in T$

تعریف شده میتواند.



شکل (1-19) رابطه R^{-1}

دارابطه: $s = t-1$

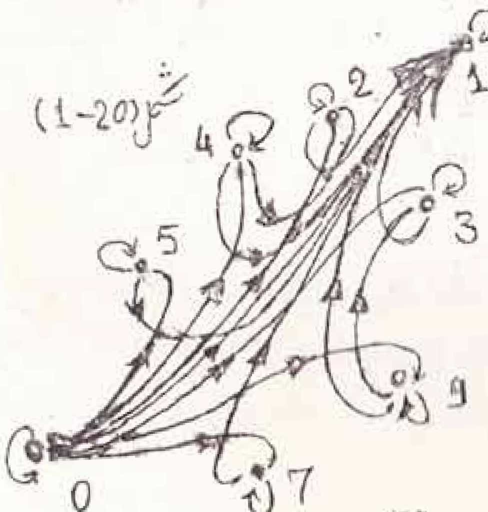
در مثال فوق اگر گرف رابطه R را به G_R ارائه نمایم در اینصورت داریم:

$$G_R = \{(3,4),(5,6),(7,8)\}$$

مثال اگر گرف رابطه معکوس R را به G_R^{-1} نشان دهیم ما داریم:

$$G_R^{-1} = \{(4,3),(6,5),(8,7)\}$$

مثال سوم. اگر ست $E=\{0,1,2,3,4,5,7,9\}$ با رابطه R در E طوریکه xRy توسط عبارت: "x مضرب y است." برای $x \in E$ و $y \in E$ تعریف شود در اینصورت صفر عنصر ست E رابطه R را با تمام عناصر دیگر ست E قایم میکند.



شکل (1-20)

زیرا: برای هر x شامل E رابطهٔ: $x \cdot 0 = 0$ حقیقت دارد.
با العکس عنصر 1 شامل E بجز از خودش مضروب هیچکدام دیگر یک عنصر ست E نمی باشد. زیرا درصورتیکه $x \neq 1$ باشد، هیچ یک عنصری درE موجود شده نمیتواند که را بالـــه: $1 \cdot x = 1$ را تحقیق کند.

بادرنظر داشت شرایط فوق گراف رابطهٔ R طبق ذیل نمایش داده میشود:

$$G_R = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,7),(0,9),(1,1),(2,2),(2,1),(3,3),(3,1),(4,4),(4,2),(4,1),(5,5),(5,1),(7,7),(7,1),(9,9),(9,3),(9,1)\}$$

دیاگرام تیری رابطه مذکور درشکل (20-1) فوقاً ارائه شده.

حال اگر جهت وسمت تیرهای دیاگرام شکل فوق را تغیر داده، ویا جاهای مرکبه های هر یک از جوره های مرتب گراف رابطه را تغیر دهیم، درینصورت باید که رابطهٔ معکوس R عرض وجود کند.
اگر گراف رابطه معکوس R را به $G_{R^{-1}}$ نشان دهیم درینصورت ما داریم:

$$G_{R^{-1}} = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0),(7,0),(9,0),(1,1),(2,2),(1,2),(3,3),(1,3),(4,4),(2,4),(1,4),(5,5),(1,5),(7,7),(1,7),(9,9),(3,9),(1,9)\}$$

بدون جـــوره مرتب: (0,0) در گراف رابطه R^{-1} موجود است،

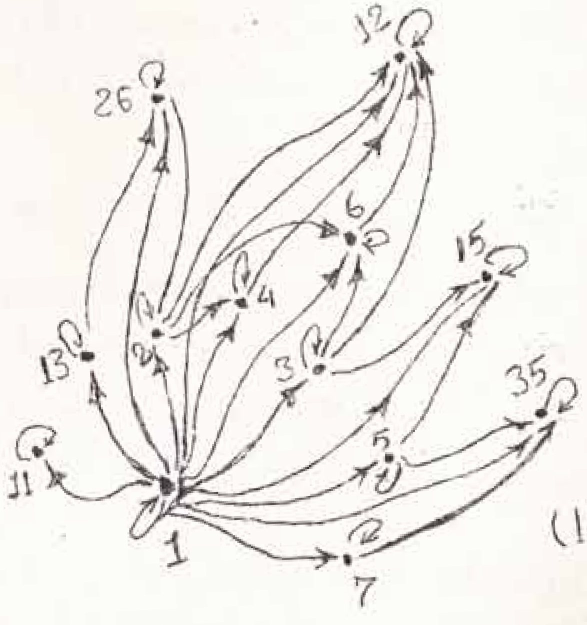
در حالیکه صفر قاسم کدام عدد شده نمیتواند بنابران رابطه معکوس R یعنی R^{-1} رابطهٔ تقسیم میکنند در E نمیباشد.

مثال چهارم .

اگر $E=\{1,2,3,4,5,6,7,11,12,13,15,26,35\}$ باشد رابطهٔ γ در E توسط عبارت :

« ... قاسم ... است .» تعریف شود

درینصورت دیاگرام تیری رابطهٔ γ در شکل (1-21) ارائه میشود .



شکل (1-21)

اگر رابطهٔ معکوس γ را به $G_{\gamma^{-1}}$ ارائه کنیم $G_{\gamma^{-1}}$ توسط عبارت : « ... مضرب ... است .» تعریف شده میتواند ، زیرا در ست E صفر موجود نیست .

$G_{\delta^{-1}}$ طبق ذیل ارائه میشود :

$G_{\delta^{-1}} = \{(35,1),(35,7),(35,5),(11,1),(15,5),(35,35),$
$(11,11),(15,3),(15,1),(12,1),(12,2),(12,3),(12,4),(12,6),$
$(15,15),(26,1),(26,2),(26,13),(6,1),(6,2),(6,3),(4,1),$
$(4,2),(3,1),(3,3),(2,1),(2,2),(5,1),(5,5),(7,1),(7,7),$
$(13,1),(13,13),(12,12),(26,26),(6,6),(4,4),(1,1)\}.$

مثال پنجم .

اگر $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$
و $E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
با رابطهٔ δ از A بطرف E کــــــه توسط اناده :
$y = x^2-1$ برای $x \in A$ و $y \in E$ تعریف شده مفروض باشند ،

(a) . اگر گرف را بطهٔ δ به G_δ ارائه شود G_δ را تعیین کنید .

(b) . اگر رابطهٔ معکوس δ به δ^{-1} ارائه شود ، گرف آنرا به $G_{\delta^{-1}}$ ارائه نموده وتعیین کنید .

(c) . رابطهٔ δ^{-1} راتوسط دیاگرام تیری نشان دهید .

(d) . افاده الجبری $G_{\delta^{-1}}$ را بنویسید .

حــل :

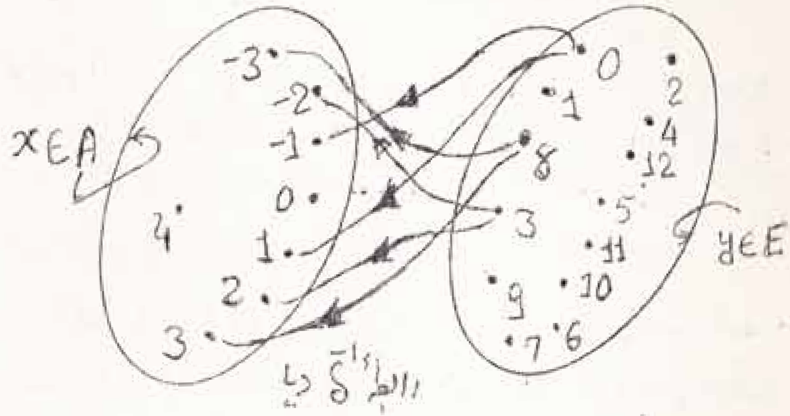
(a) . گرف δ طبق ذیل ارائه شده میتواند :

$G_\delta = \{(-3,8),(-2,3),(-1,0),(1,0),(2,3),(3,8)\}.$

(ب) • گراف δ^{-1} قرار ذیل: نشان داده میتواند :

$$G_{\delta^{-1}} = \{(8,-3), (3,-2), (0,-1), (0,1), (3,2), (8,3)\}.$$

(ج) • ارائهٔ دیاگرام تیری رابطهٔ δ^{-1} طبق ذیل است :



شکل (22-ل): $x = \pm\sqrt{y+1}$

(د) • افاده الجبری $G_{\delta^{-1}}$ عبارت است از :

$$G_{\delta^{-1}} = \{(x,y) \mid y \in E,\ x \in A,\ y\,\delta^{-1}\,x\} \subseteq E \times A$$

تمـــــرینـــات

1. جملات ذیل را طوری تکمیل کنید که مفاهیم درست را افاده کننـــد :

(a) . اگر R یک رابطه از A بطرف B باشد ، رابطـــهٔ معکوس آن یعنی R^{-1} از ______ بطرف ______ میباشد .

(b) . در یک رابطه R اگر ست A منبع و ست B هدف آن باشد در رابطه R^{-1} ست A ______ و ست B ______ آن میباشد .

(c) . اگر یک جوړهٔ مرتب (2 ، 5) شامل گرف G_R یک رابطه R باشد ، در صورتیکه R^{-1} رابطه معکوس R باشد ، جوړه مرتب (___ ، ___) شامل گرف ______ رابطه R^{-1} میباشد .

(d) . اگر یک رابطه R توسط افاده جبری :

$$G_R=\{(x,y) \mid x\in A , y\in B ; \ xRy\} \subset A\times B$$

ارائه شود ، پس رابطهٔ معکوس R یعنی R^{-1} توسط افاده جبری :

$$G_{R^{-1}}=\{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \} \subset \_\_\_\_$$

ارائـه شده میتوانـــد .

2 . اگر $A=\{2 ، 5 ، 7 ، 13\}$ و $B=\{3 ، 8 ، 12 ، 15 ، 20 ، 26 ، 28\}$

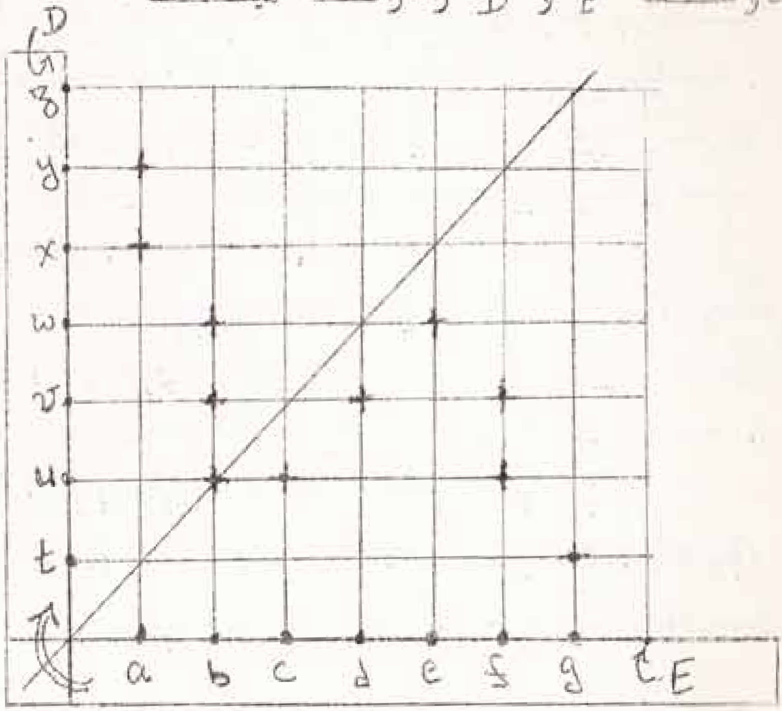
مفروض بوده و یک رابطهٔ R را از A بطرف B که توسط عبارت :

" ... قاسم ... است . " توضیح شده در نظر بگیرید :

(a) • رابطه R را برحسب مجموعه زوجهای مرتب تعیین کنید •

(b) • رابطه معکوس R را برحسب مجموعه زوج مرتب حاصل کنید •

3 • با در نظرداشت شکل ذیل که حاصلضرب دکارتی E×D دو ست E و D را ارائه میکند •



اولاً: شکل روستر و یا گراف G_β رابطهٔ β را که نقاط چلیپا شده را ارائه کند بنویسید •

ثانیاً: رابطه معکوس β را به β^{-1} نشان داده و گراف $G_{\beta^{-1}}$ را بنویسید •

ثالثاً: ست D را با عین ترتیب عناصر آن روی خط افقی وست E
را با عین ترتیب عناصر آن روی خط عمودی در شکل نشان داده
وگراف اتم $G_{\bar{p}}$ را تعیین کنید ۰

رابعاً: ایا گفته میتوانید که نقاط مربوطه هردو گراف G_p و اتم $G_{\bar{p}}$
نظر به خط قطری باهم چه رابطه دارند؟

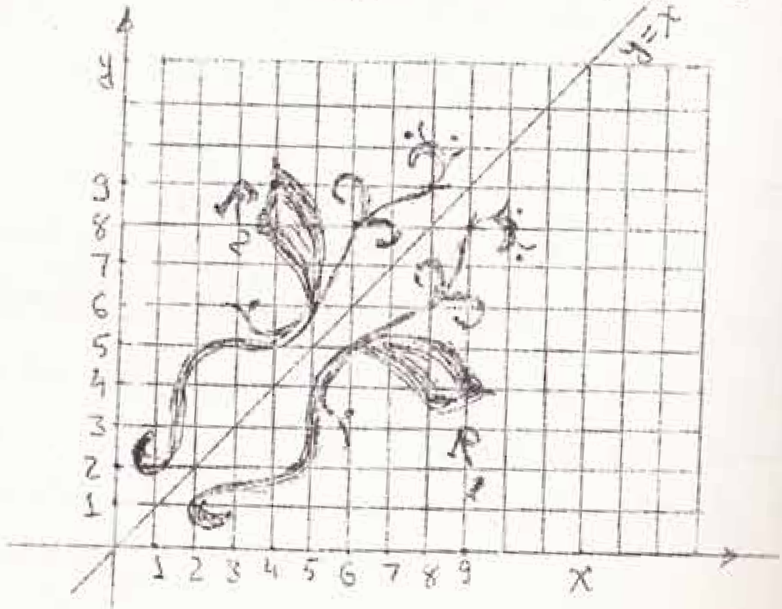
4 - اگر $S=\{3,4,5,7,8\}$ و $T=\{3,6,7,8,9\}$
مفروض بوده ورابطه R از S بطرف T، برای $x \in S$ و $y \in T$
باساس افاده: " $x < y$ " ... تعریف شود ،

(a) ۰ دیاگرام تیری رابطهٔ R را رسم کنید ۰

(b) ۰ بنا برحسب مفروره جوره مرتب شکل روستررابطهٔ R را بنویسید ۰

(c) ۰ دیاگرام تیری و شکل روستر رابطهٔ معکوس R رابنویسید ۰

5 ۰ درشکل ذیل اگرست نقاط محور x بحیث عناصرمنشاء



وست نقاط مربوطه محور y بحیث هدف مد نظر گرفته شوند ، درصورتیکه نقاط هردو شکل متناظر نظر به خط $x=y$ دو رابطه R_1 و R_2 را ارائه نمایند راجع به R_1 و R_2 چه گفته میتوانید ؟

6 . در ست $E = F = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
دو رابطه R_1 و R_2 را که توسط گراف های مربوطه شان علی الترتیب طبق ذیل :

$$G_{R_1} = \{(1,1), (0,-2), (2,0), (-2,-1)\}$$

$$G_{R_2} = \{(1,1), (-2,0), (0,2), (-1,-2)\}$$

تعریف شده اند مد نظر بگیرید :

(a) • نقاط مربوط هردو رابطه R_1 و R_2 را با خط مستقیم $x = y$ در یک سیستم کمیات وضعیه رسم کنید •

(b) • جوره های مرتب هریک از دو رابطه R_1 و R_2 نظر به خط مستقیم $y = x$ باهم چه ارتباط دارند ؟

7 . اگر یک رابطه R باساس گراف G_R مربوطه خود بیـن دو ست A و B طبق ذیل تعریف شـود :

$$G_R = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B ; y = 2x-2\} \subset A \times B$$

(a) • شکل الجبری رابطه معکوس R یعنی R^{-1} را حاصل کنید •

(b) • اگر $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد آن ست فرعی B را که دارای کمترین عده عناصر بوده و هرعنصر A دارای تصویر در آن باشد ، تعیین کنیـد •

(c) • باستفاده از جزء (b) گرف R^{-1} را با گرف رابطه R در یک سیستم کمیات وضعیه که مبداء آن (0,0) بوده و محورات آن دارای عین واحد باشند رسم کنید •

8 • ست $A = \{3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9\}$ را و رابطه " کلانتر است از " یا " > " در آن مد نظر بگیرید •

(a) • گرف رابطه " > " را در A بنویسید •

(b) • گرف رابطه معکوس آنرا دریافت کنید •

(c) • عبارتی را که توسط آن این رابطه معکوس را افاده شده بتواند بیان کنید •

9 • یک رابطه S طوریکه رابطه مربع (مجذور) بودن را در IN ارائه میکند مد نظر بگیرید :

(a) • آن ست تصاویر راکه منشاء آن ـــــــــــــ ست $A = \{2 , 5 , 7 , 11\}$ است بدست آرید •

(b) • منشاء تصاویر عناصر 64 ، 36 ، 169 ، 10^6 را بدست آرید •

(c) • آیا عدد 8 تصویر شده میتواند و یا خیر؟ چرا ؟

(d) • عبارتی که رابطه معکوس رابطه S را افاده میکند بیان کنید •

1-5. ترکیب روابط (Composition of relations)

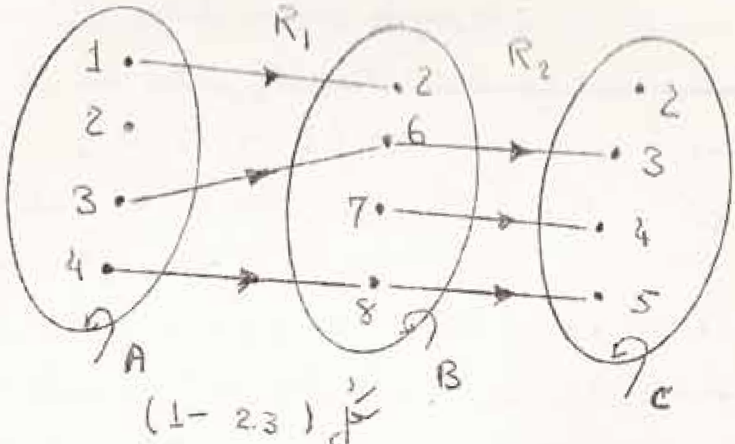
مثال اول: سه ست:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ،

$B = \{2, 6, 7, 8\}$ ،

$C = \{2, 3, 4, 5\}$ را

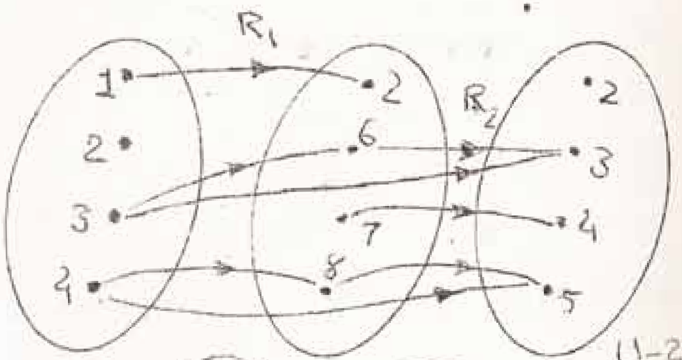
با رابطه R_1 از A بطرف B که توسط افاده: «... نصف ... است.» و همچنان رابطه R_2 را که از B بطرف C توسط افاده: «... سه انتر از ... است.» تعریف اند، مد نظر بگیرید. اولاً رسم دیاگرام تیری رابطهٔ R_1 وسپس از R_2 را طبق شکل ذیل (1-23) ارائه مینمائیم.



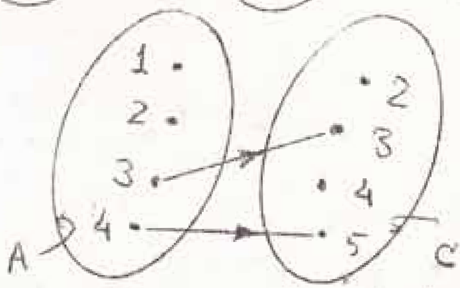
شکل (1-2.3)

از دیاگرام تیری مشترک هردو رابطهٔ R_1 و R_2 بعلاوه بنظر میرسد: ست B که در رابطهٔ R_1 بحیث هدف قرار گرفته در رابطهٔ R_2 بحیث منشاء واقع شده است.

هرگاه بخواهیم رابطه بین A و C را با ساختن دو رابطهٔ R_1 و R_2 مفروض بدست آریم، در این صورت ارائه رابطه مطلوب طبق اشکال (1-24) و (1-25) در ذیل صورت گرفته میتوانند:



شکل (1-24)



شکل (1-25)

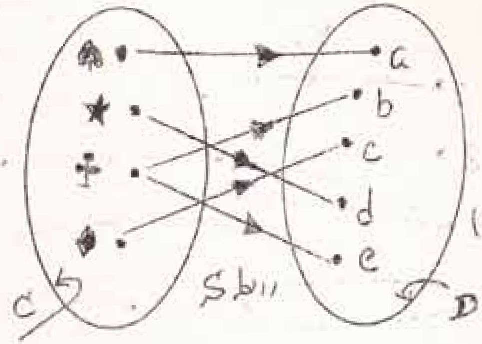
رابطهٔ نهائی ای که بین دو ست A و C مانند فوق حاصل میشود بنام رابطهٔ ترکیب روابط R_1 و R_2 یاد میشود.

مثال دوم: سه ست:

$$C = \{\spadesuit, \bigstar, \div, \blacklozenge\}$$
$$D = \{a, b, c, d, e\}$$
$$E = \{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 7, m\}$$

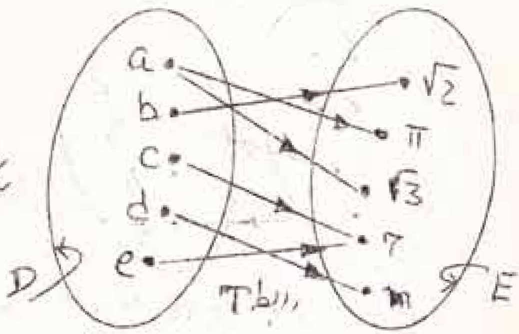
مفروض و روابط:

S و T علی الترتیب از C بطرف D و از D بطرف E
طبق دو دیاگرام تیری شکل (26-1) و شکل (27-1)
در ذیل ارائه گردیده اند :

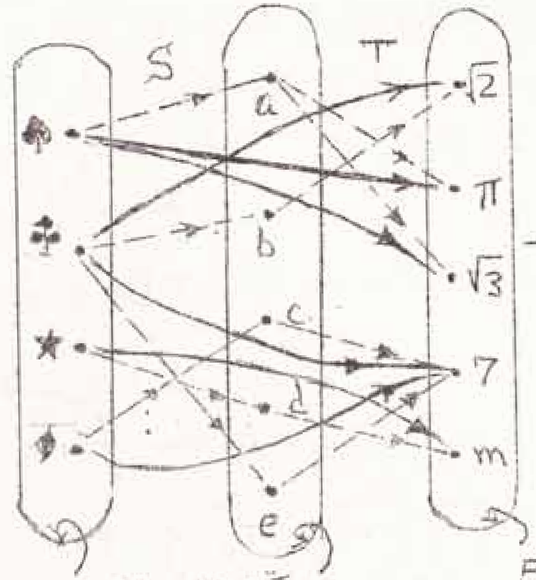


شکل (1-26)

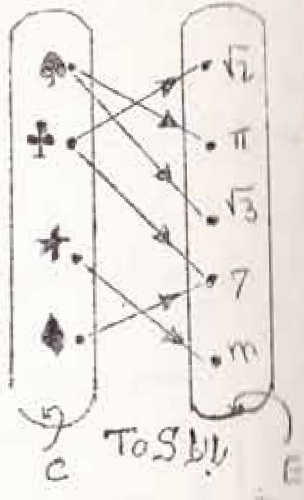
شکل (1-27)



مثال اگر ترکیب روابط S و T را به ToS ارائه کنیم
این رابطه ترکیب ToS طبق دیاگرام های تیری اشکال
صفحه (٤٩) نشان داده میشود :



C (1-28) شکل D E



رابطهٔ $T\circ S$

شکل (1-29)

در صورتیکه ارائه گرف رابطهٔ ترکیب (۴) $T\circ S$ مطلوب باشد آنرا قرار آتی حاصل کرده میتوانیم :

از دیاگرام تیری شکل (1-26) گرف رابطه S با ارائه G_S قرار ذیل افاده شده میتواند :

$$G_S=\{(♠,a),(★,d),(♣,b),(\div,e),(♦,c)\}$$

وهمچنان گرف G_T رابطه T باساس دیاگرام تیری شکل (1-2

---

(۴). چنین خوانده میشود ترکیب S و T (اولاً S وسپس T) یعنی اولاً رابطهٔ S را حاصل نموده ونتیجه آنرا با T ترکیب مینماییم.

قرار آتی ارائه شده میتوانند :

$$G_T = \{(a,\pi),(a,\sqrt{3}),(b,\sqrt{2}),(c,7),(d,m),(e,7)\}$$

گراف رابطهٔ ترکیب TOS از ترکیب دو گراف G_S و G_T فوق ویا از شکل دیاگرام تیوری (1 - 24) طبق ذیل حاصل شده میتوانـــــد :

$$G_{TOS} = \{(\circledast,\pi),(\spadesuit,\sqrt{3}),(\clubsuit,\sqrt{2}),(\clubsuit,7),(\bigstar,m),(\bullet,7)\}.$$

تعـــریف: یک رابطه R_1 را از یک ست A بطرف یـــک ست B ویک رابطه R_2 را از ست B بطـــرف یک ست C مدنظر میگیریم. رابطه ترکیـــب R_1 با R_2 که به $R_2 o R_1$ ارائه میشـــود طبق ذیل تعریف شده میتوانـد :

1. ـــ ست منبع رابطه ترکیب $R_2 o R_1$ عبارت از ست A وهدف آن ست C اســت .

2. ـــ یک عنصر x شامل A با یک عنصر z شامل C رابطهٔ $R_2 o R_1$ را برقرار میسازد درصورتیکه یک عنصر y در B موجود گردد طوریکـــه :

$$x R_1 y$$

وهـــم $$y R_2 z$$

جا یز حقیقـــت گردد .

بخاطر باید داشت کههرآن دو رابطه را ترکیب کرده نمیتوانیم .

برای ترکیب کردن دو رابطه داده شده شرط است که ست هدف رابطه اولی و ست منبع رابطه دومی عین ست باشد .

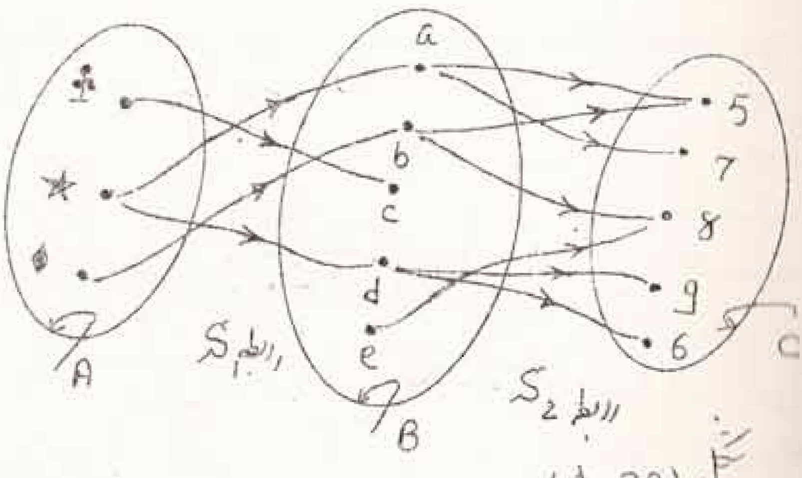
مثال سوم .

دو رابطه S_1 و S_2 را که علی الترتیب بین ست های : A و B وهم چنان بین B و C توسط دیاگرام تیری شکل (30 - 1) در ذیل ارائه شده اند مد نظر گرفته ومیخواهیم که:

(a) . گرف رابطه S_1 و S_2 را بدست آوریم .

(b) . گرف رابطه ترکیب $S_2 \circ S_1$ را حاصل نمایم .

(c) . دیاگرام تیری رابطه ترکیب $S_2 \circ S_1$ را رسم کنیم .



شکل (30-1)

حل :

(a) ۰ اگر گرف رابطه S_1 به G_1 واز S_2 به G_2 ارائه شوند ،
پس درینصورت :

$$G_1=\{(♣,c),(\star,a),(\star,d),(\phi,b)\}$$

وهمچنان :

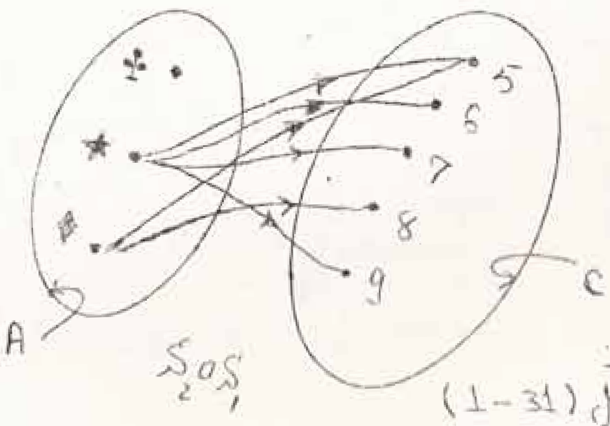
$$G_2=\{(a,5),(a,7),(b,5),(b,8),(d,6),(d,9),(e,8)\}$$

میشوند ۰

(b) ۰ اگر گرف رابطه ترکیب S_2oS_1 به $G_{S_2oS_1}$ نشان داده شود
درینصورت:

$$G_{S_2oS_1}=\{(\star,5),(\star,7),(\star,6),(\star,9),(\phi,5),(\phi,8)\}$$

(c) ۰ دیاگرام تیری رابطه S_2oS_1 ذیلاً در شکل (1-31) ارائه شده است :



شکل (1-31)

ازد یا گرام تیری ترکیب روابطه $S_1 o S_2$ در فوق بملاحظه میرسد که عنصر ۲ عامل A در رابطهٔ ، سهم داشت اما در ترکیب $S_2 o S_1$ کدام سهم ندارد ، چـــرا ؟

مثال چهارم.

ست اعداد تام $\mathbb{Z}$ در حالیکـــه :

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots\}$$

را در نظر گرفته ومیخواهیم نشان دهیم که بصورت عموم عملیـــه ترکیب دو رابطهٔ R_1 و R_2 درست $\mathbb{Z}$ از خاصیت تبدیلـــی پیروی نمیکند . یا به عبارت دیگر نشان باید داد که بصـــورت عموم رابطه : $R_1 o R_2 = R_2 o R_1$ دارای حقیقت نمیباشد.

حـــل : برای ارائه مطلب اینکه : $R_1 o R_2 = R_2 o R_1$ بصورت عام همیشه جایز حقیقت نیست ، در ینصورت کافی است تا توسط یک مثال نشان دهیم که : $R_1 o R_2 \neq R_2 o R_1$ میباشد.

بمنظور رسیدن باین هدف دو رابطهٔ R_1 و R_2 را طوریکه :

R_1 توسط افادهٔ : « دو چند منفی یک »

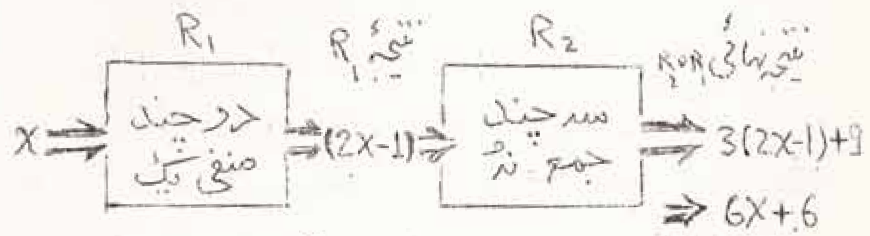
و R_2 توسط افادهٔ : « سه چند جمع ثُه » تعریف شده باشد مد نظر میگیریـــم :

رابطهٔ ترکیب : $R_2 o R_1$ افاده میکند کهاول رابطـــه R_1 بالای عناصر ست $\mathbb{Z}$ تطبیق شود وسپس رابطه R_2 بالای تصاویر حاصل شده ازرابطه R_1 تطبیق گردد وتصاویررادرست $\mathbb{Z}$ بوجود بیاورد.

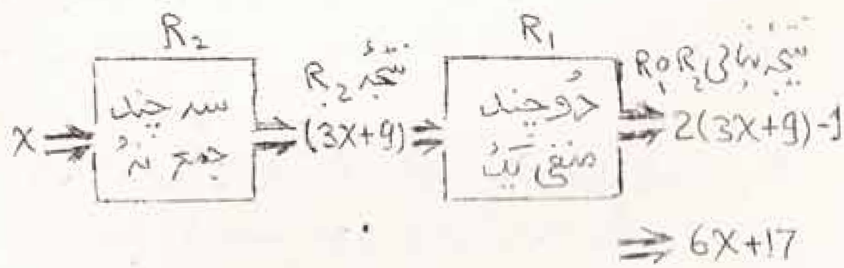
حالانکه رابطه ترکیب: $R_1 o R_2$ افاده میکند که اولاً رابطهٔ R_2 بالای عناصر ست II تطبیق شده وتصاویر مربوطه را در II بوجود می آورد ، وسپس رابطه R_1 این تصاویر مربوطه رابطه R_2 را بحیث منشاء تصاویر قبول نموده وتصاویر آنها را که عبارت از تصاویر تصاویر میباشند درست II بوجود می آورد .

با درنظر داشت توضیحات فوق و شرایط روابط $R_1 R_2$ هردو رابطه ترکیب : $R_1 o R_2$ و $R_2 o R_1$ را باساس دیاگرام درذیل نمایش داده میتوانیم :

دیاگرام رابطهٔ ترکیب $R_2 o R_1$ برای عنصر $x \in II$:



دیاگرام رابطه ترکیب $R_1 o R_2$ برای آن عنصر $x \in II$:



چون تصویر x در ترکیب $R_2 \circ R_1$ عبارت از: $6x+6$ بوده،
و تصویر x در ترکیب $R_1 \circ R_2$ عبارت از: $6x+17$ میباشد.
چون . . . . . . $6x+6 \neq 6x+17$ است،
بنابران $R_2 \circ R_1 \neq R_1 \circ R_2$ میباشد.

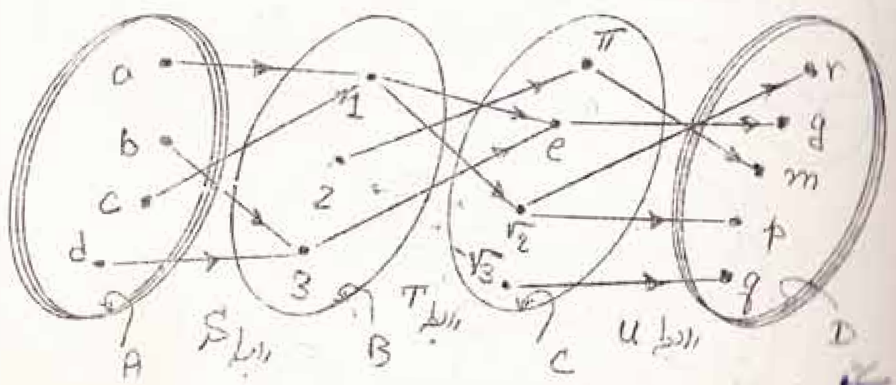
تبصره:

1 — از حل مثال فوق نتیجه میشود که عملیه ترکیب روابط از خاصیت تبدیلی پیروی نمیکنند.

2 — اگر R_1 از ست A بطرف ست B و R_2 از B بطرف ست C دو رابطه مفروض باشند در صورتیکه $A \neq C$ باشند، اگرچه $R_2 \circ R_1$ موجود گردد اما $R_1 \circ R_2$ موجود شده نمیتواند، زیرا سرحد R_2 و منبع R_1 عین ست نمیباشند.

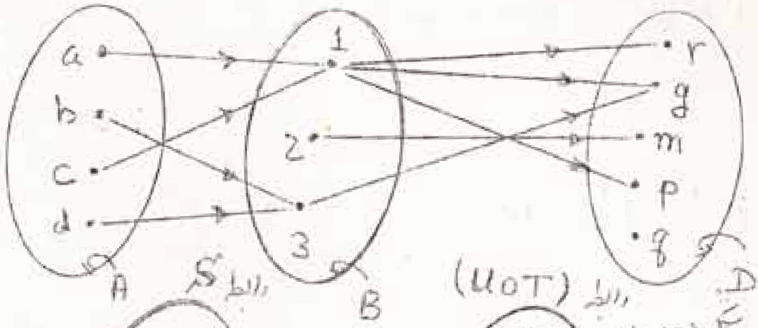
مثال پنجم:

سه رابطه: S، T و U با ساس دیاگرام تیری اشکال ذیل مفروض اند.

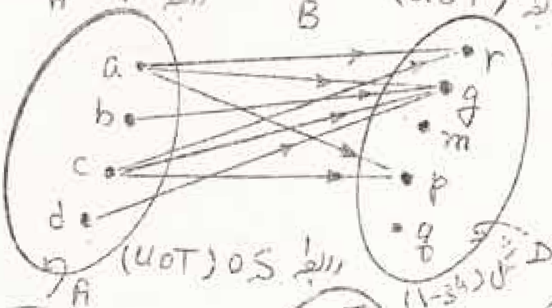


شکل (1-32)

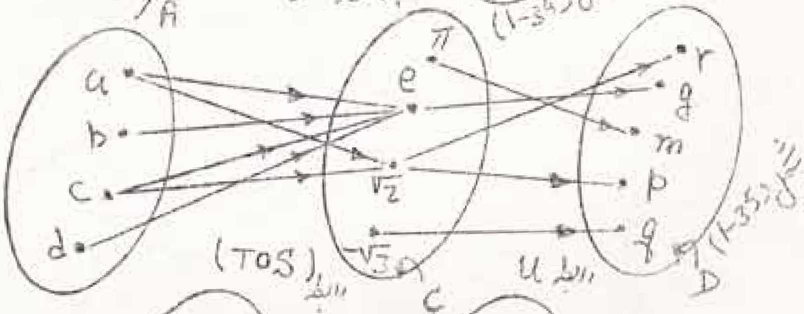
در اینصورت ترکیب نهائی هر سه رابطهٔ S، T و U را اولاً
از نتیجه ترکیب $(UoT)oS$
وسپس از نتیجهٔ ترکیب $Uo(ToS)$ ... طبق اشکال ذیل
مطالعه مینمائیم:



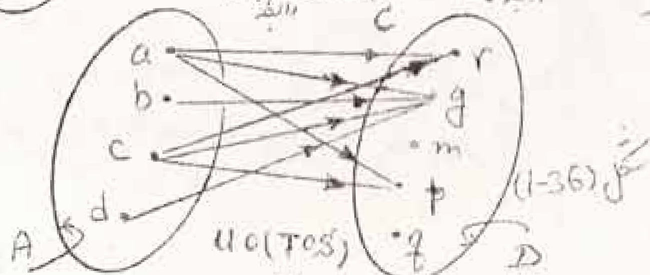
شکل (1-33)



شکل (1-34)



شکل (1-35)



شکل (1-36)

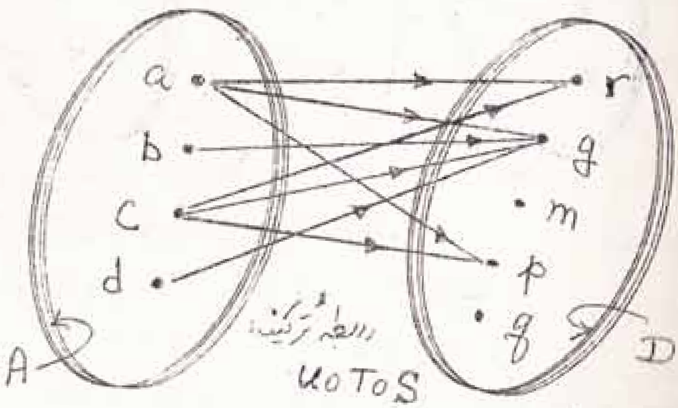
از مقایسه اشکال (1-34) و (1-36) نتیجه میشود

که: ... $(UoT)oS = Uo(ToS)$ بوده

و این ترکیب نهائی هر سه رابطه S ، T و U را به

شکل: $UoToS$ نشان داده میتوانیم.

دیاگرام تیری رابطه ترکیب سه رابطهٔ S ، T و U مفروض:



شکل (1-37)

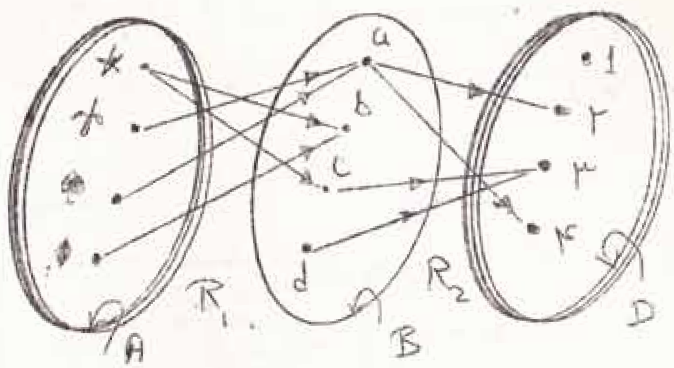
[illegible] رابطه ترکیب نهائی یعنی: $R = UoToS$

عبارت است از:

$$G_R = \{(a,r),(a,g),(a,p),(b,g)$$
$$(c,r),(c,g),(c,p),(d,g)\}.$$

تمرینات

۱. با درنظر داشت شکل ذیل آیا:



(a). $1\in D$ تصویر شده میتواند ؟

(b). $d\in B$ منشاء تصویر شده میتواند ؟

(c). $d\in B$ تصویر شده میتواند ؟

(d). $2\in D$ تصویر کدام عنصر ویا عناصر است ؟

۲. گراف رابطهٔ ترکیب $R_2 \circ R_1$ را از شکل فوق بدست آرید.

۳. یک رابطهٔ R_1 را که توسط افاده:

درحالیکه y تصویر x بوده $y = 2x+1$

و هم چنان یک رابطهٔ R_2 را که توسط افادهٔ:

$z = \frac{1}{2}(y-1)$ در II تعریف شده اند مد نظر بگیرید:

درحالیکه z تصویر y بوده

(a). تصویر 2 عنصر II را نظر به R_1 در II بدست آرید .

(b). تصویر نتیجه R_1 را در II بنا بر رابطه R_2 حاصل کنید .

(c). تصویر 2 را بنا بر رابطه ترکیب $R_2 \circ R_1$ حاصل کنید .

(d). همچنان تصویر 2 بنا بر رابطه ترکیب $R_1 \circ R_2$ بدست آرید .

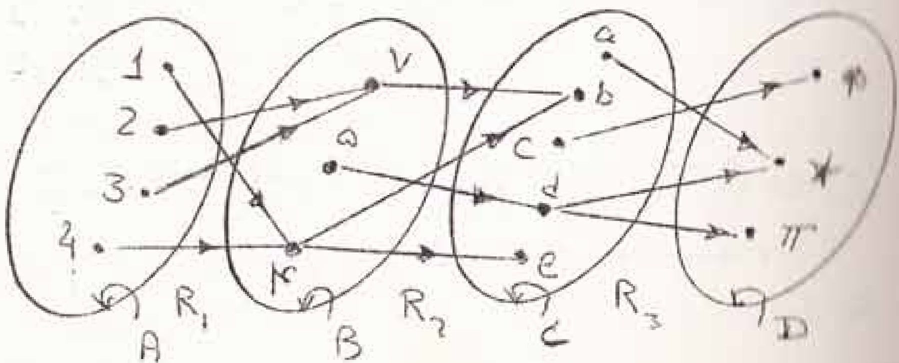
(e). ایا تصویر عنصر 2 توسط رابطه: $R_2 \circ R_1$ و رابطه $R_1 \circ R_2$ همین عدد است ؟

(f). تصویر یکعدد کیفی II را توسط هردو رابطه $R_2 \circ R_1$ و $R_1 \circ R_2$ حاصل نموده و نتایج را باهم مقایسه کنید ، و راجع به روابط: $R_2 \circ R_1$ و $R_1 \circ R_2$ چه گفته میتوانید ؟

(g). آیا میدانید که رابطه R_1 و R_2 باهم چه میباشند ؟

(h). آیا برای هردو رابطه کیفی R و S مساوات: $R \circ S = S \circ R$ همیشه حقیقت دارد ؟

4 . دیاگرام تیری شکل ذیل را مدنظر بگیرید :



(a). رابطهٔ ترکیب : $R_2 \circ R_1$ را با ساختن :

(i). دیاگرام تیری ،

(ii). گراف نشان بدست آرید .

(b). رابطهٔ ترکیب : $R_3 \circ R_2$ را با ساختن :

(i). رسم دیاگرام تیری ،

(ii). گراف نشان بدست آرید .

(c). رابطه ترکیب : $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ را با ساختن :

(i). رسم دیاگرام تیری ،

(ii). گراف نشان حاصل کنید .

(d). رابطه ترکیب : $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ را مانند (c) حاصل کنید

(e). نتایج جزء (c) وجزء (d) باهم مقایسه کنید .

5 . دو رابطهٔ : R_1 و R_2 را در $\mathbb{Z}$ باوری تعریف کنید که گراف رابطهٔ ترکیب $R_2 \circ R_1$ وهمچنان گراف رابطهٔ ترکیب $R_1 \circ R_2$ عبارت از ست جوره های مرتب :

$G = \{\dots,(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),\dots\}$ گردد .

کمک : R_1 را معکوس R_2 انتخاب نمائید .

مسـائل

خالیگاه‌های جملات بعضی مسایل ذیل را داوری که مطلوب است خانه‌پری کنیـد و به دیگر مسایل آن طبق سوال جواب ارائه کنید:

1. اگر A و B دو ست مفروض مد نظر گرفته شونـد، حاصلضرب دکارتی A و B توسط سمبول جبری: $A \times B = \{ \_\_\_\_\_\_ \}$ ارائه میشود.

2. اگر $S = \{1, 2, 3\}$ و $T = \{a, b\}$ باشد، پس $S \times T = \{\_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_\}$ میشود.

3. اگر $E = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد پس، $E \times E = \{\_\_, \_\_, \_\_, \ldots\}$ میشود.

4. اگر $P = \{-1, 0, 1, 2\}$ و رابطهٔ R در آن باساس اناد به

$$G_R = \{(x, y) \mid x \in P, y \in P; x^2 \le y\}$$

تعریف شده باشد، پس در صورت: $(-1, 1) \in G_R$ و یا ______ میباشد. به همین قسم:

(a). $(1, 1) \in$ ____ و یا ______ میباشد.

(b). $(1, 0) \notin G_R$ و یا ______ میباشد.

(c). ______ و یا $1 R 2$ میباشد.

(d). آیا رابطه R در P یک رابطهٔ دوتائی میباشد؟ ____.

(e) چون ______ ست پس $2 \cancel{R} 1$ میباشد .

(f) $(2,2) \notin G_R$ پس ______ میباشد .

(g) تمام عناصر G_R را بنویسید .

5 . دردو ست مفروض S و T ، ست تمام جوره های مرتب (x,y) طوریکه x شامل S و y شامل T میباشند بنام ______ یاد گردیده وتوسط علامه :
$S \times T = \{$ ______ $\}$ ارائه میگردد .

6 . اگر ست : $T = \{\{p\},\{q,r\},\{a,b\}\}$ باشد ،

(a) ست $T \times T$ را بنویسید .

(b) اگر $G = \{(A,B) \mid A \in T ، B \in T ، A \subset B\}$ باشد ، گراف G را باساس ست عناصر آن بنویسید .

(c) آیا برای هر x شامل T ؛ (x,x) شامل G میباشد ؟

(d) ست مکمله G را نظر به $T \times T$ بنویسید .

7 . اگر $E = \{a,b\}$ مد نظر گرفته شود ، درینصورت $E \times E$ دارای ______ عناصر که هرکدام انها یک ______ اند میباشد . ست $E \times E$ دارای ______ ست های فرعی است که در آن جمله ست خالی وخود ______ نیز شامل اند . ازین نتیجه میشود که دریک ست دو عنصره ______ رابطه دوگانه ای موجود شده میتواند .

۸ . اگر H عبارت از ست تمام انسان ها بوده و در آن یک رابطه R که باساس گراف G_R طبق افاده :

$G_R = \{(x,y) \mid x \in H, y \in H$ و x برادر y است$\}$ تعریف شده مد نظر بگیرید ،

(a). R یک رابطه ——— در ——— گفته میشود .

(b) اگر امین برادر فرید باشد ، پس درینصورت:

——— $\in$ (فرید ، امین) میباشد .

(c) برای هر جوره مرتب (x,y) شامل G_R عبارت :

x ——— y است حایز حقیقت است .

(d) اگر (x,y) شامل G_R باشد آیا (y,x) شامل G_R نیز میباشد ؟ استدلال کنید .

۹ . درصورتی دو جوره مرتب: $(2y,x)$ و $(a,3b)$ باهم مساوی میباشند که: ——— = ——— و ——— = ——— باشد.

10 . اگر S عبارت از ست تمام خطوط مستقیم بوده ، وگراف رابطه R در S توسط افاده:

$G_R = \{(x,y) \mid x \in S$ و $y \in S$ و x موازی y است$\}$ تعریف شود ،

(a) درینصورت xRy راتوسط سمبول هندسی ——— نیز ارائه کرده میتوانیم .

(b)- اگر (x,y) شامل G_R باشد آیا (y,x) نیز شامل G_R میباشد؟

11. اگر یک ست: $S=\{2,3,4,5,6\}$ مفروض بوده و روابط R_1، R_2 و R_3 توسط گرف های مربوطه شان:

$$G_{R_1}=\{(x,y)\mid x\in S, y\in S ; x<y\}$$

$$G_{R_2}=\{(x,y)\mid x\in S, y\in S ; x=y\}$$

$$G_{R_3}=\{(x,y)\mid x\in S, y\in S ; x>y\}$$

در S تعریف شوند:

(a). دیاگرام تیری R_1 ، R_2 و R_3 را رسم کنید.

(b). گرف های R_1 ، R_2 و R_3 را باساس لست عناصر آن بنویسید.

(c). $G_{R_1}\cup G_{R_2}\cup G_{R_3}$ را بدست آرید.

(d). $G_{R_1}\cap G_{R_2}\cap G_{R_3}$ را بدست آرید.

12. دیاگرام مقابل را درنظر بگیرید:

(a). گرف جوره های مرتب مربوطه آنها را بنویسید.

(b)- اگر ست مربوطه دیاگرام را به E نشان دهیم آیا گفته میتوانید که $E\times E$ دارای چند عنصر است؟

... ست E میباشد ؟

(رابطهٔ مورد نظر را به عبارت بیان کنید .

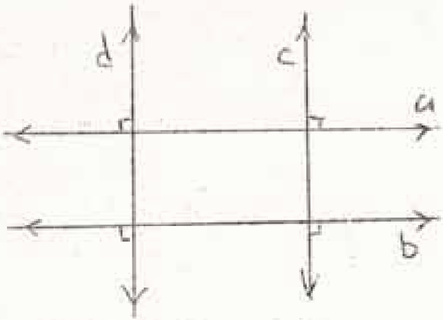
. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ یا ست خطوط مستقیم راکه

در یک مستوی واقع بوده وطبق شکل ذیل باهم عمود باشند ،

با گراف $G_\perp$ که رابطهٔ عمودیت را باساس افادهٔ :

$G_\perp = \{(x,y) \mid x\in S, y \in S ; x\perp y\}$ تعریف میشد

... نظر بگیرید :



(گراف $G_\perp$ را بنویسید .

(آیا $(a,b)\in G_\perp$ ؟

(آیا $(b,c)\in G_\perp$ ؟

یک رابطه R در $E=\{a,b,c,d,e,f\}$ را طوریکه گراف

رابطهٔ R : $G_R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)\}$ باشد

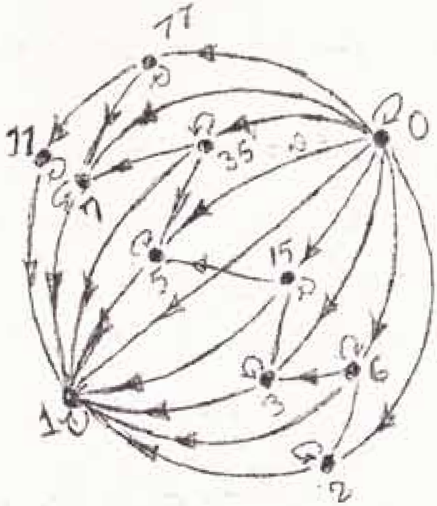
در نظر بگیرید :

(گراف رابطهٔ معکوس R یعنی R^{-1} را نوشته و R و R^{-1} را

باهم مقایسه کنید .

15. با در نظر داشت شکل دیاگرام تیری ذیل:

(a). ست مربوطه شکل را بنویسید.



(b). گرف رابطهٔ مربوطه شکل را بنویسید.

(c). آیا باساس دیاگرام گفته میتوانید که رابطه مورد بحث چه خواهد بود؟

(d). رابطهٔ معکوس رابطه مربوطه دیاگرام را تعیین نمائید. چرا رابطهٔ معکوس دیاگرام را به عبارت افاده کرده نمیتوانیم؟

16. در ست $\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ رابطهٔ R را طوریکه: $xRy : y=x^2+1$ را تعقیب مینند مد نظر بگیرید تناویر عناصر ست E را در صورتیکه:

$E=\{-7,-5,0,3,5,11\}$ باشد،

(a). باساس دیاگرام تیری نشان دهید.

(b). باساس گرف ارائه کنید.

۱۶ - ست: $E=\{1،2،3،4،5،6،9،15،25،900\}$ را با

رابطه‌ٔ R طوریکه R توسط اناده: «...مضرب... است.»

تعریف شده مد نظر بگیرید :

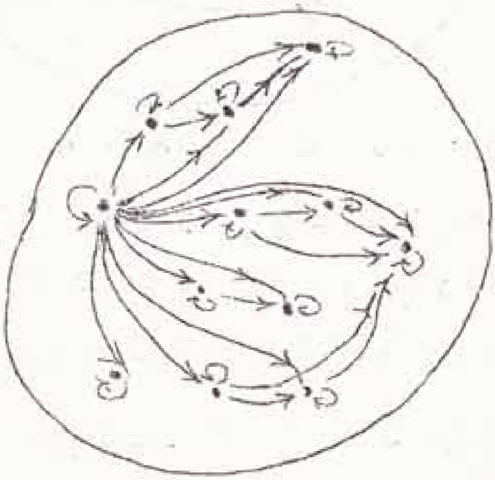
(a)- گرف رابطه‌ٔ R را بنویسید .

(b)- دیاگرام تیری رابطه‌ٔ R را بنویسید .

۱۷ - بادرنظرداشت دیاگرام تیری شکل ذیل نقاط مربوطه‌آنرا

توسط اعداد طبیعی نام گذاری کنید طوریکه یک رابطه‌ٔ مشخص

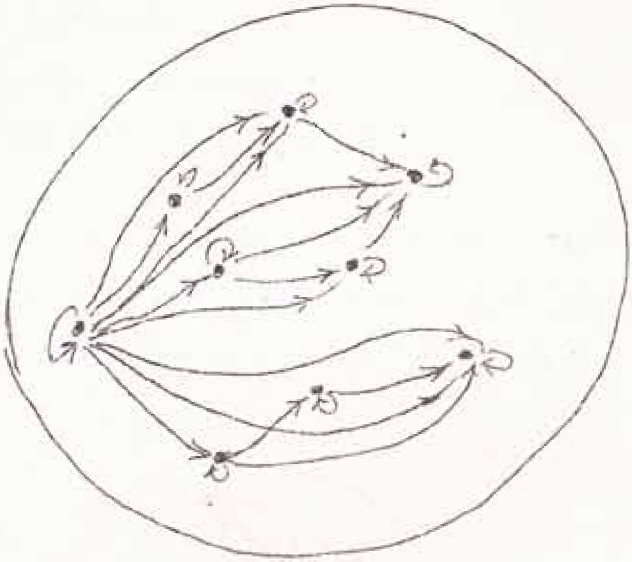
ریاضی را افاده کند ،رابطه‌ٔ مذکور را بعبارت افاده کنید .



۱۸ - نقاط دیاگرام تیری شکل صفحه (۶۸) را توسط

اعداد طبیعی نام گذاری کنید طوریکه یک رابطه

مشخص ریاضی را تعریف کند رابطهء مربوطه آنرا
به عبارت بیان کنید :



20 . سه ست A ، B و C را با مشخصات:

$$A=\{x \mid x\in \mathbb{Z},\ -2<x<2\},$$
$$B=\{y \mid y\in \mathbb{Z},\ -7<y<8\},$$
$$C=\{z \mid z\in \mathbb{Z},\ -6<z<10\}$$ و باروابطه:

R_1 و R_2 طوریکه ؛ R_1 از A بطرف B توسط
افاده: $xR_1y : y = 2x-5$ و R_2 از B بطرف C توسط
افاده: $yR_2z : z= y+2$ تعریف شده اند مدنظر بگیرید
ترکیب $R_2 o R_1$ را به R ارائه کرده .

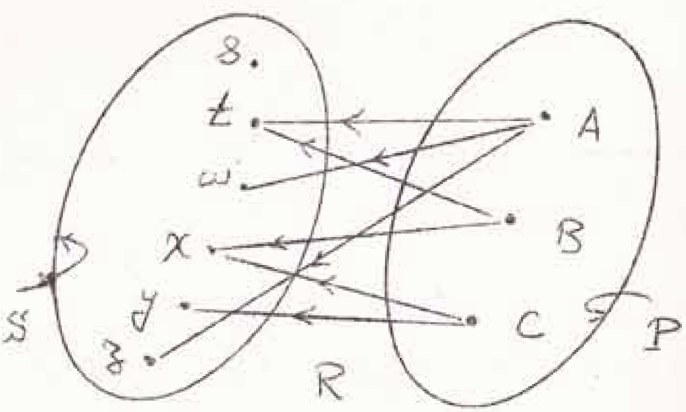
(a) . رابطهٔ R را باساس دیاگرام تیری ارائه کنید .

(b) . رابطهٔ R را باساس گراف آن نشان دهید .

21 . دردیاگرام تیری ذیل P عبارت از ست نقاط و S عبارت از ست خطوط بوده ، اگر رابطه R توسط عبارت : " ... واقع بالای ... است . " توضیح شود .

(a) . گراف رابطه R را بنویسید .

(b) . شکل هندسی مربوط دیاگرام تیری فوق را رسم کنید .



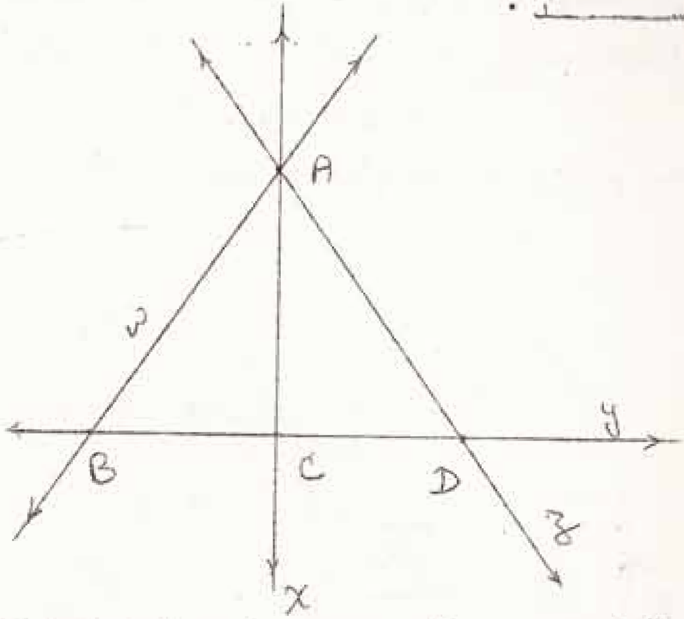
22 . شکل مربوط صفحه (۷۰) یک رابطه R را از ست نقاط : $\{A, B, C, D\}$ بطرف ست خطوط : $\{x, y, z, w\}$ که توسط عبارت :

«... واقع است بر ... » افاده میشود ارائه مینماید :

(a). دیاگرام تیری رابطه R را ارائه کنید .

(b). گراف رابطهٔ R را بنویسید .

(c). عبارتی را که توسط آن رابطه معکوس R افاده شده بتواند بنویسید .



23. اگر $A=\{1,2,3,5,7\}$ و $B=\{4,5,6,7,8,9,10,14,15\}$ با رابطهٔ R از A بطرف B که توسط عبارت :

«... نصف ... است.» تعریف شده مفروض باشد

(a). دیاگرام تیری R ،

(b). گراف آنرا ،

(c). R^{-1} را تعیین کنید .

در هریک از سوالات ذیل خالیگاه های مربوط بجملات آنها را خانه پری کنید طوریکه افادهٔ هر جمله خانه پری شده دارای حقیقت باشد :

24 . اگر ست H تمام انسان‌ها را و رابطه پدر بودن در H بااساس افادهٔ : گراف ان یعنی

$$G=\{(x,y) \mid x\in H ، y\in H \text{ و } x \text{ پدر } y \text{ است}\}$$

تعریف شده باشد ، خالیگاه های ذیل را خانه پری کنید :

(a) . اگر $(a,b)\in G$ باشد پس ____ پدر ____ میباشد .

(b) . اگر $a\in H$ و $b\in H$ بوده و a پدر b باشد ، پس ____ میباشد .

(c) . اگر $c\in H ، d\in H$ بوده ولی ____ پدر d نباشد ، پس ____ میباشد .

(d) . رابطه معکوس رابطه مفروض را بعبارت بیان کنید .

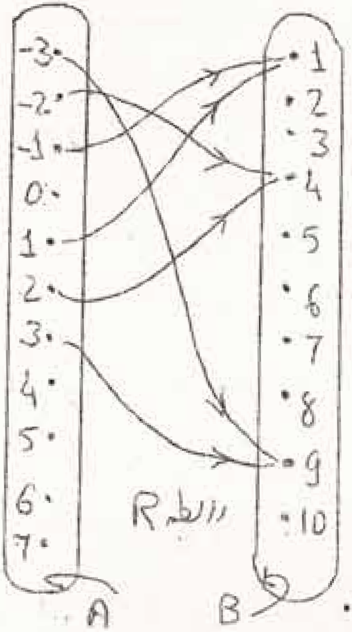
25 . اگر $S=\{-1,0,1,2\}$ بوده و در آن گراف G قابل افادهٔ : $G=\{(x,y) \mid x\in S ، y\in S \text{ و } x=y^2\}$ تعریف شده باشد ،

(a) . اگر $(b,d)\in G$ باشد ، پس ____ میشود .

(b) . اگر $(a,c)\notin G$ باشد ، پس ____ میباشد .

(c). تمام عناصر G را بنویسید .

(d). گرف رابطهٔ معکوس را بطه فوق را بنویسید .



26 . باد رنظر داشت رسم دیاگرام

تیری شکل مقابل :

(a)- ایا R یك رابطه دوتانه ای را از ست A بطرف B بوجود آورده است ؟

(b). ست منبع وست هدف را تعیین نموده و برای هر $x \in A$ وهر $y \in B$ رابطه: xRy را بعبارت افاده کنید .

(c). رابطه معکوس رابطه R را بعبارت بیان کنید .

27 . اگر رابطهٔ R بین دوست : $C = \{1, 4, 6\}$ و $D = \{1, 3, 5, 7\}$ توسط افاده: $x < y$ برای هر $x \in C$ وهر $y \in D$ تعریف شود ؛

(a). دیاگرام تیری رابطهٔ R را رسم کنید .

(b). سمت تیرهای رسم شده را تغیر داده ورابطهٔ جدید یکه حادث میشود آنرا با رابطه مفروض R مقایسه کنید .

(c). گرف رابطهٔ R را بنویسید .

(d) . جاهای مرکبه های هر زوج مرتب گرف را تغییر داده رابطهٔ جدیدیکه حاصل میشود آنرا با رابطهٔ حاصل شده جز (b) مقایسه کنید .

28 . رابطهٔ β را که در بین دوست: $A=\{2,3,5,7,11\}$ و $B=\{12,15,18,21,24\}$ از A بطرف B که بنابر عبارت: «... قاسم ... است.» تعریف شده در نظر بگیرید :

(a) . دیاگرام تیری رابطهٔ β را رسم کنید .

(b) . گرف G_β رابطهٔ β را بنویسید .

(c) . سمت تیرهای دیاگرام تیری جز (a) را تغییر داده و جاهای جوره های مرتب گرف G_β جز (b) را نیز تغییر دهید ، درینصورت دو رابطه جدید که حادث میشوند باهم مقایسه کنید .

(d) . اگر رابطهٔ جدید که از تغییر دادن سمت تیرهای دیاگرام رابطهٔ β حاصل میشود به α ارائه گردد ، α را به عبارت : « ... ________ ... است . » افاده کنید .

فصل دوم

روابط در یک ست

رابطهٔ معادل و رابطهٔ ترتیب

درین فصل ما دو موضوع مهم وعمدهٔ ای ریاضیات معاصر را مورد مطالعه قرار میدهیم . یکی ازین دو موضوع مهم روابط معادل[1] (Equivalencerelations) و دیگرش روابط ترتیب (Order relations) میباشد . روابط معادل وروابط ترتیب درداخل یک ست صورت میگیرد یعنی ست منبع وهم ست هدف ایندو نوع روابط عین ست میباشد .

قبل ازاینکه بمطالعه هریک ازین دو موضوع مهم واساسی ریاضیات اغازنمایم بهتراست که خواص اساسی واصلی روابط رانیز بر بنای ساختمان روابط معادل وروابط ترتیب راتشکیل میدهند مورد بحث قرار دهیم .

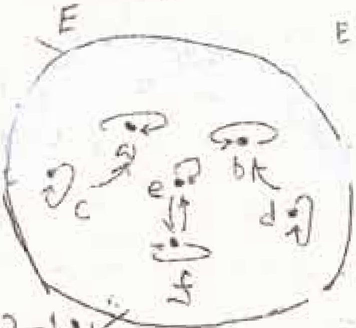
---

(1) . در بعضی اثاریکه بزبان عربی درینموضوع نگاشته رابطهٔ معادل را به عبارت : « علاقة الا تكافو » افاده نموده اند .

۲-۱ . خــواص روابــط

۲-۱.a . خاصیت انعــکاسی (Reflexive Property)

مثال اول. در دیاگرام تیری ذیل دیده میشود کــه بدور هر عنصر ست E تیرچنگک شده رسم گردیده است.



(2-1) شکل

ازین نتیجه میشود که هر عنصر ست E رابطهٔ مورد بحث فرضاً R را با خود قایم مینمایند. درینصورت اگر ست $E = \{a، b، c، d، e، f\}$ مفروض باشد تمام جوره های مرتب:

$(a،a)، (b،b)، (c،c)، (d،d)، (e،e)$ و $(f،f)$

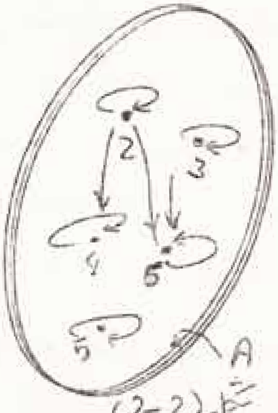
شامل گراف G_R رابطهٔ R میباشد.

> **تعـــریف:** یک رابطه R در یک ست E انعکاسی گفته میشود درصورتیکه برای تمام عناصر x شامل E جوره مرتب (x,x) شامل G_R باشـــــد.

مثال دوم. اگر $A = \{2، 3، 4، 5، 6\}$ مفروض بوده رابطهٔ R در A توسط عبارت: «... اسم ... است ...»

در نظر گرفته شود دیده میشود که هرعنصر ست A تا سـم خودش میباشد ، پس رابطه R در E از خاصیت انعکاسی پیـروی میکنـد .

دیاگرام تیری رابطهٔ R طبق شکل (2-2) ذیل ارائه شـده میتوانـد :



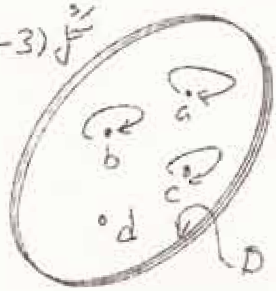
شکل (2-2)

از دیاگرام تیری رابطه مذکور بملاحظه میرسد که دور تمام عناصر ست A یک تیر چنگک شده رسم گردیده است . این تیرچنگک شده دورهرعنصر ست A موجودیت خاصیت انعکاسی رابطهٔ R را در ست A ارائه مینمـد .

گرف رابطـهٔ R در A طبق ذیل ارائه میشود :

$$G_R = \{(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,4),(3,6),(2,6)\}$$

از بررسی گرف رابطهٔ R بملاحظه میرسد که برای هر X شامل ست A جوره مرتب (X,X) شامل گرف G_R میباشـد .



شکل (2-3)

مثال سوم . اگر یک رابطهٔ S در یک ست D که باساس دیاگرام تیری شکل (2-3) مقابل ارائه گردیده است مد نظر گرفته شود ،

درینصورت گرف رابطهٔ S قرار ذیل افاده میشود:

$$G_S = \{(a,a),(c,c),(b,b)\}.$$

ولی میگویم که: رابطهٔ S در D انعکاسی نیست.

یا عنصر b در ست D موجود است که با خود رابطهٔ S را قایم نمیکند. بنابران رابطهٔ S در D انعکاسی نیست.

بصورت خلاصه: برای اینکه بدانیم که آیا یک رابطهٔ R در یک ست E از خاصیت انعکاسی پیروی میکند و یا خیر؟

لازم است تا یکی ازاین دو طریقه ذیل را مورد مطالعه قرار دهیم:

1. آیا باساس دیاگرام تیری رابطهٔ R در E دور هر عنصر ست E یک تیر چنگک شده رسم گردیده است و یا چطور؟

2. آیا در گرف G_R رابطهٔ R در E برای هر عنصر x شامل E جوره مرتب (x,x) در G_R موجود است ویا خیر؟

مثال چهارم. اگر G_T گرف یک رابطهٔ T در یک ست B باشد قرار ذیل:

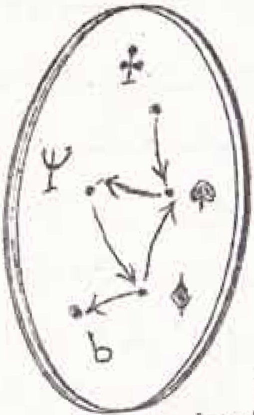
$$G_T = \{(a,b),(a,a),(b,c),(b,b)\}$$

بعد از دیده شود گفته میتوانیم که رابطهٔ T در B انعکاسی نیست.

زیرا باساس گرف G_T بالضرور B حاوی عناصر: a ، b و c بوده، حالانکه: $(c,c) \notin G_T$ است.

مثال پنجم . دیاگرام تیری رابطهٔ β را در یک ست B

طوریکه: $B=\{\Psi, \blacklozenge, \spadesuit, b, \clubsuit\}$ است ، مد نظر بگیرید:



شکل (2-4)

(a). آیا دور کدام یک عنصر x شامل B تیرچنگک شده رسم گردیده است ؟

(b). گرف G_β رابطهٔ β را بنویسید.

ایا در گرف G_β برای کدام یک عنصر x شامل B جوره‌ٔ مرتب (x, x) شامل G_β موجود شده میتواند ؟

حل:

(a). از شکل (2-4) دیاگرام تیری رابطهٔ β بوضاحت دیده میشود که دور هیچکدام یک از عنصر ست B دیاگرام مذکور کدام تیرچنگک شده رسم نشده است.

(b). گرف G_β رابطهٔ β عبارتست از:

$$G_\beta=\{(\clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \Psi), (\Psi, \blacklozenge), (\blacklozenge, \spadesuit), (\blacklozenge, b)\}$$

از گرف G_β بملاحظه میرسد که برای هیچکدام یک عنصر x شامل B جورهٔ مرتب (x, x) شامل G_β موجود شده نمیتواند.

اگر دقت شود فهمیده میشود که مشخصات رابطه β در فوق بکلی ضد مشخصات یک رابطه انعکاسی است.

باین اساس گفته میتوانیم که رابطهٔ β در مثال فوق نه تنها یک رابطهٔ که انعکاسی نیسته بوده بلکه یک رابطهٔ ضد انعکاسی میباشد.

تعریف: یک رابطه A در یک ست E ضد انعکاسی گفته‌میشود درصورتیکه برای هر عنصر (تمام عناصر) x شامل E هیچکدام یک جورهٔ مرتب (x,x) در گرف آن موجود نباشد.

مثال ششم. اگر گرف G_W یک رابطهٔ W:

$$G_W = \{(a,b),(b,c),(b,b),(d,c)\}.$$

در یک ست B مفروض باشد، دیده میشود که رابطه W در ست B ضد انعکاسی نیست. چرا؟

حل:

اگر دقت‌شود از گرف مذکور بملاحظه میرسد که جوره مرتب (b,b) شامل گرف بوده و این باعث میشود تا رابطه‌مذکور از خاصیت ضد انعکاسی پیروی نکند.

همچنان بملاحظه میرسد که رابطه W از خاصیت انعکاسی هم پیروی نمیکند. دریصورت گفته میتوانیم که رابطهٔ W در B نه انعکاسی است ونه ضد انعکاسی.

مثال هفتم: هرگاه L عبارت از ست تمام خطوط یك مستوی بوده و رابطهٔ عمودیت در آن مدنظر گرفته شود بملاحظه میرسد، که رابطهٔ عمودیت در L عبارت از رابطهٔ ضد انعکاسی است.

زیرا: — هیچ خطی موجود شده نمیتواند که بسر خود ش عمود باشد. بنابران رابطهٔ عمودیت در ست خط مشترك المستوی از خاصیت ضدانعکاسی پیروی میکند.

b-2. خاصیت تناظری (symmetric property)

مثال اول: اگر M ست تمام مرد ها را ارائه نمود و رابطه R در M توسط عبارت: «... برادر ... است» تعریف شود، درصورتیکه احمد برادر محمود باشد آیا ضرور است که محمود نیز برادر احمد گردد؟

حال گرف رابطهٔ R را به G_R نشان داده اگر G_R حاوی (محمود، احمد) باشد آیا (احمد، محمود) $\in G_R$ نیز میباشد؟ و یا چطور؟

ما میدانیم که در ست تمام مرد ها رابطه برادری طوریست که اگر احمد برادر محمود باشد باالضرور محمود نیز برادر احمد میباشد. پس اگر (محمود، احمد) $\in G_R$ باشد،

بالضرور $\in G_R$ (احمد محمود) نیز میباشد.

بصورت عموم برای تمام x و y شامل M در صورتیکه xRy باشد بالضرور yRx نیز میباشد.

درین حالت میگویند که رابطهٔ R در M (در مثال فوق) از خاصیت تناظری پیروی میند.

<u>تعریف</u>: یک رابطه R در یک ست E در حالی تناظری گفته میشود که برای هر x شامل E و هر y شامل E اگر xRy موجود شود بالضرور yRx نیز موجود گردد.

باساس دیاگرام تیری: یک رابطهٔ R در یک ست E از خاصیت تناظری پیروی میکند، اگر هر تیری که از یک عنصر x نشاءت و بیک عنصر y اصابت میکند، متقابلاً باید که یک تیر از همان عنصر y نیز نشاءت و به x اصابت کند.

بنابر گرف G_R مربوطه رابطهٔ R درصورت موجودیت جوره مرتب (x, y) در گرف G_R باید که (y, x) در آن نیز موجود گردد.

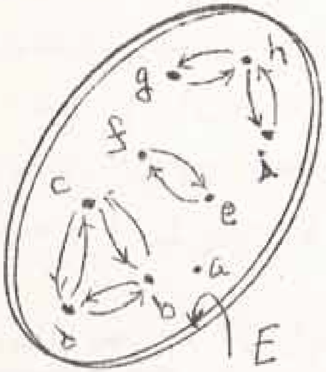
<u>مثال دوم</u>. اگر رابطه برادری را در ست تمام انسانها در نظر گرفته واین رابطه را به β ارائه کنیم، اگر فرید براد ر احمد باشد،

آیا نادره را نیز برادر فرید گفتمیوانیم؟ و یا خیر؟
یا با الفاظ دیگر اگر رابطهٔ «برادری» درست انسانها به $G_{R\beta}$ ارائه گردد، نظر بفرضیهٔ مثال ما میدانیم که $G_{R\beta}$ حاوی (نادره فرید) میباشد. آیا $(\text{فرید}، \text{نادره}) \in G_{R\beta}$ نیز حقیقت دارد؟ و یا خیر؟ چـــرا؟
ما میدانیم که نادره برادر فرید نبود بلکه خواهر او میشود پس درینصورت: $G_{R\beta} \not\in$ (فرید، نادره) میباشد.
ازین نتیجه میشود که رابطه برادری درست تمام انسانها از خاصیت تناظری پیروی نمیکنند.

تبصــره I: از اینکه در تعریف خاصیت تناظری یک رابطــه بوضاحت گفته شده که برای هر x و هر y شامل ســت E اگر xRy حقیقت داشته باشد بالضرور yRx نیز حایز حقیقت میگردد، درمثال دوم چون برای بعضی x و y شامل ست انسانها درصورت موجودیت xRy، yRx نیز حقیقت داشته ولی برای بعضی انسانها yRx حقیقت ندارد بناءً گفته میتوانیم که رابطه برادری درســت انسانها از خاصیت تناظری پیروی نمیکنند.

تبصره II: بصورت عموم فرض ثبوت تناظری نبودن یک رابطه R در یک ست E کافی است تا یک جوره عناصر x و y شامل E را دریافت نمایم طوریکه:
$(x, y) \in G_R$ بوده اما $(y, x) \notin G_R$ باشد.

مثال سوم • اگرد یا گرام تیری یک رابطهٔ S در یک ست E



شکل (2-5)

در شکل مقابل مد نظر گرفته شود دیده میشود که به هر تیری که از یک عنصر x ست E نشاءت کرده و بکدام عنصر y ست E اصابت نموده است مثلاً بلا یک تیر موجود میگردد که از همان عنصر y ست E نیز نشاءت کرده و به همان عنصر x ست E اصابت میکند •

گراف G_S رابطهٔ S طبق ذیل افاده شده میتوانند :

$$G_S=\{(b,c),(c,b),(b,d),(d,b),(c,d),(d,c),(e,f),(f,e),(g,h),(h,g),(h,i),(i,h)\}$$

مثال اگر جوره های مرتب مربوط گراف G_S فوق را ملاحظه کنیم دیده میشود که برای هر جوره مرتب $(x,y)\in G_S$ یک جوره مرتب (y,x) نیز موجود میشود طوریکه $(y,x)\in G_S$ مهیا شد ، پس گفته میتوانیم که رابطهٔ S در E از خاصیت تناظری پیروی میکند •

مثال چهارم • اگر L ست تمام خطوطیکه در یک

مستوی واقع اند ارائه نموده در آن رابطه عمودیت را به " $\perp$ "

نشان دهیم، درینصورت بملاحظه میرسد که رابطه عمودیت

" $\perp$ " در L ازخاصیت تناظری پیروی مینماید •

زیرا برای هرجوره خط l_1 و l_2 شامل L در

صورتیکه $l_1 \perp l_2$ باشد $l_2 \perp l_1$ نیزمیباشد •

مثال پنجم • اگر رابطه مضروب بودن را در N به M

ارائه نمایم درینصورت بملاحظه میرسد که M در N

ازخاصیت تناظری پیروی نمینماید • زیرا ما دوعدد

را در N پیدا کرده میتوانیم طوریکه عدد اولی مضروب

دومی باشد ولی دومی مضروب اولی نباشد • بطورمثال

12 مضروب 3 بوده ولی 3 مضروب 12 نمی باشد •

بناءً رابطهٔ M در N ازخاصیت تناظری پیروی نمینماید •

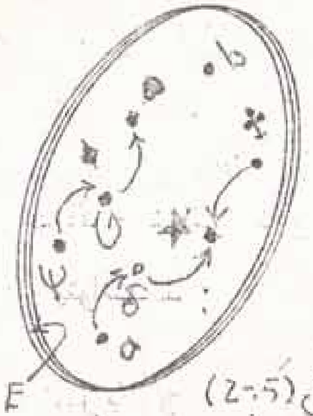
۲-C . خاصیت ضد تناظری (Antisymmetric Property)

مثال اول . اگر یک رابطهٔ A در E که گراف G_A آن طبق ذیل :

$$G_A=\{(\psi,\diamond),(\diamond,\Delta),(\diamond,\diamond),(\clubsuit,\star),(\Delta,\delta),(\delta,\star)\}$$

ارائه گردیده مد نظر گرفته شود ، بملاحظه میرسد که برای هر جورهٔ مرتب $(x,y)\in G_A$ ، جورهٔ مرتب $(y,x)\notin G_A$ میباشد.[1]

حال اگر بخواهیم که رابطهٔ A را توسط دیاگرام تیری ارائه نمائیم آنرا طبق شکل متقابل ارائه کرده میتوانیم :



شکل (2-5)

از دیاگرام تیری مذکور بملاحظه میرسد که اگر از کدام عنصر x ست E یک تیر نشات کرده و بکدام عنصر y آن اصابت نموده باشد متقابلاً از همان عنصر y کدام تیری که به x اصابت کند نشات نکرده است .

هر رابطهٔ اینه دارای مشخصات فوق باشد بنام رابطهٔ ضد تناظری یاد میشود .

---

(1) . درصورتیکه x خلاف y باشد .

تعریف I : یک رابطهٔ R در یک ست E
در صورتی ضد تناظری گفته میشود
که برای هر دو عنصر متمایز x و y
شامل E اگر xRy موجود
گردد پس yRx موجود نگردد.

یا به عبارت دیگر: یک رابطهٔ R در یک ست E از خاصیت
ضد تناظری پیروی میکند، در صورتیکه گرف G_R
رابطهٔ مذکور دارای مشخصه ذیل باشد:
برای هر دو عنصر متمایز a و b شامل E (۱):

$$(a,b)\in G_R \Rightarrow (b,a)\notin G_R$$

معادل منطقی تعریف فوق توسط عبارات ذیل توضیح
شده میتواند:

تعریف II : یک رابطهٔ R در یک ست E
ضد تناظری گفته میشود در صورتیکه
گرف G_R رابطهٔ مذکور برای هر
عنصر a و b شامل E از خاصیت
ذیل پیروی کند:

$$\left[(a,b)\in G_R \text{ و } (b,a)\in G_R\right] \Rightarrow a=b$$

(۱) • علامه: « $p \Rightarrow q$ » دو بیانیه منطقی p و q را باهم ارتباط میدهد طوریکه در صورت حقیقت بودن p بالضرور q نیز شایز حقیقت است • مثلاً : $x>2 \Rightarrow x>1$

مثال دوم • اگر ست :

$$E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

را مد نظر گرفته ودرآن رابطه β را طوریکه β توسط افاده :

$2x=y$ برای x و y شامل E تعریف شده است

مورد بررسی قرار دهیم ، دراینصورت ما داریم :

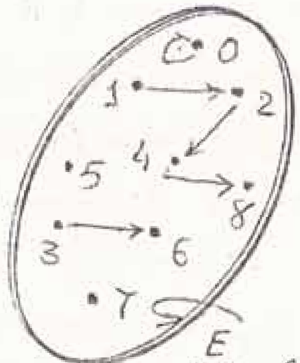
$$0\beta 0,\quad 1\beta 2,\quad 2\beta 4,\quad 3\beta 6,\quad 4\beta 8\ .$$

دیده میشود که عناصر 5 و 7 ست E درتشکل رابطه β سهیم نیستند •

بملاحظه میرسد که برای هردوعنصرمتمایز x و y ست E درصورت موجودیت رابطه:

$x\beta y$ در E رابطه: $y\beta x$ در E موجود شد نمیتواند •

ما داریم :



$$1\beta 2 \Rightarrow 2\not\beta 1$$
$$2\beta 4 \Rightarrow 4\not\beta 2$$
$$3\beta 6 \Rightarrow 6\not\beta 3$$
$$4\beta 8 \Rightarrow 8\not\beta 4$$

شکل (2-6)

بصورت عموم نوشته میتوانیم که: $(x\neq y,\ x\beta y)\Rightarrow y\not\beta x$

دیاگرام تیری رابطه β در E طبق شکل (6 - 2) توضیح یافته میتوانـــد .

تبصره: با استفاده از استعمال تعریف II دیده میشود که یگانه جوره مرتب (x, y) طوریکه $x\beta y$ وهم $y\beta x$ موجود میشود عبارت از $(0,0)$ بوده واین درصورتی است که $x = y = 0$ میشود .

مثال سوم . اگر رابطهٔ : « ... قاسم ... است. » در ست N طوریکه: $N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$ مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که رابطهٔ مذکور در N یک رابطهٔ ضد تناظری است . زیرا : اگر رابطهٔ مذکور به S ارائه گردد ، برای هردو عدد طبیعی x و y (در صورتیکه $x \neq y$ باشد) در صورت موجودیت :

$x S y$ در N ؛ $y S x$ در N موجود نمیگـردد .

بطور مثال اگر اعداد 5 و 15 در N مد نظر گرفته شود بملاحظه میرسد که 5 قاسم 15 بوده ، ولی 15 قاسم 5 نیست . پس برای $5 S 15$ در N ؛ $15 \$ 5$ . . . . . میشـود .

که درینصورت : . . . $(5, 15) \in G_S$ . . . بوده ،

حالانکـــه : . . . $(15, 5) \notin G_S$ . . . میباشد .

بنابران رابطه قاسم بودن در N ضد تناظری اســت .

تبصره : در مثال فوق به مشاهده میرسد که اگر x قاسم y و y نیز قاسم x باشد، درینصورت بالضروره $x = y$ میباشند .

2-1.d . خاصیت انتقالی

مثال اول . اگر H عبارت از ست تمام انسان ها بوده ودرآن رابطهٔ : « برادری » رامد نظر گرفته وآنرا بـه B ارائه نمایم درینصورت ما میدانیم که برای هر x شامل H وهر y شامل H وهر z شامل H درصورتیکه :

xBy و yBz در H موجود گردد،

پس xBz نیز در H موجود میگردد .

زیرا : اگر احمد برادر فرید
وفرید برادر نجیبه باشد ،
پس احمد نیز برادر نجیبه میباشد .

هر رابطهٔ ای که دارای مشخصات فوق باشد رابطهٔ انتقالی گفته میشود .

تعریف : یک رابطهٔ T در یک ست E انتقالی است درصورتیکه برای هر a ، b و c شامل E خاصیت ذیل را پیروی کند :

$$(aTb \wedge bTc) \Rightarrow (aTc)$$

رابطه معادل رابطه ایکه خواص انعکاسی تناظری و تعاقبی را دارا باشد

با بعبارت دیگر: یک رابطهٔ T در یک ست E انتقالی گفته میشود اگر فقط وفقط برای هر a ، b و c عناصر ست E خاصیت ذیل را پیروی کند: $((a,b)\in G_T \text{ و } (b,c)\in G_T) \Rightarrow ((a,c)\in G_T)$.

مثال دوم . اگر در ست $A=\{a,b,c,d\}$ رابطهٔ T که توسط گراف :- $G_T=\{(a,b),(b,d),(a,d),(d,d)\}$ ارائه گردید در مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که T یک رابطهٔ انتقالی در A است .

زیرا : . . . . . $(aTb \text{ و } bTd) \Rightarrow aTd$.

وهمچنان : . . . . $(bTd \text{ و } dTd) \Rightarrow bTd$.

وهمچنین : . . . . . $(aTd \text{ و } dTd) \Rightarrow aTd$

بنابران گفته میتوانیم که T بر A از خاصیت انتقالی پیروی میکند .

مثال سوم . اگر رابطهٔ : « . . . قسمت میشود . . . » را در ست اعداد تام بدون صفر مد نظر بگیریم ، رابطهٔ مذکور در ست $\mathbb{Z}-\{0\}$ یک رابطهٔ انتقالی است .

زیرا: اعداد a ، b و c را در ست $Z - \{0\}$ مد نظر میگیریم طوریکه: عدد a عدد b را قسمت نموده و عدد b عدد c را قسمت میننماید.

اکنون ثابت مینمائیم که عدد a عدد c را نیز قسمت میکند.

چون عدد a عدد b را قسمت مینمائید، درینصورت یک عدد تام k_1 موجود شده میتواند طوریکه:

$$a \cdot k_1 = b \quad \ldots\ldots (1)$$

گردد.

و بهمین قسم ازینکه عدد b عدد c را قسمت مینمائید درینصورت یک عدد تام k_2 موجود شده میتواند که رابطه:

$$b \cdot k_2 = c \quad \ldots\ldots (2)$$

را بوجود آورد.

اکنون اگر اطراف رابطهٔ (1) را به k_2 ضرب نمائیم داریم:

$$a \cdot k_1 \cdot k_2 = b \cdot k_2 \quad \ldots (3)$$

از مقایسه روابط (2) و (3) مانوشته میتوانیم که:

$$a \cdot k_1 \cdot k_2 = c \quad \ldots (4)$$

چون k_1 و k_2 اعداد تام اند پس $k_1 \cdot k_2$ نیز یک عدد تام بوده و اگر $k_1 \cdot k_2 = k$ در رابطهٔ (4) وضع شود، در نتیجه:

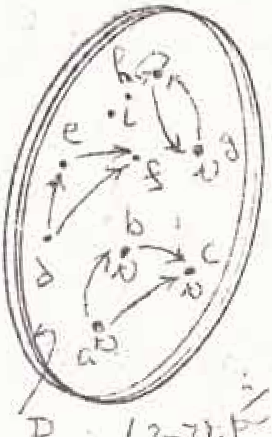
$a \cdot k = c$ حاصل میگردد.

وازین استنتاج میشود که عدد a عدد c را قسمت میکند.

چون برای هر عدد a ، b و c شامل $Z - \{0\}$ اگر عدد a قسمت کند b را و عدد b قسمت کند c را ما ثابت نمودیم که عدد a نیز قسمت میکند عدد c را.

پس گفته میتوانیم که رابطه " قسمت میکند " در ست II اعداد تمام بدون صفر یک رابطهٔ انتقالی است .

آیا گفته میتوانید که چرا در مثال فوق، وجود صفر را در ست مورد نظر رابطهٔ قسمت میکند اجازه نداده ایم ؟



شکل (2-7)

مثال چهارم : دیاگرام تیر ،

شکل مقابل یک رابطهٔ انتقالی را ارائه میکند ، زیرا : از دیاگرام مذکور بمشاهده میرسد که : برای هر زوج موجوده : yRz و xRy در ست D رابطه : xRz نیز موجود میشود ،

بنابران رابطهٔ R در D از خاصیت انتقالی پیروی میکند .

مثال پنجم : اگر رابطه : " ⊂ " ست فرعی بودن در یک ست E که عناصر آنرا ست های دیگر تشکیل داده اند مد نظر گرفته شود ، بآسانی دیده میشود که رابطهٔ : " ⊂ " در E از خاصیت انتقالی پیروی میکند .

زیرا : برای هر ست فرعی A ، B و C شامل E درصورتیکه $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد ، پس $A \subset C$ نیز میباشد .

ثبوت این موضوع در صفحه (۲۱) جلد اول مطالعه شود .

مثال ششم • یک رابطهٔ γ که توسط دیاگرام تیری این (الف) در شکل (8 – 2) ارائه گردیده است مد نظر گرفته شـــود، درینصورت بعلاحظه میرسد که رابطهٔ γ در E از خاصیت انتقالی پیروی نمیکند •

زیرا : از شکل دیده میشود کـــه :

$2 \gamma 4$ وهم چنـــا ن :

$4 \gamma 8$ موجود بوده

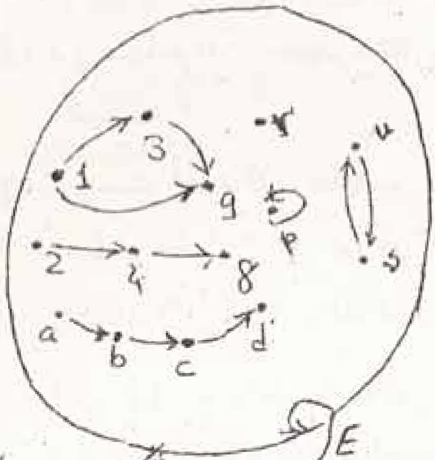
ولی $2 \gamma 8$ موجود نیست •

بنابرآن رابطهٔ γ در E

گرچه $1 \gamma 3$ و $3 \gamma 9$

وهم $1 \gamma 9$ موجود است

اما با آنهم انتقالی نیست •



شکل (2-8)

تمـــــــــــــــرینات :

1 • در هر یک از مسایل ذیل موجودیت ویا عدم موجودیت هریک از خواص (i) • انعکاسی، (ii) • ضد انعکاسی، (iii) • تناظری، (iv) ضد تناظری و (v) • انتقالی رابررسی کنید :

(a) • دریک ست $\mathcal{U}$ که عناصر آنرا ست های دیگر تشکیل داده رابطهٔ : " $\subset$ " را •

(b) • در ست اعداد تام $\mathbb{Z}$ رابطهٔ : " • • • مضرب • • • است" را •

(c). درست $\mathbb{I}$ رابطهٔ : « ... قاسم ... است . » را .

(d). اگر D ست تمام خطوط مشترك المستوی را ارائه کند ،

(i) رابطهٔ موازات « // » را در D ،

(ii) رابطهٔ عمود یت « $\perp$ » را در D بررسی کنید .

(e). اگر T ست تمام مثلث ها را افاده کند ، رابطهٔ انطباق پذیری « $\cong$ » را در T مطالعه کنید .

(f). در ست اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ، رابطهٔ مساوی « = » را مطالعه کنید .

(g). در ست اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ؛

(i) رابطهٔ : « بزرگتر است از » را ،

(ii) رابطهٔ : « بزرگتر و یا مساوی است » را بررسی کنید .

2 . اگر H ست تمام انسان ها را ارائه نموده ، موجودیت و یا عدم موجودیت خواص پنجگانهٔ فوق الذکر را در ست H با درنظر داشت رابطه قرابت که در مسایل ذیل تذکر داده میشوند به تفصیل مطالعه و بررسی دارید :

(a). (i). رابطهٔ : « برادری » را در ست طبقه ذکور ،

(ii). رابطهٔ : « برادری » را در H ،

(b). رابطهٔ « پدری » را در H ،

(c). (i). رابطهٔ « خواهری » را در ست طبقه نسوان .

(ii). رابطهٔ « خواهری » را در H ،

(d). رابطه « شوهری » را در H .

(e). رابطهٔ « مادری » را در H بررسی کنید .

3. در ست $E=\{\{p\},\{q,r\},\{a,b\}\}$

(a). $E\times E$ را باساس ست عناصر آن بنویسید .

(b). درصورتیکه گرف یک رابطه R در E عبارت از

$G_R=\{(A,B)\mid A\in E, B\in E, A\subset B\}$ باشد .

شکل روستر (باساس لست عناصر) گرف G_R را بنویسید .

(c). آیا رابطهٔ R در E :

(i). انعکاسی شده میتواند ؟

(ii). تناظری شده میتواند ؟

(iii). انتقالی شده میتواند ؟ استدلال کنید .

4. اگر $E=\{a,b,c,d,e\}$ مفروض باشد یک رابطه Δ

(دلتا) را در E ، ز [illegible] طوریکه .

$G_\Delta=\{(x,x)\mid x\in E\}$ میباشد ، در نظر بگیرید :

(a). شکل روستر گرف G_Δ را بنویسید .

(b). خواص رابطهٔ Δ را بررسی کنید .

5. درصورتیکه یک رابطهٔ R در ست $S=\{a,b,c,d,e\}$:

انعکاسی باشد لااقل چند عنصر در گرف G_R موجود گردد تا آنرا انعکاسی سازد ، عناصر مطلوب را بنویسید .

6 . اگر $S = \{x, y, z, \omega\}$ مفروض بوده و اگر G_R یك رابطهٔ R در S قرارافاده :

$$G_R = \{(x,y),(x,x),(z,\omega),(\omega,\omega),(z,x),(z,z),(y,y)\}$$

تعریف شود ،

(a) . آیا R در S انعکاسی است ؟ چرا ؟

(b) . آیا R در S ضد انعکاسی است ؟ چرا ؟

(c) . آیا R در S تناظری است ؟ درصورتیکه نباشد کدام جوره های مرتب دیگر در گرف G_R علاوه شود تا R تناظری گردد ؟

(d) . آیا R در S ضد تناظری است ؟ درصورتیکه نباشد کدام جوره های مرتب از گرف G_R حذف گردد تا R در S ضد تناظری شود ؟

(e) . آیا R در S انتقالی است ؟ درصورتیکه نباشد کدام جوره های مرتب دیگر در G_R علاوه شود تا R در S انتقالی گردد ؟

۷. اگر ست اعداد حسابی یعنی تام غیرمنفی [1] را به W ارائه نمائیم در آن رابطهٔ A را که توسط افادهٔ $G_A=\{(x,y) \mid x\in W, y\in W, \frac{x}{y}=1\}$ تعریف شده در نظر بگیرید:

(a) آیا رابطهٔ A در W انعکاسی است؟

(b) آیا رابطهٔ A در W ضدانعکاسی است؟

(c) آیا رابطهٔ A در W تناظری است؟

(d) آیا رابطهٔ A در W ضد تناظری است؟

(e) آیا رابطهٔ A در W انتقالی است؟ وبا چطور؟ استدلال کنید.

جملات مربوط مسایل ذیل را تکمیل کنید:

۸. یک رابطهٔ دوگانه ای R در یک ست S انعکاسی گفته میشود درصورتیکه برای هر $x\in S$ ___ $\in$ ___ باشد.

۹. یک رابطه دوگانه ای A در یک ست S ___ گفته میشود درصورتیکه برای هر ___، $(x,x)\in G_A$ باشد.

۱۰. در یک ست S یک رابطه R ___ گفته میشود، درصورتیکه برای ___ $x\in S$، $(x,x)\in G_R$ گردد.

---

(1) ست اعداد تام غیرمنفی عبارت است از: $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

11 - یک رابطهٔ ____ A در یک ست E ضد انعکاسی گفته میشود، در صورتیکه برای $x \in E$ ؛ $\notin G_A$ ____ گردد.

12 - یک رابطه ____ S در یک ست E ____ گفته‌میشود که‌شرایط ذیل را پیروی کند: برای هر x و y شامل E

$$(x,y) \in G_S \Rightarrow \text{\_\_\_\_\_\_}.$$

13 - یک رابطهٔ دوگانه ای A در یک ست B ضد تناظری گفته میشود در صورتیکه برای هر دو عنصر متمایز x و y شامل ____ ، $y \not A x \Rightarrow$ ____ گردد.

14 - یک رابطهٔ دوگانه S در یک ست E تناظری میباشد، اگر ____ موجود باشد، ____ نیز موجود گردد.

15 - یک رابطهٔ دوگانهٔ R در یک ست S ، ____ میباشد در صورتیکه برای هر (x,y) شامل G_R ، $\in G_R$ ____ نیز موجود گردد.

16 - یک رابطهٔ دوگانهٔ R در یک ست S ، ____ نمیباشد در صورتیکه برای محض یک جوره مرتب (x,y) شامل G_R جوره مرتب (____) شامل G_R نباشد.

17 - یک رابطهٔ دوگانه R در یک ست S انتقالی میباشد در صورتیکه دارای خواص ذیل باشد:

۱۸. اگر $G_T = \{(a,b),(b,c),(x,y),(y,x)\}$ گرف یک رابطهٔ T راد رست: $S=\{a,b,c,x,y,e,d\}$ ارائه کند،

(a). T یک رابطهٔ انتقالی در S میشود در صورتیکه بـه گرف G_T جوره‌های مرتب: ______ ، ______ ، ______ علاوه شـود.

(b). T یک رابطهٔ تناظری در S میشود در صورتیکه بـه گرف G_T جوره های مرتب: ______ گنجانیده شوند.

(c). T یک رابطهٔ ضد تناظری در S میشود اگر از گـرف G_T جوره های مرتب: ______ حذف شود.

(d). T یک رابطه انعکاسی در S میگردد اگر در گرف آن جوره‌های مرتب: ______ اضافه شـود.

(e). T در S از خاصیت ضد انعکاسی پیروی میکند در صورتیکه در گرف G_T جوره‌های مرتب: ______ اضافه‌شود.

مسایل ذیل را طوریکه خاطرنشان میشود، جواب گوئید:

۱۹. در صورتیکه $S = \{1,2,3,4,5\}$ مفروض بوده واگـر $G_R = \{\ \}$ باشـد،

(a). رابطهٔ R در S تناظری است چرا؟ استدلال کنید.

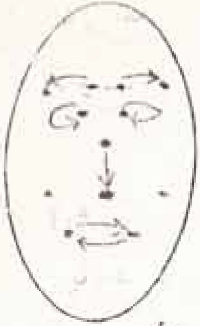
(b). رابطهٔ R در S انعکاسی نیست چرا؟ استدلال کنید.

این صفحه در اصل از چاپ مانده است.

26. رابطهٔ مربوط به دیاگرام شکل (a) مقابل تناظری است حال آنکه رابطهٔ مربوط به دیاگرام شکل (b) تناظری نیست.

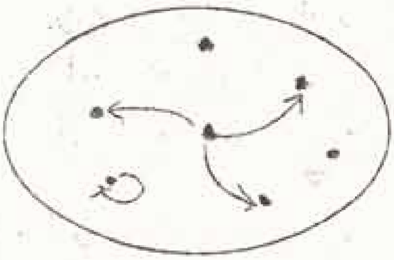
چرا؟ توضیح دارید.

شکل (a)



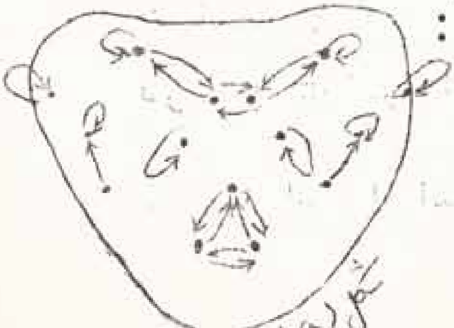
شکل (b)

27. در دیاگرام مقابل لااقل رسم چند تیر دیگر ضروریست تا رابطهٔ مربوط آنرا تناظری سازد؟

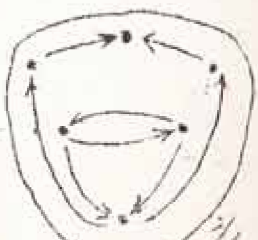


28. در صورتیکه R یک رابطه تناظری در یک ست E باشد ثابت کنید که $R = R^{-1}$ در همان E میباشد.

29. رابطه مربوط هر یک از دیاگرام های ذیل کدام خاصیت خواص پنجگانه را پیروی مینمایند :



شکل (a)



شکل (b)

شکل (c)

30 . درست ... $A=\{a,b,c\}$ یک رابطه R را مدنظر میگیریم طوریکه: (a) . R انتقالی بوده
(b) . اقلاً زوجهای مرتب
(a,b) ، (b,c) و (c,a) شامل گراف R یعنی G_R باشد ، نشان دهید که R از خواص: تناظری وانعکاسی نیز پیروی میکند . گراف G_R را بنویسید .

31 . اگر در یک ست کیفی E یک رابطه R انتقالی و تناظری بوده و ضمناً هر عنصر x شامل E لااقل با یکعنصر لا شامل E رابطهٔ R را برقرار نمائید ، نشان دهید که رابطهٔ R در E انعکاسی نیزمیباشد .

32 . اگر یک رابطه R در یک ست E طوری تعریف شود که برای هر عنصر a ، b و c شامل E حقیقت:

aRb و $bRc \Longrightarrow cRa$ موجود گردد .

در ینصورت رابطه R را در E دورانی گویند .

درصورتیکه رابطهٔ دورانی R در یک ست E انعکاسی باشد نشان دهید که: (a) . رابطه R در E تناظری است .

(b) . رابطه R

در E انتقالی است .

2-2. رابطهٔ معادل وخصوا ص آن

Equivalence Relation

2-2.a. تعریف ومثال های رابطه معادل.

مثال اول. میخواهیم که خواص یک رابطه دوگانهٔ R

درست : . . . . $E=\{a, b, c, d, e\}$. که توسط گراف :

$$G_R=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,d),(c,c),(d,c),(d,d),(e,e)\}$$

تعریف شده است مطالعه نمائیم:

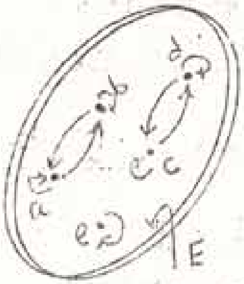
(a) چون برای هر عنصر x شامل E زوج مرتب : (x,x) شامل G_R میباشد ، پس گفته میتوانیم که R در E از خاصیت انعکاسی پیروی میکند .

(b) رابطهٔ R در E از خاصیت ضد انعکاسی پیروی نمیکند . زیرا که رابطه R در E انعکاسی است .

(c) چون برای عناصر x ، y شامل E در صورت موجودیت (x,y) در G_R ، (y,x) نیز در G_R موجود میگردد ، بنابران گفته میتوانیم که رابطه R در E تناظری است .

(d) چون (a,b) و (b,a) شامل G_R اند پس گفته میتوانیم که R در E ضد تناظری نیست .

(e) - دیاگرام تیری رابطه R طبق
شکل مقابل ارائه شد میتواند
و باساس شکل نشان داده
میتوانیم که رابطه R در E
از خاصیت انتقالی پیروی
میکند .



شکل (2-9)

نتیجه :- ازمطالعه مثال فوق نتیجه میشود که رابطه R در E از خواص انعکاسی ، تناظری وانتقالی پیروی میکند .

تعریف : هر رابطه دوگانه ای که دریک ست از هرسه خاصیت : انعکاسی ، تناظری وانتقالی پیروی کند ، رابطه معادل دران ست گفته میشود .

مثال دوم . اگر H عبارت ازست تمام انسان ها بوده ورابطه R در H توسط عبارت :
«... کسی است که حرف اول نامش حرف اول نام ... است.»
افاده گردد ، دراینصورت رابطه R در H یک رابطه معادل میباشد .

زیرا : رابطه R و یا رابطه : « دارای عین حرف اول نام بودن » چون ازهرسه خاصیت انعکاسی ، تناظری وانتقالی پیروی میکند ، بنابران یک رابطه معادل را در H بوجود می آورد .

مثال سوم • اگر G یک رابطه دوتائه‌ای را در یک ست : $E=\{1,2,3,4,5\}$ که توسط گراف :

$$G_R=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$$

داده شده ارائه کند کدام زوجهای مرتب دیگر را گراف گنجانیده شود تا رابطه R در E یک رابطه معادل گردد ؟

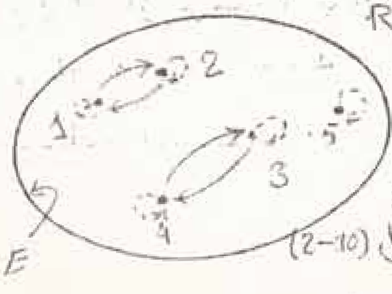
حل :

(a) • برای اینکه R از خاصیت انعکاسی در E پیروی کند باید که برای هر x شامل E زوج مرتب (x,x) شامل G_R باشد • پس در اینصورت باید که : $(1,1)$، $(2,2)$، $(3,3)$، $(4,4)$ و $(5,5)$ شامل G_R نیز گردند •

(b) • گراف مزبور G_R تناظری است ، زیرا : در صورت موجودیت هر زوج مرتب (x,y) شامل G_R وجود (y,x) در G_R نیز مشاهده میرسد •

(c) • در صورت گنجانیدن یک زوج مرتب مربوط جز (a) در G_R رابطه R از خاصیت انتقالی نیز پیروی مینماید •

در نتیجه گفته میتوانیم که رابطه R در E معادل میگردد • دیاگرام تیر رابطه R در E با یک شکل (ارائه میشود •



شکل (2-10)

مثال پنجم: اگر در ست $\mathbb{N}$ رابطهٔ R را که توسط اناده: « $x-y$ قابل تقسیم بر 3 میباشد. » بیان گردیده در نظر بگیریم در ینصورت رابطه R در $\mathbb{N}$ یک رابطه معادل است

زیرا:

(a) چون برای هر x شامل $\mathbb{N}$ ، $x-x=0$ بر 3 قابل تقسیم است بنابرآن R در $\mathbb{N}$ از خاصیت انعکاسی پیروی میکند.

(b) چون برای هر x و هر y شامل $\mathbb{N}$ فرضاً در صورتیکه $\frac{x-y}{3}=k$ باشد پس $\frac{y-x}{3}=-k$ میشود. بنابران رابطه R در $\mathbb{N}$ از خاصیت تناظری پیروی میکند.

(c) بهمین قسم برای هر x هر y و هر z شامل $\mathbb{N}$ در صورتیکه . . . $x-y=3k$ و . . . $y-z=3k'$ . . . موجود گردد.

$$(x-y)+(y-z)=3(k+k')$$

. . . . $x-z=3(k+k')$ نیز موجود میگردد.

بنابرآن R در $\mathbb{N}$ از خاصیت انتقالی نیز پیروی میکند در نتیجه چون R از هر سه خاصیت: انعکاسی ، تناظری وانتقالی در $\mathbb{N}$ پیروی میکند ، بنا برآن R در $\mathbb{N}$ یک رابطه متعادل است .

حال بمشاهده میرسد که باساس رابطه معادل R در $\mathbb{N}$ عناصر ست $\mathbb{N}$ به سه ست فرعی $\mathbb{N}$ تقسیم میشوند .

1 ــ ست عناصریکه به 3 قابل تقسیم اند
مانند : $\{3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$.

2 ــ ست عناصریکه اگر به 3 تقسیم شوند ، 1 باقی بماند .
مانند : $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \cdots\}$.

3 ــ ست عناصریکه اگر به 3 تقسیم شوند ، 2 باقی بماند .
مانند : $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \cdots\}$.

اگر دقت شود بملاحظه میرسد که هرد و عنصر کیفی هریك از ست های فرعی سه گانهٔ $\mathbb{N}$ در فوق، رابطه معادل R را تحقیق میکند .

عناصر هریك از سه ست فرعی $\mathbb{N}$ در فوق را بین هم، نظر به رابطهٔ معادل R می گویند .

تبصره : افاده " $x-y$ قابل تقسیم بر 3 " را توسط عبارت : " اگر x و y بر 3 تقسیم شوند دارای عین باقیمانده میشوند " نیز بیان شده میتواند . واین مفهوم بهشکل : $x \equiv y \ (\mathrm{mod}.3)$ (1) ارائه میشود که بعبارت :
" x منطبق y است نظر به 3 " خوانده میشود .

---

(1) در ین کتاب بجای $\mathrm{mod}.3$ یعنی مودلو 3 کلمه نظر به 3 استعمال شده است .

مثال پنجم: اگر دیاگرام های

ونی سه رابطهٔ دوتائی: R_1 ، R_2

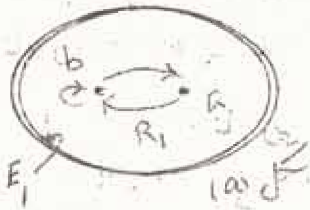
و R_3 که علی الترتیب طبق شکل:

(a)، (b) و (c) ارائه گردیده اند،

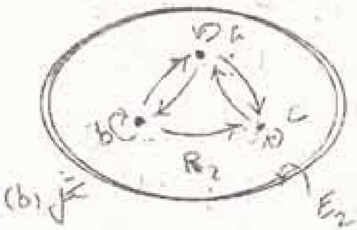
مد نظر گرفته شود، بملاحظه میرسد

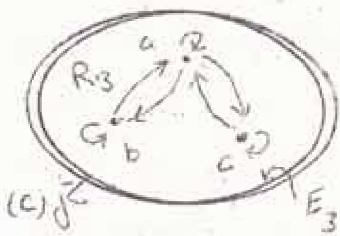
که هر سه رابطهٔ مذکور رابطهٔ

معادل نیستند.



اشکال (۲-۱۱)





زیرا: در شکل (a): رابطهٔ R_1

فاقد خاصیت انعکاسی است:

برای $a \in E_1$ ، $(a,a) \notin G_{R_1}$.

در شکل (b): رابطهٔ R_2 هردو

خاصیت تناظری وانتقالی را باساس

افادهٔ ذیل نقض میکند:

(i). نقض خاصیت تناظری: $(b,c) \in G_{R_2}$ است

ولی $(c,b) \notin G_{R_2}$.

(ii). نقض خاصیت انتقالی:

$(c,a) \in G_{R_2}$ وهم $(a,b) \in G_{R_2}$ بود ولی $(c,b) \notin G_{R_2}$

در شکل (c): رابطهٔ مربوطهٔ آن R_3 ازخاصیت انتقالی پیروی

نمیکند، چنانچه:

(i) $(c,a) \in G_{R_3}$ وهم $(a,b) \in G_{R_3}$ بوده ولی $(c,b) \notin G_{R_3}$

(ii) $(b,a) \in G_{R_3}$ وهم $(a,c) \in G_{R_3}$ بوده ولی $(b,c) \notin G_{R_3}$

چون روابط R_1 ، R_2 و R_3 هر یک دارای هرسه خاصیت انعکاسی ، تقارنی وانتقالی نمیباشد ، پس رابطهٔ معادل شده نمیتوانند •

b.2-2. صنوف معادل Equivalence Classes

مثال اول • اگرمثال چهارم (2-2.a) راازنظربگذرانیم بملاحظه میرسد که رابطه R در IN ست IN را به سه ست ازهم منفصل آن تقسیم میکند اگر همین ستهای فرعی IN به A ، B و C ارائه شوند دراینصورت :

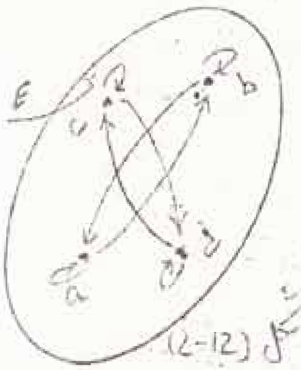
$$A = \{1, 4, 7, 10, 13, \cdots\}$$
$$B = \{2, 5, 8, 11, 14, \cdots\}$$
$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$$ میباشد .

حال اگر یک عنصر کیفی ست A فرضاً 7 مدنظرگرفته شود دراینصورت دیده میشود که تمام عناصر ست A نظر به رابطه R معادل به 7 میباشند • پس ست A را صنف معادل 7 مینامند• همچنان ست B را صنف معادل 2 ، 5 ، 8 ، 11 ، 14 ویا ••• مینامند - زیرا تمام عناصر B نظر به رابطهٔ R باهم معادل اند • بهمین قسم ست C را صنف معادل 3 میگویند، زیرا تمام عناصر شامل ان نظر به رابطهٔ R معادل 3 میباشند •

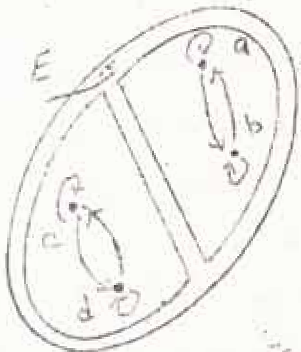
و هر کدام عنصر دیگر شامل ست c پیدا شده نمیتواند که نظر به رابطه R معادل 3 گردد .

تعریف : اگر R یک رابطه معادل در یک ست E باشد پس صنف معادل یک عنصر x شامل E عبارت از ست تمام عناصر ست که نظر به رابطه R معادل x میباشند .

مثال دوم : اگر یک رابطه R که توسط دیاگرام تیری شکل مقابل ارائه شده مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که رابطه R در E یک رابطه معادل است . صنف معادل a عبارت از $\{a, b\}$ میباشد . و هم چنان صنف معادل c عبارت از ... $\{c, d\}$ است . دیاگرام شکل (2-12) فوقرا به شکل (2-13) در ذیل ارائه کرده میتوانیم . دیده میشود که ست E به دو ست فرعی منفصل تقسیم شده است طوریکه هر کدام آنها عبارت از یک صنف معادل است .



شکل (2-12)



شکل (2-13)

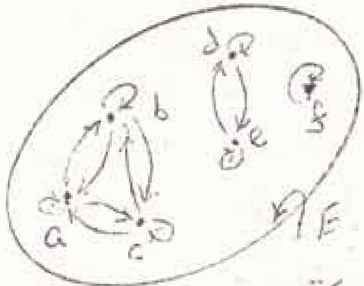
مثال سوم: اگر یک رابطه R در ست:

$$E = \{a, b, c, d, e\}$$

توسط تعریف آن:

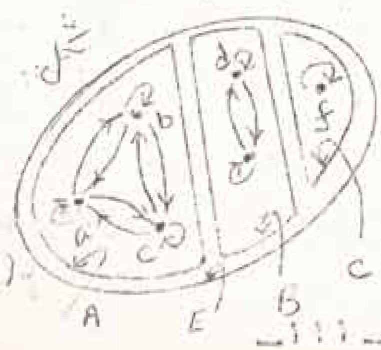
$$G_R = \{(a,b), (a,a), (b,b), (b,a), (b,c), (a,c), (c,b), (c,c), (c,a), (d,e), (e,d), (d,d), (e,e), (f,f)\}$$

تعریف شود دیده میشود که رابطه R در E معادل است. زیرا: اگر با گراف تیوری رابطه R در شکل ذیل بنظر میرسد که خاصیت انعکاسی، تناظری، وانتقالی در رابطه R موجود است. بنابران R یک رابطه معادل در E است:



شکل (2-14)

مثال ما میتوانیم که ست E را بسه ست جزئی آن A، B و C تقسیم نمایم طوریکه عناصر هریک ازین سه ست را بطه معادل R رابطین شود اول انند، دریصورت این سه ست A، B و C طول معادل انـد.



شکل (2-15)

از مطالعه این مثال بملاحظه میرسد که:

(۱). اتحاد هر سه ست فرعی A، B و C عبارت از ست E بوده،

(2). تقاطع هر دو ست آنها دو بدو ست خالی است.

2-2-C. خواص صنوف معادل:

یک ست E و بدرابطه معادل R در E را مد نظر گرفته و باساس آن خواص صنوف معادل را ذیلاً مطالعه مینمائیم:

برای سهولت کار ما صنف معادل x را به $\dot{x}$ نشان میدهیم،

خاصیت اول. برای هر x شامل E، x شامل صنف معادل خود میباشد.

زیرا: x معادل x بوده پس شامل صنف معادل x یعنی $\dot{x}$ میباشد.

خاصیت دوم. برای هر عنصر x و هر عنصر y شامل E درصورتیکه x معادل y باشد، صنف معادل x یعنی $\dot{x}$ مساوی به صنف معادل y یعنی $\dot{y}$ میباشد.

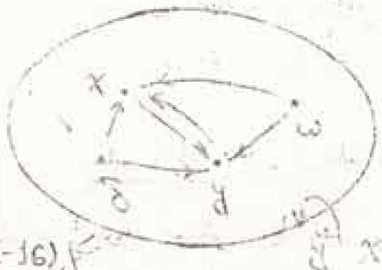
ثبوت:...(1). نشان باید داد که: $\dot{x} \subset \dot{y}$ است،

(2). نشان باید داد که: $\dot{y} \subset \dot{x}$ است.

(1). برای ثبوت حقیقت $\dot{x} \subset \dot{y}$ لازم است، یک عنصر z را در صنف $\dot{x}$ انتخاب نمائیم.

چون z شامل $\dot{x}$ است پس zRx موجود میشود.
از طرف دیگر نظر به فرضیه ما داریم: xRy
بنابر خاصیت انتقالی: zRy موجود میشود.
یعنی z یک عنصر یعنی $\dot{x}$ شامل $\dot{y}$ گردیده بنابران گفته
میتوانیم که: $\dot{x} \subset \dot{y}$

(2). برای ثبوت حقیقت $\dot{y} \subset \dot{x}$ یک عنصر یعنی ω شامل $\dot{y}$
را انتخاب ووجود آنرا در $\dot{x}$ جستجو مینمائیم.
چون ω شامل $\dot{y}$ بوده پس $\omega R y$ موجود میشود.
وهم چون xRy موجود بوده پس yRx نیز موجود
میشود. از اینجا نتیجه میشود که: $\omega R x$.
بالاخره به نتیجه عنصرما داریم: $\dot{y} \subset \dot{x}$
از مقایسه روابط: $\dot{x} \subset \dot{y}$
و $\dot{y} \subset \dot{x}$ ادعا میتوان
نمود که: $\dot{x} = \dot{y}$



شکل (2-16)

خاصیت سوم. اگر x معادل y نباشد درین صورت
$\dot{x} \cap \dot{y} = \{\}$ میشود.
زیرا: اگر $\dot{x} \cap \dot{y} = \{\}$ نباشد درین صورت لااقل
یک عنصر فرضاً z موجود شده میتواند طوریکه
$z \in \dot{x}$ وهم $z \in \dot{y}$ باشد.

ازینجا ما داریم :

$$\left.\begin{array}{l} z \in \dot{x} \Rightarrow zRx \Rightarrow xRz \\ z \in \dot{y} \Rightarrow zRy \end{array}\right\} \Rightarrow xRy$$

حال آنکه xRy فرضیه را که x معادل y نیست
نقض میکند .

بنابراین $\dot{x} \cap \dot{y} = \{\}$ میباشد .

خاصیت چهارم . اتحاد تمام صنوف معادل در یک ست E عبارت از ست E است .

زیرا : چون هر عنصر یعنی x شامل E در صنف معادل خودش یعنی $\dot{x}$ شامل است و هر کدام عنصری در E موجود نیست که شامل یک صنف معادل نباشد . بنابراین اتحاد صنوف معادل در E عبارت از ست E است .

<u>مثال اول</u> . اگر رابطه موازات « // » در ست خطوطیکه منطبق عین مستوی باشند مد نظر گرفته شود ، در آنصورت رابطه « // » در ست این خطوطیکه رابطهٔ معادل است .

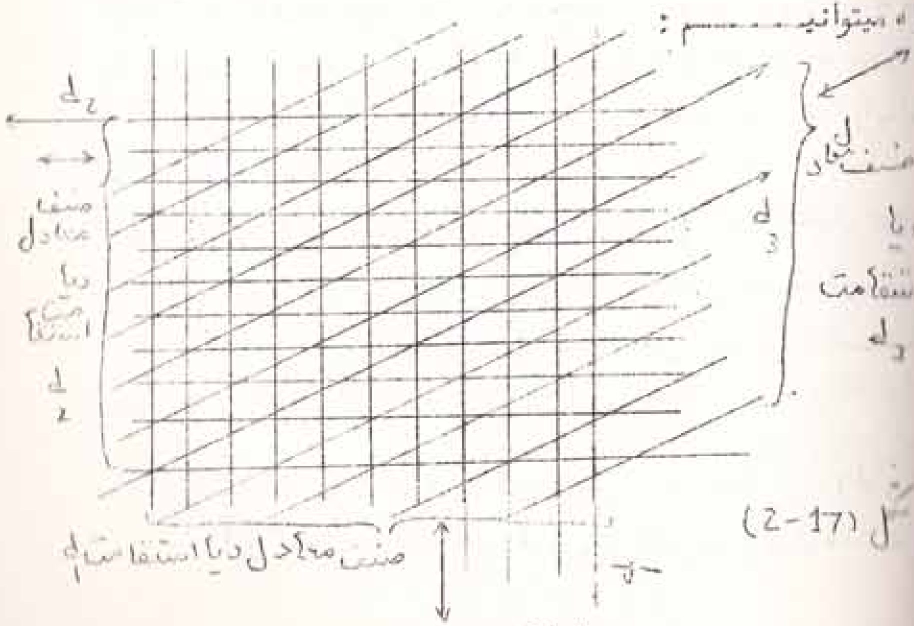
زیرا : (1) نظر به تعریف موازات : « دو خطی که در یک مستوی واقع بوده و یکدیگر را در یک نقطه قطع نکنند موازی گفته میشوند . » هر خط با خودش موازی بوده و ازینجا [illegible] انعکاسی بیرون میآید .

(2) . اگر خط $\overleftrightarrow{d_1}$ با $\overleftrightarrow{d_2}$ موازی باشد $\overleftrightarrow{d_2}$ نیز
با $\overleftrightarrow{d_1}$ موازیست .

(3) . اگر $\overleftrightarrow{d_1} \parallel \overleftrightarrow{d_2}$
و $\overleftrightarrow{d_2} \parallel \overleftrightarrow{d_3}$ . . . . . باشد .
پس $\overleftrightarrow{d_1} \parallel \overleftrightarrow{d_3}$ . . . . . میباشد .

بنابران رابطه « // » در ست خطوط مشترک المستوی یک رابطه معادل است .

حال اگر صنف معادل خطوط را نظر به رابطه موازات استقامت ویا direction بنامیم در ینصورت ست خطوط مشترک المستوی به بی نهایت صنوف معادل ویا استقامت تقسیم میشود . با پذیرش این صنوف معادل را طبق شکل (17 – 2) در ذیل ارائه کرده میتوانیم :



شکل (2-17)

از مطالعه این مثال بملاحظه میرسد که هیچیک خط بیشتر از یک استقامت نمیداشته باشد و هر خط معین دارای یک استقامت میباشد .

مثال دوم . اگر ست $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را مد نظر بگیریم دیده میشود عناصر ست $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را جوره های مرتب که مرتبه های اول و دوم آنرا اعداد طبیعی اند تشکیل میدهند . اکنون یک رابطه R را درست $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ مد نظر میگیریم طوریکه:

$$(a,b)\,R\,(a',b') \Leftrightarrow a+b'=b+a'$$

حایز حقیقت گردد .

بطور مثال اگر دو جوره مرتب $(2,5)$ و $(3,6)$ مد نظر گرفته شود دریافت بملاحظه میرسد که چون $3+5=6+2$ حایز حقیقت است، پس $(3,6)\,R\,(2,5)$ نیز موجود میبود .

حال نشان باید داد که رابطه R در $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ یک رابطه معادل است .

زیرا : (1) برای هر جوره مرتب (a,b) شامل $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ چون $a+b=b+a\ldots$ حایز حقیقت است .
بنابران $(a,b)\,R\,(a,b)$ نیز حقیقت داشته و R از خاصیت انعکاسی پیروی میکند .

(2) برای هر دو جوره مرتب (a,b) و (c,d) شامل $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ اگر $(a,b)\,R\,(c,d)$ حقیقت داشته باشد

یعنی . . . . . . $a+d=b+c$ باشد

بعد رابطه به صورت: $(c,d)\,R\,(a,b)$

یعنی: . . . $c+b=d+a$ نیز حقیقت داشته باشد.

پس از بیان گفته میشود که R از خاصیت تناظری

پیروی میکند .

(3) . برای هر جوره های مرتب: (a,b) ، (c,d)

و (e,f) شامل $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ، اگر $(a,b)R(c,d)$

و $(c,d)R(e,f)$

دارای حقیقت باشند ،

یعنی: . . . $a+d=b+c$

و . . . $c+f=d+e$ حقیقت داشته باشند

پس . . . $(a,b)R(e,f)$

ویا . . . $a+f=b+e$ نیز حتماً نیز حقیقت میباشد . چرا ؟

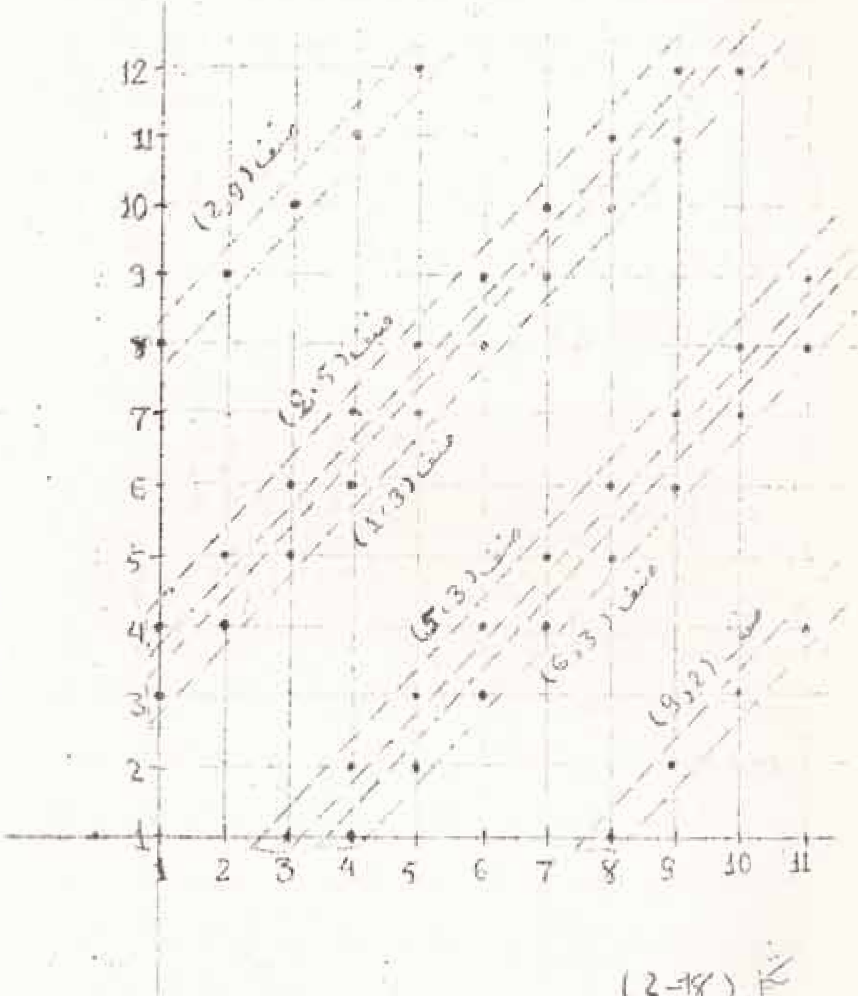
پس از بیانات گفته میتوانیم که رابطهٔ R از خاصیت انتقالی نیز پیروی میکند، بنابران R یک رابطهٔ معادل است در $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

حال $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ را نظر به رابطهٔ R به صنوف معادل که هر کدام آن یک ست فرعی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ است تقسیم کرده میتوانیم .

بطور مثال . اگر بخواهیم صنف معادل $(2,5)$ را بدست آوریم آنرا طبق ذیل ارائه مینماییم :-

$$\dot{(2,5)} = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),\dots,(21,24),\dots\}$$

فوق معادل رابطه R را در $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ توسط نما دکارت
دکارتی طبق شکل (2 ـ 18) در ذیل نشان داده میتوانیم :



شکل (2-18)

ل . 2-2-۰ انقسام Partition

تعریف: آن ست های فرعی (غیر خالی) یک ست S را مد نظر بگیریم طوری که دو بدو منفصل (۱) بوده ولی اتحاد آنها عبارت از ست S باشد گویند این ست های فرعی S یک انقسام را در S بوجود می آورند.

مثال اول: اگر در ست $E=\{a,b,c,d,e,f\}$ ست های فرعی آن: $E_1=\{a,b,c\}$ و $E_2=\{d,e\}$ و $E_3=\{c,f\}$ مد نظر گرفته شوند، ست های فرعی E_1 ، E_2 و E_3 یک انقسام را در ست E بوجود نمی آورند.

زیرا: اگرچه $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = E$ . . . بوده

ولی . . . $E_1 \cap E \cap E_3 \neq \phi$ میشود

یعنی E_1 و E_3 منفصل نیستند،

بنابرین انقسام را در E بوجود نمی آورند.

---

(۱) دو ستی که تقاطع آنها ست خالی باشد منفصل گفته میشوند.

مثال دوم • اگر $E = \{\star , \oplus , \mp , \triangle , \phi\}$

ست های فرعی آن : $E_1=\{\star , \phi\}$ ، $E_2=\{\mp\}$ و

$E_3=\{\triangle , \oplus\}$ مد نظر گرفته شود دیده میشود که ست های

E_1 ، E_2 و E_3 یک انقسام را در E بوجود آورده اند :

زیرا : . . . . . . $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = E$

وهم چنان : $E_1 \cap E_3 = \Phi$ ، $E_2 \cap E_3 = \Phi$ و $E_1 \cap E_2 = \Phi$

بنا بران ست های فرعی E_1 ، E_2 و E_3

یک انقسام را در E بوجود آورده اند •

تبصره: از مطالعه مثالهای سوم و چهارم صنوف معادل نتیجه
میشود که صنوف معادل در یک ست یک انقسام را بوجود
می آورد •

مثال سوم • اگر رابطه $"a \equiv b \mod 3"$:

در ست $\mathbb{N}$ مد نظر گرفته شود بملاحظه میرسد که رابطه مذکور
ست $\mathbb{N}$ را به سه ست فرعی آن $\{\dot{3}\}$ ، $\{\dot{1}\}$ و $\{\dot{2}\}$ باوریکه :

$$\{\dot{3}\}=\{3, 6, 9, 12, 15, \cdots, 3n, \cdots\},$$
$$\{\dot{1}\}=\{1, 4, 7, 10, 13, \cdots, 3n+1, \cdots\},$$
$$\{\dot{2}\}=\{2, 5, 8, 11, 14, \cdots, 3n+2, \cdots\}$$ اند ،

انقسام مینماید . هر یک از ین ست های فرعی : $\{\dot{3}\}$ ، $\{\dot{1}\}$ و $\{\dot{2}\}$
صنوف معادل نظر برابطه مفروض در $\mathbb{N}$ میباشند •

تمـــــرینـــــات :

۱. کدام یك از رابطه ذیل یك رابطه معادل شده میتوانـــد :

(a). رابطه موازات « // » درست خطوط مشترك المستوی باشند ؟

(b). رابطه مساوات « = » درست اعداد حقیقـی ؟

(c). رابطهٔ انطباق پذیری « ≅ » درست مثلث هـــا ؟

(d). رابطه عمود یت « ⊥ » درست خطوط مشترك المستوی ؟

(e). رابطهٔ ست فرعی بودن « ⊂ » دریك ست ست هـــا ؟

(f). رابطهٔ مشترك الخط بودن درست نقـــاط ؟

(g). رابطهٔ مشترك المستوی بودن درست خطـــوط ؟

۲. درست اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ رابطهٔ : $a \equiv b, \mod. 5$ را مطالعه نموده وست $\mathbb{N}$ را به پنج صنوف معـــادل $\mathbb{N}_1$ ، $\mathbb{N}_2$ ، $\mathbb{N}_3$ ، $\mathbb{N}_4$ و $\mathbb{N}_5$ تقسیم نمائید ونشان دهید که این ست های فرعی یك انقسام را در $\mathbb{N}$ بوجود می آورنــــد .

۳. خالیگاهای جملات را درمسایل ذیل خانه پری نمیـد :

(a). درست S یك دسته از ست های فرعی S یك انقسام را در S بوجود می آورند درصورتیکه :

(i). ست های فرعی مذکور دو بدو ________ بوده ، و

(ii). اتحاد آنها عبارت از ________ گردد .

(b). اگر $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، $S_1=\{1\}$ ، $S_2=\{2\}$
و $S_3=\{4,5,6\}$ مفروض باشند ، S_1 ، S_2 و S_3
یک انقسام را در ________ بوجود ________ زیرا :
________ میشـــود .

(c). اگر در ست $\mathbb{N}$ اعداد طبیعی دو ست فرعی آن S_1 از تمام اعداد تاق طبیعی و S_2 از تمام اعداد جفت طبیعی نمایندگی دارند ، درینصورت S_1 و S_2 یک ________ را در $\mathbb{N}$ بوجود می آورند . زیرا که : $S_1 \cup S_2 =$ ________ گردیده وهم چنان $S_1 \cap S_2 =$ ________ میشود . ست های فرعی S_1 و S_2 بنام ________ در $\mathbb{N}$ نیز یاد میشوند .

(d). اگر S_1 و S_2 دو صنف معادل بنابر یک رابطه معادل R در S باشند ، درصورتیکه دو عنصر x و y شامل S معادل باشند و $x \in S_1$ بوده پس بالضرور S_2 ________ میباشـــد .

4 . در یک ست سه عنصره فرضاً $A=\{a,b,c\}$ چند انقسام امکان پذیراست ؟

5 . اگر رابطه R در $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ طبق افادهٔ ذیل تعریف شود :

$$(a,b)\,R\,(c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

(a). ثبوت کنید که R در $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ یک رابطه معادل است .

(b) چند عنصر صنف معادل (2,4) را بدست آرید .

6 - آیا رابطه مشابهه بودن (تشابه) درست مثلث هـــای یک رابطه معادل میباشد ؟ استدلال کنید .

7 - آیا رابطه بزرگتر است از « > » درست اعـــداد تام « $\mathbb{Z}$ » یک رابطه معادل میباشد ؟ و یا خـــیر؟ استدلال کنیـــد .

8 - درست اعداد حقیقی $\mathbb{R}_*$ اگر رابطه R توسط افاده: xRy طوری تعریف شود که $xy>0$ گردد ، درینصورت نشان دهید که رابطه R در $\mathbb{R}_*$ یک رابطه معادل است . صنوف معادل آنـــرا تعـــین کنیـــد .

9 - رابطه R سوال (8) را درست $\mathbb{R}$ بررسی کنید .

10 - اگر رابطه R در $\mathbb{R}$ توسط افادهٔ $xRy \Leftrightarrow xy>0$ تعریف شود آیا R در $\mathbb{R}$ یک رابطه معادل میباشـــد؟ و یا خیر؟ موضوع را بررسی کنیـــد .

2-3 . رابطـــهٔ ترتیـــــب Order Relation

تعریف : یک رابطهٔ دوگانهٔ R در یک ست S رابطهٔ ترتیب گفته میشود در صورتیکه از هر سه خاصیت : انعکاسی ، ضد تناظری و انتقالی پیـروی کنـد .

یا بعبارت دیگر: یک رابطه دوگانهٔ R در یک ست S رابطـهٔ ترتیب گفته میشود در صورتیکـــه :

(i). برای هر x شامل S ، $(x.x) \in G_R$ باشد .

(ii). برای هر x و y شامل S در حالیکه $x \neq y$ است $((x,y) \in G_R) \Rightarrow ((y,x) \notin G_R)$ موجود گردد .

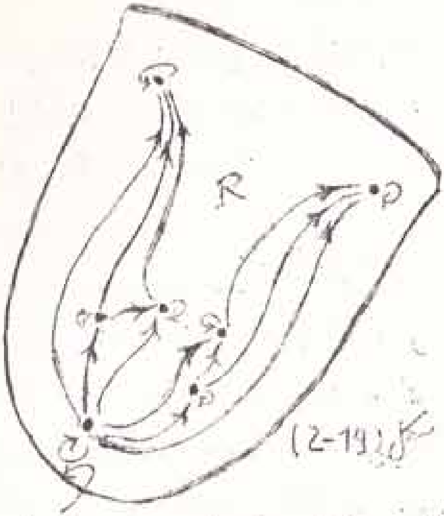
(iii). برای هر x ، y و z شامل S :

$$((x,y) \in G_R , (y,z) \in G_R) \Rightarrow ((x,z) \in G_R)$$

دارای حقیقت گردد .

مثال اول . دیاگرام تیری ذیل یک رابطهٔ ترتیب را ارائـــه میکنـــد :

زیرا: در ست E کدام عنصری موجود شده نمیتواند که از خاصیت انعکاسی پیروی نکند همچنان تمام عناصر ست E از خواص ضد تناظری وانتقالی نیز پیروی میکنند. بنا بر آن رابطه R در E یک رابطه ترتیبی است.



شکل (2-19)

<u>مثال دوم</u>: اگر رابطهٔ: بزرگتر و یا مساوی: "$\le$"

در ست اعداد تام $\mathbb{I}$ مد نظر گرفته شود، به این نتیجه میرسد که رابطهٔ: "$\le$" یک رابطهٔ ترتیب در $\mathbb{I}$ میباشد.

زیرا: برای تمام اعداد تام رابطهٔ: "$\le$" از سه خاصیت: انعکاسی، ضد تناظری، وانتقالی را در $\mathbb{I}$ پیروی میکند:

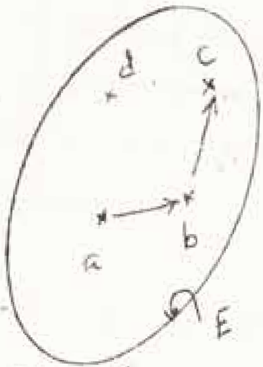
(1). برای هر x شامل $\mathbb{I}$، $x \le x$ حقیقت داشته پس "$\le$" در $\mathbb{I}$ انعکاسی است.

(2). برای هر x و y در عناصر متمایز ست $\mathbb{I}$ در صورتیکه $x \le y$ باشد پس $y \nleq x$ میباشد، یعنی "$\le$" در $\mathbb{I}$ ضد تناظری است.

(3). برای هر x، y و z شامل $\mathbb{I}$ اگر $x \le y$ و $y \le z$ باشد پس $x \le z$ میباشد یعنی "$\le$" در $\mathbb{I}$ انتقالی است.

چون رابطه: «≤» از هر سه خاصیت، انعکاسی، ضد تقارنی و
و انتقالی در II پیروی دارد پس «≤» یک رابطه ترتیب
در II است.

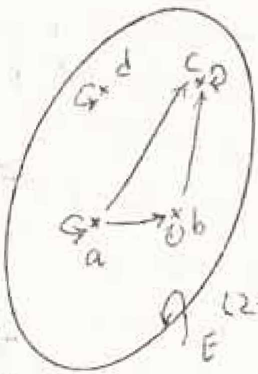
شکل (2-20)



مثال سوم ۰ دیاگرام تیری

شکل (2 - 20) مقابل را در نظر گرفته و میخواهیم که باز دیاد ترسیم تیرهای دیگر رابطه مربوطه آنرا یک رابطه ترتیب بسازیم.

چون رابطه ترتیب دارای خاصیت انعکاسی است پس باید که دور تمام عناصر ست E حلقه شود. از رابطه رابطه ترتیب از خاصیت انتقالی نیز پیروی میکند پس باید که یک تیر از a به c رسم شود که در نتیجه شکل (2 - 21) حاصل میشود.



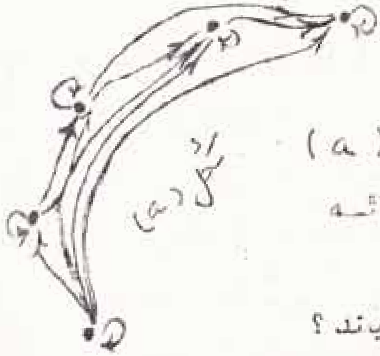
اکنون از شکل اخیر بملاحظه میرسد که رابطه مربوطه ان از نظر خاصیت ضد تقارنی نیز پیروی نمیشود پس یک رابطه ترتیب میباشد.

شکل (2-21)

تبصره:

علاوه از دو نوع رابطه مهم ریاضی: رابطه معادل و رابطه ترتیب که قبلاً توضیح یافت، روابط دیگر نیز موجود است

که هیچکدام از دو وقتی یکی از خواص اساسی را که در فوق ذکر شد تعقیب میکند و بس. به طور مثال اگر رابطه: بزرگتر است از و یا «$>$» در ست اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته شود، بملاحظه میرسد که رابطه: «$>$» در $\mathbb{R}$ از دو خاصیت اساسی: ضد تناظری، و انتقالی پیروی میکند. به همین تقسیم رابطه: «کوچکتر است از» و یا «$<$» هم از همین دو خاصیت: ضد تناظری و انتقالی پیروی مینمایند.



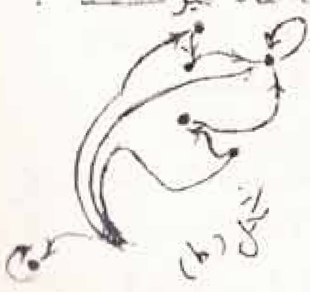
تمرینات:

1. آیا رابطهٔ مربوطه شکل مقابل (a)

(a). یک رابطه معادل را ارائه میکند؟

(b). یک رابطه ترتیب را ارائه میکند؟

(c). کدام خواص اساسی در آن بملاحظه میرسد؟



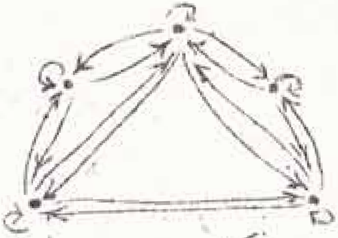
2. کدام خواص اساسی را در دیاگرام تیری شکل (b) بدست آورده میتوانید؟

3. شکل دیاگرام تیری (c) را مد نظر بگیرید:
آیا رابطه مربوطه این دیاگرام:

(a) آیا این رابطه معادل است ؟

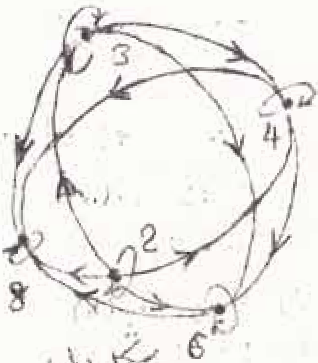
(b) آیا این رابطهٔ ترتیب است ؟

(c) هیچ کدام آن‌ها نیست ؟ چرا ؟



شکل (c)

4. اگر ست {1، 2، 3، 4} باشد، یک رابطهٔ ترتیب را توسط دیاگرام تیری و هم توسط زوج‌های مرتب در آن توضیح نمایید.



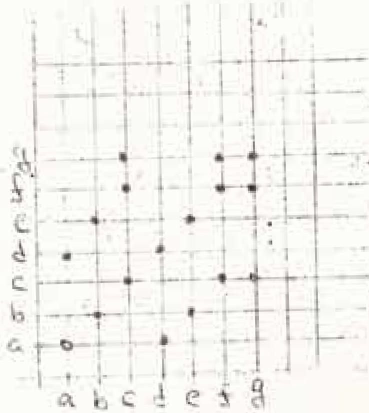
شکل (d)

5. دیاگرام شکل (d) را در نظر گرفته.

(a) از زوج‌های مرتب مربوطه رابطه آنرا بنویسید.

(b) آیا رابطه مربوطه دیاگرام تیری را تحدید میتوانید ؟

(c) رابطهٔ مربوطه آن از کدام خواص اساسی پیروی میکند ؟



6. در شکل مقابل نقاط تعیین شده رسم دیکارتی یک رابطه را در

$E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

ارائه مینمائید،

(a) نشان دهید که این رابطه یک رابطه معادل است.

(b) انتسام مربوطه انرا بدست آرید .

7. اگر ست $A=\{1,3,7\}$ بوده و G_R گرف یک رابطه R را در A توسط افاده:

$G_R=\{(1,1),(3,7),(3,3),(7,7)\}$ ارائه شد ،

کدام عنصر و یا عناصر دیگر در گرف G_R علاوه شود تا

(a) یک رابطه ترتیب در A ،

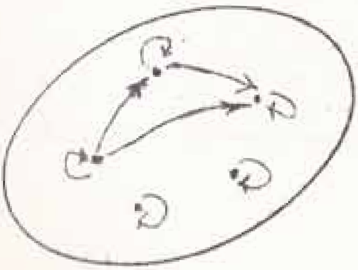
(b) یک رابطه معادل در A بوجود آید .

8. اگر گرف یک رابطه R توسط :

$G_R=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ ارائه شود

(a) آیا R یک رابطه معادل را در $A=\{a,b,c\}$ بوجود آورده است ؟ استدلال کنید .

(b) آیا R یک رابطه ترتیب را در A بوجود می‌آورد ؟ استدلال کنید .



9 : رابطه مربوط دیاگرام تیری مقابل را توضیح نموده و ست جوره های مرتب مربوط این دیاگرام تیری را بنویسید .
آیا رابطه مربوطه آن یک رابطه معادل و یا ترتیب میباشد ؟

10. اگر $E=\{a, b, c, d, e\}$ باشد ،

(a). گراف یک رابطه معادل را در E بنویسید .

(b). گراف یک رابطه ترتیب را در ست E بنویسید .

11. اگر $x \beta y$: روابط : $x^2=y$ در ست $E=\{0,1,2,3,4,9,16\}$ تعریف شود ، نشان دهید که β از خاصیت ضد تناظری پیروی میکند .

12. در یک ستهٔ عنصره $A=\{a, b, c\}$ چند رابطه ترتیب امکان پذیر است ؟

13. در یک ست ست ها رابطه " $\subset$ " از کدام خواص اساسی پیروی میکند . وچه نوع رابطه است ؟

14. نشان دهید که رابطهٔ " قسمت میکند " در $\mathbb{I}_*$ یک رابطه ترتیب است .

15. رابطهٔ : " مضرب است " در $\mathbb{I}$ چه نظر میدهید ؟ موضوع را بررسی کنید .

فصـــل ســـوم

تـوابـع (۱) و تـطبیقــــات

FUNCTIONS AND APPLICATIONS

در دو فصل گذشته راجع بموضوع روابط بصورت عام و بمناء درباره رابطه معکوس ترکیب روابط وخواص اساسی روابط بتفصیل بیشتر صحبت نمودیم در اخیر دو نوع خاص رابطه را تحت عنوان :- رابطهٔ معادل ، و رابطهٔ ترتیب مفصلتر مطالعه نمودیم . اکنون درین فصل ما یکدستهٔ خاص روابط راکه بنام توابع معروف اند مورد بررسی قرار میدهیم .

3-1 . تعریف تابـــع :

قبلاً در موضوع وجود رابطه بین دو یا چند ست صحبت بعمل آمد . ست اولی راکه عناصر مربوطه آن تحت یک شرط معیین با عناصر ست دومی یک رابطه را بوجود می آورد بنام منبع یاد نمودیم . تمام عناصر مربوطه این ست منبع را بنام عناصر منبع

---

(1) . در بعضی آثار یکه درین اواخر در زبان فرانسوی در زمین موضوع نگاشته شده توابع را تحت عنوان : " روابط تابعی : Relations Fonctionnelles" ذکر میانند . اعراب این اسم ترکیبی را در آثار خویش بنام " علاقهٔ دالیه " یاد نموده اند .

یاد نموده وازآنجمله آنعده عناصر منبع راکه در قایم کردن رابطه سهیم اند بنام منشاء تصاویر یاد نمودیم • بهمین قسم ســـت دومی راکه رابطه بالای عناصر آن قایم میشود بنام ساحه وتمام عناصر آنرا بنام عناصر ساحه یاد نموده ومن جمله آنعده عناصر آنرا که در تشکل رابطه سهم میگیرند بنام تصاویر یاد کردیم •

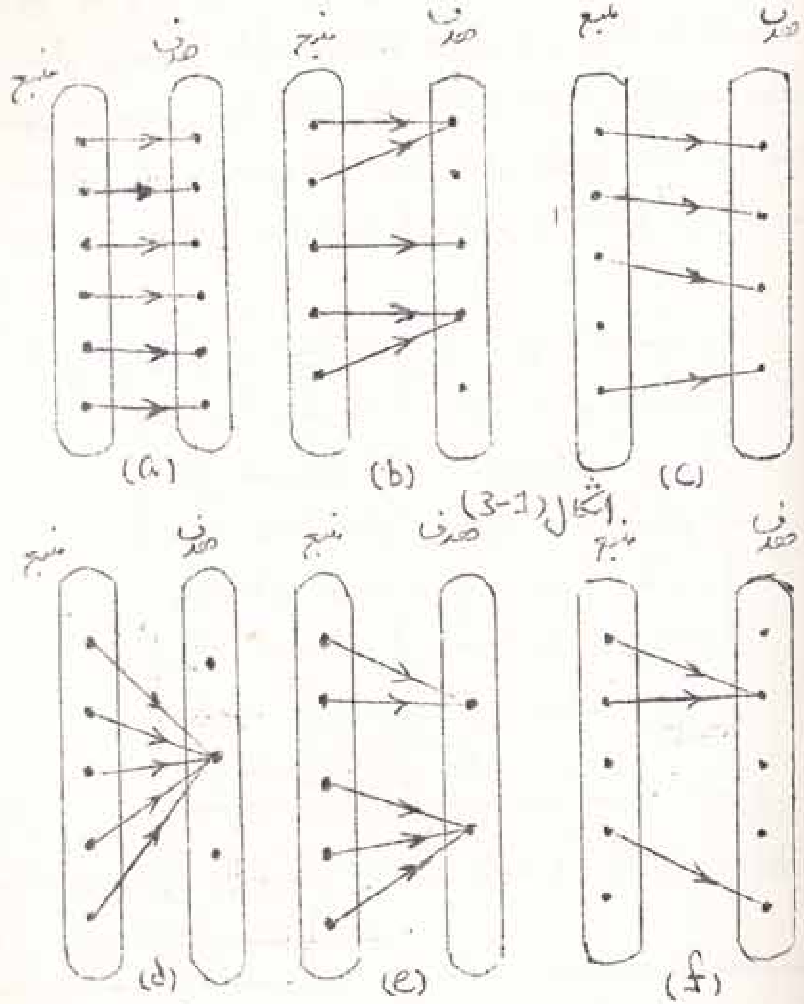
اکنون آن یکعده روابط خاصی راکه از هیچکدام یک از عناصر مربوطهٔ منبع آنها بیشتر از یک تیر (درترسیم دیاگرام تیری) بطرف عناصر ساحه کشیده نشده باشد مورد مطالعه قرار میدهیم. ما این دسته روابط را بنام توابع یاد میکنیم • مطالعات توابع قسمت مهمی علم ریاضیات را احتوا نموده است• اینک در ذیل تابع را باساس ترسیم دیاگرام تیری آن معرفی مینمایم:

تعریف: تابع عبارت از رابطه ایست که در رسم دیاگرام تیری آن از هیچکدام یک عنصر منبع آن بیشتر از یک تیرنشاءت نکند•

یا به عبارت دیگر: تابع عبارت از رابطه ایست که هیچکدام یک عنصر منبع آن بیشتر از یک تصویر نداشته باشد •

بنا بر تعریف فوق بسیاری از

امثال ذیل یک رسم دیاگرام تیری یک تابع را ارائه میکند :



اشکال (3-1)

زیرا از هیچکدام یک از عناصر منبع هر یک از آن ها بیشتر از یک تیر نشأت نکرده است .

اشراء درست منبع ویا ست هدف ویا درست منبع وهدف یک تابع یک ویا چند عنصر موجود شده میتواند که در تشکل تابع کدام رولی را بازی نمیکنند • ولی در ینجا ما بانمد عناصر ست منبع وهمچنان با نمده عناصر ست هدف توابع علاقمند یم که در تشکیل تابع سهیم اند . اینک متفق با رول داشتن عناصر منبع وهدف یکتابع در تشکل ان . تعریفات ذیل را ارائه مینمایم:

تعریف : آن ست فرعی منبع یک تابع را که تمام عناصر ان در تشکل تابع سهیم انـد بنام دومین (1) Domain ویا ست منشاء تصاویر تابع یاد مینمایم • وهمچنان آن ست فرعی هدف یکتابع راکه تمام عناصر آن در تشکل تابع سهم میگیرند بنام رینج Range ویا ست تصاویر تابع یاد مینیم •

معمولاً یک تابع را توسط یک حرف مانند : f یا g یا F ویا G ارائه مینماینـد •

---

(1) دومین یکتابع را بنام حوزه ویامیدان آن تابع نیـز یاد مینننـد •

اگر مطلب ما ارائه یک تابع f از یک ست E به یک ست F باشد آنرا چنین نشان میدهیم :

$$f: E \longrightarrow F$$

هرگاه x یک عنصر ست دومین یک تابع f بوده و y تصویر آن در رنج تابع باشد درینصورت ما مینویسیم :

$$f(x) = y$$

و این علامه $f(x)$ یگانه بودن تصویر x را در رنج تابع که عبارت از y است نشان میدهد ؛ حالانکه این علامه‌گذاری در رابطه مجاز نیست ، زیرا ممکن یک عنصر منبع یک رابطه دارای چندین تصویر در رنج گردد . ضرور نیست که تصویر آن یگانه باشد .

مثال اول . اگر $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

و $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

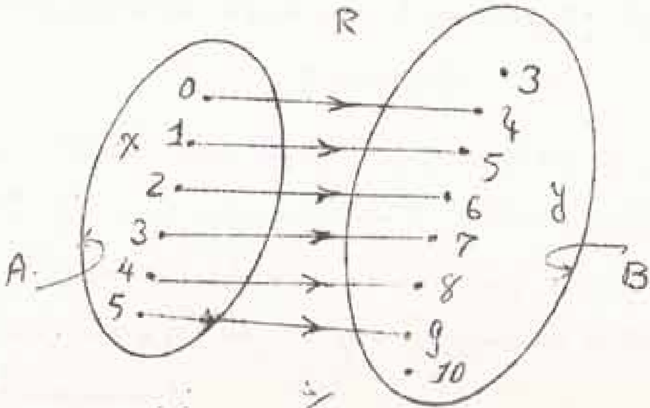
مفروض باشند ، با در نظر داشت رابطهٔ R که باساس G_R ذیل تعریف شده :

$$G_R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B ; \; y = x + 4\}$$

(a) . دیاگرام تیری رابطهٔ R را رسم نموده وحقیقتی را که باساس آن R یک تابع میباشد و یا غیر باساس آن جستجو کنید .

(b) • شکل روستر G_R را بنویسید •

حل: (a) ترسیم دیاگرام تیری رابطهٔ R طبق شکل (2-3) درذیل توضیح شده میتواند :



شکل (3-2)

از دیاگرام تیری رابطهٔ R درفوق ، بمشاهده میرسد که هیچکدام یک ازعنصرست منبع A با دو عنصر ست هدف B مطابقت نکرده است ، یا بعبارت دیگر ازهیچکدام یک ازعنصرست منبع A دو تیر نشات نکرده است؛ بنابرا قرار تعریف R یکتابع را ازست A بالای ست B بوجود آورده است•

(b) • شکل روستر G_R قرار ذیل است :

$$G_R=\{(0,4),(1,5),(2,6),(3,7),(4,8),(5,9)\}.$$

ازملاحظه شکل روستر تابع فوق دیده میشود که در گرف

دو جوره مرتب ای که دارای عین مرکبه اولی باشند موجود نیست.
یا بعبارت دیگر کدام عنصر ست منبع A تکراراً منشاء تصویر دو عنصر متمایز ست هدف B واقع نشده است.

با در نظر داشت حقیقت فوق، یک تابع طبق ذیل نیز معرفی شده میتواند:

> **تعریف:** یک تابع عبارت از رابطه ایست که در گراف آن دو جوره مرتب ای که دارای عین مرکبه اولی باشند موجود نگردد.

مثال دوم: G_R و G_F علی الترتیب گراف دو رابطه R و F را که از ست $A=\{a,b,c,d\}$ بطرف ست $B=\{1,2,3,4,5\}$ تعریف نموده اند مد نظر بگیرید، در ایضاح دارید که:

(a). کدام یک از دو رابطه R و F تابع و کدام آنها تابع نیست؟

(b). رابطه که تابع نیست از گراف مربوطه آن کدام جوره مرتب حذف و یا اضافه شود تا شکل یک تابع را بخود بگیرد؟

$G_R=\{(a,4),(b,3),(c,5),(d,2),(a,1),(c,2)\}$.

$G_F=\{(a,1),(c,2),(d,4)\}$.

حل : (a). از مشاهده گراف G_R بملاحظه میرسد که در جوره های مرتب: $(a,4)$ و $(a,1)$ مرکبه اول آنها یعنی: a تکرار واقع گردیده و به همین قسم در جوره های مرتب: $(c,5)$ و $(c,2)$ مرکبه اول آنها یعنی: c تکرار واقع شده است. حالانکه این وضعیت وقوع تکراری مرکبهٔ اول جوره مرتب حقیقتی را که یک عنصر منشاء دارای دو تصویر درست هدف نگردد نقض میکند. بنابران رابطه R از A بطرف B که توسط G_R فوقاً تعریف گردیده است، یک تابع نمی باشد. از طرف دیگر در گراف رابطه F که باساس G_F توضیح یافته هیچ دو جوره مرتب که دارای عین مرکبه اولی باشند در آنها به مشاهده نمیرسد. یا بعبارت دیگر بنابر رابطه F یک عنصری درست A و یا منبع موجود شده نمیتواند که دارای بیشتر از یک تصویر درست B یعنی هدف گردد. بنا بران گفته میتوانیم که رابطه F یک تابع را از A بطرف B تعیین میکند.

(b). برای اینکه رابطهٔ R یک تابع را از A بطرف B بوجود آورد باید که یکی از دو جورهٔ مرتب: $(a,4)$ و $(a,1)$ و همچنان یکی از دو جوره مرتب: $(c,5)$ و $(c,2)$ حذف گردند.

<u>مثال پنجم</u>: اگر گراف $G_R=\{(۵,۴),(۴,۵),(1,a),(2,a),(4,c)\}$ یک رابطه از یک ست A بطرف یک ست B مفروض باشد باد رنظر داشت گراف G_R ؛

(a). آیا R یک تابع را از A بطرف B تعریف میکند؟ ویا خیر؟

(b). درصورتیکه R یک تابع باشد ست های منبع و هدف تابع مورد بحث را که دارای کمترین تعداد عناصر باشند، تعیین کنید.

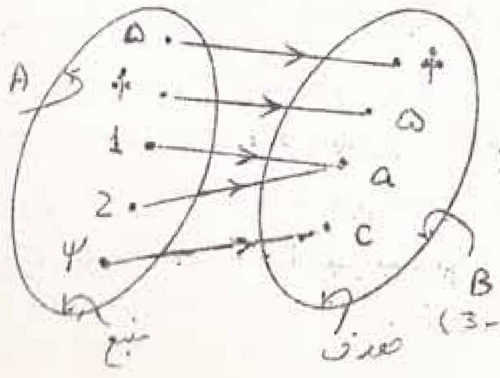
(c). دیاگرام تیری تابع مورد بحث را رسم نمائید.

حل: (a). اگر دقت شود در گراف G_R رابطه R آنسدو جوره مرتبی که دارای عین مرکبه اولی باشند موجود نیست. بنا بران گفته میتوانیم که R یک تابع را از A بطرف B تعریف میکند.

(b). چون R یکتابع از A بطرف B است، پس ست منبع، A آن که دارای کمترین عناصر باشد عبارت از: $A'=\{۵, ✣, 1, 2, \psi\}$ بوده وبهمین قسم ست هدف آن که دارای کمترین عناصر گردد عبارت از:

$B=\{✣, ۵, a, c\}$ میباشد.

(c). دیاگرام تیری تابع طبق شکل مقابل ارائه شده میتواند:



شکل (3-3)

مثال چهارم • گروه A عبارت از شت شاگرد ا ن صنوف دوازدهم مکتب شما و B عبارت از ست چهار پروفیسور ریاضی که اسمای شان عبارت از: بولیای (Bolyai)، گوس (Gauss)، لوبتچوسکی (Lobatchewsky) وریمان (Riemann) است مفروض باشد ، اگر تو شما کرد باساس حرف اول نام خویش معنی بیکی از چهار پروفیسور مذکور برای فرا گرفتن علم ریاضی مطابق ذیل معرفی شود ؛ درینصورت ما داریم :

$$A = \{x \mid \text{یک شاگرد صنف دوازده مکتب شما است}\}$$
$$B = \{Bolyai, Gauss, Lobatchewsky, Riemann\}.$$

تمام شاگردان اساس حرف اول نام شان قرار ذیل مفروض است :

$A - D : \longrightarrow$ Bolyai ، $E - L : \longrightarrow$ Gauss

$M - P : \rightarrow$ Lobatchewsky ، $Q - Z : \longrightarrow$ Riemann

از اینکه هر شاگرد معنی وتنها معنی بیک پروفیسور معرفی میشود واضح که این رابطه از ست شاگردان بطرف ست پروفیسوران عبارت از یک تابع است.

حال اگر ما این تابع از ست A بطرف ست B را به S ارائه نمایم ، درینصورت شاگردی بنام امین Amin که حرف اول نام او به A شروع میشود به بولیای Bolyai معرفی میشود ، پس ما مینویسیم که :

$$S(Amin) = Bolyai.$$

این افادهٔ فوق توضیح میکند که Amin تحت مطابقت S
شاگردی به پروفیسور مربوطهٔ اش بولیای Bolyai ارتباط دارد.
درین افاده Bolyai تصویر Amin را تحت تابع S
درست پروفیسوران وامین Amin عنصر منشاء تصویر
بولیای Bolyai را درست شاگردان ارائه میکند. درین مثال
ست شاگردان صنف دوازده مکتب شما دومین (Domain)
تابع S را و به همین قسم ست پروفیسوران رنج (Range)
تابع S را تشکیل میدهند. مشاهده میرسد که درین مثال
دومین مساوی به منبع و رنج مساوی به هدف تابع S میباشد.

مثال پنجم. اگر ست $A=\{3,4,5,6,7\}$
را بحیث منبع یک تابع f که بنابر یک مطابقت و یا شرط که؛
« هریک از عناصر ست A را مربع نموده و بآن عدد -3
را علاوه کرده و تصویر آنرا در ست اعداد تام $\mathbb{Z}$ ارائه میکند.»
افاده گردیده مد نظر بگیریم درینصورت ما داریم:

$$f(3) = 3^2-3 = 6$$

و ... $$f(4) = 4^2-3 = 13$$

و ... $$f(5) = 5^2-3 = 22$$

و ... $$f(6) = 6^2-3 = 33$$

و بالاخره $$f(7) = 7^2-3 = 46$$

و یا اینکه مینویسیم ...
$3f6$ یا $f(3)=6$, $4f13$ یا $f(4)=13$
$5f22$ یا $f(5)=22$, $6f33$ یا $f(6)=33$
$7f46$ یا $f(7)=46$.

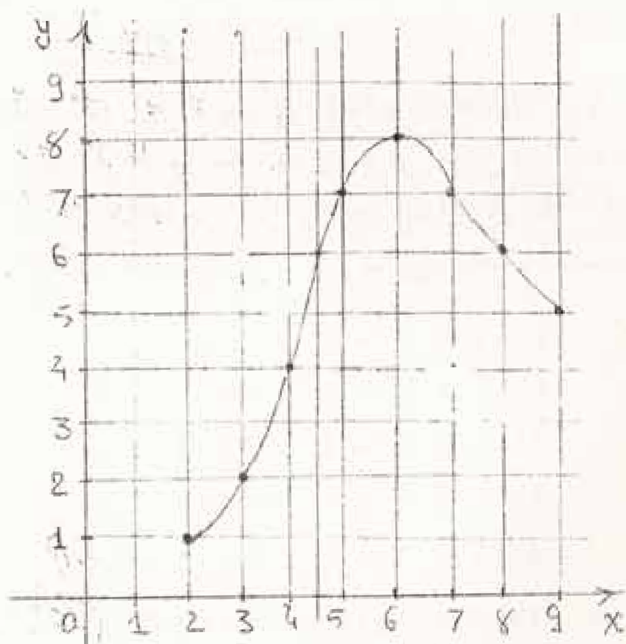
گراف Gf تابع مذکور قرار ذیل افاده شده میتواند :

$Gf = \{(3,6), (4,13), (5,22), (6,33), (7,46)\}$.

<u>مثال ششم</u>. اگر f یک تابع را از $[0,9]$ بطرف $\mathbb{R}^+$ توسط منحنی شکل (3-4) ارائه کنند طوریکه اعداد مربوط نقاط محور x بحیث منبع تابع و اعداد مربوط نقاط محور y بحیث تصاویر آن در نظر گرفته شود درینصورت :

(a). باساس رسم، دومین و رنج تابع را مشخص سازید.

(b). تصاویر اعداد تام مربوط دومین را در رنج تابع حاصل نمائید



شکل (3-4)

(c). آیا از ملاحظه رسم دیکارتی داده شده گفته میتوانید که چرا f یک یک تابع است؟

(d). یک عده خطوط مستقیم را که موازی به محور x (یعنی مستقیماً) رسم گردد مد نظر بگیرید، آیا این دسته خطوط منحنی رسم شده را بیشتر از یک نقطه قطع میکند و یا چطور؟

حل: (a). با در نظر داشت رسم دیکارتی

دومین تابع f عبارت از: $[2, 9]$

ورنج آن عبارت است از: $[1, 8]$

(b). تصاویر اعداد تام دومین با ... ذیل ارائه شده میتواند:

$$f:\quad \begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{array}$$

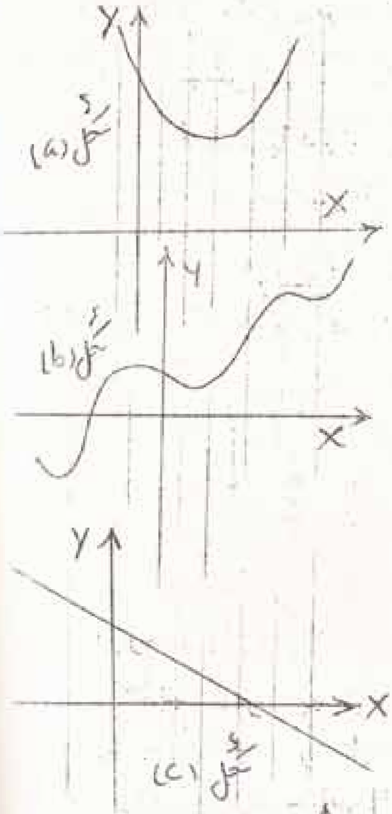
(c). از رسم دیکارتی بملاحظه میرسد که هیچکدام یک عنصر ستمبع دارای بیشتر از یک تصویر در هدف نمیباشد بنا بر آن f یک تابع را ارائه میکند.

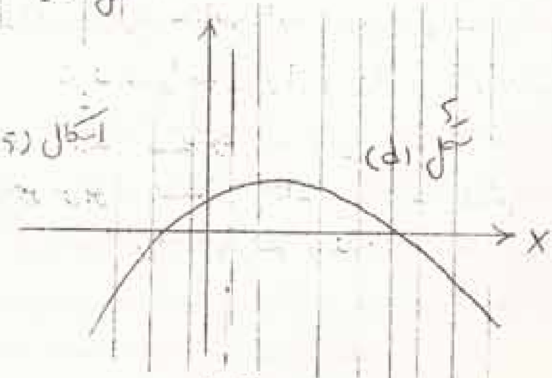
(d). هر عده خطوط مستقیم اینکه موازی به محور x رسم گردد منحنی را بیشتر از یک نقطه قطع نمیکنند.

ازین نتیجه میشود که هر خط مستقیم موازی محور مربوط هدف یک تابع منحنی آنرا از یک نقطه بیشتر قطع نمیکند.

مثال هفتم • تمرین

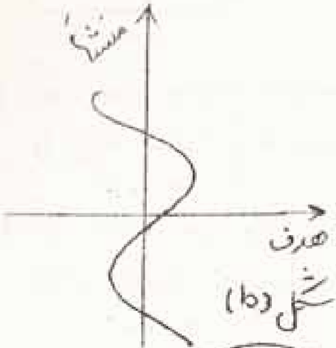
از منحنی های مربوطه
اشکال: (a)، (b)
(c) و (d) یک تابع
را ارائه میدهند • زیرا:
اگر هر خط مستقیم موازی
به محور y (محورست
نقاط هدف) رسم
گردد، هیچکدام یک
از این خطوط مستقیم
منحنی مربوطه را بیشتر
از یک نقطه قطع نمیکند •



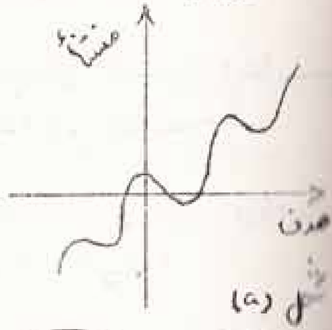


اشکال (3-6)

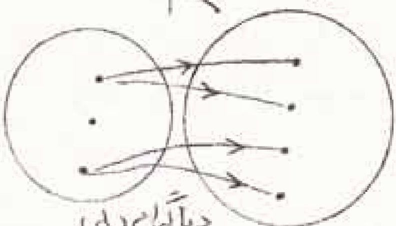
6 . ازجمله اشکال و دیاگرام های داده شده ذیل کدام آنها تابع را افاده میکند :

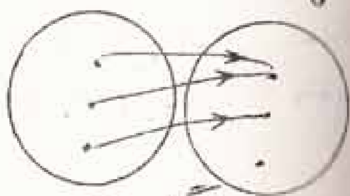


شکل (b)



شکل (a)


دیاگرام (d)


دیاگرام (c)

7 . کدام جوره های مرتب از گراف های ذیل حذف شوند تا گراف مربوطه یک تابع را افاده کند :

(a) . . . $G_1 = \{(1,3),(2,3),(3,1),(1,4)\}$

(b) . . . $G_2 = \{(1,2),(4,2),(1,4),(2,4)\}$

(c) . . . $G_3 = \{(\Psi,\dagger),(\blacklozenge,\dagger),(\Psi,\blacklozenge)\}$

(d) . . . $G_4 = \{(a,b),(a,v),(a,c),(c,d)\}$

تمـــــــــرینات :

خالیگاهای ذیل را خانه پری کنیـد :

1. یکتابع عبارت از یك رابطهٔ ________ که مرکبـه ________ جوره های مرتب گراف مربوطه ان ________ واقع نشود .

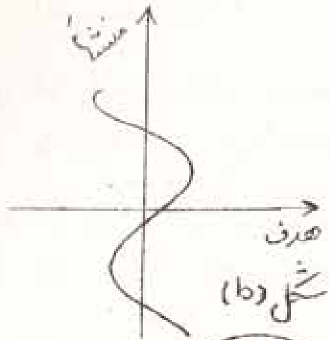
2. اگر ادام منحنی کمیات و بقیه نقاط مربوطه یکتابع را ارائـه کند ، درینصورت هیچکدام خط مستقیم موازی به ________ موجود شده نمیتواند که منحنی مذکور را بیشتر از ________ نقطه قطع نمایـد .

3. ازنگاه دیاگرام تیری ، یکتابع عبارت از یك رابطهٔ دوگانـه ایست که از هیچکدام یك از نقاط مربوطه ________ بیشتر از یك ________ نشاءت نکنـد .

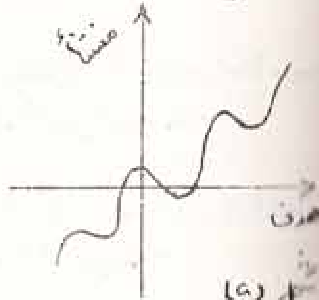
4. گراف : $G_1 = \{(1,2),(2,1)\}$ یکتابع را ________ کرده حالانکه گراف : $G_2 = \{(2,1),(2,3),(1,2)\}$ یکتابع را ارائه کرده ________ .

5. درگراف : $G_f = \{(1,2),(4,3)\}$ عناصر 1 و 4 مربوط ________ تابع f بوده وعناصر 2 و 3 مربوط ________ تابع مذکورمیباشند . عناصر ________ و ________ را بنـام منشاء تصاویر وعناصر ________ و ________ را بنام تصاویـر یاد مینمایـنـــد .

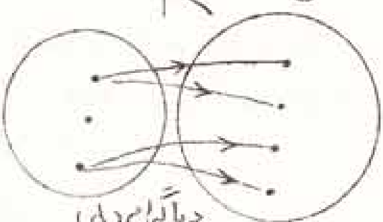
6 . ازجمله اشکال و دیاگرام های داده شده ذیل کدام انها تابع را افاده میکند :



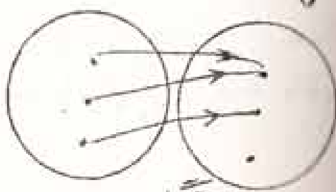
شکل (b)



شکل (a)



دیاگرام (d)



دیاگرام (c)

7. کدام جوره های مرتب از گراف های ذیل حذف شوند تا گراف مربوطه یک تابع را افاده کند :

$G_1 = \{(1,3),(3,2),(3,1),(1,4)\}$ . . . (a)

$G_2 = \{(1,2),(4,2),(1,4),(2,4)\}$ . . . (b)

$G_3 = \{(\Psi,+),(\blacklozenge,+),(\Psi,\blacklozenge)\}$ . . . . . (c)

$G_4 = \{(a,b),(a,v),(a,c'),(c,d)\}$ . . . (d)

8. شرط وقید یکه یک تابع را از یک رابطه متمایز میسازد کدام است ؟

9. آیا رابطه موازات در بین خطوط مشترک المستوی یکتابع را ارائه میکند ؟ و یا چطور ؟ استدلال کنید .

10. آیا رابطه قاسم بودن در ست $\{1, 2, 3, 4\}$ یکتابع را ارائه میکند ؟ و یا خیر ؟ استدلال کنید .

11. رابطه قاسم بودن را در $\{2, 3, 5, 7\}$ مدنظر گرفته و گراف آنرا بنویسید. ایا این رابطه در این ست یکتابع است ؟

12. یک ست A را تعیین کنید طوریکه رابطه مضروب بودن در A یکتابع را افاده کند .

13. ایا رابطهٔ دو چند ساختن (مثال 6 تصویر 3 است) در ست $\mathbb{N}$ یکتابع را ارائه میکند ؟ و یا چطور ؟ دومین آنرا تعیین کنید .

14. اگر گراف های داده شده ذیل :

$G_1 = \{(1,2),(2,3),(3,5),(5,1)\}$ ،

$G_2 = \{(1,2),(2,3),(2,5),(5,1)\}$ ،

$G_3 = \{(0,-1),(-7,0),(\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(1,1),(-3,-3)\}$ ،

$G_4 = \{(0,-1),(0,-7),(\frac{3}{2},\frac{3}{2})\}$ ،

مورد مطالعه قرار گیرند ؛ بملاحظه میرسد که گراف ها ی :

G_3 و G_1 توابع را ارائه نموده حالانکه گراف های :

G_2 و G_4 کدام تابع را ارائه نمیکنند چـــرا ؟

بدرستی

دیاگرام تیپری هرکدام انها را رسم نموده وموضوع را

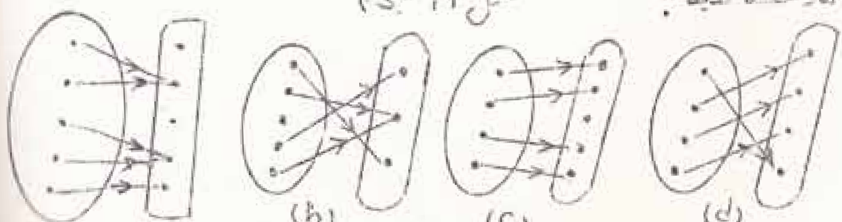
آنیـــد .

3-2 . انـــواع توابـــع :

ما میدانیم که تابع یک حالت خاص رابطه اســـت وان عبارت از رابطه ایست که هیچکدام یک عنصر منبع آن دارای بیشـــتر از یک تصویر در ساحه نباشد . هرتابع فرضاً f توسط منبع آن فرضاً A وساحه آن فرضاً B بنابر قانون ویا شرط مطابقت توضیح میشود ، طوریکه این تابع f را از A بطرف B ویا با الفاظ انگلیسی "from A into B" بیان میکنند . ازین معلوم میشود که هرتابع into function میباشد درین کتاب نزد ما کلمه « into » در تشکیل توابع کدام مفکوره دیگری را بجز ازاینکه تابع ازمنبع بطرف ساحه صورت پذیراست ارائه نمیکند .

قبل ازینکه راجع بانواع توابع صحبت نمایم امثال ذیل را مطالعه نمائید :

<u>مثال اول</u> . رسم های دیاگرام های تیری ذیل را بدقت ملاحظه کنید : شکل (3-7)



(a) (b) (c) (d)

(a) ۱۰. آیا تمام دیاگرام های تیری فوق توابع را ارائه مینمایند ؟

(b) با در نظر داشت مفاهیم ست های هدف آنها مشخصات اشکال فوق از هم چه فرق دارند ؟

حــــل :

(a) چون از هیچکدام یک از عناصر مربوطه ست منبع هر یک از دیاگرام های فوق بیشتر از یک تیر نشاءت نکرده است بنابران گفته میتوانیم که هرکدام یک از دیاگرام های تیری فوق مذکوره یک تابع را ارائه مینمایــــد .

(b) اگر دقت شود در شکل : (a) و (c) لا اقل یک عنصر در ست هدف آنها موجود شده میتواند که تصویر کدام یک عنصر ست منبع مربوطه آن نگردیده است . ولی از ملاحظه اشکال : (b) و (d) بمشاهده میرسد که در ست هدف آنها هیچکدام یک عنصری که تصویر کدام یک عنصر و یا عناصر ست منبع مربوطه آنها نگردیده باشد موجود نیست .

علاوه برآن از شکل (d) بملاحظه میرسد که تعداد عناصر هر دو ست هدف و منبع باهم مساوی بوده و هر عنصر ست منبع صرف یک عنصر ست هدف را مطابقت کرده اســـت .
یا بعبارت دیگر هرعنصر ست منبع تصویر صرف یک عنصر ست هدف گردیده است . هیچکدام یک عنصر در هر دو ست های منبع و هدف بدون مطابقت و یا عمل باقیمانده نمانده است .

حال توابع رابنابر مشخصات که درست جفت کدام عنصر ویا عناصر موجود شده میتواند ویا موجود شده نمیتوانند که بحیث تصویر واقع نشده باشد طبق ذیل مطالعه مینمایم :

3-2.4 . تابع « بالائی »[1] Onto Function

تعریف : یکتابع از یک ست A بطرف یک ست B ویا « بالائی » گفته میشود درصورتیکه onto در ست B هیچ کدام یا عنصری موجود نگردد که تصویر نشده باشد .

ویا به عبارت دیگر:

یکتابع f از یک ست A بطرف یک ست B ویا بالائی گفته میشود درصورتیکه برای onto تمام y شامل B لااقل یک x شامل A موجود گردد طوریکه $f(x) = y$ شود .

ویا باالفاظ دیگر:

یکتابع onto ویا بالائی گفته میشود در صورتیکه رنج آن مساوی به همدف آن باشد .

(1) . تابع بالائی را بنام تابع « پوشا » نیز مینامند .

مثال اول ٠ اگر $A=\{☆,\Delta,\psi,\diamond,\dagger\}$ و $B=\{a,b,3,d,5\}$
و تابع f از A بطرف B که بنابر گرف G_f طبق ذیل :
$G_f=\{(☆,a),(\Delta,3),(\dagger,d),(\psi,3)\}$ تعریف گردد،
مد نظر گرفته شود ، تابع f از A بطرف B یکتابع بالائی
را بوجود نمی آورد ٠ زیرا در ست B هدف آن دو عنصر: b و 5
موجود اند که تصویر هیچکدام یک از عناصر ست منبع A را
تشکیل نمیدهند ٠ بنابران f یکتابع بالائی را بوجود
نه آورده است ٠

مثال دوم ٠ اگر ست: $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$
وست : $B=\{0,1,4,9,16\}$ مفروض باشد و یک
رابطهٔ R را از A بطرف B باساس افاده :

$$R: \quad A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto x^2$$

تعریف شده مد نظر بگیرید :

(a) ٠ آیا رابطهٔ R از A بطرف B از یکتابع نمایندگی میکند ؟
(b) ٠ درصورتیکه R یکتابع باشد ، آیا R یکتابع بالائی میباشد ؟

حل : (a) ٠ اگر هرکدام یک ازعناصر ست A بنابر رابطهٔ R :
$R: \ A \longrightarrow B, \ x \longmapsto x^2$ مطالعه گردد دیده میشود که هرکدام
انها محض دارای یک تصویر درست B میباشند

وبه: بنابران R یکتابع را از A بطرف B بوجود می آورد .

(ط) . ازینکه بنابر رابطه:

$$R(x) = x^2$$

$$R(-4) = R(4) = 16$$

$$R(-3) = R(3) = 9$$

$$R(-2) = R(2) = 4$$

$$R(-1) = R(1) = 1$$

$$R(0) = 0$$

ازین نتیجه میشود که هر یک از عناصر ست B تصویر عناصر ست A گردیده و یا بعبارت دیگر در ست B هیچکدام یک عنصری نیست که در تشکل تابع R سهیم نباشد. بنابرآن تابع R از A بطرف B یکتابع onto و یا بالائی میباشد .

مثال سوم . اگر تابع g : $g(x) = x - 3$ ازست $\mathbb{I}$ بطرف $\mathbb{I}$ مورد مطالعه قرارداده شود ، نتیجه میشود که g یکتابع بالائی از $\mathbb{I}$ بر $\mathbb{I}$ را بوجود می آورد .

زیرا: در $\mathbb{I}$ ما کدام عنصری را پیدا کرده نمیتوانیم که دارای یک عنصر منشاء تصویر در $\mathbb{I}$ نباشد . بناءً گفته میتوانیم که g یکتابع بالائی از $\mathbb{I}$ بر $\mathbb{I}$ است .

مثال چهارم: اگر یک تابع f از ست :

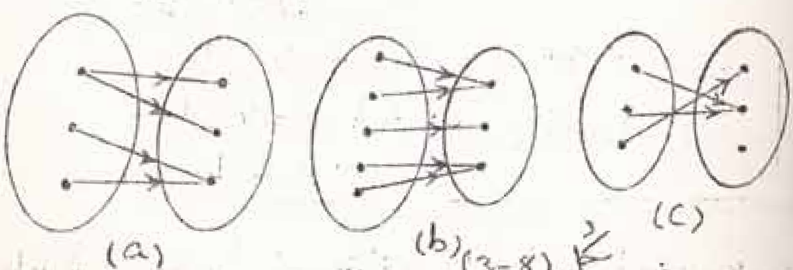
$$A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,5\}$$

بطرف ست : $B=\{-7,-6,-3,2,9,18\}$ بنا بر گرف G_f مطابق ذیل :

$$G_f=\{(-4,9),(-3,2),(-2,-3),(-1,-6),(0,-7),(1,-6),(2,-3),(5,18)\}$$

تعریف شود درینصورت f یکتابع "onto" بالائی را از A بر B بوجود می آورد. زیرا در ست B تحت تابع f کدام عنصری موجود شده نمیتواند که لااقل بحیث یک تصویر کدام عنصر ست A واقع نشده باشد. بناً گفته میتوانیم که f یکتابع بالائی از A بر طرف B است.

مثال پنجم: از ملاحظه دیاگرام های تیری ذیل بمشاهده میرسد که محض دیاگرام مربوطه شکل (b) یک تابع بالائی را ارائه مینماید، حالانکه اشکال مربوط دیاگرام های:



شکل (3-8)

(a) و (c) اشکال یکتابع بالائی نیست. زیرا: دیاگرام تیری مربوطه

شکل (a) یک تابع نیست . از شکل (c) دید میشود یک عنصر درست هد ف دیا گرام تیری آن موجود است که تصویر هیچکدام یک از عناصر ست منبع آن نمی باشد .
پس دیا گرام تیری شکل (c) یکتابع بالائی نمیباشد . اما دیا گرام تیری مربوطه شکل (b) چون هیچکدام یک عنصر درست هد ف آن موجود نیست که بحیث تصویر در تشکل تابع مربوطه سهیم نباشد بنابران دیا گرام تیری شکل (b) یکتابع بالائی را ارائه میکند .

3-2.b . تابع یک بیک

تعریف : یکتابع f از A بطرف B یک بیک گفته میشود درصورتیکه هرد و عنصر متمایز ومین f دو تصویر متمایز داشته باشد .

یا بعبارت دیگر :

برای هرد و عنصر x و y شامل دومین f اگر $x \neq y$ باشد پس $f(x) \neq f(y)$ میباشد .

بنابر توضیحات فوق گفته میتوانیم که اگر f یک تابع یک بیک بوده درصورتیکه $f(x) = f(y)$ باشد بالضرور $x = y$ میشود .

مثال اول: اگر تابع f از $\mathbb{R}$ به روی $\mathbb{R}$ بنابر افاده:

$$f(x) = 2x+3$$

مدنظر گرفته شود، دیده میشود که f یک تابع یک بیک است.
زیرا: اگر دو عنصر a و b شامل $\mathbb{R}$ را اوریکه $f(a)=f(b)$ باشد در نظر بگیریم در ینصورت ما داریم:

$$f(a) = 2a+3$$
$$f(b) = 2b+3$$

چون . . . . $f(a) = f(b)$

پس . . . . $2a+3 = 2b+3$

ویا . . . . . . $2a = 2b$ . . . . چرا؟

ویا . . . . . . $a = b$ . . . . چرا؟

ازین نتیجه میشود که f یک تابع یک بیک از $\mathbb{R}$ به روی $\mathbb{R}$ میباشد.

تبصره: برای اینکه عدم یک بیک بودن یک تابع را ثابت کنیم کافی است تا نشان دهیم که دو عنصر متمایز ست دومین آن دارای عین تصویر در ست رنج آن است.

مثال دوم: اگر تابع g در $\mathbb{R}$ توسط افاده: $g(x) = x^2$ تعریف شود، بملاحظه میرسد که g یک تابع یک بیک نیست.

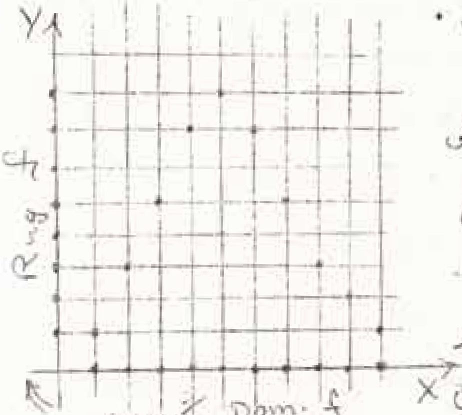
زیرا: چون $g(-2)=(-2)^2=4$

و $g(2)=(2)^2=4$

پس . . . . $g(-2)=g(2)=4$ . . . : . بوده ،

حالانکه . . . . $-2 \neq 2$ . . . . . میباشد .

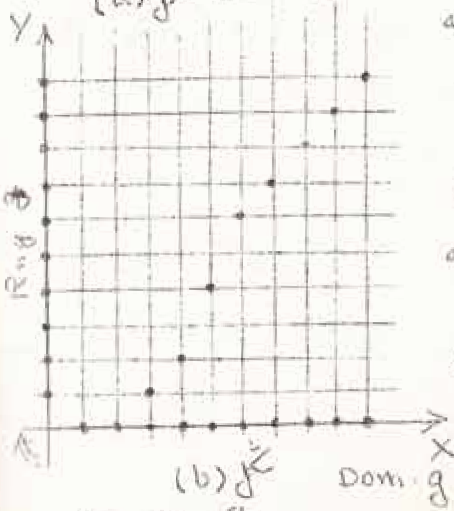
بنابرآن ازینکه دو عنصر متمایز 2 و 2- ست دومین g دارای عین تصویر 4 درست رنج آن است پس ویا تابع یک بیک را درست تشکیل نمیدهند .



شکل (a)

مثال سوم . در رسم دکارتی

دو تابع f و g طبق دو شکل مقابل (a) و (b) اگر نقاط روی محورات X و Y در هر دو شکل علی الترتیب منبع و هدف هر دو تابع را ارائه کند، ونقاط پلیپاه شده گراف های: f و g را نشان دهند، درینصورت شکل (a) یکتابع یک بیک را نشان نداده حالانکه شکل (b) یکتابع یک بیک را ارائه میکند. چرا؟



شکل (b)

شکل (3-4)

تمـــــرینات :

مثال ۴ صفحه ۱۴۵ کتاب راکـــه دران ست A را ازشاگردان صنف 12 مکتب شما وست B را بــ ار پروفیسور ریاضی : بولیـــای Bolyai ، گوس Gauss ، لوبچوسکی Lobatchewsky ، و ریمان Riemann با تشکیل نموده ودرآن رابطه S باســاس تعارف هر شاگرد بنابر حرف اول نام وی بیکی ازچهار پروفیسور فوق الذکر برای فراه گرفتن علم ریاضی معرفی میشود مدنظر گرفته وتوضیح دارید :

(a). رنج تابع S کدام است ؟

(b). اگر محصلی بنام باقی Baqui در صنف 12 مکتب شما موجود باشد تصویر او تحت تابع S چیست ؟

(c). تصاویر هریک از شاگردان صنف 12 مکتب خود راکه بنام های : دلیل Dalil ، واحـــدی Wahidi ، کبیر Kabeer ، فتاح Fattah و غنـــی Gihani موسوم اند ، دریافت نمائید .

(d). نوعیت تابع S راکه آیا یک تابع :

(i). بالائی "onto" است ؟ ویا نخیر؟

(ii). یک بیک "one-to-one" است ؟ یا نیســـت ؟

بررســی کنیـــد .

۲- اگر تابع c هر یک از ولایات افغانستان را بمرکز مربوطه آن ارتباط ببخشد، درینصورت:

(a). ——— = (پکتیا) c را بدست آرید.

(b). تصویر ولایت بلخ کدام است؟

(c). منشاء تصویر شهر جلال آباد کدام است؟

(d). X را معلوم کنید درصورتیکه:

(i). $c(X) =$ قندهار ،

(ii). $c(x) =$ کابل ،

(iii). $c(x) =$ قلعه نو . . . گردد.

(e). آیا c یکتابع یک بیک میباشد و یا خیر؟

3. اگر f کدام تابعی را از N بطرف N طوریکه بهر یک از اعدادیکه بین 10 و 500 واقع است مجموعه ارقام مربوطه آنها را اتصال می بخشد ارائه کند، درینصورت:

(a). $f(20)$ را بدست آرید.

(b). رنج تابع f را بدست آرید.

(c). تمام آن اعدادیکه منشاء تصویر عدد 2 میباشند بدست آرید.

(d). f کدام نوع تابع را ارائه مینمائید؟

4. اگر تابع g توسط افاده $g(X) = x+4$: تعریف شود درصورتیکه دومین آن $\{-3، 1، 0، 5، 7\}$ باشد، رنج تابع g را بدست آرید.

5. اگر تابع f که توسط افاده: $f(x) = 3x - 2$ تعریف شده
مد نظر گرفته شود ، درصورتیکه : $[-1, 3]$ دومین f باشد:

(a). قیمت $f(-\frac{1}{2})$ راحاصل کنید .

(b). قیمت c را بدست آرید طوریکه: $f(c) = 1$ گردد .

(c). رنج f را تعیین کنید .

(d). آیا تابع f یکتابع یک بیک است ؟

6. اگر دومین یک تابع h عبارت از $[-2, 4]$ بوده
و $h(x) = (x-3)^2 + 1$ مفروض باشد :

(a). $h(-1)$ و $h(3)$ را بدست آرید .

(b). قیمت k را بدست آرید درصورتیکه $h(k) = 3$ گردد.

(c). رنج h را بدست آرید .

(d). یک بیک و یا عدم یک بیک بودن h را ثابت کنید .

(e). یک عدد c را طوری تعیین نمائید که $h(c) = c$ گردد .

7. بالفرض d یکتابعی را ارائه کند که دومین آنراست تمام
نقاط مستوی تشکیل داده وتوسط افادهٔ که فاصله هر نقطه را
ازمبدا تعیین میکند تعریف شود مدنظر بگیرید :

(a). اگر یک نقطه $A(2, 3)$ درمستوی مدنظر گرفته شود $d(A)$ را
بدست آریـــد .

(b). رنج تابع ℓ کدام است ؟

(c). ست تمام منشاء تصاویر عدد 5 را حاصل نمائید .

8. اگر m یکتابعی را که دومین آنرا ست تمام خطوط که از نقطهٔ $A(2,3)$ عبور میکنند تشکیل داده ، (وموازی بـــه محور y نیستند) ارائه کند ، واگر بهرخط این ســـت خطوط میل آن ارتباط داده شود ، پس دریـنصـــــورت:

(a). اگر $\overleftrightarrow{\ell}$ یک خط $G_m=\{(x,y)\mid y-3x=-2\}$ باشـــد

آیا $\overleftrightarrow{\ell}$ شامل دومین m میباشـد ؟

(b). $m(\overleftrightarrow{\ell})$ را بدست آرید درصورتیکه: $\overleftrightarrow{\ell}=\{(x,y)\mid 2y-x=6\}$ باشـد .

(c). رنج m کدام اســت ؟

(d). آیا m یکتابع یک بیک one – to – one میباشد ویاخیر؟

9. اگر g یکتابعی را نمایش دهدکه بهرخط غیرموازی بـــه محـــور x نقطه تقاطع آنرا با محور x ارتباط بخشـــد ، دریـنصـــــورت :

(a). اگر $\overleftrightarrow{t}=\{(x,y)\mid 3x+2y=12\}$ باشد ، $g(\overleftrightarrow{t})$ را بدست آرید .

(b). رنج g را حاصل کنیـد .

(c). آیا g یکتابع یک بیک میباشـد ویا خیر؟ چـــــرا ؟

(d) ۰ اگر $(2,7) \in \overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ بوده و $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ تحت تابع g یا ضمناً تصویر نقطه $(-3,0)$ ...ن باشد معادله $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ را بنویسید.

10. اگر ست $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$ دومین یک تابع f بوده و برای هر عضو n شامل دومین f داشته باشیم که:

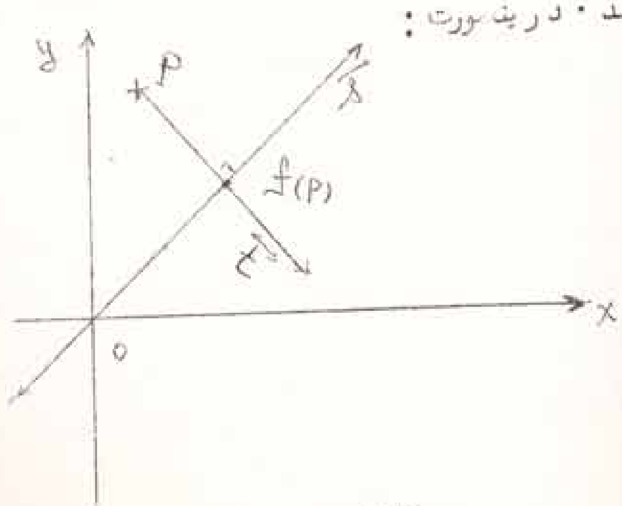
$$f(n) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = n^2\}$$

(a) ۰ رنج f را توضیح نمائید.

(b) آیا f یک تابع یک به یک میباشد؟ و یا [illegible] ؟

(c) ۰ آیا f یک تابع بالائی را ارائه کرده میتواند ؟

11. فرضاً $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ یک خط مستقیم را که معادله آن $y = x$ است ارائه نماید. یک تابع f را از مستوی به طرف مستوی مد نظر میگیریم طوریکه برای هر نقطه P مستوی $f(P) = \overleftrightarrow{\mathcal{L}} \cap \overleftrightarrow{t}$ گردد در حالیکه $\overleftrightarrow{t}$ خط مستقیمی است که از نقطه P گذشته و به $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ عمود میباشد. در این صورت:



(a). رینج f چیست ؟

(b). آیا f یکتابع بالائی میباشد ؟

(c). آیا f یکتابع یك بیك میباشد ؟ و یا چطور ؟

(d). اگر $B(0,3)$ در نظر گرفته شود $f(B)$ را بدست آرید .

(e). اگر $C(2,1)$ باشد ، $f(C)$ را حاصل کنید .

(f). آیا کدام نقطه و یا نقاط در مستوی موجود شده که تصویر خودش گردد ؟

۳-۳. تطبیقات Applications

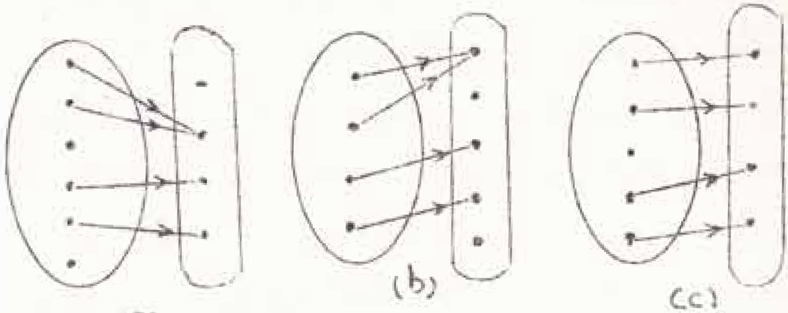
بخاطر خواهید داشت که در مبحث (۳-۱) توابع را بحیث رابطه خاصی که هیچکدام یک از عناصر منبع انها دارای بیشتر از یک تصویر در ستد ف آنها نشود مورد مطالعه قرار دادیم • سپس در مبحث (۳-۲) توابع را بنا بر مشخصه اینکه تمام عناصر ستد ف بحیث تصاویر بکار رفته باشند بنام تابع بالائی یاد نمودیم و به همین قسم اگر هریک از عناصر ستد ف بیشتر از یک منشاء تصویر نداشته باشد بنام تابع یک بیک یاد کردیم • ولی درموضوع اینکه آیا درست منبع توابع تمام عناصر دارای تصاویر میباشند و یا خیر، کدام صحبت بعمل نیامده است• اکنون ما اند سته توابعی را که هیچکدام یک عنصری درست منبع آنها موجود شده نتواند که دارای یک تصویر در ستد ف انها نباشد مورد بررسی قرار میدهیم و اینگونه توابع نسبتاً خاص را بنام تطبیقات (۱) Applications یاد مینمائیم •
اینك در ذیل اولاً موضوع تطبیق را توسط امثال مطالعه نموده و سپس انواع مختلفه انرا مورد بررسی قرار میدهیم •

---

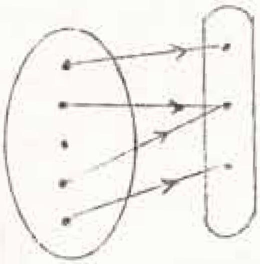
(۱) بررسی مذکوره توابع باساس تطبیق بیشتر توسط پیروان مکاتب فرانسوی ما تعقیب میشود • از ینرو اکثر اصطلاحات که درزمینه بکار رفته‌اند از زبان فرانسوی گرفته شده است•

3-3.a . تعریف تابع

مثال اول: رسم دیاگرام های تیری روابطه را در ذیل ملاحظه کنید:



(a) (b) (c)

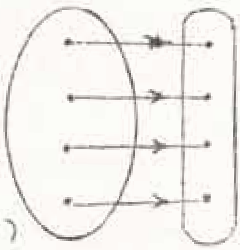


(d)

اشکال: (3-40)

(a). آیا تمام اشکال فوق توابع را ارائه مینمایند؟

(b). کدام انها توابع بالائی را ارائه نمیکند؟



(e)

(c). کدام انها توابع بالائی را ارائه میکنند؟

(d). کدام انها تابع یک بیک را نشان میدهد؟

(e). فرق که در بین ست های اشکال فوق موجود است بررسی کنید.

حـــل :ـ

(a) از ملاحظه اشکال فوق دیده میشود که در هیچکدام یک از آنها بیشتر از یک تیر از عناصر منبع مربوطه آنها خارج نگردیده است بنابران همه آنها توابع را ارائه مینمایند .

(b) از تمام اشکال فوق دیاگرام های : (c) ، (d) و (e) توابع بالائی را ارائه میکننــد .

(c) از جمله هر یکی دیاگرام تیری فوق اشکال : (a) و (b) توابع بالائی را ارائه نمیدارنــد .

(d) شکل (e) یک تابع یک بیک را نشان میدهــد .

(e) از اشکال فوق بملاحظه میرسد که درست منبع توابع مربوطه اشکال : (a) ، (c) و (d) لا اقل یک عنصر موجـــود شده میتواند که درست هدف مربوطه آنها دارای تصویـــر نیست . حالانکه درست منبع توابع مربوطه اشکال : (b) و (e) هیچکدام یک عنصری موجود شده نمیتواند ، کـــه دارای تصویر درست هدف مربوطه آنها نباشــد .

در ین مبحث ما بمطالعه نوع اخیر توابع مربوطه اشکال (b) و (e) علاقمندیم . واین نوع توابع را بنــــام تطبیق (Application) یاد مینماینــد .

تعریف : تطبیق عبارت از تابعی است که بمرای
هر عنصر رست منبع ان یك تصویر درست
هدف ان موجود باشد .

و یا بالفاظ دیگر: تطبیق عبارت از تابعی است که دومین
ان تمام عناصر منبع را در بر داشته باشد.

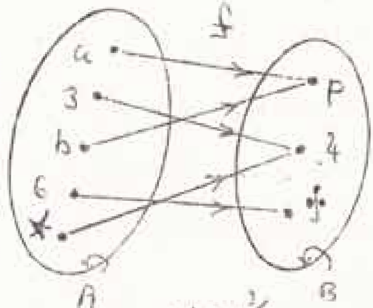
مثال دوم: یکتابع f طوریکه f بنا برافاده: $f(x) = 2x$

در $\mathbb{N}$ تعریف شود یك تطبیق است . زیـــــــــرا :
هر عدد طبیعی x درست اعداد طبیعی جفت دارای یـــك
تصویر $2x$ میباشد .

مثال سوم: اگر یکتابع g طوریکه $g(x) = \frac{1}{x-1}$ از $\mathbb{R}$
بطرف $\mathbb{R}$ (در $\mathbb{R}$) مد نظر گرفته شود بملاحظه میرسد کـــه
g یك تطبیق نیست .

زیـرا : عدد یك نظر به g دارای تصویر شده نمیتواند .

مثال چهارم: رسم دیاگرام



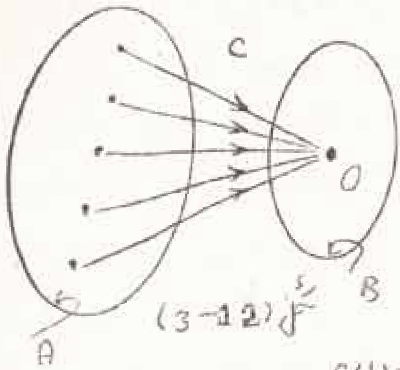
شکل (3-11)

تیوری مقابل : شکل (3-11)
یك تطبیق را ارائه میکند . زیرا :
هر عنصر ست منبع A دارای
یك تصویر در ست هدف B
میباشد .

چنانچه: $f(a)=p$ ، $f(b)=p$

$f(3)=4$ ، $f(*)=4$ ، $f(6)=4$ میباشد .

مثال پنجم ـ د یاگرام تیری



مقابل شکل (3-12) یک تابع تطبیق را ارائه میکند .
زیرا : تمام عناصر ست منبع آن دارای یک تصویر در ست ساحهٔ مربوط آن میباشد .

چنانچه :

$$C(1)=C(2)=C(3)$$
$$=C(4)=C(5)$$
$$=0$$

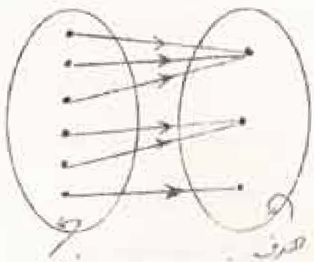
تبصره : تابع مربوطه دیاگرام فوق بنام تابع ثابت constant نیز یاد میشود .

b . 3-3 . تطبیق بالائی ویا سورجکسیون Surjection

تعریف : تطبیق بالائی ویا سورجکسیون عبارت ازآن تطبیقی است که هر یک ازعناصر ست هدف آن تصویر یک ویا چند عنصر ست دومین آن باشد .

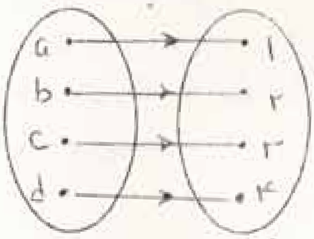
وبا بالفاظ دیگر: تطبیق بالائی عبارت از تطبیقی است
که تابع بالائی باشد .

مثال اول . اگر دیاگرام های تیری شکل (3-13.a) و (3-13.b) ملاحظه شوند ، دیده میشود که دیاگرام های مربوطه هردو شکل یک تطبیق بالائی را ارائه مینمایند .



شکل (3-13.a)

زیرا: بمشاهده میرسد که درهمر دو شکل بهر یک از عناصر ست هدف یک و یا چند تیرا صابت نمود است. یعنی هرعنصر هدف تصویر یک ویا چند عنصر ست دومین گردیده است . بنابرآن تطبیقات مربوطه آن ها یک تطبیق بالائی و یا سورجکسیون میباشند .



شکل (3-13.b)

مثال دوم . اگر تابع f از ست: $A = \{1, 2, 3, 5\}$ بطرف ست: $B = \{\star, \triangle, \blacklozenge\}$ که بنابر گراف: $G_f = \{(1,\star),(2,\blacklozenge),(3,\star),(5,\triangle)\}$ تعریف شده مد نظر گرفته شود ، دیده میشود که تابع f یک تطبیق را از A بطرف B ارائه مینماید .

زیرا: در ست مبدء A تابع کدام عنصری موجود شده نمیتواند که دارای تصویر در ست هدف B آن نباشد.

بهمین قسم دیده میشود که هر یک از عناصر ست هدف B نیز بحیث تصویر قرار گرفته یعنی در ست B هیچکدام عنصری موجود شده نمیتواند که تصویر یک ویا چند عنصر ست مبدء A آن نباشد.

بناء گفته میتوانیم که تابع f یک سورجکسیون را از A بر B بوجود آورده است.

<u>مثال سوم.</u> اگر تابع g که از ست: $A=\{1,3,5\}$ بطرف ست: $B=\{a,b,c,d\}$ توسط گراف G_g طوریکه: $G_g=\{(1,d),(3,b),(5,c)\}$ است تعریف شده مد نظر گرفته شود، بملاحظه میرسد که g از A به B یک تابع است. (چرا؟) ولی g یک سورجکسیون نیست. (چرا؟)

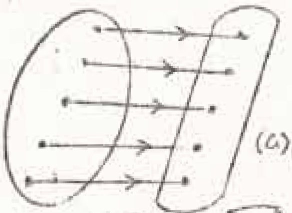
<u>مثال چهارم.</u> اگر تابع f در $\mathbb{R}$ طوریکه برای هر عدد حقیقی x: $f(x)=x^2$ گردد مد نظر گرفته شود دیده میشود که f یک سورجکسیون نیست. زیرا: اعداد حقیقی منفی نظر به f در $\mathbb{R}$ بحیث تصویر واقع نمیشوند.

چنانچه عدد -2 تصویر شده نمیتواند ویا به عبارت دیگر ما کدام عددی را که مربع آن -2 باشد در $\mathbb{R}$ پیدا کرده نمیتوانیم.

۳-۳-۴ • تطابق یک بیک، انجکسیون : Injection

تعریف : انجکسیون و یا تطابق یک بیک عبارت از تطابیقی است که هیچکدام از عناصر ست هدف آن تصویر بیشتر از یک عنصر ست دومین آن نباشد •

و یا باالفاظ دیگر: تطابیق یک بیک عبارت از تطابیقی است که تابع یک بیک باشد •



شکل (a)

شکل (b)

شکل (3-14)

مثال اول • هردو شکل (a) و (b) دیاگرام های تیری مقابل یک تطابیق یک بیک و یا انجکسیون را ارائه میدارند •

زیرا : هیچکدام یک از عناصر هدف آن ها تصویر بیشتر از یک عنصر دومین آن ها نگردیده است • یعنی به هیچ یک از عناصر ست هدف – آنها بیشتر از یک تیر اصابت نکرده است •

مثال دوم • اگر یکتابع g از یک ست: $E=\{a, b, c, d\}$ بطرف یک ست $D=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ بنابر افادهٔ گراف : $G_g=\{(a,1),(b,3),(c,2),(d,5)\}$ مد نظر گرفته شود

بملاحظه میرسد که g یک انجکسیون را از E بالای D بوجود آورده است .

زیرا : از ملاحظه گراف G_g نتیجه میشود که g یک تطبیق است . از بنده درست هدف D آن هیچ یک عنصری موجود شده نمیتواند که تصویر دو عنصر متفاوت ست منبع (دومین E) گردیده باشد ، بناءً گفته میتوانیم که g یک انجکسیون است.

<u>مثال سوم</u> : اگر تابع f در $\mathbb{R}$ طوریکه برای هر عدد حقیقی x : $f(x) = x^2$ ردد مد نظر گرفته شود دیده میشود که f یک انجکسیون نیست .

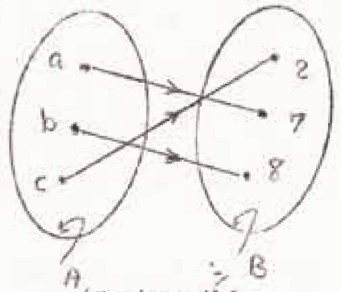
زیرا : هر دو عدد حقیقی متضاد نظر به تابع f در $\mathbb{R}$ دارای عین تصویر میباشند . چنانچه تصویر 3 و -3 عین عدد یعنی 9 میشود. پس f یک انجکسیون نمی باشد .

3-3.d <u>تقابل ویا بایجکسیون</u> Bijection

<u>تعریف</u> : یک تطبیق که هم سورجکسیون وهم انجکسیون باشد بنام تقابل ویا بایجکسیون Bijection یاد میشود.

یا به عبارت دیگر: بایجکسیون ویا تقابل عبارت از ان تطبیقی است که هر عنصر ست هدف آن تنها وتنها تصویر یک عنصر ست دومین آن باشد .

مثال اول: رسم دیاگرام تیری شکل (3-15) یک بایجکسیون را ارائه مینماید.



(3-15) شکل

زیرا: هر یک از عناصر ست هدف محض دارای یک منشاء تصویر در ست دومین آن میباشد. یا بعبارت دیگر بهر یک از عناصر هدف محض یک تیر منتهی از یک عنصر دومین اصابت نموده است. بنا بران تطبیق دیاگرام تیری شکل مذکور یک تقابل و یا بایجکسیون میباشد.

مثال دوم: اگر تابع f در $\mathbb{R}$ برای هر عدد حقیقی x که توسط افاده $f(x) = x^3$ ارائه میشود درنظر گرفته شود بملاحظه میرسد که f یک تطبیق بوده و ضمناً f یک بایجکسیون است.

زیرا: اول. چون مکعب هر عدد حقیقی x یک عدد حقیقی است بناءً گفته میتوانیم که f یک تطبیق است.

دوم. چون منشاء تصویر هر عدد حقیقی y تحت رابطه افاده: $f(x) = x^3$ یگانه است (یعنی جذر مکعب y است) پس f یک بایجکسیون است.

<u>مثال سوم</u>. اگر تابع g از $\mathbb{R}$ به روی $\mathbb{R}^+$ توسط ابداده:

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto x^2$$

تعریف شود.

بنظر میرسد که g یک تقابل و یا بایجکسیون نیست.

زیرا: چون هر عدد حقیقی مثبت بدون صفر نظیر به g دارای دو منشاء تصویر میباشد بناء g یک تطبیق بالائی بوده ولی یک بیک نیست پس g یک تقابل نمی باشد.

<u>مثال چهارم</u>. اگر ست $E=\{a, b, c\}$ مدنظر گرفته شود شش تقابل از E بطرف E امکان پذیر است. اینک ما هر یک از تقابل مطلوب را توسط گرافهای شان ذیلاً نشان میدهیم:

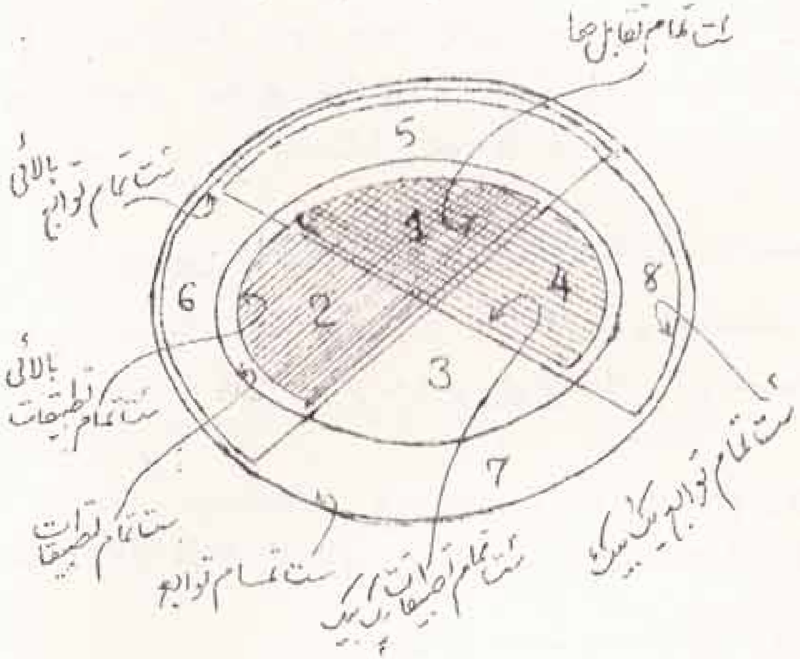
$$\left.\begin{array}{l} G_1=\{(a,a),(b,b),(c,c)\} \\ G_2=\{(a,a),(b,c),(c,b)\} \end{array}\right\}$$ تصویر a عبارت از a است

$$\left.\begin{array}{l} G_3=\{(a,b),(b,a),(c,c)\} \\ G_4=\{(a,b),(b,c),(c,a)\} \end{array}\right\}$$ تصویر a عبارت از b است

$$\left.\begin{array}{l} G_5=\{(a,c),(b,a),(c,b)\} \\ G_6=\{(a,c),(b,b),(c,a)\} \end{array}\right\}$$ تصویر a عبارت از c است

3-3-6 . ارتباط انواع تطبیقات وتوابع

انواع تطابیق واقسام تابع را توسط دیاگرام ا ن
شکل ذیل (3 - 16) ارائه میتوان کرد :



رسم فوق با توضیح حقایق ذیل تکمیل شده است :

1 — ست تمام تطبیقات یک ست فرعی ست تمام توابع میباشد .

2 — ست تمام تطبیقات بالائی وتطبیقات یک بیک دو ست فرعی ست تطبیقات بوده وتقاطع آنها عبارت از ست تمام تقابل ها ست.

3 — ست تطبیقات بالائی عبارت از ست تقاطع هردو ست توابع بالائی و تطبیقات میباشد .

4 ـ ست تطبیقات یک بیک عبارت از ست تقاطع هردو ست توابع یک بیک و تطبیقات میباشد.

بررسی ون دیاگرام فوق یک انقسام ست توابع را به هشت ست فرعی آن توضیح مینماید. اینک هریک ازین ست های فرعی هشت گانه را که توسط هشت ناحیه در شکل ارائه شده ذیلاً با امثال توضیح مینمایم:

ناحیه 1 : ست تمام تقابل ها را ارائه مینماید.

بطور مثال اگر تابع : $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x-3$ را مدنظر بگیریم f یک تقابل را توضیح نموده و عنصر ناحیه 1 میباشد.

ناحیه 2 : ست تمام تطبیقات بالائی ایکه یک بیک نیستند ارائه میکند.

بطور مثال اگر تابع : $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3-3x$ را مدنظر بگیریم دیده میشود که g یک تطبیق بالائی ایکه یک بیک نیست افاده میکند.

زیرا : ما میدانیم که هر عدد حقیقی x نظر به g دارای یک تصویر در ست $\mathbb{R}$ میباشد، پس g یک تطبیق است. چون $g(x)$ تمام قیمت های حقیقی را از $-\infty$ الی $+\infty$ اتخاذ کرده میتواند پس g یک تطبیق بالائی است. از یکطرفه اعداد : 0 ، $+\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ دارائی تصویر صفر میباشد بناءً g یک تطبیق بالائی ایرا که یک بیک نیست افاده میکند و یک عنصر ست مربوط ناحیه 2 میباشد.

بخاطر باید داشت که ست اتحاد هردو ناحیه 1 و 2 عبارت از ست تمام تطبیقات بالائی میباشد.

ناحیه 3 : ست تمام تطبیقاتی را که نه بالائی ونه یک بیک است نشان میدهد.

مثال اینگونه تطبیقات را تابع : $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$ ارائه

مینماید. چـــرا ؟

ناحیه 4 : ست تمام تطبیقاتی را که یک بیک بوده ولی بالائی نمیباشند ارائه میکند.

مثال اینگونه تطبیقات عبارت از تابع : $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto e^x$ میباشد.

زیرا : f.(a) یک تطبیق است چرا ؟

f.(b) یک تطبیق یک بیک است. غرض ثبوت این حقیقت

ما دو عدد حقیقی x و x' را در نظر میگیریم که زیر تحت

تابع f دارای عین تصویر گردند. درینصورت ما داریم :

$$e^x = e^{x'}$$

$$\frac{e^x}{e^{x'}} = 1 \quad \ldots \text{پس}$$

$$e^{x-x'} = 1 \quad \ldots \text{درینصورت}$$

$$x - x' = 0 \quad \ldots \text{و یا}$$

$$x = x' \quad \ldots \text{بنا بران}$$

از بوجود آمدن مساوات اخیر نتیجه میشود که دو عدد متمایز x و x' موجود شده نمیتواند که نظر به تابع f دارای عین تصویر گردد.

بناء f یک تطابق یک بیک است ۰

(c) چون تصویر هرعدد حقیقی x تحت تابع f یک عدد مثبت است واعداد منفی بحیث تصاویر واقع نمیشوند ،بناء ادعا مینمایم که f یک تطابق بالائی نیست ۰

پس f یک عنصرست ناحیه 4 میباشد ۰

بخاطر باید گرفت که ست اعداد مربوطه ست ناحیه 4 و 1 ست تمام تطابقات یک بیک میباشند ۰

ناحیه 5 :ست تمام توابعی ایرائه تطابق نبوده ولی توابع بالائی ونیز یک بیک میباشند ارائه میکند ۰

تابع : $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*$

$x \longrightarrow \frac{1}{x}$ را بحیث مثال عناصراین ستمورد بررسی قرارداده میتوانیم ۰

زیرا: (a) ۰ ازینکه صفر تحت تابع g تصویرندارد بناء یک تطابق نیست ۰

(b) ۰ ازینکه ازمعلومات : $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'}$ ،مساوات $x = x'$ نتیجه میشود ، ازین برمی آید که g یک تابع یک بیک است ۰

(c) ۰ چون تمام اعداد حقیقی بدون صفر مثلاً y (درمدف) بحیث تصویر یک عدد حقیقی x (درمنبع) یعنی $\frac{1}{y}$ قرار گرفته میتوانند ، بناء g یک تابع بالائی است،درنتیجه گفته میتوانیم که g یک عنصر ست مربوط ناحیه 5 میباشد ۰

ناحیه 6 : ست تمام توابعی ارائه بالائی بوده ولی یک بیک ویا پوشا نیستند ارائه مینمایند ·

$$\text{تابع} \quad h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$ را بحیث مثال عناصر این مورد مطالعه قرار داده میتوانیم ·

بررسی حقیقت این موضوع را بحیث تمرین برای خوانند میگذاریم·

بخاطر باید داشت که اعداد ست های مربوط نواحی 4 ، 2 ، 6 و 5 عبارت از ست تمام توابع بالائی است··

ناحیه 7 : ست تمام توابعی که نه بالائی ونه یک بیک ونه تطبیقی اند ارائه مینمایند ·

$$\text{تابع} \quad p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$ را بحیث نمونه عناصر این ناحیه مطالعه میتوان کرد ·

زیرا :(a) · از ینکه صفر تصویر ندارد پس p یک تطبیق نیست·

(b) · از ینکه اعداد منفی مربوط ست بحیث تصویر واقع شده نمیتوانند بناءً گفته میتوانیم که p یك تابع بالائی نیست·

(c) ·چون دو عدد حقیقی متضاد فرضاً 3 و 3- دارای عین تصویر $\frac{1}{9}$ میباشند بناءً p یکتابع یک بیك نمی باشد ·

درنتیجه ادعا میتوان کرد که p یك عضو ست مربوط ناحیه 7 میباشد ·

ناحیه 8 : ست تمام توابعی ایراکه یک بیک بوده اما تطابیق وبالائی نیستند ارائه میکند .

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$ تابع :

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$ را بحیث مثال عناصر این

ست مورد مطالعه میتوان قرار داد .

زیرا : (a) . چون عنصر صفر مربوط منبع تصویر ندارد پس g تطابیق نیست .

(b) . ازینکه هر دو عنصر متمایز منبع (بدون صفر) دارای دو تصویر متمایز در ردف میباشند پس g یک تابع یک بیک است .

(c) . چون عنصر صفر مربوط ردف بحیث تصویر واقع نمیشود پس g یک تابع بالائی نمیباشد .

درنتیجه g یک عنصر ست توابع مربوط ناحیه 8 میباشد .

بناءً باید گفت که اتحاد ستهای مربوط نواحی : 1 ، 4 ، 5 و 8 عبارت از ست تمام توابع یک بیک میباشد .

تبصره : از بررسی امثال فوق برمی آید که بهتنهائی از توضیح قانون ویا شرط مطابقت نوعیت توابع ویا تطابیقات پیشگوئی شده نمیتواند . غرض دانستن نوعیت توابع ویا تطابیقات ضروریست تا برعلاوه دانستن شرط مطابقت ستهای منبع وردف آنرا نیز بدانیم .

تمــــــــــــرینـات :

1 . با درنظرداشت رابطهٔ «ادا . » نشان دهید که مورد و مورد ذیل :

«ای پریچهره که آهنگ کلیسا داری
طره مریم و سیمای مسیحا داری»

«حسن یوسف لب عیسی ید بیضا داری
آنچه خوبان همه دارند و تو تنها داری»

از ست { آهنگ ، طره ، سیما ، حسن ، لب ، ید }
بطرف ست { کلیسا ، مریم ، مسیح ، یوسف ، موسی }
یک تابع را بوجود می آورد که :

(a) . بالائی است .

(b) . یک تطابق است .

(c) . یک سورجکسیون است .

(d) . یک تقابل است .

2 . اگر کلمهٔ «آموخت» بحیث رابطهٔ مدنظر گرفته شود نشان دهید که در تحلیل مورد ذیل از ست مقابل آموبه { تو }

(a) . یکتابع بالائی موجود شده میتواند .

(b) . یک سورجکسیون حاصل شده میتواند .

«آموزش و آموخت در هنگام دویدن ، بردن و ایستادن را به نگریستن»

۳ • با در نظر داشت جمله : « زمن آموخت » بحیث شعر را مطابقت نشان دهید که از تحلیل فرد ذیل :

« پروانه زمن شمع زمن گل زمن آموخت
این سوختن و ساختن و جامه دریدن »

(a) ؛. یتابع ، (b) • یا ، تطابیق ، (c) • یا ، سوبجکسیون (d) • یا ، انجکسیون ، و (e) • یا ، بایجکسیون ، حاصل شده میتوانند •

۴ . اگر در فرد ذیل مصرع :

" بی جمال تو بهار بر من مسکین آمد "

بحیث قانون مطابقت مد نظر گرفته شود • نشان دهید که از تحلیل این فرد ، یا ، تقابل عرض وجود کرده میتواند •

« خاک بسر ، خون بدل ، آه بلب ، اشک بچشم
بی جمال تو بهار بر من مسکین آمد »

(بیدل)

۶. اگر مجموعه‌های $A=\{a, b, c, d\}$ و $B=\{1, 2, 3, 4\}$

مفروض بوده و در آن رابطه: R_1, R_2, R_3, R_4, R_5

R_6, R_7, R_8, R_9 و R_{10}، طبق گرف های مربوطه شان

قرار ذیل تعریف شوند:

$$G_{R_1}=\{(a,1),(a,2),(b,3),(c,4),(d,5)\}$$

$$G_{R_2}=\{(a,1),(c,2),(b,1),(d,4)\}$$

$$G_{R_3}=\{(a,1),(b,2),(c,4),(d,3)\}$$

$$G_{R_4}=\{(a,2),(b,2),(c,2),(d,2)\}$$

$$G_{R_5}=\{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$$

$$G_{R_6}=\{(a,2),(b,3),(c,1),(d,3),(a,4)\}$$

$$G_{R_7}=\{(a,1),(b,2),(d,4),(c,2)\}$$

$$G_{R_8}=\{(a,1),(b,1),(b,2),(c,3),(d,2),(d,4)\}$$

$$G_{R_9}=\{(a,4),(b,3),(c,2)\}$$

$$G_{R_{10}}=\{(a,1),(c,2)\}$$

(a). آیا گرف های فوق، روابط دوتائی را ارائه مینمایند و یا خیر؟

(b). کدام آنها توابع را ارائه میکند؟

(c). کدام آنها یک تابع:

(α). بالائی را،

(αα). یک بیک را ارائه مینماید؟

(d). کدام آنها تطبیق را افاده میکند؟

(e). کدام آنها یک تطبیق:

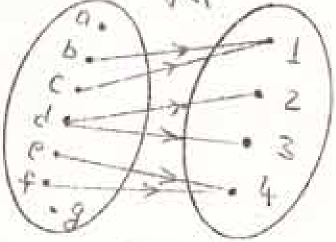
(i) سورژکسیون (بالائی) را ،

(ii) انجکسیون (یک به یک) را ،

(iii) بایجکسیون (تقابل) را ارائه میدارد ؟

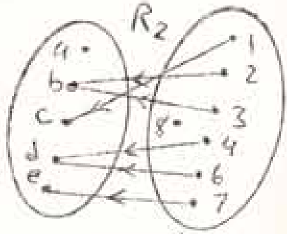
7. دیاگرام های تیری روابط : R_1 ، R_2 ، R_3 ، R_4 ، R_5 ، R_6 و R_7 را در ذیل مد نظر بگیرید :

R_1



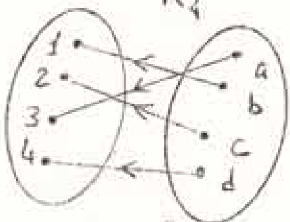
شکل (a)

R_2



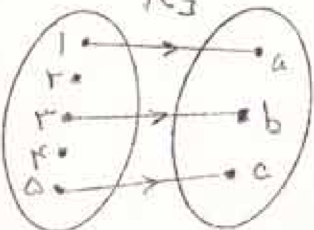
شکل (b)

R_4



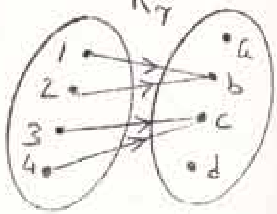
شکل (d)

R_3



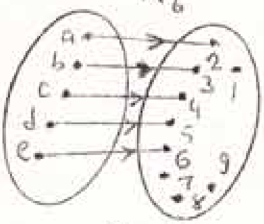
شکل (c)

R_7



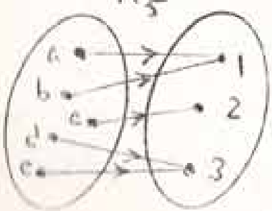
شکل (g)

R_6



شکل (f)

R_5



شکل (e)

(a). کدام آنها توابع اند ؟

(b). کدام آنها یکتابع :

(i). برد بالائی را ،

(ii). یک بیان را افاده میکند ؟

(c). کدام آنها تطبیق را افاده میکند ؟

(d). کدام آنها یک تطبیق :

(i). سورجکسیون را ،

(ii). انجکسیون را ،

(iii). بایجکسیون را نشان میدهد ؟

8. ست $A = \{a , b\}$ را مد نظر بگیرید. تمام توابعی که از A بطرف B امکان دارد توسط دیاگرام تیری ارائه نموده و نوعیت هر یک از آنها را بررسی کنید.

9. دو خط متقاطع غیر عمود d_1 و d_2 را مد نظر بگیرید. نشان دهید که ارتسام عمودی نقاط d_1 بالای d_2 یک بایجکسیون را از d_1 بطرف d_2 بوجود می آورد.

10. اگر g یک تطبیق را که به هر مستطیل مساحت مربوطه آنرا ارتباط میبخشد ارائه کند، نشان دهید که g یک تقابل نیست.

11. اگر $d(M)$ فاصله هر نقطه M مستوی را از مبدأ احداثیات و [illegible] ارائه کند در اینصورت نشان دهید که d یکتابع است. آیا d یک تطبیق شده میتواند ؟ در صورتیکه d تطبیق باشد نوعیت آنرا مطالعه کنید.

۷-۳ . ترکیب توابع و ترکیب تابعیات

در مبحث ۷ $^{(1-5)}$ راجع به ترکیب روابط بصورت مفصل صحبت بعمل آمد ، از اینکه توابع نیز یک نوع خاص روابط اند ، پس در ین مبحث راجع به ترکیب توابع بصورت مختصر صحبت مینمایم .

<u>مثال اول</u> . اگر تابع f بنابر گرف :

$$G_f=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e)\}$$

از $A=\{a,b,c,d,e\}$ بطرف $B=\{b,c,d,e\}$ ... وتابع g بنابر گرف :

$$G_g=\{(b,1),(e,3),(d,2),(c,7)\}$$

از B بطرف $C=\{1,2,3,7\}$ تعریف شوند ، در ین صورت میخواهیم که :

(a) . دیاگرام تیری هردو تابع f و g را رسم نموده ،

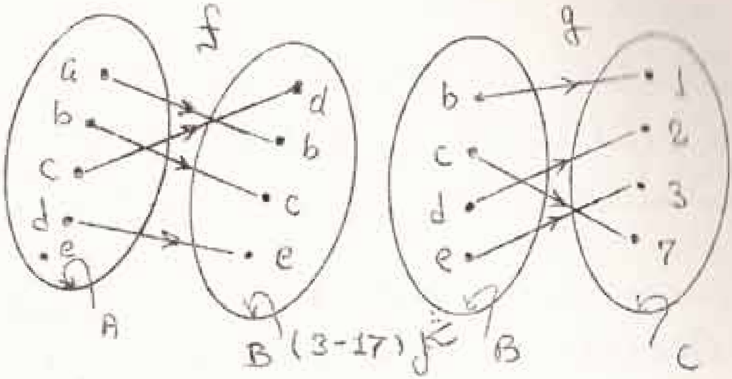
(b) . ترکیب توابع : $g\circ f$ را باساس دیاگرام تیری وضع .

(c) . ترکیب توابع : $g\circ f$ را باساس گرف مربوطه شان حاصل نمائیم .

(d) . نشان دهیم که $g\circ f$ نیز یک تابع است .

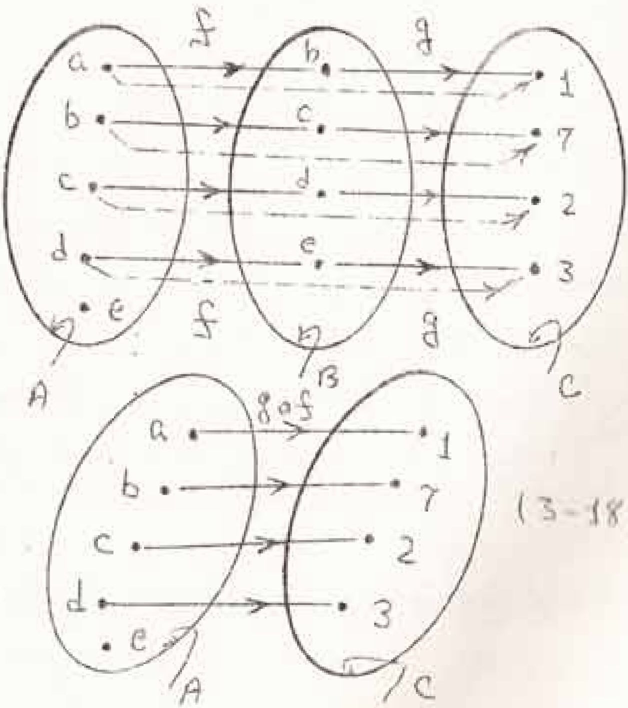
حل :

(a) . دیاگرام های هردو تابع f و g طبق ذیل ارائه شده میتوانند :



شکل (3-17)

(b). gof توسط دیاگرام تیری مانند ذیل ارائه شده است:



شکل (3-18)

(c). گراف ترکیب توابع : $f \circ g$ طبق ذیل توضیح شده میتواند :

ما داریم که : $G_f = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e)\}$,

$G_g = \{(b,1),(c,7),(d,2),(e,3)\}$.

بنابران گراف ترکیب : $g \circ f$ عبارت است از :

$G_{g\circ f} = \{(a,1),(b,7),(c,2),(d,3)\}$.

(d). از حل مثال فوق نتیجه میشود که $g \circ f$ یک تابع است .

قضـــــــیه اول .

ترکیب هر دو تابع یک تابع است .

مفروض : اگر f یک تابع از A بطرف B و g یک تابع از B بطرف C باشد .

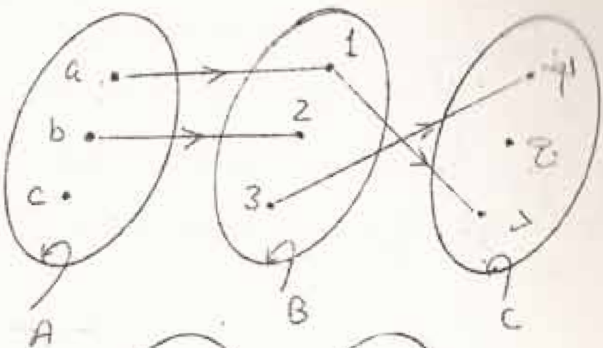
مطلوب : ثبوت مینمایم که $g \circ f$ یک تابع از A بطرف C میباشد .

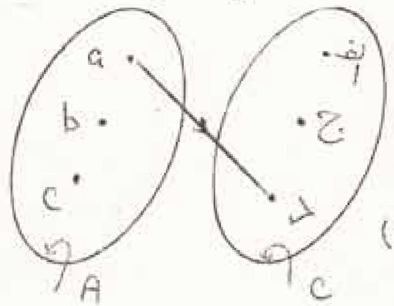
ثبـوت : اگر کدام عنصر کیفی x شامل A انتخاب شود درینصورت یا x تحت f دارای یک تصویر یعنی $f(x)$ در B بوده و یا x تحت f دارای هیچ یک تصویر در B نمیباشد .

درصورتیکه $f(x)$ در B موجود باشد درینصورت یا $f(x)$ تحت g دارای یک تصویر یعنی $g(f(x))$ در C بوده و یا $f(x)$ تحت g در C دارای تصویر نمی باشـــد .

درهر صورت x تحت $g \circ f$ دارای بیشتر از یک تصویر در C بوده نمیتوانـــد .

با بیان $g \circ f$ بتابع از A بطرف ج است .





شکل (3-19)

<u>مثال دوم</u> . یک تطبیق f توسط افاده : $f(x) = 2x+3$

ویا ، تطبیق g که توسط افاده : $g(x) = x^2+1$ درست

اعداد حقیقی ارائه شده مد نظر بگیرید :

(a) . ترتیب تطبیقات مذکور را به ترتیب : $g \circ f(x)$ بدست آرید .

(b) . آیا $f \circ g$ نیز یک تطبیق میباشد ؟ ویا خیر ؟

حل :

(a) .

$$g\circ f(x) = g(2x+3)$$
$$= (2x+3)^2+1$$
$$= 4x^2+12x+9+1$$
$$= 2(2x^2+6x+5)$$
$$g\circ f(x) = 2(2x^2+6x+5).$$

(b) . دیده میشود که هر عدد حقیقی x دارای یک تصویر تحت $g\circ f$ درست اعداد حقیقی میباشد . بنا بران $g\circ f$ از R بطرف R یک تابع است.

تمرینـــــــــه دوم :

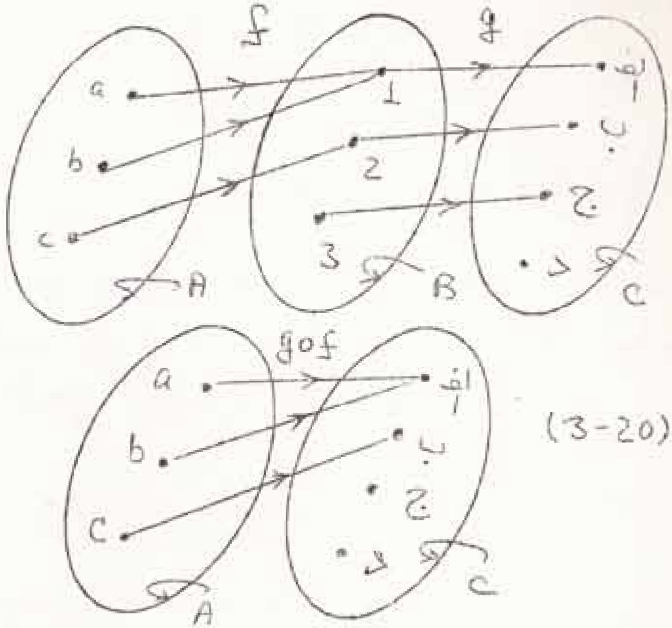
ترکیب هر دو تابع یک تابع است.

مفروض : اگر f یک تابع از A بطرف B و g یک تابع از B بطرف C باشد ،

مطلوب : ثبوت مینمائیم که $g\circ f$ نیز یک تابع از A بطرف C است.

ثبوت : چون f یک تابع از A بطرف B است پس هر عنصر x شامل A دارای یک تصویر یعنی $f(x)$ در B است . همچنان چون g یک تابع از B بطرف C است ، یعنی هر عنصر y شامل B دارای یک تصویر

یعنی $g(y)$ در C است و بالاخره $f(x)$ شامل B نیز
دارای یک تصویر $g(f(x))$ در C است.
بنابراین gof یک تابع از A بطرف C است.



شکل (3-20)

<u>مثال سوم</u>. اگر یک تابع f توسط افاده:

$f(x)=3x-1$ از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ و هم چنان
یک تابع g بنابر افاده:

$g(y)=2y+5$ از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته
ومیخواهیم که gof را بررسی کنیم.

$$
\begin{aligned}
g\circ f(x) &= g(f(x)) \\
&= g(3x-1) \\
&= 2(3x-1)+5 \\
&= 6x-2+5 \\
&= 6x+3
\end{aligned}
$$

حال نشان میدهیم که $g\circ f$ از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ یک تقابل است. غرض ارائه این مطلب ما یک عنصر کیفی z را در هدف مد نظر گرفته ومنشاء تصویر آن یعنی یکعدد x را تحت $g\circ f$ در منبع جستجو مینمایم طوریکه:

$z = 6x+3$ گردد.

چون حل معادله فوق یگانه یعنی $x=\frac{z-3}{6}$ است پس z دارای یک منشاء تصویر یعنی $\frac{z-3}{6}$ بوده بنابران $g\circ f$ یک تقابل از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ میباشد.

قضیه سوم:

ترکیب دو تقابل یک تقابل است.

مفروض: اگر f یک تقابل از A بطرف B و g یک تقابل از B بطرف C باشد،

مطلوب: ثبوت مینمایم که $g \circ f$ یک تقابل از A بطرف C میباشد.

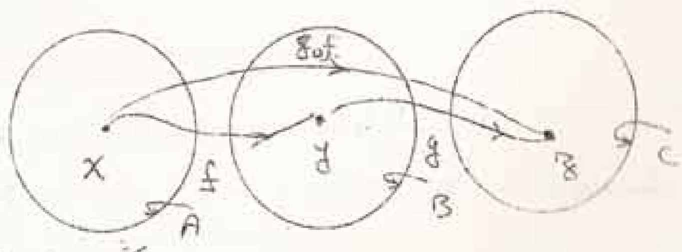
ثبوت: بنابر قضیه دوم ما میدانیم که ترکیب هر دو تابع یک تطبیق است. حال نشان باید داد که ترکیب هر دو تقابل یک تقابل است. غرض ارائه این مطلب یک عنصر کیفی z را در C انتخاب نموده و منشاء منشاء تصویر آنرا در A جستجو مینمایم. در صورت تقابل بودن $g \circ f$ باید که این منشاء منشاء تصویر در A موجود بوده و یگانه باشد.

چون g یک تقابل از B بطرف C است، پس z تحت g دارای یک منشاء تصویر و تنها یک منشاء تصویر در B بوده که آنرا y مینامیم.

هم چنان چون f یک تقابل از A بطرف B است، پس y تحت f دارای یک و تنها یک منشاء تصویر در A بوده که ما آنرا x مینامیم.

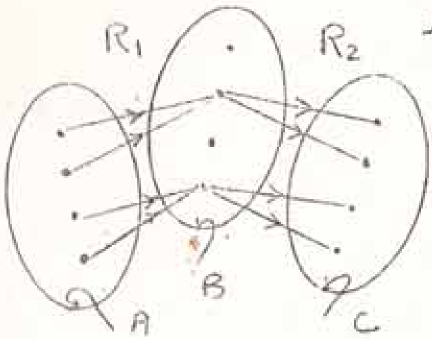
ازین بر می‌آید که z تحت $g \circ f$ دارای یک و تنها یک منشاء تصویر در A عبارت از x است میباشد.

بنابران $g \circ f$ یک تقابل از A بطرف C است.



شکل (3-21)

تمرينات :



1. دیاگرام تیری قابل را مد نظر گرفته، ترکیب نمائی R_1 و R_2 را بدست آرید. آیا R_1 ویا R_2 یک تابع را ارائه میکند؟ آیا نتیجه نمائی آنها یک تابع میباشد؟ درصورتیکه تابع باشد به چه نوع تابع خواهد بود؟

2. اگر f بنابر افاده:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$x \longmapsto 2x+5$$

و g بنابر افاده:

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto y-1$$

دو تابعی را ارائه کند:

(a). $g \circ f$ را بدست آرید.

(b). $f \circ g$ را بدست آرید.

(c). $g \circ f$ و $f \circ g$ را باهم مقایسه کنید.

3. اگر توابع : f ، g و h را که درست اعداد حقیقی علی الترتیب بنابر افاده های ذیل :

$$f(x) = 2x-1$$
$$g(x) = (x+3)^2$$

و $h(x) = 3x+5$ ارائه شده اند مدنظر بگیرید :

(a) • ترتیب: $f \circ g \circ h$ را بدست آرید •
(c) • ترتیب : $h \circ g \circ f$ را بدست آرید •
(d) • آیا : $f \circ g \circ h = h \circ g \circ f$ شده میتوانند ؟

4 - اگر f یک تابع از A بطرف B باشد و g یک تابع از C بطرف D باشد ،

(a) • تحت کدام شرایط $g \circ f$ موجود شده میتواند ؟
(b) • تحت کدام شرایط $f \circ g$ موجود شده میتواند ؟
(c) • تحت کدام شرایط $g \circ f$ ونیز $f \circ g$ موجودمیگردند ؟

5- ثبوت کنید که ترکیب دو تابع بالائی یک تابع بالائی است •

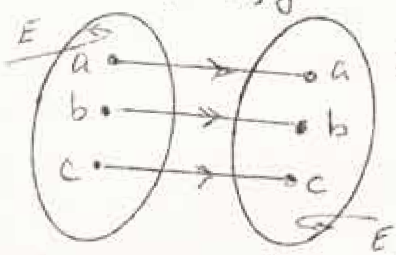
6 - ثبوت کنید که ترکیب دو تابع یک بیک یک تابع یک بیک است •

تعریف: یک تابیــق در یک ست E عینیت گفتــه میشود در صورتیکه تصویر هرعنصر x شامل E تحت تطبیق مذکور عبارت از خود x باشــد .
و چنین ارائه میشــود :

$$Id_E : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto x$$

مثال اول . اگر تطبیق مربوط دیاگرام تیر ذیل را بررسی کنیم دیده میشود که این تطبیق عبارت از تطبیق عینیت از E بطرف E است .

شکل (3-22)



زیرا : تصویر هرعنصر ســت E تحت این تطبیق عبارت ازخود همان عنصر میباشــد .

مثال دوم . تابع درجه اول $y = x$ در $\mathbb{R}$ عبارت از تطبیق عینیت در $\mathbb{R}$ است . چـــرا ؟

قضیه اول: هر تطبیق عینیت یک تقابل اســت .

مفروض: E یک ست و Id_E تطبیق عینیت در E مفروض است .
مطلوب: ثبوت مینمائیم که Id_E یک تقابل در $\mathbb{R}$ اســت .

ثبوت : یک عنصر کیفی y حاصل E (ید ف) را مد نظار گرفته ومنشاء تصویر آنرا در E (منبع) جستجو مینمایم و نشان باید داد که این منشاء تصویر موجود بوده و یگانه است.

چون Id_E یک تطبیق عینیت است پس واضح است که منشاء تصویر y عبارت از خود y در E است. از ین معلوم میشود که منشاء تصویر y در E وجود داشته و یگانه میباشد.

قضیه نهم : ترکیب هر تطبیق با تطبیق عینیت عبارت از خود همان تطبیق است. و یا با الفاظ ریاضی:

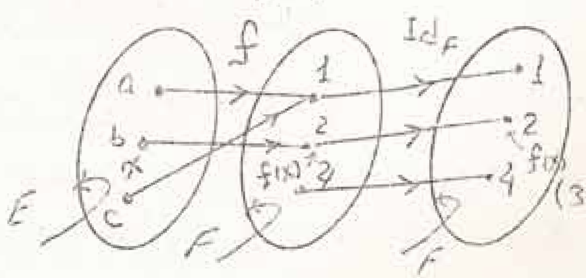
$$Id_F \circ f = f$$

و $f \circ Id = f$ میباشد.

در حالیکه f یک تطبیق از E بطرف F و Id تطبیق عینیت در E و Id_F تطبیق عینیت در F را ارائه میکنند.

ثبوت: اگر x یک عنصر کیفی E طبق شکل ذیل در نظر گرفته شود ما داریم:

$$Id_F \circ f(x) = Id_F(f(x)) = f(x)$$



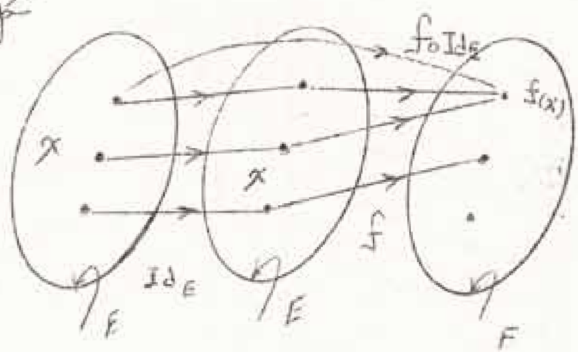
شکل (3-23)

از نتیجه مساوات $Id_E \circ f(x) = f(x)$ برمی آید که چون تصویر هر عنصر x شامل E تحت f و $f \circ Id_E$ عین عنصر است، بنابران f و $Id_E \circ f$ عین تابع را ارائه مینمایند.

بهمین قسم ما داریم:

$$f \circ Id_E(x) = f(Id_E(x))$$
$$= f(x)$$

شکل (3-24)



از مساوات $f \circ Id_E(x) = f(x)$ برمی آید که چون تصویر هر عنصر کیفی x شامل E تحت $f \circ Id_E$ و f عین عنصر است. بنابران $f \circ Id_E$ و f عین تابع را ارائه مینمایند.

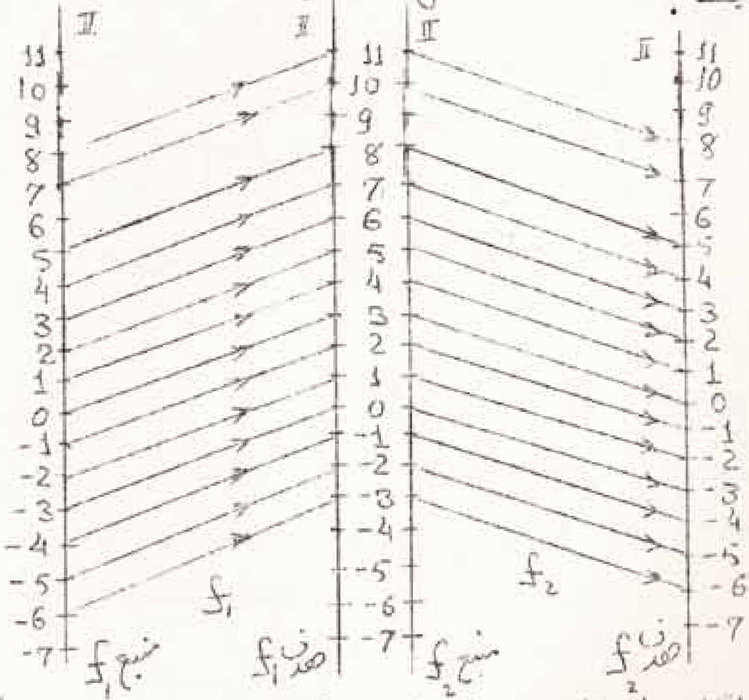
3-A · معکوس یک تطبیق

Inverse of an Application

در فصل اول راجع بمفکوره رابطه معکوس بصورت مفصل صحبت شد . درین جا ما بصورت مختصر مفکوره معکوس یک تطبیق را مورد بررسی قرار داده ومیخواهیم بدانیم که کدام نوع تطبیق دارای معکوس بوده وکدام نوع آنها دارای معکوس نمی باشد .

مثال اول . دیاگرام تیری شکل (25 - 3) ذیل را مدنظر بگیرید :

شکل (3-25)



از دیاگرام بملاحظه میرسد که تطبیق f_1 هرعنصر x ستمنبع (I) را بیک عنصر $x+3$ ست هدف (I) رابطه میدهد حالانکه

تطبیق f_2 که هر عنصر y منبع خود و هدف f_1 را به یک عنصر $y-3$ ست هدف خود ربط میدهد. پس اگر کدام عنصر x_1 ست منبع f_1 مد نظر گرفته شده و بالای آن تأثیر کرد و تطبیق f_1 و f_2 مورد بررسی قرار گیرد درینصورت ما نوشته میتوانیم که:

منبع f_1 هدف f_1 و منبع f_2 هدف f_2

نتیجه نهائی:

$$x_1 \xrightarrow{f_1 \text{ تأثیر}} x_1+3 \xrightarrow{f_2 \text{ تأثیر}} (x_1+3)-3 \text{ و یا } x_1$$

$$\vdots$$

$$x \xrightarrow{f_1 \text{ تأثیر}} x+3 \xrightarrow{f_2 \text{ تأثیر}} (x+3)-3 \text{ و یا } x$$

بصورت عموم ازین بر میآید که: $f_2 \circ f_1 = Id_{II}$ میباشد.
وهمچنان $f_1 \circ f_2 = Id_{II}$ میشود. چرا؟
دو تطبیق f_1 و f_2 مانند فوق که بالنتیجه تأثیر یکدیگر را خنثی مینمائید تطبیقات معکوس یکدیگر گفته میشوند.

تعریف: دو تطبیق f و g

$$f: E \longrightarrow F$$

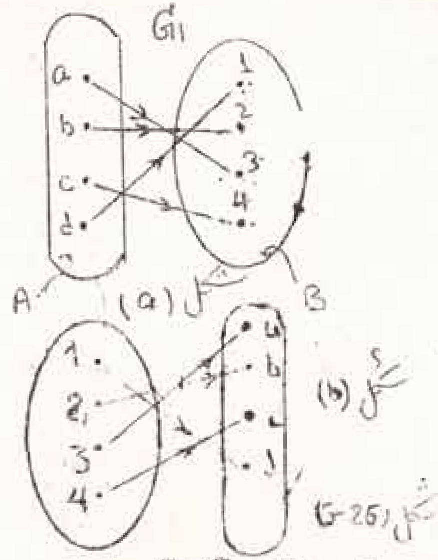
$$g: F \longrightarrow E$$

معکوس یکدیگر گفته میشوند، درصورتیکه:

$$g \circ f = Id_E$$

$$f \circ g = Id_F$$ گردد.

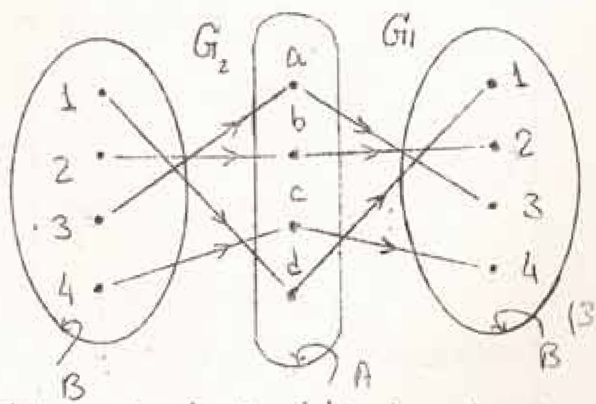
مثال دوم. اگر دو دیاگرام تیری شکل (a) و شکل (b)
مقابل را مد نظر بگیریم
بملاحظه میرسد که G_1 و G_2
معکوس آنها متقابل میباشند.
G_1 عنصر a شامل A
را بعنصر 3 شامل B ربط
میدهد، و بهمین قسم G_2
دوباره آن عنصر 3 شامل B
را به عنصر a شامل A
ارتباط می‌بخشد. و این
حقیقت در قسمت تمام
عناصر ست A وجود دارد، پس: $G_2 \circ G_1 = Id_A$
وجود این حقیقت توسط شکل (3-27) ارائه میشود.



شکل (a)

شکل (b)

شکل (3-26)

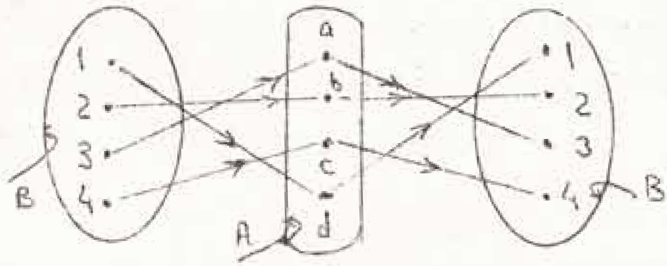


شکل (3-27)

وهمچنان G_2 عنصر 4 شامل B را به عنصر c شامل A ربط

داده وحالانکه G_1 تعیین c شامل A را دوباره بعنصر 1
شامل B ربط میدهد واین حقیقت برای هر عنصر ست B
صدق میکند .

پس
$$G_1 \circ G_2 = Id_B$$



شکل (3-28)

وجود این حقیقت توسط شکل (28-ج) نشان داده شده است.
از اصل مثال فوق برمی آید که تابعات G_1 و G_2 معکوس
یکدیگر اند . وآنرا چنین ارائه مینمایم :

$$G_1 = G_2^{-1}$$

وهم چنان :

$$G_2 = G_1^{-1}$$

قضیه : (a) ۰ اگر f یک تابل باشد f^{-1} نیز یک تابل است۰

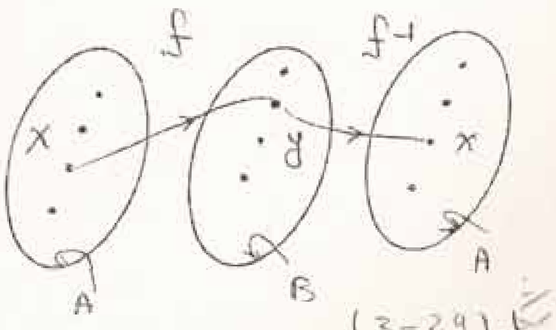
(b) ۰ اگر f یک تابل نباشد f^{-1} یک تابیق نیست۰

ثبوت :

(a) ۰ فرضاً f از A بالای B یک تابل باشد دراینصورت هر عنصر y شامل B دارای محض یک منشاء تصویر x در A میباشد ۰ پس میتوان نوشت: $y = f(x)$

ویا ... $x = f^{-1}(y)$

مساوات اخیرالذکر فوق ارائه میدارند که هر y شامل B دارای یک تصویر x شامل A تحت رابطه f^{-1} میباشد ۰ ازین نتیجه میشود که f^{-1} یک تطبیق است ۰ چون هر عنصر x شامل A تحت f دارای محض یک تصویر y در B است پس این x تحت f^{-1} دارای محض یک منشاء تصویر در B است ۰ بناءً گفته میتوانیم که f^{-1} نیز یک تابل است ۰ این حقیقت توسط دیاگرام تیری شکل (3 - 29) ارائه شده است ۰



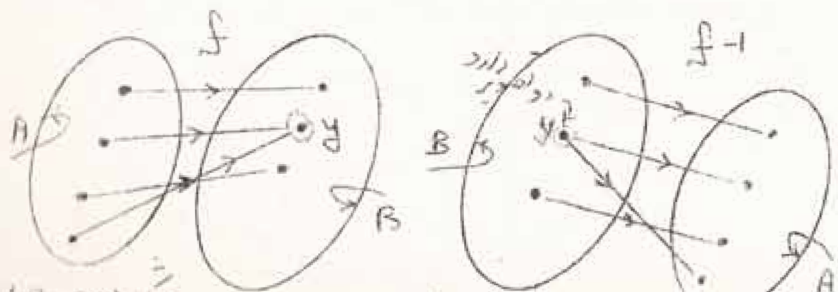
شکل (3-29)

(h) ۱۰• اگر f از A بالای B یک تقابل نباشد پس f^{-1} یک تابیق نیست•

زیرا: درینصورت f یک تابیق یک بیک و یا یک تابیق بالائی نمیباشد•

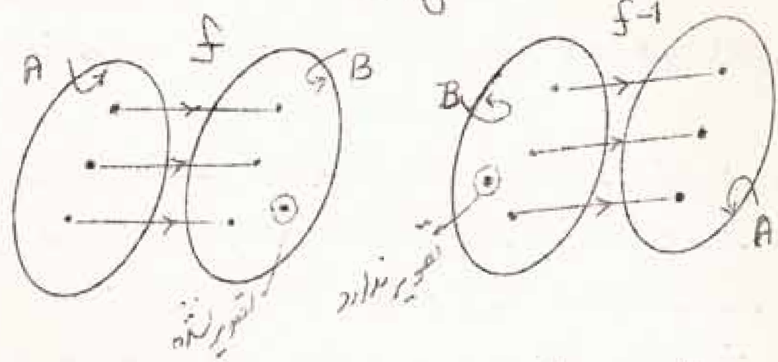
درصورتیکه f یک تابیق یک بیک نباشد پس لااقل یک عنصر y در هدف آن موجود شده میتواند که دارای بیشتر از یک منشاء تصویر در منبع گردد• چون y دارای بیشتر از یک منشاء تصویر تحت f میباشد پس واضح است که y تحت f^{-1} دارای چندین تصویر میباشد که درینصورت f^{-1} یک تابع از B بالای A نمیباشد، پس یک تابیق شده نمیتواند• این حقیقت توسط شکل (3-30) ارائه شده است•

درصورتیکه f یک تابیق بالائی نباشد، پس لااقل یک عنصر در هدف آن موجود شده میتواند که دارای منشاء تصویر نباشد و این عنصر تحت f^{-1} دارای تصویر نمیباشد• واضح است که نظر به تعریف تابیق f^{-1} یک تابیق از B بالای A نیست• این حقیقت توسط شکل (3-31) صفحه ۲۰۸ ارائه شده است•



شکل (3-30)

شکل (3-31)



مثال سوم: اگر $G_{S_1}=\{(a,b),(c,b),(d,e),(e,e)\}$ گرف یکتا بع

S_1 را در ست $E=\{a,b,c,d,e\}$ ارائه‌کند، در ینصورت

اگر گرف رابطه معکوس S_1 را به S_2 نشان دهیم

پس $G_{S_2}=\{(b,a)(b,c),(e,d),(e,e)\}$ میشود .

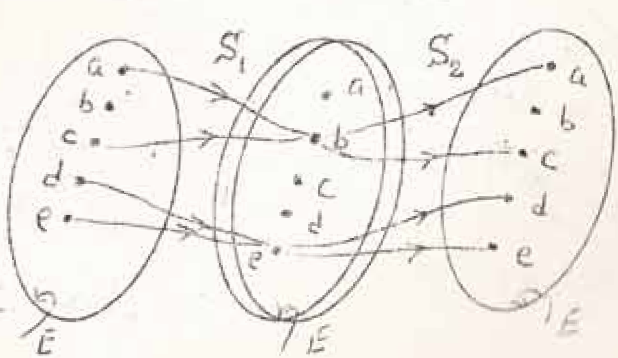
بملاحظه میرسد که G_{S_2} گرف یکتا بع را ارائه نمیکند .

زیرا : لااقل دو جوره مرتب: (b,a) و (b,c) در آن بمشاهده میرسد

که دارای عین مرکبه اولی میباشد . پس قرار تعریف S_2 معکوس S_1

است یکتا بع نیست .

دیاگرام تیری S_1 و S_2 طبق شکل ذیل ارائه‌شده میتواند :



شکل (3-32)

مثال پنجاهم: یک تابع g را از A به طرف B بنا بر

افاده $y = 2x$ برای تمام x شامل A و تمام y شامل B

در صورتیکه $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ باشد

مدنظر گرفته و تابع f را از B به طرف A باساس افاده:

$z = \frac{1}{2}y$ برای تمام y شامل B و تمام z شامل A مورد

مطالعه قرار دهید.

(a) دیاگرام تیری هر دو تابع f و g را رسم کنید.

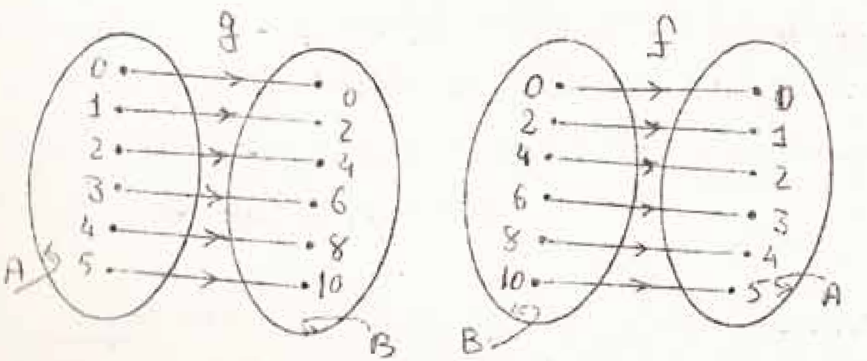
(b) نوعیت هر دو تابع f و g را بررسی کنید.

(c) هر دو تابع f و g را باهم مقایسه کنید.

حل:

(a) دیاگرام های تیری هر دو تابع f و g طبق ذیل

ارائه میشود:



شکل (3-33)

(b) • نمودار تطابیق f و g تقابل میباشند •

(c) • تطابیق g عناصر ست A را بدون پند آن در ست B ربط داده است• حالانکه تطابیق f عناصر ست B را به نصف آنها در ست A ربط داده است • در نتیجه تاثیر نهائی این دو تطابیق یکدیگر را خنثی نموده است• پس گفته میتوانیم که g و f تقابل معکوس یکدیگراند• یعنی:

$$g = f^{-1} .$$

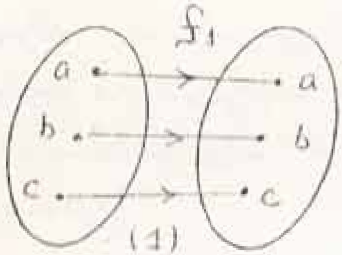
3-7 • ست تمام تقابل ها دریک ست

قبلاً راجع بهستی که عناصر آنرا ست های دیگر تشکیل میدهند صحبت نمودیم وهریک از ین ست ها را بحیث عنصر ست ها مورد بررسی قرار دادیم • اکنون درین مبحث ها هر تقابل را بحیثیک موجود ریاضی ویک عنصر ستتقابل ها مورد مطالعه قرار میدهیم • درمرحله اول میخواهیم که تعداد تمام تقابل های ممکنه یک ست مشخص را محاسبه کنیم ودرمراحل بعدی خواص این ست تقابل ها رامورد بررسی قرار میدهیم •

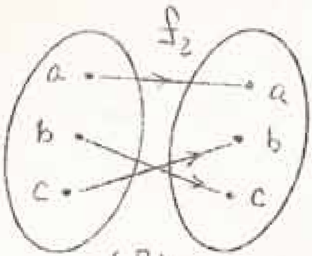
مثال • ست $E = \{a, b, c\}$ را مدنظر گرفته ومیخواهیم که تمام تقابل های ممکنه در E را بدست آریم •

حل : تمام تقابل های ممکنه در E توسط دیاگرام های تیری اشکال مقابل ارائه میشود :

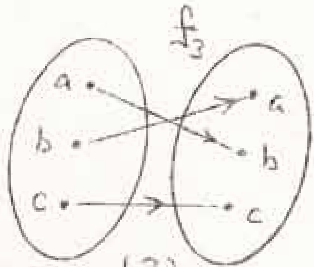
اشکال (3-34)



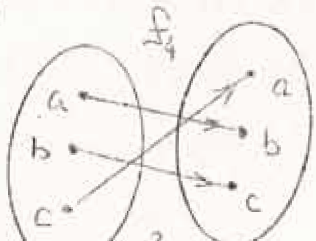
(1)



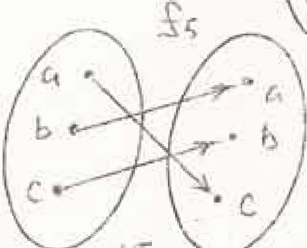
(2)



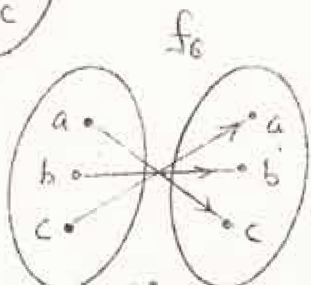
(3)



(4)



(5)



(6)

از مثال دیاگرام های تیری فوق دیده میشود که تصویر a ست منبع هریک از سه عنصر a ، b و c ست هدف بود میتواند • چون

در هر سه حالت فوق یکی از عناصر ست هدف بالضرور تصویر a
میشود. پس برای عنصر b ست منبع ممکن دو تصویر در ست هدف موجــود
شده میتواند . چون در هر حالت دو عنصر ست هدف تصاویر a
و b میشوند ، پس در هر حالت ممکن یک عنصر در هدف میماند کـه
تصویر c ست منبع گردد . درنتیجه تعداد تمام تقابل ها ممکنه
عبارت است از:

$$3\cdot 2\cdot 1 = 3!$$
$$= 6$$

بهمین قسم نشان میتوان داد که تعداد تمام تقابل های ممکنـــه
یک ست n عنصره عبارتاز:

$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ میشود.

اینک خواص این ست تقابل هارا ذیلاً مطالعه مینمایم:

اول . ما میدانیم که ترکیب هردو تقابل یک تقابل است .
چنانچه :

$$f_3 \circ f_1 = f_5$$

وهم چنان $f_6 \circ f_3 = f_4$ . . . میشود .

دوم . تطابق عینیت درین ست موجود بوده وان عـــبارت
از تطابق مربوط دیاگرام تیری شکل (1) ویا f_1 است .

سوم . معکوس هر تقابل این ست یک تقابل این ست است.
چنانچه معکوس تقابل f_1 خودآن واز f_2 ، f_6 و f_3
نیز خودآنها میباشند . حالانکه تقابل های f_4 و f_5 معکـــوس
یکدیگر انـــد .

۰ چهارم ۰ اگر ترکیب‌کردن تابع‌ها را بحیث عملیه ریاضی قبول نمائیم در اینصورت دیده میشود که ست تابع‌ها تحت عملیه ترکیب از خاصیت انجمنی (اشتراکی) پیروی میکند ۰

چنانچه:

$$f_2\circ(f_3\circ f_6) = f_2\circ f_5$$
$$= f_3$$

و ۰

$$(f_2\circ f_3)\circ f_6 = f_5\circ f_6$$
$$= f_3$$

لذا $f_2\circ(f_3\circ f_6)=(f_2\circ f_3)\circ f_6$

بصورت عموم: اگر ست تمام تابع‌ها از E بطرف E را به B ارائه نمایم ست B تحت عملیه ترکیب خواص ذیل را تعقیب مینماید:

اول ۰ ترکیب دو تابع یک تابع است ۰

زیرا اگر دو تابع f و g شامل B در نظر گرفته شود ما میدانیم که:

$$\left.\begin{array}{l} f\in B \\ g\in B \end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f\in B$$

دوم ۰ عملیه ترکیب در ست تابع‌ها انجمنی (اشتراکی) است ۰

یعنی: ... $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

زیرا برای هر x شامل E ما داریم:

$$(f\circ g)\circ h(x) = f\circ g(h(x))$$
$$= f[g(h(x))]$$

وبهمین قسم:

$$f\circ(g\circ h)(x) = f[g\circ h(x)]$$
$$= f[g(h(x))]$$

در هر سه حالت فوق یکی از عناصر ست هدف، بالضرور تصویر ه
میشود، برای عنصر ها ست منبع معنی دو تصویر در ست هدف موجود
شده میتواند. چون در هر حالت دو عنصر ست هدف، تصاویر ه
و ها میشوند، پس در هر حالت معنی یک عنصر در ست هدف میماند که
تصویر ه ست منبع گردد. درنتیجه تعداد تمام تقابل ها ممکنه
عبارت است از:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$
$$= 6$$

بهمین قسم نشان میتوان داد که تعداد تمام تقابل های ممکنه
یک ست n عنصره عبارت از:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$ میشود.

اینک خواص این ست تقابل ها را ذیلاً مطالعه مینمائیم:

اول. ما میدانیم که ترکیب هر دو تقابل یک تقابل است.
چنانچه:

$$f_3 \circ f_1 = f_5$$
وهم چنان $f_6 \circ f_3 = f_4 \; \cdots$ میشود.

دوم. تطبیق عینیت درین ست موجود بوده وان عبارت
از تطابیق مربوط دیاگرام تیری شکل (1) ویا f_1 است.

سوم. معکوس هر تقابل این ست یک تقابل این ست است.
چنانچه معکوس تقابل f_1 خودآن واز f_2، f_6 و f_3
نیز خود آنها میباشند حالانکه تقابل های f_4 و f_5 معکوس
یکدیگر اند.

تبصره • اگر ترکیب کردن تابع ها را به یک عملیه ریاضی قبول دار شویم در ینصورت دیده میشود که ست تابع ها تحت عملیه ترکیب از خاصیت انجمنی (اشتراکی) پیروی مینماید •

چنانچه :

$$f_2 \circ (f_3 \circ f_6) = f_2 \circ f_5 = f_3$$

و

$$(f_2 \circ f_3) \circ f_6 = f_4 \circ f_6 = f_3$$

لذا

$$f_2 \circ (f_3 \circ f_6) = (f_2 \circ f_3) \circ f_6$$

بصورت عموم : اگر ست تمام تابع ها از E به طرف E را به B ارائه نمایم ست B تحت عملیه ترکیب خواص ذیل را تعقیب مینماید :

اول • ترکیب دو تابع یک تابع است •

زیرا اگر دو تابع f و g شامل B مد نظر گرفته شود ما میدانیم که :

$$\left.\begin{array}{l} f \in B \\ g \in B \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \in B$$

دوم • عملیه ترکیب در ست تابع ها انجمنی (اشتراکی) است •

یعنی : . . . $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

زیرا برای هر x شامل E ما داریم :

$$(f \circ g) \circ h(x) = f \circ g(h(x)) = f[g(h(x))]$$

و همچنین قسم :

$$f \circ (g \circ h)(x) = f[g \circ h(x)] = f[g(h(x))]$$

در نتیجه:

$$(fog)oh = fo(goh)$$

سوم • ست تقابل ها در E تحت عملیه ترتیب دارای یک عنصر بی تاثیر است، که این عنصر عبارت از تابیق عینیت در E است.

زیرا: برای هر f شامل B ما داریم: $Id_E of = f$

و . . . . . $f o Id_E = f$

چهارم • معکوس هر تقابل در E بنابر عملیه ترتیب یک تقابل در E است.

که در ینصورت: . . . . $f^{-1} of = fof^{-1} = Id_E$ میشود.

ازین بر می آید که ست تقابل ها تحت عملیه ترتیب، یک ساختمان ریاضی را که گروه مینامند تشکیل میدهد. راجع با ین ساختمان ها ریاضی در کتاب سوم بصورت مفصل بحث خواهد شد.

تمرینات

1. ست $A = \{a, b, c, d\}$ را مد نظر بگیرید.

(a) • تعداد تمام تقابل های از A بطرف A را بدست آرید.

(b) • معکوس هر تقابل در A را حاصل کنید.

2. اگر در امتحان ریاضی شاگردان صنف شما که 25 نفر شامل امتحان باشند و باساس اعداد تام بنی از نمرات بین فروده (10 – 0)

بهر شاگرد دانش لیاقت او داده شود به ریکورت :

(a) . آیا رابطهٔ از لیاقت شاگرد به ارزش اعداد نمرات یک تابیق شده میتوانــــد ؟

(b) . آیا معکوس این رابطه یک تطبیق میباشد و یا خیر ؟

3 . روابط معکوس هر یک از افاده های ذیل را در $\mathbb{R}$ بدست آرید :

(a) . $f(x) = 2x+3$

(b) . $g(y) = \frac{1}{2}(y-3)$

(c) . $G(x) = x^2$

(d) . $m(x) = \frac{x+4}{2}$

(e) . $n(p) = 2p+4$

کدام روابط فوق تطبیق وکدام آنها تابل میباشند ؟

4 . اگر تطبیق f که گراف آن $G_f = \{(a,b),(b,a),(c,b)\}$ است، درست $A = \{a, b, c\}$ مد نظر گرفته شود آیا معکوس f یک تابیق اســـت ؟

5 . هر یک از تابیقات :

$\alpha(x) = 5x$ . . . (i)

$\beta(x) = x+4$ . . . (ii)

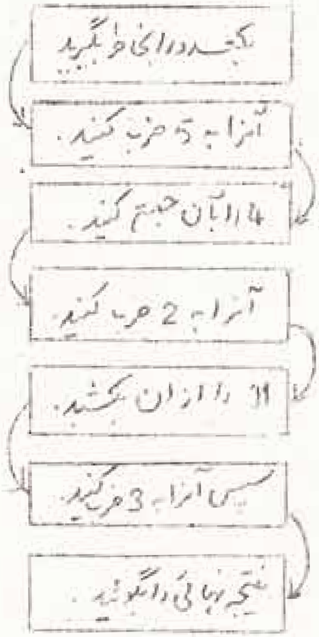
$\gamma(x) = 2x$ . . . (iii)

$\delta(x) = x-11$ . . . (iv)

در $\mathbb{R}$ را مد نظر گرفته ،

(a) • تطبیق معکوس هرکدام آنها را بنویسید •

(b) • ترکیب نهائی هرچهار آنها را بدست آرید •



۶ • اگر موضوع : « یک عدد را بخاطر بسپرید » بحیث یک بازی مد نظر گرفته شود ، طوریکه بالای عدد مورد خاطر در ریفی مرحله که در دیاگرام مقابل توضیح یافته عملیات اجراء گردیده ونتیجه آن در ختم مرحلهٔ پنجم اعلان گردد ،

(a) • شما چطور میتوانید که عدد مورد نظر را پیدا کنید ؟

(b) • نتیجه را بنا بر تشکیل یک سلسله تطبیقات معکوس بررسی کنید •

(c) • ترکیب نهائی فوق را بدست آورده ونتیجه را با ساس آن بررسی کنید •

(d) • بالفرض نتیجه 111 باشد ، عدد مورد نظر را معلوم کنید •

۷ • تطبیقات : F ، G ، H و J که توسط افاده های :

$$J(x) = \frac{x}{5} \text{ ، } H(x) = x^3 \text{ ، } G(x) = x-7 \text{ ، } F(x) = 3x$$

توضیح شده اند در $\mathbb{R}$ مد نظر بگیرید :

(a) ۰ تطابیق معکوس هرکدام انحارا بدست آرید ۰

(b) ۰ ترکیب شانرا بدست آریـد ۰ ($I \circ H \circ G \circ F$ را حاصل کنید) ۰

(c) ۰ یک جدول بازی با اعداد را مانند مثال (6) فوق ترتیب دهیـد طوریکه هرمرحلهٔ آن توسط یکی از تطابقات فـوق توضیح یابـد ۰

(d) ۰ اگرنتیجه نهائی بازی " یکعدد را بخاطر بگیرید " درحرف (c) 25 باشد عدد مورد نظر را معلوم کنید ۰

8 ۰ آیا عملیه ترتیب درست تقابل های یک ست از خاصیت تبدیلی پیروی میکند یا چطور؟

— مسائل —

تطبیق f و g را مد نظر بگیرید داوریکه f از B بطرف C یک
ا بیجکسیون) بوده و fog از A بطرف C یک تطبیق یک بیک
ین) باشد
ـان دهید که g نیز از A بطرف B یک تطبیق یک بیک است .

۲ — اگر g از A بطرف B و f از B بطرف C دو تطبیق باشند
ثبوت کنید که :

(a) اگر g یک تطبیق یک بیک نباشد ، fog نیز یک
تطبیق یک بیک نیست .

(b) در صورتیکه f یک تطبیق بالائی نباشد fog نیز
یک تطبیق بالائی نیست .

۳ — توسط یک مثال دریافت نمائید که در آن f یک تطبیق بالائی
نباشد ، اما gof یک تطبیق بالائی باشد .

٤ — یک تقابل از N بطرف Z پیدا کنید .

٥ — اگر ست تمام ستهای فرعی غیر خالی {a, b, c, d} را به E
ارائه نموده و یک رابطه R را در E طبق ذیل تعریف نمایم :

برای هر A و هر B شامل E ، ARB موجود میشود در صورتیکه
از A بطرف B یک تقابل موجود گردد .

(a) نشان دهید که : {c, d} R {b, c} میباشد .

(b) نشان دهید که : {c, d} $\not R$ {a, b, c} میشود .

(c) نشان دهید که R یک رابطه معادل در E است .

(d) صنف معادل {a , b} را دریافت نمائید .

(e) وجود چند صنف معادل در E امکان پذیر است ؟

اصطلاحات

Français	English	دری
Antécédent	Preimage	منشاء تصویر
Antireflexivité	Antireflexive property	خاصیت ضد انعکاسی
Antisymétrie	Antisymetric property	خاصیت ضد تناظری
Application	Application	تطبیق
Application identique	Identity application	تطبیق عینیت
Bijection	Bijection	تقابل (بایجکسیون)
Binaire	Binary	دو تائی
Boucle		حلقه ویا تیرچنگک شده
But		هدف
Classe d'équi-valence	Equivalence classe	صنف معادل
Composition des relations	Composition of relations	ترکیب روابط
Constant	Constant	ثابت
Couple	Ordered pair	جوره مرتب
Dessin cartésien	Cartesian diagram	رسم دیکارتی
Dessin fléché		رسم تیری
Direction	Direction	استقامت
Disjoint	Disjoint	منفصل
Ecriture en extension	Roster form	شکل دست وار
Ensemble image *	Range	رنج مقصد (ست تصاویر)

(g) ایا یك رابطه ترتیب را بالای صنوف معادل جز (f) تعریف کرده میتوانید ؟

۷ ــ توابع ذیل را از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ مد نظر گرفته و دومین هرکدام آنرا تعین کنید :

. (a) $\sqrt{X^2+1}$. (b) $\sqrt{X^2+5X-1}$

. (b) $\frac{1}{X^2-4}$. (d) $\sqrt{(X-1)(X-2)(X-3)}$

. (e) $\frac{1}{\sqrt[3]{X-5}}$. (f) $\sqrt{X^2+X+1}$

کدام یك از توابع فوق تطبیق است؟

۸ ــ اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{1,2,3,4,5\}$ مفروض باشند ، تعداد تمام روابط دوگانه‌ای از A بطرف B را محاسبه کنید .

۹ ــ تعداد عناصر ست A را حساب کنید در صورتیکه ۵۱۲ رابطه دوگانه ای از A بطرف A موجود میشود .

۱۰ ــ اگر ست تمام تطبیق ها را از $\mathbb{R}$ بطرف $\mathbb{R}$ به E ارائه نموده و در آن رابطه S را طبق ذیل تعریف نمایم :

برای هر f و هر g شامل E، $f \, S \, g$ موجود میشود در صورتیکه : $f(4) = g(4)$ باشد، نشان دهید :

(a)؛ S یك رابطه معادل در E است.

(b). دو تطبیق درجه اول را در E دریافت نمائید که باهم معادل باشند .

ختم جلد دوم

اصطلاحات

Français	English	دری
Antécédent	Preimage	منشاء تصویر
Antireflexivité	Antireflexive property	خاصیت ضد انعکاسی
Antisymétrie	Antisymetric property	خاصیت ضد تناظری
Application	Application	تطبیق
Application identique	Identity application	تطبیق عینیت
Bijection	Bijection	تقابل (بایجکسیون)
Binaire	Binary	دو گانهای
Boucle		حلقه و یا تیر چنگک شده
But		هدف
Classe d'équivalence	Equivalence classe	صنف معادل
Composition des relations	Composition of relations	ترکیب روابط
Constant	Constant	ثابت
Couple	Ordered pair	جوره مرتب
Dessin cartésien	Cartesian diagram	رسم د یکارتی
Dessin fléché		رسم تیری
Direction	Direction	استقامت
Disjoint	Disjoint	منفصل
Ecriture en extension	Roster form	شکل دست وار
Ensemble image *	Range	رنج مقصد (ست تصاویر)

Français	English	دری
Fonction	Function	تابع
Fonction sur	Onto function	تابع بالائی (برا)
Fonction biunivoque	One to one function	تابع یك‌بیك
Image	Image	تصویر
Injection	Injection	تطبیق یك بیك — (انجکسیون)
Partition	Partition	انقسام
Produit cartésien	Cartesian product	حاصل ضرب دیکارتی
Reflexivité	Reflexive property	خاصیت انعکاسی
Relation	Relation	رابطه
Relation d'équivalence	Equivalence relation	رابطه معادل
Relation d'ordre	Order relation	رابطه ترتیب
Relation réciproque	Inverse relation	رابطه معکوس
Source		منبع (منشا)
Surjection	Surjection	تطبیق بالائی — (سورجکسیون)
Symétrie	Symetric property	خاصیت تناظری
Transitivité	Transitive property	خاصیت انتقالی
Triplet	Triplet	سه گانه ای مرتب

استعمال علائم

مفهومی را که ارائه میکند	چنین تلفظ میشود	علایم
حاصل ضرب دکارتی ست های A و B	A چلیپه B	$A \times B$
جوره مرتب a و b	جوره مرتب a و b	(a, b)
x رابطه R را با y برقرار میسازد	x آر y	xRy
گراف رابطه R	جی آر	G_R
رابطه معکوس R	R منفی یك	R^{-1}
نتیجه ترکیب اولاً T و بعداً R	R ترك T	$R \circ T$
از P نتیجه میشود که Q	اگر P پس Q	$P \Longrightarrow Q$
از P نتیجه میشود که Q و بالعکس	اگر P پس Q و بالعکس یعنی P منطقاً معادل Q است	$P \Longleftrightarrow Q$
$(x-y)$ قابل تقسیم بر 3 است	x همباقی y است نظر به 3.	$x \equiv y \pmod 3$
صنف معادل x	صنف x	$\dot{x}$
تابع f از E بطرف F	تابع f از E بطرف F	$f: E \longrightarrow F$
x را به y ربط میدهد	x را به y ربط میدهد	$x \longmapsto y$
تصویر x تحت تابع f	اف اکس	$f(x)$
تطبیق عینیت در E	عینیت در E	id_E

بعضی آثار دیگر نویسنده :

- سلسله ریاضیات معاصر: خودآموز ریاضی
در چهار قسمت: روابط دوگانه‌ای، عملیات دوگانه‌ای، گروه‌ها، و ساخته‌ها

اثر مذکور حائز جایزه مطبوعاتی اولین سالگرد نظام مترقی جمهوری گردیده است.
در مرکز فزیک نظری بین‌المللی، تریست، ایتالیا، در می 1973 مطبوع شده.

- سلسله ریاضیات معاصر: مبادی هندسه معاصر
و انتقادات بر سیستم اقلیدسی، آماده چاپ است.

- سلسله ریاضیات معاصر: مبادی هندسه عالی
کتاب درسی صنف سوم پوهنځی تعلیم و تربیه سابق. طبع شعبه نشرات موسسه تعلیم و تربیه.

- ریاضیات معاصر: هندسه تحویلی در مستوی اقلیدسی
آماده طبع است. ترجمه است.

- ریاضیات معاصر: روابط و توابع، برای اولین بار در اروپا نی زبان فرانسه نگاشته شده، آماده طبع است.

- ریاضیات معاصر: ست‌ها و استعمال آنها
توسط: اتیان ژیل و محمد امان نادری
طبع دستگاه نشراتی لیسه عالی استقلال